

తొమ్మిదవ సంపుటము

గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములు



తెలుగు భాషా సమితి

హైదరాబాదు : : మద్రాసు

Blank Page

విజ్ఞాన సర్వస్వము

తొమ్మిదవ సంపుటము

గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములు

...గారు

రావు

...చార్య

సంగ్రాహకుడు

శ్రీ మేడేపల్లి వరాహ నరసింహస్వామి

1965

తెలుగు భాషా సమితి

హైదరాబాదు ❋ మద్రాసు



ముద్రణ :
హిందీ ప్రచార ప్రెస్
మద్రాసు - 17

మేలు ప్రతి (ఇం...
విదే...
గ్రంథాలయ
సాదా ప్రతి

ప్రతులకు :
తెలుగు భాషా సమితి
ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ
కాంపస్
హైదరాబాదు (ఆం. ప్ర)

GANITA, KHAGOLA SASTRAMULU
(Mathematics & Astronomy)

9th Volume of VIJNANA SARVASVAMU (Encyclopaedia)

Published in Telugu in 16 Volumes by Telugu Bhasha Samiti ◉ Hyderabad ◉ Madras

De luxe edition
(in India)
Overseas
Library edition
Popular edition

For copies:
Telugu Bhasha Samiti
Osmania University Campus
Hyderabad
Andhra Pradesh

ప్రకాశకుల విజ్ఞప్తి

స్వతంత్ర భారతమున తెలుగువారు సుశిక్షిత పౌరులుగ ప్రవర్తించి యథోచిత పాత్ర నిర్వహింప వలయుననిన ప్రాచీన, ఆధునిక విజ్ఞానమునంతను సామాన్య ప్రజల అందుబాటులోనికి తెచ్చుట అవసరమను భావమే ఈ విజ్ఞాన సర్వస్వ ప్రచురణకు మూలకారణము.

కీ. శే. కొమర్రాజు లక్ష్మణరావుగారు 1915 లో అకారాదిగ 'ఆంధ్ర విజ్ఞాన సర్వస్వము' ను ప్రచురింప మొదలుపెట్టి 1917 నాటికి మూడు సంపుటములను (అ - అహి వరకు) ప్రకటించిరి. నాలుగవ సంపుటమును ప్రకటింప సంకల్పించి సామగ్రిని సేకరించుచు మధ్యలో 1923లో వారు కాలధర్మ మొందిరి. పిమ్మట కీ. శే. కాశీనాథుని నాగేశ్వరరావుగారు లక్ష్మణరావుగారి కృషిని పునరుద్ధరించి కొనసాగింప ప్రయత్నించిరి. కాని 1938 లో వారు కూడ నిర్యాణము చెందుటతో ఆ మహత్తర కార్యము అంతటితో ఆగిపోయినది. ఇట్టి ఘనకార్యము కేవలము వ్యక్తులమీదనే ఆధారపడిన యెడల ఆ వ్యక్తు లస్తమించుటతో ఆ కార్యము ఆగిపోవును గావున శ్రీమంతుల తోడ్పాటు, ప్రభుత్వ సాహాయ్యము కలిగిన ఒక సంస్థ మాత్రమే ఈ కృషిని నిరంతరాయముగ కొనసాగింప కలుగునను ఉద్దేశముతో 1947 లో మద్రాసులో తెలుగు భాషా సమితి స్థాపింపబడినది. మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయమువారి సౌజన్యాదరముల ఫలితముగ విశ్వవిద్యాలయ భవనములలో స్థావరము లభించుటతో అచట తన కార్యస్థానమును నెలకొల్పుకొని, 10-5-1948 న సమితి తెలుగున విజ్ఞాన సర్వస్వ రచనకై విషయ సామగ్రిని సేకరింప నారంభించినది.

కీ. శే. లక్ష్మణరావుగారు తలపెట్టిన రచనా విధానము అకారాది వర్ణక్రమమును అనుసరించినది. అది సంప్రదాయసిద్ధమగు రచనా విధానమే ఐనను దానిని అనుసరించి పని సాగించు నెడల విషయ సంగ్రహణ మంతయు సమగ్రముగ పూర్తి అయి అన్ని సంపుటములును వెలువడిన తరువాతనే అది ఉపయోగకర మగును. అదియును గాక, విశ్వవిద్యాలయ స్థాయియందు కూడ ప్రాంతీయ భాషలోనే బోధనాదులు జరుపు సౌకర్యమేర్పడి, పారిభాషిక పదములకు సువిదితార్థములు ఏర్పడిన గాని విజ్ఞాన సర్వస్వ రచనలో సంప్రదించుటకు వీలగు అకారాది వర్ణక్రమ రచనా విధానము నవలంబించుటవలన ఎక్కువ ప్రయోజనము లేదు. అందువలన తెలుగువారికి సుబోధముగ ఉండునట్లు విజ్ఞాన సర్వస్వ రచన సాగించి వేగముగ ఒకటి తర్వాత ఒకటిగ పదునారు సంపుటములలో (ఆదిలో అవలంబించిన 12 సంపుటముల ప్రణాళిక 1960 లో 16 సంపుటముల పథకముగా సవరింపబడినది) విజ్ఞాన విషయ మంతయు ప్రకటించుటకు సమితి పూనుకొనినది. ఈ రచనా విధానమున ఒక్కొక్క సంపుటము ఒక ప్రత్యేక విషయమునకో లేదా కతిపయసన్నిహితవిషయములకో ఉద్దిష్టమైనది. పాఠకుల సౌకర్యార్థము ఆ యా విషయములకు సంబంధించిన ప్రత్యేకాంశముల సమాలోచన సౌలభ్యమునకై ఒక అకారాది వివరణ భాగము కూడ జతపరుప సంకల్పింపబడినది.

ప్రతి సంపుటమునను మొదటి విభాగమున ఆ సంపుటమునకు చెందిన విషయము లన్నియు ఆమూలాగ్రము సంక్షిప్తముగ పాఠ్యగ్రంథములలో వలె వివరింపబడును. రెండవ భాగమున ఆ యా విషయములకు సంబంధించిన వివిధాంశములు సంప్రదాయ సిద్ధమైన విజ్ఞాన సర్వస్వ రచనా విధానమును అనుసరించి అకారాది వర్ణక్రమముగ కూర్పబడును. ప్రతి సంపుటమందును మొదటి భాగమందలి సంక్షిప్త కథనము ఆ విషయముతో ప్రప్రథమముగ పరిచయము కలిగించుటకు చక్కగా

ఉపకరింప గలదు. ఏ ప్రత్యేకాంశము నైనను తెలిసికొనగోరువారికి అకారాది వర్ణానుక్రమ వివరణము సహాకరించును. ఈ విధానమును ఇదివర కెవరును అనుసరించి ఉండలేదు.

మొదటి సంపుటము (చరిత్ర - రాజనీతి) 1954 లో ప్రకటింపబడినది. ఆ వెనువెంటనే 1955 లో రెండవ సంపుటము (భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు) వెలువడినది. ఈ రెండు సంపుటములును ఆంధ్ర విజ్ఞాన ప్రియుల ఆదరణ ఫలితముగ అచ్చువేసిన ప్రతులు పూర్తిగ ఖర్చగుటతో అవి పునర్ముద్రణమునకు వచ్చినవి.

1956 లో ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రత్యేక రాష్ట్రముగ ఏర్పడి ఆంధ్ర సంస్కృతి చరిత్రయం దొక నూతన యుగమునకు నాందీ ప్రస్తావన జరిగినది. తదనుగుణముగ తన కార్యకలాపములను విస్తరింపజేసి, వివిధ విశ్వవిద్యాలయ కేంద్రములందలి పండితుల సాయముతో త్వరితగతిలో సంపుటములను వెలువరించుటకై హైదరాబాదునందును, కొంతకాలము వాల్తేరునందును కూడ సమితి తన శాఖా కార్యస్థానములను నెలకొల్పినది. ఆ తరువాత 1959 లో మూడవ సంపుటమును (తెలుగు సంస్కృతి) సమితి వెలువరించినది. 1960 లో 16 సంపుటముల నూతన ప్రణాళిక సిద్ధము చేసినప్పుడు తెలుగు సంస్కృతి సంపుటమునకు మరికొంత భాగము చేర్చి దానిని రెండు సంపుటములుగా విడదీయుటకును, వెనుకటి ప్రణాళికలోని 3 వ సంపుటము పొందిన కొద్దిమంది కొరకు అదనముగా చేర్చిన భాగమును మాత్రము అనుబంధ సంపుటముగా ప్రకటించుటకును నిశ్చయింపబడినది.

ఆ ప్రకారము పూర్వ వత్సరములందు గడించిన అనుభవము కారణముగా సమితి తన కార్యక్రమమును మరింత త్వరితగతిని కొనసాగించి, 1961 లో నాలుగవ సంపుటము (తెలుగు సంస్కృతి-2), తెలుగు సంస్కృతి అనుబంధము, అయిదవ సంపుటము (అర్థ, వాణిజ్య, భూగోళ శాస్త్రములు), ఆరవ సంపుటము (విశ్వసాహితి) ను, 1963 లో ఏడవ సంపుటము (దర్శనములు, మతములు) ను, 1965 మార్చిలో ఎనిమిదవ సంపుటము (వ్యవసాయ, పశుపాలన, అటవీ శాస్త్రములు) ను, ఈ తొమ్మిదవ సంపుటము (గణిత, ఖగోళశాస్త్రములు) ను, పదియవ సంపుటము (సాంఘికశాస్త్రము) ను వెలువరించుటతోబాటు భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్ర సంపుటమును కూడ పరిష్కృతము గావించి రెండవ కూర్పుగా వెలువరింప కలిగినది.

ఈ 'గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములు' అను విషయమునకు సంబంధించిన ఈ తొమ్మిదవ సంపుటమును నేటికి వెలువరించుట సాధ్యము అయినది. ఈ సంపుటమును సంకలనము చేయుటలో మాకు తోడ్పడిన సంపాదకులకు, తమ రచనలు పంపి మాతో సహకరించిన రచయితలకు మా ధన్యవాదములు.

ఈ విజ్ఞాన సర్వస్వ కార్యకలాప మంతటిని సాధించుటకు కనీసము 20 లక్షల రూపాయలు కావలసి యుండునని అంచనా వేయడమైనది. అభిమానులు, ఉదారులు అయిన ధనవంతులవద్ద ధనము సేకరించుటకు సమితి నిశ్చయించుకొన్నది. విజయనగరము మహారాజా, పిఠాపురము మహారాజా, తిరుపతి దేవస్థానము కమిటీ, సింహాచలము దేవస్థానము కమిటీ, శ్రీ వి. రామకృష్ణ, ఉయ్యూరు షుగర్ ఫ్యాక్టరీ, శ్రీ గోగినేని వెంకటసుబ్బయ్య మొదలగు వారు ప్రశంసనీయమైన ఔదార్యముతో విరాళము లిచ్చియున్నారు. దాతలనుండి చేకూరిన మొత్తము రూ 2,50,000 లు. ప్రత్యేక ఆంధ్ర రాష్ట్ర మేర్పడక మునుపు ఉమ్మడి మద్రాసు ప్రభుత్వమువారు సంవత్సరమునకు

లక్ష రూపాయలు చొప్పున ఐదు సంవత్సరములకు ఐదు లక్షలు ఇచ్చుటకు వాగ్దానము చేసిన విరాళములో 1960 - 61 వ సంవత్సరాంతమునకు మద్రాసు, ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వములు ఇచ్చిన మొత్తము రూ. 4,99,999.87 లు. మార్చి 1963 నాటికి కేంద్ర ప్రభుత్వ శాస్త్ర పరిశోధన సాంస్కృతిక వ్యవహారాల మంత్రిత్వ శాఖ రూ. 2,30,000 లు గ్రాంటుగా ఇచ్చినది. వీరందరికిని, సమితి భవన నిర్మాణమునకై దీర్ఘకాల కౌలు పద్ధతి మీద ఎ. 1.50 సెంట్ల (0.606 హెక్టేరులు) భూమిని తమ ప్రాంగణమున కేటాయించి ఇచ్చిన ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయము వైస్‌ఛాన్సలరు డాక్టరు డి. ఎస్. రెడ్డిగారికిని, మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయ భవనములందు తెలుగు భాషా సమితి కార్యస్థానము నెలకొల్పు కొనుటకు అవకాశము కల్పించి అనేక విధములగు సౌకర్యములు కలుగజేసిన వైస్‌ఛాన్సలరు డాక్టరు సర్. ఆర్కాటు లక్ష్మణస్వామి మొదలియారుగారికిని, వాల్తేరులో శాఖా కార్యాలయము ఉన్నంత కాలము (1963 వరకు) తమ భవనములలో ఉచితముగ స్థలము ఇచ్చిన ఆంధ్ర విశ్వ విద్యాలయము వెనుకటి ఉపాధ్యక్షులు కీ. శే. శ్రీ వి. ఎస్. కృష్ణగారికిని, ప్రస్తుతోపాధ్యక్షులు డాక్టరు ఏ. ఎల్. నారాయణ గారికిని, తమ అధీనమునందు గల చిత్రములను పునర్ముద్రించుకొనుటకు అనుమతి నొసగిన వివిధ సంస్థల వారికిని మా కృతజ్ఞతాభివందనములు.

ఈ సంపుటమును సాధ్యమైనంత నిర్దుష్టముగను, అందముగను, ఆకర్షకముగను ముద్రించిన హిందీ ప్రచార ప్రెస్ కార్యకర్తలకు మా ధన్యవాదములు.

శక 1886 ఫాల్గుణ 30 – ఆదివారము

1965 మార్చి 21

మోటూరి సత్యనారాయణ
దండా వేంకట సుబ్బారెడ్డి
కార్యదర్శులు
తెలుగు భాషా సమితి

బెజవాడ గోపాలరెడ్డి
అధ్యక్షులు
తెలుగు భాషా సమితి

తెలుగు భాషా సమితి

కార్య నిర్వాహక వర్గము

అధ్యక్షులు : డాక్టరు బెజవాడ గోపాలరెడ్డి

ఉపాధ్యక్షులు : శ్రీ పూసపాటి విజయరామ గజపతిరాజు
డాక్టరు ఎస్. బి. పి. పట్టాభిరామారావు

కోశాధ్యక్షులు : శ్రీ పర్వతనేని బ్రహ్మయ్య

కార్యదర్శులు : పద్మభూషణ శ్రీ మోటూరి సత్యనారాయణ
డాక్టరు దండా వేంకటసుబ్బారెడ్డి

సభ్యులు : శ్రీ రాజా బొప్పరాజు రామకృష్ణరాజు
డాక్టరు ఎమ్. చెన్నారెడ్డి
శ్రీ ఎమ్. ఆర్. అప్పారావు
శ్రీ మాగంటి బాపినీడు
శ్రీ కల్లూరి సుబ్బారావు
శ్రీ పసల సూర్యచంద్రరావు
శ్రీ పందిరి మల్లికార్జునరావు
శ్రీ తుమ్మలపల్లి వీరభద్రరావు

సర్వస్వ విధాన నిర్ణయ సమితి

1. డాక్టరు సర్ ఆర్కాటు లక్ష్మణస్వామి మొదలియార్, ఎమ్. డి., ఎల్ఎల్. డి., డి. ఎస్‌సి., డి. సి. ఎల్. (ఆక్సన్); ఎఫ్. ఆర్. సి. ఓ. జి., ఎఫ్. ఏ. సి. ఎస్.
2. శ్రీ టి. ఎస్. అవినాశలింగం చెట్టియార్, బి. ఏ., బి. ఎల్.
3. శ్రీ మామిడిపూడి వేంకటరంగయ్య, ఎమ్. ఏ.
4. శ్రీ విస్సా అప్పారావు, ఎమ్. ఏ., ఎల్. టి.
5. డాక్టరు గిడుగు వేంకట సీతాపతి, బి. ఏ., ఎల్. టి. డి. లిట్.
6. శ్రీ మాగంటి బాపినీడు, బి. ఎస్‌సి. (కార్నెల్): ఎమ్. ఎస్‌సి. (కాలిఫోర్నియా).
7. శ్రీ వసంతరావు వేంకటరావు, ఎమ్. ఎస్‌సి.

సంపాదకీయ భూమిక

భారతదేశము హస్తంగత మొనర్చుకొనిన స్వాతంత్ర్యము వివిధదేశభాగములలో వికాసము నొంది, విభిన్న ప్రాంతీయ భాషలలో సురక్షితములై యున్న లలితకళలు, సారస్వతము, దర్శన శాస్త్రము వీటియందు, మన పూర్వులనుండి మనకు పరంపరాప్రాప్తమైన సాంస్కృతిక సంపద విషయమందు మన జాగృతిని ఉత్తేజింపజేసినది. ప్రాచ్యదేశపు ఇటాలియన్ భాష అను పేరు గన్న సుమధురాంధ్ర భాషయందు గుప్తమై, సురక్షితమై అతిశయితాభివృద్ధిని గన్నవారి కళాకౌశలము, ఉదారభావములయెడ వారికి గల ఆసక్తి, ఆంధ్రుల నిర్వాహమును ఈ వికాసమందొక విశిష్ట భాగముగ రూపొందించినది.

విభిన్నములైనను, పరస్పర సంబద్ధములై యున్న సంస్కృతులను సమన్వయపరచి, వానిని పాశ్చాత్య ప్రపంచము సాధించిన సాంకేతిక జ్ఞాన పురోగతితో సమీకరించుట ఆధునిక భారతదేశ ప్రధాన కర్తవ్యము. ఏలన, మన మనుగడకు మనికిపట్టు అగు ఈ ప్రపంచపు విశిష్టలక్షణము విజ్ఞాన మని పేరుగన్న మహాద్భుత భావవికాసము. ఈ వికాసము కారణముగ నేటి ప్రపంచమును గురించిన ఒక నూతన దృక్పథము, ఒక నూతన వ్యాఖ్యానము మనకు లభించినవి. విజ్ఞాన క్షేత్రమందు వెలుగు చూచిన పరిశోధనా ఫలితములు ఒక జాతియొక్క బుద్ధి పరిణతిని సూచించుటయే గాక, దారిద్ర్య మును, అనారోగ్యమును, మూఢ విశ్వాసములను తొలగించు సాధనములను జాతికి అందజేయును.

మన దేశమందు విజ్ఞానము అభివృద్ధి చెందవలెననిన గణితశాస్త్ర పరిజ్ఞానము, పరిశోధన - వీటిని సుప్రతిష్ఠతముల గావింపవలెను. ఏలన, గణితశాస్త్రము విజ్ఞానమునకు ఒక పరిభాష నేగాక, ఒక విధాన శాస్త్రమునుకూడ పరికల్పించినది. క్షేత్రమేమో ఫలవంతమైనది. ఏలన, అంకగణితమునకు మూలాధారములగు అరేబియా సంఖ్యలను భారతదేశముకదా కల్పించినది; అదిగాక తరువాతి కాలమందు అద్భుత కుట్టక పరికర్మను ప్రసాదించిన భాస్కరాచార్యుడు భారతీయుడే కదా; శ్రీనివాస రామానుజమ్, జగదీశ చంద్రబోస్, సి. వి. రామన్, జె. వి. నార్లీకర్ వంటి మహా మేధావుల నిర్వాహములచే ఈ సంప్రదాయములే కదా కొనసాగించబడుచున్నవి. తెలుగువారలకు సుబోధమగునట్లు గణితశాస్త్ర మూలభావములను సుప్రతిష్ఠితములు గావించుటయందు ఈ ప్రస్తుత గణితశాస్త్ర సంపుటి ఒక వినీత పాత్రను వహించగలదనునది ఎంతయును ఆశాజనకముగ, అభిమానావహముగ ఉన్నది.

మేము దుర్లంఘ్యములగు అడ్డంకులను ఎదుర్కొనవలసి వచ్చినది. ఇందొకటి గణితశాస్త్ర ప్రధాన భావముల సార్థక్యమును సూచించు ఒక సమర్థ పారిభాషిక పదజాలమును నిర్మించుట; రెండవది ఆంగ్లాంధ్ర భాషల నుడికారపు వైజాత్యము. దీని మూలమున గణితశాస్త్ర సంక్షిప్త సాంకేతిక పరిభాషను ప్రత్యక్షముగ తెలుగు భాషలోనికి అనువదించినచో, ఆ అనువాదము శాస్త్ర పరిచితిగల వారలకుకూడ దుర్బోధమగుచున్నది. అందువలన, ఒక సావకాశ, కథానుబద్ధశైలి ఆవశ్యక మగునట్లగపడుచున్నది. ఇదిగాక ఉన్నత గణితశాస్త్రజ్ఞానమును ఏ స్థాయికి గొంపోవలయునో అను విషయము నిర్ణయించుట సులభ సాధ్యముకాదు. స్థలశాస్త్రము, అమూర్త బీజగణితము, సాపేక్షతా వాదము, గురుత్వ సిద్ధాంతము - ఇట్టి కఠిన, ఆధునిక విషయములను ప్రవేశపెట్టవలయునని నిశ్చయించితిమి. ఏలన, అటుగానిచో, విజ్ఞాన సర్వస్వ లక్షణమే కొరవడును. అట్టి విషయముల ప్రధాన భావములనే తడవి, సరళతమ భాషలో వానిని వెల్లడిజేయుట ఆవశ్యకమని తోచినది. ఇంతియేగాక సాంఖ్యకీయ శాఖలందలి అల్పప్రతిరూపములు, ప్రయోగరచన మొదలగు విషయములను

సులభశైలిని ఇందు చేర్చితిమి. జ్యోతిషము అగాధశాస్త్రము. మన పూర్వు లనేక జ్యోతిషశాస్త్ర రహస్యములనుద్ఘాటించి ఉన్నారు. అగస్త్యచారము, సప్తర్షియుగము వీని గణిత రహస్యము లిందు వివరింపబడి ఉన్నవి. యుగముల, శకముల గణిత మూలములను, వరాహమిహిరుని శకము శాలివాహన శకముగా నుండుటకు అవకాశము తక్కువ అనియు సహేతుకముగ నిరూపింపబడినవి.

మేము కావించిన ఈ ప్రయత్న బాహుళ్యమందు లోపములుండవచ్చును. పండితులు మన్నింతురు గాక. 'ప్రమాదోధీమతామపి' అని అభియుక్తోక్తి కలదు గదా. ఎంత మేరకు ఈ కార్యమును విజయవంతముగ మేము సాధింపగలిగితిమో, పాఠక పండితులే నిర్ణయింతురుగాక. మేమొకప్పుడు విఫలులమైనను, మానవ ప్రయత్న క్షేత్రమందు వైఫల్యము విజయమునకు క్రింది మెట్టు అను భూతార్థము మాకెంతయు ఊరట నొసంగుచున్నది.

"జననీ జన్మ భూమిశ్చ స్వర్గాదపి గరీయసీ" అను వచనము కలదుకదా? మాతృభక్తి, దేశభక్తిలేని మానవుని జీవితము వ్యర్థము. కాబట్టి మాతృభాషయందు అందరకు గౌరవముండి తీర వలయును. కొన్ని దశాబ్దములకు పూర్వము కొందరు ప్రముఖులు భారతీయ భాషలెవ్వియును విజ్ఞాన శాస్త్రము, గణితశాస్త్రము బోధించుటకు పనికిరావనియు, ఆంగ్లభాష తప్ప వేరుగతి లేదనియు వాదించుచుండిరి. అట్టి వాదము తప్పని చూపుటకు సంస్కృతాంధ్ర లిపిలో పారిభాషికపద పుస్తకము 1951లో రాజమహేంద్రవరములోని సరస్వతీ పవర్ ప్రెస్సులో మాలో ఒకరిచే ముద్రితమయినది. రఘువీర హిందీలో అన్ని శాఖలకు పారిభాషిక పదములచ్చు వేసియుండిరి. కాన మా కందరికి మార్గ దర్శకులగు భారత విద్వచ్ఛిఖామణులను ఇచ్చట పేర్కొనుట కర్తవ్యము. 1888లో గైక్‌వాడ్ మహా రాజా ఆదరణమున గజ్జార్ మహాశయుడు దీనికి అంకురార్పణ చేసెను. తర్వాత కలకత్తా వంగీయ సాహిత్య పరిషత్తు చేతను, కాశీలో నాగరీ ప్రచారణీ వారిచేతను దోహదమును పొంది, తెలుగు భాషా సమితిచే ఇది పరిపూర్ణ ప్రౌఢత్వమును అందికొనినది. ఈ కృషియందు మా కవకాశము ఇచ్చినందులకు తెలుగు భాషా సమితికిని, ప్రత్యేకముగా కార్యదర్శులకును హృదయపూర్వక ధన్యవాదములు. మాతృభాషా సేవకు వారి మూలముగా అవకాశమొకటి దొరికినది గదాయని మేము గర్వించు చున్నాము. ఈ దినము సుదినము. గ్రంథము ప్రధాన మంత్రి లాల్‌బహుదూర్ శాస్త్రిచే ప్రకాశింపబడుచున్నది. అది మాకెంతయు గర్వకారణము.

మేము దూరముగ నున్నను, మా అభిమతములను గ్రహించి వ్యాసములను అనువదించుట లోను, ముద్రణకు సిద్ధముచేయుటలోను మాతో పూర్తిగ సహకరించి పనిచేసిన సమితి సంగ్రాహకు లకు, సహాయ సంగ్రాహకులకు మా అభివందనములు. అవసరమైన చిత్రములను అందముగను, నిర్దుష్టముగను గీసి ఇచ్చిన చిత్రకారులకు, సంపుటమును సర్వాంగ సుందరముగ ముద్రించి ఇచ్చిన ముద్రాణాధిపతులకు మా ధన్యవాదములు.

ఆదివారము
21-3-1965

ఆ. నరసింగరావు
వి. తిరువేంకటాచార్య
సంపాదక సమితి

రచయితలు

ఆచార్య. శ్రీ తిరువేంకటాచార్య, వి. ఎమ్. ఏ., ఎల్. టి.

రిటైర్డ్ వైస్ ప్రిన్సిపాల్, న్యూ కాలేజీ, మద్రాసు.

అంతర్నక్షత్ర వాయువు; అక్షపరివర్తన; అగస్త్యచారము; అయనములు; అల్ప ప్రతి రూపములు; ఆయుర్దాయ పట్టికలు; ఉచిత ప్రతిరూపములు; ఏకాదశి; కలిశకము; కుట్టకములు; కూర్పులు (పుంజములు); కృష్ణనీహారికలు - విశ్వధూళి; ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష (సమీక్ష); గణితపఠకములు; జాలబిందువులు; జేకోబీ విలోపఫలములు; జ్యోతిషము-ఫలభాగము; జ్యోతిషము-వేదాంగము; టేలర్ పరంపర; తీటా ఫలములు; త్రిశంకువు; దిగధిపతులు; దీపావళి; నవీనజ్యామితి; నాక్షత్ర కాలము; పంచాంగ కాలము; పంజరవాదము; ఫూయర్ బాక్ సిద్ధాంతము; ప్రతిరూపవరణము; ప్రయోగరచన; బిందుసమితులు; భారతీయ సంఖ్యామానము; మాసములు-ఋతువులు; యూక్లిడేతర జ్యామితి; రీమాన్ చయనము; రీమాన్ తలములు; లక్షణవాదము; లాటిన్ చతురము; విక్షేపజ్యామితి; విమాత్రయ జ్యామితి; విలోపఫలములు; విశాఖా నక్షత్ర నామ సార్థక్యత; విశ్లేషణఫలములు; విషుచలనము; వృత్తీయ బిందువులు; వెక్టర్ గణితము; వేదాంగ జ్యోతిషము-I; శకములు; సంకీర్ణసంఖ్యలు; సంఖ్యామాపములు; సంభావ్యతావాదము; సప్తర్షి యుగము - లౌకికాబ్దము; సమకోణీయ విక్షేపము; సమవాయత; సూర్య సిద్ధాంతము; స్రోతస్సులు; స్వదేశకాలము-ప్రమాణకాలము; స్వరాత్మకచ్ఛేదము.

ఆ. న. డాక్టరు నరసింగరావు, ఆ. ఎమ్. ఏ., ఎల్. టి., డి. ఎస్‌సి.

రిటైర్డ్ ప్రొఫెసర్ ఆవ్ మాతమేటిక్స్, అన్నామలై & ఆంధ్ర యూనివర్సిటీస్; ఆనరరీ ప్రొఫెసర్, మద్రాస్ ఇనిస్టిట్యూట్ ఆవ్ టెక్నాలజీ.

అంకగణితము; అద్భుతగణకులు; ఆయ్‌లర్, లియోనార్డ్; ఆర్కిమీడీజ్ ఆధార తత్త్వము; ఈజిప్టుదేశపు గణితము; ఋజురేఖా జ్యామితి; ఏకరూప ఉపసరణత; కోషీ; క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలు; గణితకథలు; గణిత చిక్కుప్రశ్నలు-వినోదములు; గణితవేత్తల దివ్యవచనములు; గణితశాస్త్రసమీక్ష (సమీక్ష); గణిత్రయంత్రములు; గతిభారము; గాల్వా, ఎవరిస్ట్; గాల్వాక్షేత్రములు; గుణకారము; గురుస్వామి పిళ్ళై; గౌస్; గ్రీక్ గణితము; చయనీకరణ విధానములు; టెన్సార్ కలనము; టోపాలజీ; డెజార్గ్ సిద్ధాంతము; డేకార్ట్; తలములో అలంకార కూర్పులు; త్రిపరిమాణిక బలవాదము; త్వరణము; దేశకాల విశిష్టవిశ్వము; ద్రవ్యరాశి; నిరుపాధిక ఆకాశములు; నోమోగ్రాములు; న్యూటన్, సర్. ఐజాక్; పాస్కల్ త్రిభుజము; పై (π) వగైరా విలువ; ప్రకేవల విలువ; ఫర్మా; ఫలములు; ఫిబొనాచ్చి వరుస; బరువు; బహుతలకములు; బాబిలోనియన్ గణితము; బీజ పల్లవము; బొంగరము: మాంటీకార్లో విధానములు; యుక్తఫలముల, యుక్తవిలువల వ్యాకోచములు; రామానుజమ్, శ్రీనివాస; రీమాన్; లాగరిదమ్‌లు; లాగ్రాన్జ్; లాప్‌లాస్; లైబ్నిట్జ్; వరణస్వీకృతతత్త్వము; విక్షేపవిన్యాసములు; విపరీత గణితము; వృత్తీయ అలంకారములు; వృత్తీయ జ్యామితి; వేగము; శుద్ధ గతి శాస్త్రము; సంజీవరాయశర్మ, లక్కోజు; సదృశచిత్రపట లేఖనము; సిరీజ్; హాయిల్-నార్లీకర్ గురుత్వాకర్షణ వాదము; హెచ్చుతగ్గులు.

ఆ. వెం. శ్రీ వెంకటాచలము అలమూరు, బి. ఎస్‌సి.

సహాయ సంగ్రాహకుడు, తెలుగు భాషా సమితి, యూనివర్సిటీ భవనములు, మద్రాసు - 5.

అపలోనియస్; ఆడమ్స్, జాన్ కౌచ్; ఆర్కిమీడీజ్; ఎడ్డింగ్టన్, ఆర్థర్ స్టాన్లీ; ఎరాటోస్తెనీజ్; కృష్ణరావు, తడకమళ్ల; గ్రీనిచ్ వేధశాల; జగన్నాధసామ్రాట్టు; మల్లన, పావులూరి; హర్షల్, సర్. విలియమ్; హేలీ, ఎడ్మండ్.

ఆర్. సి.	శ్రీ సీతారామ్, ఆర్. ఎలక్ట్రానిక్ శాఖాధిపతి, ఎమ్. ఐ. టి., క్రోమ్‌పేట, మద్రాసు. ధ్వనిశాస్త్రము.
ఎస్. ఎస్. సు.	శ్రీ సుబ్బనారాయణన్, ఎస్. ఎస్. అధ్యాపకుడు గణితశాఖ, ఎమ్. ఐ. టి., క్రోమ్ పేట, మద్రాసు. వెక్టర్ బీజగణితము.
ఎస్. రా.	శ్రీ రాజేశ్వరరావు, ఎస్. ఎమ్. ఎస్‌సి., డి. ఎస్‌సి. ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ, హైదరాబాదు. గాలక్సీలు.
ఎస్. రా. మూ.	శ్రీ రాధాకృష్ణమూర్తి, ఎస్. ఎమ్. ఎస్‌సి. అధ్యాపకుడు, ఎస్. ఆర్. ఆర్., సి. వి. ఆర్. కాలేజీ, విజయవాడ. ఎత్తు, దూరము.
ఎస్. శ్రీ. రా.	శ్రీ శ్రీనివాసరావు, ఎస్. ఎమ్. ఏ., ఎల్. టి. గణితశాఖాధిపతి, ఏ. జె. కళాశాల, మచిలీపట్టణము. నిరూపక జ్యామితి.
ఎమ్. రా.	శ్రీ రాఘవాచార్యులు, ఎమ్. ఎమ్. ఎస్‌సి. వైస్‌ప్రిన్సిపాల్, ఎస్. ఆర్. ఆర్. సి. వి. ఆర్ కాలేజీ, విజయవాడ. త్రికోణమితి.
ఎమ్. వి. సు.	డాక్టరు సుబ్బారావు, ఎమ్. వి. ఎమ్. ఏ., ఎమ్. ఎస్‌సి. పిఎచ్‌డి. ప్రొఫెసర్ ఆవ్ మాతమేటిక్స్ యూనివర్సిటీ ఆవ్ మిస్సోరీ, కొలంబియా (యు. ఎస్. ఏ). అంతర సమీకరణము; ఖగోళము; గామా ఫలములు; చయన సమీకరణములు; జీటా ఫలము; పూర్ణాంకములు; బీజ ఫలములు: వాటి చయనకలములు; బీటా ఫలము; భూవైనిక భ్రమణము; భూమి; మూడవ, నాల్గవ తరగతి సమీకరణములు; యూక్లిడేతర జ్యామితి; విశిష్టజాతి సంఖ్యలు; సౌరకాలము.
ఎమ్. వెం.	డాక్టరు వెంకటరామన్, ఎమ్. ప్రొఫెసర్ ఆవ్ మాతమేటిక్స్, మద్రాసు యూనివర్సిటీ, మధుర. గణిత అనుగమనము.
ఎస్. సూ. ప్ర.	శ్రీ సూర్యప్రకాశరావు, ఎస్. ఎమ్. ఏ. గణిత అధ్యాపకుడు, ఎస్. ఆర్., ఆర్. సి. వి. ఆర్. కాలేజీ, విజయవాడ. గోళీయ త్రికోణమితి.
క. నా. భూ.	డాక్టరు నాగభూషణము, కె. సాంఖ్యకశాస్త్ర శాఖాధిపతి, ఆంధ్ర యూనివర్సిటీ, వాల్తేరు. సాంఖ్యక శాస్త్రము.

క. సు. రా. — కి. శే. సుబ్బారావు, క్రి. ఎమ్. ఏ.

ద్విపద, బహుపద సిద్ధాంతములు ; ప్రస్తారములు ; సంయోగములు ; శృంఖలిత భిన్నములు.

కె. మ. రా. — శ్రీ మధుసూధనరావు, కె. ఎమ్. ఏ., ఏ. ఏ. ఐ. ఏ.

గణితశాఖాధిపతి, హిందూ కాలేజీ, మచిలీపట్టణము.

కణగతి శాస్త్రము ; చయనకలనము.

కే. ఎస్. వి. న. — శ్రీ నరసింహమ్, కే. ఎస్. వి.

గణితశాఖాధిపతి, న్యూకాలేజీ, మద్రాసు.

ఇంద్రుడు ; ఉల్కలు ; కుజుడు ; గురుడు ; ధూమకేతువులు ; నక్షత్రములు ; బుధుడు ; యముడు ; లఘు గ్రహములు ; వరుణుడు ; వార్షిక అతివర్తనము ; విపథనము ; శని ; శుక్రుడు ; సూర్యుడు ; సౌరకుటుంబము ; సౌరాతివర్తనము.

జె. ఎస్. శర్మ. — శ్రీ శర్మ, జె. ఎస్.

ఆర్థిక, సాంఖ్యకసలహాదారుడు, ఆహార, వ్యవసాయ మంత్రిత్వశాఖ, న్యూఢిల్లీ.

అధికారిక సాంఖ్యకీయ ప్రచురణ.

జె. వి. భా. — శ్రీ భావనారాయణ, జె. వి. ఎమ్. ఏ.,

లెక్చరర్, ఎస్. ఆర్. ఆర్, సి. వి. ఆర్., కాలేజీ, విజయవాడ.

సమీకరణముల అంకాత్మక సాధన.

టి. వెం. రా. — డాక్టరు వెంకటరాయుడు, టి. ఎమ్. ఏ., పిఎచ్. డి., ఎఫ్. ఏ. ఎస్‌సి.

మాతమేటికల్ ఫిజిక్స్ శాఖాధిపతి, ఆంధ్ర యూనివర్సిటీ, వాల్తేరు.

దృఢ వస్తుగతి శాస్త్రము ; ప్రత్యేక సాపేక్షతావాదము.

డి. ఆర్. కె. స. — శ్రీ సంగమేశ్వరరావు, డి. ఆర్. కె. ఎమ్. ఏ., ఎమ్. ఎస్‌సి.

అధ్యాపకుడు, మాతమేటికల్ ఫిజిక్స్‌శాఖ, ఆంధ్ర యూనివర్సిటీ, వాల్తేరు.

ఫోరియర్ పరంపర ; శక్మవాదము.

డి. ఏ. సో. — శ్రీ సోమయాజి, డి. ఏ. ఎమ్. ఏ.,

గణితశాఖాధిపతి, డబ్ల్యు. జి. బి. కాలేజీ, భీమవరము.

క్రాంతివృత్తము ; భూభ్రమణము - I ; వేధశాల - I.

పంకజమ్. — శ్రీమతి పంకజమ్,

తుళసింగపెరుమాళ్ కోవిల్ స్ట్రీట్, తిరువల్లిక్కేణి, మద్రాసు - 5.

బూలియన్ బీజగణితము.

పి. కృ. శా. — శ్రీ కృష్ణమూర్తి శాస్త్రులు, పిడపర్తి,

ఇన్నీస్‌పేట, రాజమహేంద్రవరము.

పంచాంగము.

పి. వి. సూ. — శ్రీ సూర్యనారాయణమూర్తి, పి. వి. బి. ఏ., ఎల్. టి.,

సైన్స్ అసిస్టెంట్, పి, ఆర్. కాలేజీ, స్కూల్, కాకినాడ.

కాలమును కొలుచు పరికరములు.

పి. సూ. నా.

శ్రీ సూర్యనారాయణ, పి. ఎమ్. ఏ.,
అధ్యాపకుడు గణితశాఖ, శ్రీ వేంకటేశ్వర యూనివర్సిటీ, తిరుపతి.

కాంతికిరణ వక్రీభవనము; ఖగోళగతి శాస్త్రము; చంద్రుడు; భూభ్రమణము – II; విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతము.

పొ. ల. నా.

శ్రీ లక్ష్మీనారాయణరావు, పొట్లూరి, బి. ఏ.
సహాయ సంగ్రాహకుడు, తెలుగు భాషా సమితి, యూనివర్సిటీ భవనములు, మద్రాసు - 5.

అంతరీకరణ కలనము; అంతరీకరణ సమీకరణములు; అరిస్టార్కస్; ఋజురేఖ; కెప్లర్, యోహాన్; కోణములు; కోపర్నికస్, నికొలాస్; గెలీలియో; గోళము; గ్రహణములు; ఘనము; ఘాతాంకము; చతురస్రము; చతుర్భుజము; చతుష్కోణము; జయసింహుడు; టాలెమీ; టైకోబ్రాహి; ట్రెపీజియమ్; తేలీజ్; త్రిభుజము; దీర్ఘచతురస్రము; నిర్ధారకములు; నిష్పత్తి - అనుపాతము; నేపియర్ - జాన్; పాస్కల్, బ్లెయిజ్; పితాగొరస్; పితాగొరస్ సిద్ధాంతము; పిరమిడ్; పై (π) వగైరా విలువ; ప్రిజమ్; ఫోరియర్, జె. బి. జోసఫ్; బలము; బహుభుజి; బెసల్, ఎఫ్. డబ్ల్యు; బ్రిగ్స్, హెన్రీ; భాగహారము; భిన్నములు; రసెల్, బెర్ట్రాండ్ ఆర్థర్ విలియమ్; రాంబస్; రాశిచక్రము; రెండవ తరగతి సమీకరణము; లవెరియా; లొబషేవ్‌స్కి, నికోలాయ్ ఇవానోవిచ్; విభాజకీకరణము; వృత్తము; వేధశాల – II; వైట్‌హెడ్, ఆల్ఫ్రెడ్, నార్త్; వ్యవకలనము; శూన్యాంకము; శ్రేఢులు; సమాంతర చతుర్భుజము; స్తూపము; హామిల్టన్, సర్ విలియమ్ రోవాన్.

బి. ఎస్. మా.

శ్రీ మాధవరావు, బి. ఎస్.
ప్రొఫెసర్, ఇనిస్టిట్యూట్ ఆవ్ ఆర్మమెంట్ రీసెర్చ్, కర్కి, పూనా - 3.

అస్త్రప్రయోగము.

మే. వ న.

శ్రీ వరాహ నరసింహస్వామి, మేడేపల్లి,
(గౌరవప్రధాన సంగ్రాహకుడు, తెలుగు భాషా సమితి), విజయనగరము.

కృత్రిమ ఉపగ్రహములు; చలకలనము; ఆయిలర్ పరంపర – II; రేడియో ఖగోళ శాస్త్రము.

వే. రా.

కీ. శే. రామేశం, వేపా,

కాలనిర్ణయము.

శ్వేతారణ్యం.

శ్రీ శ్వేతారణ్యం, ఎస్.
రీసెర్చ్ అండ్ డెవలప్‌మెంట్ డిపార్ట్‌మెంట్, టెల్ కో, జంషడ్‌పూర్ (బీహార్).

డయోఫాంటైన్ సమీకరణములు.

సరస్వతి.

శ్రీమతి సరస్వతి, ఎమ్. ఏ., పిఎచ్. డి.,
లెక్చరర్ ఇన్ సాన్స్క్రిట్, రాంచీయూనివర్సిటీ, రాంచీ (బీహార్).

ఆర్యభటుడు – I; ఆర్యభటుడు – II; కరణ పద్ధతి; క్రియాక్రమకరి; గోవిందస్వామి; జంబూద్వీప ప్రజ్ఞప్తి; త్రిలోకప్రజ్ఞప్తి; నారాయణ పండితుడు; నీలకంఠ సోమయాజి; నేమిచంద్రుడు; పరమేశ్వరాచార్య; బక్షాలి లిఖితపత్రము; బ్రహ్మగుప్తుడు; భాస్కరాచార్య – I; భాస్కరాచార్య – II; మహావీరుడు; మాధవుడు; యుక్తిభాష; వరాహమిహిరుడు; వేదాంగ జ్యోతిషము – II; శుల్బసూత్రములు; శ్రీధరుడు; శ్రీపతి; సద్రత్నమాల; సూర్య ప్రజ్ఞప్తి.

సి. ఎన్. శ్రీ. డాక్టరు శ్రీనివాస అయ్యంగార్, సి. ఎన్.
రిటైర్డ్ మాతమేటిక్స్ ప్రొఫెసర్, 17, క్రాస్ రోడ్, మల్లేశ్వరము, బెంగుళూరు - 3.
అంతరీకరణ జ్యామితి; వక్రములు.

సి. టి. రా. డాక్టరు రాజగోపాల్, సి. టి.
డైరెక్టర్, రామానుజమ్ ఇనిస్టిట్యూట్ ఆవ్ మాతమేటిక్స్, యూనివర్సిటీ భవనములు, మద్రాసు - 5.
అనంత పరంపరల ఉపసరణత; అవధులు; ఫలములు, వ్యుత్పన్నరహిత; రామానుజమ్ ఇనిస్టిట్యూట్ ఆవ్ మాతమేటిక్స్; సంకలనీయతా సిద్ధాంతము.

*

సహాయ సంగ్రాహకులు

శ్రీ పాట్లూరి లక్ష్మీనారాయణరావు

శ్రీ ఆలమూరు వెంకటాచలము

*

విషయసూచిక

*

యథా శిఖా మయూరాణాం

నాగానాం మణయో యథా

తద్వద్వేదాంగ శాస్త్రాణాం

గణితం మూర్ధని స్థితమ్

*

Blank Page



గణిత సమీక్ష

ప్రస్తావన

'గణితము లేనిచో జీవితమే లేదు' అను వాక్యము అతిశయోక్తి కాదు; ఏలన జీవిత క్రియలన్నియును గణితములోని ప్రధానాంశములగు సంఖ్య, ఆకృతి, పరిమాణ భావములపై ఆధారపడి ఉన్నవి. ఒక మొక్క తనజాతికి తగినట్లు పత్రపుష్ప ఫలాకృతులను, రూపమును, కొమ్మల వరుసలను విస్తరించుటయును; సాలెపురుగు, తేనెటీగ తమతమ వాసస్థలములను అతిచమత్కారముతో నిర్మించుటయును; పక్షులు, చేపలు చాలదూరము ప్రయాణము చేసి తమ నివాసస్థానములకు తిరిగి వచ్చుటయును గమనించునపుడు ప్రకృతియందు గణితభావములు జీవితముతో ఎంత పెనవేసుకొని ఉన్నవో గ్రహించవచ్చును. పక్షులకు ఒకటి, రెండు, మూడు అంకెలవరకు లెక్కించుశక్తికూడ ఉన్నది. ఎందుకనగా ఒకే ఆకారముకలిగి, పరస్పర వ్యత్యాసములేని మూడు గ్రుడ్లలో ఒకటి కానరానిచో, తల్లిపక్షి దానిని వెతుక ఆరంభించును. నాగరికతలో ఎక్కువ అభివృద్ధి చెందని మానవులలోను ఇదే పరిస్థితి ఇప్పటికిని ఉన్నది. వారి భాషలలో ఒకటి, రెండు, మూడు అను పదములున్నవి; కాని ఆ తరువాత వారు అనంతము అను మాటను ఉపయోగించెదరు. వారికి మూడుకంటె ఎక్కువ వస్తువులను ఎంచుట తెలియదు.

సంఖ్యాభావము యొక్క ప్రారంభదశలో ఒకటి, లేదా పెక్కు అను వ్యత్యాసమును గుర్తించుటయే జరిగి ఉండవలెను. దీనికంటె ఉన్నతదశలో ఒకటి, రెండు, పెక్కు అను మూడు రకములు మాత్రము గుర్తించబడి ఉండవలెను. సంస్కృత, గ్రీక్, కెల్టిక్ వాఙ్మయము లందున్న ఏకవచన, ద్వివచన, బహువచనములు ఈ సంఖ్యాభావ పరిణామమును అనుసరించినవి కాబోలును!

అతి ప్రాచీనపరిస్థితి ఎటులుండినను, ప్రాచీనశిలాయుగ కాలము అనగా 50,000 సంవత్సరములకు పూర్వముననే మానవుడు రూపభావమును, సంఖ్యాభావమును గ్రహించుటయందు చాల కౌశలము సంపాదించినట్లు తెలియుచున్నది. ప్రాచీనశిలా యుగపు వస్తువులలో దొరకిన ఒక ఎముకముక్కపై అయిదు అయిదుగా ప్రోగుచేసిన 55 గీతలు ఉన్నవి. మన చేతిలోని వ్రేళ్ళు అయిదు. ఇప్పటికిని మన గ్రామములందు అయిదు వస్తువులకు ఒక 'చేయి' అని పేరు. ఇట్లు అయిదు అయిదుగా ఎంచుట అతి ప్రాచీన పద్ధతి అని ఈ ఎముకముక్క మనకు తెలుపుచున్నది.

అదే రీతిగా గుహాలలో 15,000 సంవత్సరములకు పూర్వము గీయబడిన చిత్రములు ఆ కాలపు మానవుని రూప గ్రహణశక్తిని వెల్లడించుచున్నవి. నవీన శిలా యుగము నాటి ఆభరణముల ద్వారా ఆ కాలముననే సర్వసమత, సౌష్ఠవము, సారూప్యము ఇత్యాది ముఖ్యమైన గణితభావములను వారు గ్రహించిరని విశదమగుచున్నది. ఈ భావములను వారు కుండలు, బుట్టలు మొదలగు వస్తువుల నిర్మాణమునందు ఉపయోగించిరి.

ప్రాచీన గణితము

క్రీ. పూ. 7,000 సంవత్సరముల నాడున్న నాగరికతను మనము ఊహించునపుడు మానవ సమూహములు సంచార జీవితము మాని, గొప్ప నదుల ఒడ్డున స్థిరనివాసములు ఏర్పరచుకొని ఉండిరని తెలియుచున్నది. ఇటువంటి మానవ సమూహములు మొదట నైలు, టైగ్రీస్, యూఫ్రేటీజ్, సింధు నదుల ప్రాంతములలోను, అనంతరము గంగా, హోయాంగ్‌హో, యాంగ్‌సీక్యాంగ్ నదుల దగ్గరను నాగరికతా కేంద్రములను స్థాపించిరి. అప్పుడు వారు కాలువలు త్రవ్వుటయందును, గృహనిర్మాణమునందును, గోపురములు కట్టుటయందును, తటాక ప్రతిష్ఠయందును ఉద్యుక్తులగుటచే వారి గణితవిజ్ఞానము క్రమేణ అభివృద్ధి

చెందెను. జ్యామితి పరిశోధనము నదీతీరవాసులకు అత్యావశ్యక మయ్యెను. కర్షకులకు భూములు పంచుకొనుటకు జ్యామితియు, వ్యవసాయకాల నిర్ణయమునకు ఖగోళ శాస్త్రమును, నగర పరిపాలనకు అంకగణితమును వాడవలసి వచ్చినందున, క్రమేణ గణితము సూత్రరూపమున అభివృద్ధిచెందెను. స్థిరనివాసమేర్పడినందున అంతకుముందు లేనట్టి అవకాశము మానవ జీవితములో ఏర్పడినది. అట్టి అవకాశమును ఉపయోగించి మానవుడు పలువిద్యలను అభివృద్ధి చేయుటయందేగాక గణితశాస్త్ర పరిశోధన యందుకూడ ఎక్కువ శ్రద్ధ చూపెను.

అప్పటి కాలమునందు గణితవిద్య శాస్త్రరూపమును పొందలేదు. అందు వారు చర్చించిన సమస్యల సాధనలు అనుభవగర్భిత సూత్రరూపమై ఉండెనేకాని ఉపపత్త్యాధారమగు శాస్త్రముగా గణితము పరిగణింపబడలేదు.

గణితమనగా నేమి: కాలక్రమమున మానవమేధాజన్యమైన గణిత బీజము అంకురించి, చిన్న మొలకయై, తరువై, తరువాత సకలశాస్త్రముల ఆదరణకు పాత్రమైన శాఖోపశాఖాసహిత మహావృక్షమయ్యెను. గణితము మొట్టమొదట అనుభవసిద్ధ సూత్రముల సమూహమై ఉండెను. మానవుని అనుభవములు నలుదిశల విస్తరించినపుడు ఇట్టి అనుభవసూత్రములను సంఖ్య ఎక్కువయ్యెను. సూత్రములందు కొన్నింటికి పరస్పర సంబంధముండునట్లు వారికి గోచరించెను. సూత్రముల అన్నిటిని విమర్శించి క్రోడీకరించినపుడు కొన్నిటిని ప్రారంభసూత్రములుగా తీసికొనవచ్చుననియు, తక్కినవి ఉత్పన్న సూత్రములుగా పొందవచ్చుననియు విశదమయ్యెను. ఒక ప్రకరణములో ఉండు అన్ని సిద్ధాంతములను ఒక వరుసగా క్రోడీకరించి, అందు వెనుకవచ్చు సిద్ధాంతములను అన్నిటిని మునుపటి సిద్ధాంతములనుండి తార్కికరీతిని ఉపపత్తులతో పొందుటయే గణితములోని రాజమార్గమని గ్రీక్ విజ్ఞానులు 2,000 సంవత్సరములకు మునుపే గుర్తించిరి. ఈ మార్గమును వారు జ్యామితిలో ఉపయోగించిరి. అయితే మొట్టమొదటి సిద్ధాంతము ఇటుల పూర్వ సిద్ధాంతముల నుండి దొరకదుగదా! అందువలన యూక్లిడ్ కొన్ని ఆధార సిద్ధాంతములను ప్రారంభములో ఉపపత్తి లేకయే స్వీకరించెను. ఇవి అతిసులభమైనవియును, స్వతః ప్రమాణములైనవిగాను ఉండవలెనని అతని అభిప్రాయము. దృష్టాంతమునకు అతడు అంగీకరించిన రెండు ఆధార తత్త్వములలో ఒకటి: 'రెండు వస్తువులు ఒకేవస్తువునకు సమానమైనచో అవి రెండును సమానములు'. రెండవది: 'ఒక సంపూర్ణమైన వస్తువు దాని అంశమునకన్న పెద్దది'. ఇటువంటి స్వతః ప్రమాణ తత్త్వములనుండి ప్రారంభించి, జ్యామితియొక్క సిద్ధాంతము లన్నింటిని తర్కరీతిని పొందుటయే యూక్లిడ్ లక్ష్యము. ఈ పద్ధతియే ఈనాటికిని గణితశాస్త్రభాగము లన్నిటికి దృష్టాంతమగుచున్నది. అయితే, ప్రారంభములో అంగీకరింపబడిన ఆధారతత్త్వములను స్వతఃప్రమాణములని ఆధునిక గణిత వేత్తలు ఒప్పుకొనరు.

ఆధునికదృష్టిలో తార్కికరీతిని పొందిన ఉపపత్తియే గణిత సిద్ధాంతములకు జీవము. ఉపపత్తికి ఇంత ప్రాముఖ్యమును ఇచ్చుటకు వివిధ కారణములు ఉన్నవి.

మొదటి కారణము: అనుభవముచే సంపాదితమైన ఒక సూత్రము యథార్థఫలితమును ఇచ్చునా లేదా ఆసన్న ఫలితమును ఇచ్చునా? అటుల అది ఆసన్న ఫలితమే అగుచో దానిలోఉన్న ప్రమాదముయొక్క అవధులేమి? ఇట్లు అంచనావేయుటకు ఉపపత్తి సహాయమగుచున్నది. ఏలన యథార్థ ఫలితములకు మాత్రమే ఉపపత్తిఉన్నది. అట్లు యథార్థ ఫలితము తెలిసికొనినపిదప దానికిని ఆసన్న ఫలితమునకును ఉన్న వ్యత్యాసము కనిపెట్టవచ్చును.

రెండవ కారణము: మనము వ్యవహారములో ఎన్నో ఫలితములను వాటి తత్త్వమును గుర్తించకయే వాడుదుము. ఉదాహరణమునకు, ఒక పొడవుకొలత యూనిట్‌ను ఇచ్చినట్లయిన దానిని పెట్టుకొని ఎంత నిడివినైనను కొలవవచ్చును అని అనుకొనెదము. కాని, విమర్శారహితమయిన అట్టి ఆలోచనను పూనుటయందు చాల చిక్కులు ఉన్నవి. ఆధునిక గణితజ్ఞులు మరికొన్ని ఇట్టి చిక్కులను వెలిబుచ్చిరి. తార్కిక ఉపపత్తిని నిర్మించునపుడు ఇట్టి గూఢ ఉపకల్పనలు బహిరంగమగుచున్నవి. అదియుగాక ఒక ఉపకల్పనను విడుచుటవలనగాని, మార్చుటవలన గాని సూత్రము ఎటులమారుచున్నదో నిర్ణయించుటకు ఉపపత్తి యొక్క సూక్ష్మపరీక్షయే సాధనము. ఉదాహరణమునకు, మనము వాడు సామాన్యజ్యామితి యూక్లిడ్ అంగీకరించిన సమానాంతర రేఖల ఆధార తత్త్వముపై నిర్మించబడియున్నది. 'ఒక బిందువునుండి ఒక దత్త బుజు రేఖకు ఒకే సమానాంతర రేఖను గీయవచ్చును' అనునదియే ఈ తత్త్వము. దీనికి బదులుగ దీనికి విరుద్ధమయిన ఆధార తత్త్వమును స్వీకరించినట్లయిన యూక్లిడేతర జ్యామితులను నిర్మింపవచ్చునని గణితజ్ఞులు 19 వ శతాబ్దమునందు కనిపెట్టిరి. ఒక్కొక సూత్రమునకు ఉపపత్తిఉన్నది గనుక, యూక్లిడ్ జ్యామితిలో ఏ సూత్రములు సమానాంతర రేఖల ఆధారతత్త్వముపై ఆధారపడియున్నవో, ఏ సూత్రములు అట్లు ఆధారపడి లేవో కనిపెట్టవచ్చును. ఆధార

పడనీ సూత్రములు యూక్లిడ్ జ్యామితిలోనే కాక, యూక్లిడేతర జ్యామితులందుకూడ యథార్థముగ ఉండును.

మూడవ కారణము : ఇంద్రియ గోచరమగు లోకము మిక్కిలి చిక్కైనది. అందువలన గణితపద్ధతిని తిన్నగా దృశ్యసంఘటనలకు ప్రయోగించుట కష్టము. కనుక చిక్కైన ప్రత్యక్ష ప్రపంచమునకు బదులుగ సరళమైనదియు, గణితరీతి పరిశీలనకు చోటిచ్చునదియు అయిన ఒక కల్పనాజగత్తును వైజ్ఞానికులు సృజించెదరు. ఈ సులభీకరించిన, అమిశ్రమైన జగత్తును గణితరీతిని పరిశీలించి, దీనినుండి సంపాదితములైన ఫలములు ఎంతవరకు ప్రత్యక్ష జగత్తును అనుసరించుచున్నవో వారు పరీక్షించెదరు. ఇట్లు కల్పనాజగత్తుయొక్క గుణభాగములను కనిపెట్టుటయందు తార్కిక అనుమానము ఒక ప్రధాన సాధనము. ఇదియే ఆధునిక శాస్త్రీయ పరిశీలనమార్గము. ఇట్లు సులభీకరించిన కల్పనాజగత్తునకు పెక్కు దృష్టాంతములు ఉన్నవి. భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములందు పరమాణు ప్రతిరూపము ఒకటి. ఖగోళశాస్త్రమునందు గ్రహములకును, సూర్యునికిని బదులుగ ఘనబిందువులను తీసికొని, వాటికి పరస్పర ఆకర్షణఉన్నదనియు, ఈ ఆకర్షణ విలోమవర్గన్యాయమును అనుసరించుననియు కల్పించుకొని, దాని పర్యవసానముగ గ్రహములు సూర్యునిచుట్టు దీర్ఘవృత్తరూపమున సంచరించుచున్నవని నిరూపించి, ప్రత్యక్షముగ గ్రహములు ఇట్లు సంచరించుచున్నవా లేదా అను పరిశీలన మరియొక దృష్టాంతము. యూక్లిడ్ జ్యామితియందున్న బిందువు, ఋజురేఖ, తలము - ఇవన్నియుకూడ సులభీకరించిన కల్పనాజగత్తునకు చేరినవికాని ప్రత్యక్ష జగత్తునకు చేరినవి కావు. ఏలన, ఒక బిందువునకు పరిమాణము లేదు, ఒక రేఖకు వెడల్పు లేదు. అట్టి వస్తువులు ప్రత్యక్ష జగత్తులో లేనివి. భౌతిక, రాసాయనికాది శాస్త్రములు పై చెప్పిన పథమును అనుసరించి. వాటివాటికి ఉపయుక్తమయిన కల్పనాజగత్తులను సృజించి, వాటిని గణితరీతిని పరిశీలించి గొప్ప వికాసమును పొందియున్నవి. ఈ వికాసమునకు మూలాధారమైనది గణితము.

'ఆధునిక దృష్టిలో 'విశదముగా చెప్పబడిన ఆధార తత్త్వములను ఆశ్రయించి, వాటినుండి తర్కరీతిని పొందిన ఫలితములను విమర్శించు విజ్ఞానము గణితశాస్త్రము' అని నిర్వచింపవచ్చును.'

గణితము యొక్క ప్రాముఖ్యము

అతి ప్రాచీన కాలమునుండి విజ్ఞానశాఖలన్నిటిలో గణితమునకు విశిష్టమయిన స్థానమును, ప్రాముఖ్యమును కలవు. భారత దేశమున గణితశాస్త్రము వేదవిజ్ఞానశీర్షమని చెప్పిన శ్లోకము ఒకట వేదాంగజ్యోతిషమునుండి గ్రహించి, గ్రంథ ప్రారంభముననే వ్రాసియున్నాము.

గ్రీక్‌లు గణితశాస్త్ర ప్రాముఖ్యమును బాగుగా గుర్తించిరి. పితాగొరస్ తన బడిద్వారముపై "జ్యామితిజ్ఞానరహితులు ఈ ద్వారమును ప్రవేశింపరాదు" అని వ్రాసిఉంచెను. ప్లేటో ఈశ్వరుడు సదా జ్యామితిలో నిమగ్నుడై ఉన్నాడని ప్రకటించెను. తమిళములో అక్షరములను, సంఖ్యలను మానవుని రెండు నేత్రములుగా పోల్చు ప్రఖ్యాతమయిన సామెత ఒకటి కలదు.

ప్రాచీన కాలములో గణితశాస్త్రమునకు అట్టి గొప్ప ప్రాముఖ్యము కలుగుటకు పెక్కు కారణములు ఉన్నవి. అందొకటి కొన్ని ప్రత్యేకమైన అంకెలకును, కొన్ని జ్యామితి చిత్రములకును మాంత్రికశక్తి ఉన్నదను నమ్మకము. యజ్ఞవేదికలోగాని, శక్తిచక్రముల నిర్మాణములందుగాని ఏదైన దోషము ఉన్నచో దేవతల ఉగ్రకోపమునకు బలి అగుదురన్న భయము ఉండెను. తరువాత విశ్వము కార్యకారణ సంభూతము అను నమ్మకము జనించిన పిదప జగత్తుయొక్క రహస్యములు కనిపెట్టుటకు గణితమే ముఖ్యసాధనము అను గౌరవము దానికి లభించినది. సముద్రములలో ఓడలు నడుపుటకు, గ్రహణములను, గ్రహసంచార రీతులను నిర్ణయించుటకు గణితము తోడ్పడినది. ఈశ్వరుడు సృజించిన ఖగోళ రహస్యములను కనిపెట్టుటకు గణితమే ముఖ్యసాధనమైనందువలన సృష్టికర్తయే గణితరీతిని జగత్తును సృజించెను అను తలంపు జనులకు కలిగెను.

న్యూటన్ మహాశయుడు గతి సూత్రములను వివరించిన పిదప గణితశాస్త్రవినియోగక్షేత్రము ఖగోళయాంత్రిక శాస్త్రమునకు, భౌతికశాస్త్రమునకు, సాంకేతిక విజ్ఞానమునకు, క్రమేణ సమస్త విజ్ఞానశాఖలకు విస్తరింపబడినది. లాప్‌లాస్ అను గణితశాస్త్రవేత్త వ్రాసినట్లు "లోకములోని అన్నికణముల ఇప్పటి గమనపరిస్థితి, వాటికి అన్వయించు బలనియమములు అన్నియు తెలిసినచో భవిష్యత్ కాలములోని అన్ని ఖగోళకసంఘటనలను లెక్కవేసి చెప్పవచ్చును". సాంఖ్యకశాస్త్రోదయము తరువాత గణితశాస్త్రవినియోగము జీవితభీమా, జీవశాస్త్రము, అర్థశాస్త్రము మొదలగు సాంఘికవిషయములకు సహితము వ్యాపించినది. ఆధునిక కాలమునందు పెక్కు ప్రత్యేక గణితములను సృజించి, తద్వారా, ఇంద్రియములకేకాక భావనాశక్తికిని అప్రాప్యమయిన, అతిసూక్ష్మమయిన అద్భుతజగత్తును భౌతికశాస్త్రజ్ఞులు పరిశీలించుచున్నారు. లోకానుభవమునకు అందని చిక్కుస్థలములలోగూడ గణిత

శాస్త్రము ప్రవేశించి, మన బుద్ధికి సులభముగ రూపచిత్రముల, ప్రతికృతులను ఇచ్చుచున్నది.

గణితములోని ప్రధానాంశములు

దినదినప్రవర్ధమానమగు గణితశాస్త్రములో స్థిర విభజనము చేయుట సమంజసము కాదు. కాని గణితము రెండు ప్రధానభాగములుగా విభజింపబడి ఉన్నది. అవి 1. శుద్ధగణితము, 2. వినియుక్తగణితము.

శుద్ధగణితము: శుద్ధగణితమునందు జ్ఞానప్రాధాన్యమే కాని లాభప్రాధాన్యము లేదు. జ్ఞానార్థము శుద్ధగణితము అభివృద్ధిచేయబడినది. శుద్ధగణితమునందు అంకగణితము, బీజగణితము, కలనశాస్త్రము, అంతరీకరణ సమీకరణములు, జ్యామితి మొదలగు భాగములు కలవు.

కాని కాలక్రమేణ మొదట శుద్ధగణితమని తలచిన పెక్కుభాగములు వినియుక్త గణితమందు విస్తారముగ వాడబడినవి. సంకీర్ణసంఖ్యలు ఆవిష్కరింపబడినప్పుడు అవి విద్యుచ్ఛాస్త్రములో ప్రకటముగా ఉపయోగించవచ్చునని గణితజ్ఞులు తలంచలేదు.

శుద్ధగణితప్రవాహము ఆదికాలమునుండి రెండుప్రత్యేక నదులుగా ప్రవహించెను. చాలకాలమువరకు వానికి పరస్పరసంబంధము లేకయే ఉండెను. ఒక నదికి విశ్లేషణ గణితము అనియు, రెండవనదికి జ్యామితి అనియు నామకరణము చేయవచ్చును. బీజగణితము, అంకగణితమును మిళితమై సంఖ్యాభావమును విస్తరించినవి. దానినుండి కలిగిన వికాసములే 'విశ్లేషణగణితము' అనబడును. నిరూపక జ్యామితి పుట్టినపుడు ఈ రెండు పాయలును ఒకే ప్రవాహమైనది.

వినియుక్త గణితము: యాంత్రికశాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్, మొదలగు భౌతిక విజ్ఞానభాగములందు ఉపయోగపడు గణితమునకు వినియుక్తగణితమని పేరు.

వినియుక్తగణితమునందు గతిశాస్త్రము, స్థితిశాస్త్రము, ద్రవయాంత్రికశాస్త్రము, విద్యుదయస్కాంతసిద్ధాంతము, గణితఅర్థశాస్త్రము, ఖగోళశాస్త్రము, ఖగోళభౌతికశాస్త్రము, సాంఖ్యకశాస్త్రము మొదలగు ప్రకరణములు కలవు.

అంకగణితము

గణితశాస్త్రమందు మొదటి అధ్యాయము అంకగణితము. దీనికి ఆధారభూతమయినది సంఖ్యాభావము. ఈ భావమునందలి భాగములైన పూర్ణాంకములు, భిన్నాంకములు, ఋణాత్మకసంఖ్యలు, అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు, వాస్తవసంఖ్యలు, సంకీర్ణసంఖ్యలు—వీనియొక్క వికాసమును వివరించెదము.

పూర్ణాంకములు

మానవచరిత్రలో పూర్ణాంకములగు 1, 2, 3.... ఎప్పుడు మొదటవాడబడెనో చెప్పుట సాధ్యముకాదు. చరిత్రారంభమునుండి సంఖ్యలు వ్యవహారములో ఉన్నవి. అతి ప్రాచీనకాలమునందు చేతిలోనివ్రేళ్ళు సంఖ్యాభావమును సూచించుటకు చాలియుండెను. శుద్ధసంఖ్యల వరుసను కల్పించి ఒకటి, రెండు, మూడు అని పేళ్ళు పెట్టి, ఎంచుట ఎన్నో శతాబ్దములలో, సహస్రాబ్దములలో గడచిన పిదపనే సంభవించి ఉండవలెను. అయితే తత్పూర్వమే ఒకటి, రెండు అని పేళ్ళులేకయే ప్రాచీనమానవుడు వ్యవహరించి ఉండవలెను. ఉదాహరణమునకు, తనమేకలసమూహములో అన్ని మేకలు తిరిగివచ్చినవా అని కనిపెట్టుటకు క్రింద వివరించిన మార్గమును అతడు అనుసరించి ఉండవచ్చును. ఒక్కొక్కమేక బయలుదేరునపుడు దానికి ప్రతినిధిగా ఒక్కొక్కరాతిని ఉంచి, రాళ్ళను ప్రోగుచేసి, మేకలు తిరిగి వచ్చినపుడును ఆరాళ్ళ ప్రోగులోనుండి ఒక్కొక్కమేకకును ఒక్కొక్కరాతిని తీసివేసి, ఇట్లు అన్ని మేకలు తిరిగివచ్చెనాయని పరీక్షించిఉండవచ్చును. అతడు పైన వివరించిన విధమున చేసియున్నచో గణితములోని ముఖ్యమయిన రెండు విషయములను అతడు గ్రహించెనని చెప్పవచ్చును. మొదటిది సంకేతములు ఉపయోగించుట. ఇచ్చట మేకలకు బదులు రాళ్ళను సంకేతములుగ ఉపయోగించుట. రెండవది ఒకటికొకటి అనురూపత అను ముఖ్యమైన భావము. రెండు వస్తుసమూహములలోని వస్తుసంఖ్య ఒకటే అనగా, ఆ రెండు సమూహములకును ఒకటికొకటి అనురూపత ఏర్పరచవచ్చుననియే దీని తత్త్వము. మనము చివరకు ఆధునిక దృష్టిలో సంఖ్యాభావమును తర్కరీతిని నిర్మించునపుడు, పైనవివరించిన ఒకటికొకటి అనురూపత అను ఆధారభావమును ఉపయోగించెదము.

ఒక వస్తు సమూహమును ఎంచునపుడు ఒక్కొక్కవస్తువును ప్రత్యక్షముగనో, మానసికముగనో వేరుపరచి, ఒకటి, రెండు, మూడు అని గణించెదము. కడపటివస్తువును వేరుచేయునపుడు ఏసంఖ్యను ఉచ్చరించెదమో అదియే ఆసమూహములో ఉండెడి వస్తుసంఖ్య అనెదము. "ఒకటి,

రెండు, **మూడు** " అను వరుసకు ఉన్న ప్రత్యేకగుణములు ఏమనగా ఈవరుసలో ప్రారంభసంఖ్య ఉన్నది. దీనిపేరు ఒకటి. రెండవ గుణమేమనగా ప్రతి సంఖ్యకు తరువాత మరియొక క్రొత్తసంఖ్య ఉన్నది. ఈరెండు గుణములు కల ఏ సమూహమునైనను గణనసంఖ్యలుగా ఉపయోగింపవచ్చును. రెండువస్తు సమూహముల సంఖ్యలు A, B అయినట్లయితే, ఆ రెండు సమూహములను చేర్చి ఒకే సమూహమన్న దృష్టితో చూచినచో ఈ క్రొత్తసమూహమునకు ఒకసంఖ్య C ఉన్నది. దానిని $A+B=C$ అని వ్రాసెదము. ఇటుల సంకలనక్రియకు ఒక ముఖ్యగుణము $A+B=B+A$ అనునదియే. అనగా ఈరెండింటిలో ఏ సంఖ్యనైనను మొదటిసంఖ్యగా తీసికొని, **మరియొకటిని** రెండవదానిగా తీసికొన్నను సంకలన సంఖ్య మారదు. ఈతత్త్వమును సరిచూచుటకు వరుసగా **మూడు** చుక్కలను, తరువాత అదేవరుసలో అయిదు చుక్కలను క్రింద చిత్రించినట్లు వ్రాసెదము.

• • •   • • • • •

ఈ చుక్కల సమూహము ఎడమ ప్రక్కనుండి కుడివైపునకు చదువునపుడు $3+5$ గను, కుడిప్రక్క నుండి ఎడమ ప్రక్కకు చదువునపుడు $5+3$ గను గోచరించుచున్నది. ఏ వస్తుసమూహమునకైనను అద్వితీయమయిన ఒక సంఖ్య ఉన్నదని ఒప్పుకొనినట్లయితే $3+5=5+3$ అను సిద్ధాంతము ఏర్పడును.

రెండు సంఖ్యల - ఉదాహరణమునకు మూడు, అయిదు - గుణకారమును నిర్వచించుటకు క్రింద వివరించిన మార్గమును అనుసరించెదము. ఒక్కొక్క సమూహములోను మూడు వస్తువులుకల అయిదు సమూహములను తీసికొనెదము. ఈ అయిదు సమూహములలోని వస్తువులన్నియు ఒకే సమూహముగా ఎంచినట్లయితే, ఈ పెద్ద సమూహపు సంఖ్యను మూడు, అయిదు సంఖ్యల గుణకారలబ్ధ సంఖ్య అనెదము. అనగా 3×5 అనెదము. క్రింది చిత్రములో అయిదు వరుసల బిందు సమూహములు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క వరుసలోను మూడు బిందువులు ఉన్నవి. అన్ని బిందువులను ఎంచినచో 15 బిందువులు అగుచున్నవి. అందువలన $3\times 5=15$ అని వ్రాసెదము. అయితే ఇదే సమూహములను స్తంభాకారపు వరుసలుగ భావించినచో ఒక్కొక్క స్తంభములోను 5 బిందువులు ఉన్నట్టి 3 స్తంభములు ఉన్నవి. అందువలన $5\times 3=15$.

• • •
• • •
• • •
• • •
• • •

అనగా $3\times 5=5\times 3$ అని నిరూపించితిమి. ఇదేరీతిని a, b లు ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యలైనను $a\times b=b\times a$ అని నిరూపించవచ్చును.

ఏ రెండు పూర్ణాంకములు తీసికొన్నను వాటి సంకలనము, గుణకారము ఎల్లప్పుడును సాధ్యమగును ; లబ్ధ సంఖ్యయు ఎల్లప్పుడును పూర్ణసంఖ్యగనే ఉండును.

పూర్ణాంకములను వ్రాయు విధములు : పూర్ణాంకములను వ్రాతలో గుర్తించుటకు వేర్వేరు దేశములలో వేర్వేరురీతులు వాడబడినవి. ప్రారంభములో 'ఒకటి' అనుటకు ఒకగీత, 'రెండు' అనుటకు రెండు గీతలు ఇటుల వ్రాసియుండవలెను. అయితే సంఖ్యలు ఎక్కువ కాగా ఇతర సంకేతములు వాడుకకు వచ్చెను. రోమన్ పద్ధతి ప్రకారము V అనునది 'అయిదు' అను సంఖ్యకు సంకేతము. ఇది ఒక చేయి యొక్క చిత్రము కాబోలును ; ఏలన ఒక చేతిలో అయిదు వ్రేళ్లున్నవి. అయిదునకు తరువాత వచ్చు సంఖ్యలను 'అయిదు న్నొకటి', 'అయిదు రెండు' అనగా VI, VII అని వ్రాసిరి. పది అను సంఖ్య వచ్చునపుడు రెండు చేతులను చేర్చి X అను సంకేతమును వాడిరి. దాని తరువాత 'పదిన్నొకటి' XI, 'పది రెండు' XII అను సంకేతములు ఉపయోగించిరి. కొన్ని సమయములలో ఒక గీతను పెద్ద సంఖ్యకు ఎడమ ప్రక్కను గీయుటవలన ఒక సంఖ్య తగ్గించవలెనను సంప్రదాయమును అనుసరించి IV = 5 − 1 = 4, IX = 10 − 1 = 9 అనియు వ్రాసిరి. ఇటుల వ్రాయుటలోని దోషములు ఏమనగా సంఖ్యలు పెరుగగా క్రొత్త క్రొత్త సంకేతములను కల్పింపవలెను. రోమన్ సంప్రదాయములో X అను సంఖ్యకు తరువాత L = 50, C = 100, D = 500, M = 1,000 అను సంకేతములను వాడిరి. ఈ రీతిగా రెండువేల నాలుగు వందల డెబ్బది మూడు అను సంఖ్య వ్రాయు విధము MMCCCCLXXIII. మనము ఇప్పుడు వాడు 2,473 అను సంకేతము కన్న పై వ్రాసినది ఎంత మోటయినదో సులభముగా చూడవచ్చును. రోమన్ పద్ధతిని సంఖ్యలను వ్రాయునపుడు సంఖ్యల సంకలనము, గుణకారము అతి చిక్కయిన కార్యములు అగుచున్నవి ; భాగహారము ఇంచుమించుగా అసాధ్యమయిన పరికర్మయే. ఇతర ప్రాచీన సంఖ్యా వివరణ పద్ధతులు ఇటువంటివే. అందువలన ఇప్పుడు మనము వాడు హిందూ - అరబ్బీ సంఖ్యా సంకేతములు సామాన్యముగా వాడుకకు వచ్చువరకు గణితము యొక్క అభివృద్ధి అతి స్వల్పముగనే ఉండెను.

భారతదేశమునందు వేదకాలములోనే తైత్తిరీయ సంహిత 7వ అధ్యాయమునందు 10^{18} = సువర్గ, 10^{19} = లోక అని పేళ్లను ఇచ్చి చాల పెద్ద సంఖ్యలను కూడా

వివరించియున్నారని తెలియుచున్నది. అయితే ఈ సంఖ్యలను వ్రాతలలోనో అంకగణిత పరికర్మములలోనో ఉపయోగించినట్లు తెలియలేదు.

హిందూ - అరబ్బీ సంఖ్యాసంకేతములు మొట్టమొదట ఆచరణలో పెట్టినవారు భారతీయులే. భారతదేశమునుండి అవి అరబ్బులమూలమున ఇతరదేశములకు చేరెను. ఈ రీతిగా వ్రాసిన సంఖ్యలు యూరప్‌లో స్పెయిన్ దేశమునందు క్రీ. శ. 976 లో చూచెదము. క్రీ. శ. 13 వ శతాబ్దములోనే యూరప్‌లో ఈ పద్ధతి సామాన్యముగ వాడుకలోనికి వచ్చెను.

హిందూ - అరబ్బీ సంఖ్యా సంకేతములలోని విశేషాంశములు రెండు. ఒక అంకె యొక్క విలువ దాని స్థానము మీద ఆధారపడియుండుట మొదటిది. 4 అను అంకె కుడివైపున కడపటి స్థానమున ఉన్నట్లయితే, దాని విలువ నాలుగు. అదే అంకె ఒక స్థానము ఎడమవైపు జరిగితే దాని విలువ నలభై అగుచున్నది. మరియొక స్థానము ఎడమకు జరిగితే అదే అంకె విలువ నాలుగువందలు అగుచున్నది. ఈ సంఖ్యా విధానమునకు మరియొక విశిష్టత 'శూన్యము' అనుటకు ఒక సంకేతము '0' ఉండుటయే. ఇట్టి సంకేతము లేకపోయినచో ఒక స్థలము రిక్తముగా ఉన్నచో దానిని సూచించుట సాధ్యము కాదు. '0' అను సంకేతమును ఉపయోగించియే నాలుగు, నలభై, నాలుగువందలు అను సంఖ్యల వ్యత్యాసమును వ్రాతలో తెలియజేయవచ్చును. ఈ రెండు విశేషాంశముల ద్వారా 0, 1, 2........9 అను పది సంకేతములతో అన్ని సంఖ్యలను సులభముగా వ్రాయవచ్చును. అదియుగాక సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము - ఈ నాలుగు అంకగణిత పరికర్మలును అతి సులభములగుచున్నవి.

ఈ సంఖ్యావిధానము భారతదేశములో ఎప్పుడు వెలుగు చూచినదో నిర్ణయించుట కష్టము. సుమారు క్రీ. శ. 200 లకు చెందిన నాసిక్ గుహలలోని శిలాశాసనములో ఒకటి నుండి తొమ్మిదివరకు సంకేతములు ఉన్నవి కాని శూన్యమునకు సంకేతములేదు. అయితే క్రీ. శ. 876 నాటి శిలాశాసనములలో శూన్యమునకు ఒక సంకేతము ఉన్నది. క్రీ. శ. 5 వ శతాబ్దమందే ఈ పద్ధతి ప్రారంభించి ఉండవలెనని కొందరు అభిప్రాయపడుచున్నారు.

అంకెల విలువలు స్థానముపై ఆధారపడి ఉండవచ్చును అను భావమును భారతీయులకు పూర్వమే క్రీ. పూ. 2,100 లోని బాబిలోనియన్‌లు ఉపయోగించిరి. నేడు మనము ఉపయోగించు అంకెలు స్థానము మారుటచే 10 రెట్లుగా విలువలు మారుచుండును. కాని బాబిలోనియన్‌ల పద్ధతి ప్రకారము స్థానమూల్యము 60 రెట్లు మారుచుండెడిది. కాని శూన్యమునకు ఒక సంకేతము కావలెనని వారు చాల కాలము గుర్తించలేదు; గుర్తించినతరువాతను దానిని వారు గణనములో వాడలేదు. కాబట్టి వారి వ్రాతలలో ఏది ఒకటవ స్థానమో కనిపెట్టుట కష్టమగుచున్నది. ఆ కాలములోనే వారు ఆధునిక సంఖ్యావివరణమునకు ఇంత దగ్గరకు వచ్చుట వారి సామర్థ్యమును చూపుచున్నది.

భిన్నాంకములు

1, 2, 3 వంటి చిన్న పూర్ణాంకములతో సగము, పాతిక వంటి భిన్నాంకములుకూడ అతి ప్రాచీనకాలములోనే వాడుకలోనికి వచ్చియుండవలెను. అతి ప్రాచీన భిన్నములు '1' ని సమభాగములుగా విభజించుటవలన కలిగినవి. అనగా '1' ఎల్లప్పుడును లవముగా ఉండెను. ఇతర భిన్నములను ఏకాంక లవభిన్నముల సంకలనరాశిగా వ్రాయుచుండిరి. ఉదాహరణమునకు $\frac{7}{8}$ అను భిన్నమును $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ అని వ్రాసిరి.

గణితములో మనకు దొరకిన అతి ప్రాచీనగ్రంథము ఈజిప్టుదేశములో క్రీ. పూ. 1,550 లో ఆమస్ అను లేఖకుడు వ్రాసినది. ఇది దానికి పూర్వమున ఉన్న వ్రాతకు ప్రతి అని వ్రాసియున్నది. దీనియందు 2/43 విలువగల భిన్నము $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{86}$, $\frac{1}{129}$, $\frac{1}{301}$, అను ఏకాంక లవభిన్నముల సంకలనముగా వ్రాయబడినది. ఏకాంక లవభిన్నములుకాక ఇతర భిన్నములందు 2/3 ను మాత్రమే ఈజిప్టుదేశములో వాడిరి. ఈ భిన్నములలో కొన్నిటికి ప్రత్యేకమయిన పేర్లు కలవు. $\frac{1}{4}$ = పాతిక, $\frac{1}{2}$ = సగము, $\frac{3}{4}$ = ముప్పాతిక, $\frac{1}{8}$ = పరక, $\frac{1}{16}$ = వీసము, $\frac{1}{64}$ = కాణి. తమిళములో ఇవి కాక $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{320}$ భిన్నములకు ప్రత్యేకనామములు కలవు. పూర్వము బాబిలోనియన్‌లు 60 హారముగా గల భిన్నములను, రోమన్‌లు 12 హారముగా గల భిన్నములను వాడుచుండిరి.

బ్రహ్మగుప్తుని కాలము (క్రీ. శ. 628) నుండి భారతీయులు ఏ పూర్ణాంకమునైనను లవముగను మరియొక పూర్ణాంకమును హారముగను ఉపయోగింపసాగిరి. కాని వారి వ్రాతలో ఇప్పటివలె మధ్యగీత లేదు. అనగా మనము $\frac{4}{7}$ అని వ్రాయు భిన్నమును $\begin{smallmatrix}4\\7\end{smallmatrix}$ అని వ్రాసిరి. భిన్నములలో లవము '1' యే ఉండవలెనను నిర్బంధము లేకపోవుట వలన భారతదేశములో అంకగణితము ఇతర దేశములందు కన్న చాల పూర్వముననే అభివృద్ధి చెందెను. వరాహమిహిరుడు (క్రీ. శ. 505) వ్రాసిన గ్రంథములో

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ అను సిద్ధాంతమును ఇచ్చియున్నాడు. దీనినే యూరప్‌లో 16 వ శతాబ్దమునందు గుర్తించిరి.

దశాంశములు: ఆధునిక కాలములో దశాంశ సంఖ్యలు ఎక్కువ వాడుకకు వచ్చినవి. ఇవి భిన్నాంకములలో ఒక భాగము. ఒక భిన్నాంకమునకు హారము 10 లేదా 100, లేదా 1,000, లేదా 10^n (n పూర్ణాంకము). అయిన అది దశాంశభిన్నము అనబడును. 323/100ను 3·23 అని వ్రాసెదము. అటులనే 47·201 కు విలువ 47201/1000. ఈ భిన్నమునకు లవముగా దశాంశ సంఖ్యలో ఉన్న అంకెలు అదే క్రమముగా తీసికొనెదము. హారమునకు 1 వ్రాసి తరువాత లవములో దశాంశ బిందువు తరువాత ఎన్ని అంకెలుఉన్నవో అన్ని సున్నలను వ్రాసికొనెదము. దశాంశ ములద్వారా ఏ భిన్నమునకుగాని, లేదా ఏ కరణీయ సంఖ్యకుగాని మనకు ఇష్టమైనంతవరకు రమారమి అగు విలువను వ్రాయవచ్చును. అయితే కొన్ని భిన్నములను కచ్చితముగా దశాంశపద్ధతిలో వ్రాయవలెననినచో, అంకెల అనంతపరంపర కావలయును. ఉదా: $\frac{1}{3} = 0·3333........$; $\frac{1}{7} = 0·142857142857142857....$ హిందూ - అరబ్బీ సంఖ్యా సంకేతములలోఉన్న భావముల విస్తరీకరణమే దశాంశ సంఖ్యల భావము. అయినను, దశాంశ సంఖ్యలను మొట్టమొదట స్పష్టముగా వివరించినది బెల్జియన్ విజ్ఞాని స్టెవిన్ (1585).

పై వివరించిన పూర్ణాంకములు, భిన్నాంకములును చేరిన సమూహమును ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యలు అనవచ్చును.

ఋణాత్మక సంఖ్యలు

ఋణాత్మక సంఖ్యాభావము అనగా శూన్యముకంటె తక్కువ సంఖ్యలు ఉన్నవని గుర్తించుట. ఇది కఠినమైన క్రియ. అయితే వ్యవహారములో ఇట్టి సంఖ్యలకు ఎన్నో దృష్టాంతములు గోచరించుచున్నవి. ఉదా: లాభము - నష్టము; ధనము - ఋణము; ఎత్తు - లోతు; ఇటువంటి జతలలో మొదటిది శూన్యముకన్న ఎక్కువ సంఖ్య అయినచో రెండవది తక్కువ సంఖ్య అగుచున్నది. ఈ భావమును మరియొక విధమున గ్రహించుటకు సంఖ్యలను ఒక ఋజురేఖపై అమర్చెదము. ఒక ఋజురేఖపై ఒక మూలబిందువు O ను, ఏదో ఒక మాన యూనిట్‌ను OAను తీసికొని, O నుండి కుడివైపున $OA_1 = OA$, $OA_2 = 2\ OA$, $OA_3 = 3\ OA$,....ఇట్లు కొల్తుము. అనగా $OA_n = n.OA$ అగుచున్నది. ఇట్లు 1, 2, 3 వంటి అన్ని పూర్ణాంకములకు అనురూపముగా బిందువులు A_1, A_2, A_3....అమర్చి ఉంటిమి. అటులనే భిన్నాంకమగు p/q కు అనురూపముగ ఒక బిందువు $A_{p/q}$ అమర్చవచ్చును. ఎట్లనగా OA ను q సమభాగములుగా విభజించి, ఈ పొడవును O నుండి కుడివైపున వరుసగా గురుతులు చేయుచు పోయినట్లయిన లభించు బిందువులకు $A_{1/q}$, $A_{2/q}$, $A_{3/q}$.........అని నామకరణము చేయవచ్చును. ఈ రీతిని O నుండి బయలుదేరి, ఎడమప్రక్కన OA, 2 OA, 3 OA.........ఖండములు కొలిచినచో లభించు బిందువులకు A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}.... అని పేర్లు పెట్టవలసియున్నది. ఇటులనే (p/q) OA ను ఎడమప్రక్కన O నుండి కొలచినచో లభించు బిందువునకు $A_{-p/q}$ అని పేరు పెట్టవచ్చును. ఈ పద్ధతి ప్రకారము మూలబిందువగు 'O' కు మరియొక పేరు A_0 అగును. O కు కుడివైపున ఉన్న బిందువులన్నియు ధనాత్మక సంఖ్యలను సూచించును; ఎడమవైపున ఉన్న బిందువులన్నియు ఋణాత్మక సంఖ్యలను సూచించును. రేఖలో ఉన్న రెండు బిందువులు తీసికొనినచో ఆ రెండింటిలో కుడివైపునఉన్న బిందువుయొక్క సంఖ్య ఎడమవైపునఉన్న బిందువుయొక్క సంఖ్యకన్న పెద్దది. ఇట్లు అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను $(\pm p/q)$ ఋజురేఖపై అమర్చవచ్చును.

గణితశాస్త్రీయ దృష్టిలో ఋణాత్మక సంఖ్యల ప్రవేశమువలన కలిగిన లాభమేమనగా వ్యవకలనము ఎల్లప్పుడును సాధ్యమగుచున్నది. పెద్ద సంఖ్యల (అనగా కుడివైపునఉన్న సంఖ్యల) నుండి చిన్న సంఖ్యల వ్యవకలనము వలన వచ్చు సంఖ్యలు ధనాత్మకమయినవి. చిన్న సంఖ్యల నుండి పెద్ద సంఖ్యల వ్యవకలనమువలన వచ్చు సంఖ్యలు ఋణాత్మకమైనవి. ఉదా: $12 - 4 = 8$; $4 - 12 = -8$; $(-3) - (-7) = 4$; $(-7) - (-3) = -4$. వ్యవకలనమునకు నేడు వాడుకలో ఉన్న సంకేతము '$-$'. అందువలన ఋణాత్మక సంఖ్యలను అనగా శూన్యము నుండి వ్యవకలనమువలన వచ్చిన సంఖ్యలను గుర్తించుటకు -1, -2, -3 అని వ్రాయుదుము. అటులనే ధనాత్మక సంఖ్యలను 1, 2, 3.... లేదా $+1$, $+2$, $+3$.... అని వ్రాయవచ్చును.

భారత దేశమునందు బ్రహ్మగుప్తుని కాలముననే ఋణాత్మక సంఖ్యలను ప్రత్యేకముగా గుర్తించిరి. వాని సంకలన వ్యవకలనములకు సూత్రములను విరచించిరి. అయినను ఆదికాలమునందు సంకలన, వ్యవకలన పరికర్మలకు ఇప్పటి సంకేతములు వాడబడలేదు. '.' అను సంకేతమును లేదా '0' అను సంకేతమును ఒక అంకెపై వ్రాసినట్లయితే ఆ సంఖ్యను వ్యవకలనము చేయవలెనని అర్థము. బక్షాలిశాఖ

పత్రమునందు ఋణాత్మక సంకేతము '+'. ఇది సంస్కృత మందలి **कणित** అను పదములోని ప్రథమాక్షరమగు **क** యొక్క చిహ్నముగా ఉండవచ్చునని కొందరి అభిప్రాయము.

అకరణీయ సంఖ్యలు

ధన, ఋణ పూర్ణాంకములు, శూన్యము (0). ధన, ఋణ భిన్నాంకములు - ఇవి అన్నియు చేరి అకరణీయ సంఖ్యల సమూహములు అనబడును. వీనియందు సంకలనము, వ్యవకలనము మాత్రమే కాక గుణకారము, భాగహార మును ఎల్లప్పుడును సాధ్యము (భాగహారము నందు శూన్యము భాజకముగ ఉండకూడదను నియమము మాత్రము ఉన్నది). రెండు ధనసంఖ్యలనో, రెండు ఋణ సంఖ్యలనో తీసికొని గుణకారము, లేదా భాగహారము చేసినచో దొరకు ఫలితమును ధనాత్మకముగ తీసికొన వలెను. రెండు సంఖ్యలలో ఒకటి ఋణాత్మకముగను మరి యొకటి ధనాత్మకముగను ఉన్నచో లబ్ధఫలితమును ఋణాత్మకముగ తీసికొనవలయును.

ఉదా: $2\times(-3)=-6$; $(-3\times-2)=6$; $(-3)/(-2)=+\frac{3}{2}$. ఇటుల తీసికొనుటకు కారణ మేమనగా ధనాత్మక సంఖ్యలందు $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ అను నియమము ఉన్నది. అటులనే $a\times b=b\times a$ అనియు, $(a+b)\times(c+d)=(a\times c)+(a\times d)+(b\times c)+(b\times d)$ అను సర్వసమసమీకరణ ములుఉన్నవి. ఈ ధర్మము లన్నియు ఋణాత్మక సంఖ్యలకు కూడ అన్వయించుననుకొన్నచో అప్పుడు $2\times(-3)=(-3)\times 2=(-3)+(-3)=-6$ అగుచున్నది. అటులనే $(7-3)\times(5-2)=(7\times 5)+(7\times -2)+(-3\times 5)+(-3)\times(-2)=35-14-15+x$. ఇచ్చట $(-3)\times(-2)$ ను x అని వ్రాసితిమి. అయితే $(7-3)\times(5-2)=4\times 3=12$. అందువలన $35-14-15+x=12$ అనగా $x=+6$ అగుచున్నది. అయితే $x=(-3)\times(-2)$ అని వ్రాసితిమి కనుక $(-3)\times(-2)=+6$ అని తీసికొనవలెను. ఈ సంకేత గుణకార నియమములను బ్రహ్మగుప్తుడు గుర్తించి ఉన్నాడు.

కరణీయ సంఖ్యలు

అన్ని ధన, ఋణ పూర్ణాంకములను(± 1, ± 2, ± 3.... ....), భిన్నాంకములను ($\pm p/q \pm p$, q పూర్ణాంక ములు) ఒక రేఖపై ఎటుల బిందువులుగా అమర్చవచ్చునో వర్ణించితిమి. ఇట్లు అమర్చిన బిందువులు ఏ రెండు తీసికొనినను వాటి మధ్య కావలసినన్ని అమర్చిన ఇతర బిందువులు ఉన్నవి. ఉదా: 21/30 కిని, 22/30 కిని మధ్య 211/300, 212/300, 213/300.........219/300 అను తొమ్మిది బిందువులు ఉన్నవి. 99 బిందువులు కావలయునన్నచో 2101/3000, 2102/3000....2199/3000 అని తీసికొనవచ్చును. ఇవన్నియు 21/30 కి ఎక్కువగను, 22/30 కి తక్కువగను ఉన్న సంఖ్యలు. అందువలన ఋజురేఖ $\pm p/q$ అను అకర ణీయ సంఖ్యలతో నిబిడమైయున్నదని చెప్పవచ్చును. అనగా రేఖయొక్క ఏ అంశమునందును ఇట్టి బిందువులులేని అంతరము లేదు.

అటులైనచో ఋజురేఖపై ఇతర బిందువులకు స్థలము లేనట్లు తోచునుకదా? అయినను గ్రీక్ గణితజ్ఞులు ఈ ఊహ తప్పనియు, ఋజురేఖపై ఇవియేగాక అనంత సంఖ్యగల ఇతర బిందువులు ఉన్నవనియు క్రీ. పూ. 500 నాడు (పితాగొరస్ కాలముననే) కనిపెట్టిరి. పొడవు '1' గల చతురస్రమునువారు తీసికొని, దాని యొక్క వికర్ణము పొడవు అట్టి ఇతర బిందువు అని అనగా p/q (p, q - పూర్ణాంకములు) అను రూపముగా వ్రాయ సాధ్యము కాదని నిరూపించిరి. ఈ నిరూ పణము అతి సులభము. అందువలన దీనిని క్రింద వివరించెదము.

మొదట p, q రెండు పూర్ణాంకములను విభజించు పూర్ణాంకము (1 మినహా) లేదని అనుకొనెదము. అటుల ఉన్నచో దానిని కొట్టివేసి, భిన్నమును సులభీకరింప వచ్చును. చతురస్రపు పొడవు 1 అయితే దాని వికర్ణము $\sqrt{(1^2+1^2)}=\sqrt{2}$ అగును. అందువలన $\sqrt{2}=p/q$ అయితే $p=\sqrt{2}\times q$; $p^2=2q^2$. కావున p^2 ఒక సరి సంఖ్య అగును. కావున p యును ఒక సరిసంఖ్య. దానిని $p=2r$ అని వ్రాయుదుము. ఇచ్చట r పూర్ణాంకము. $p^2=4r^2$. అయితే $p^2=2q^2$. కావున $4r^2=2q^2$; $2r^2=q^2$; q^2 సరిసంఖ్య, కాబట్టి q ఒక సరిసంఖ్య - అనగా 2 అను పూర్ణాంకము p, q రెండింటిని విభజించుచున్నది. అయితే మనము ప్రారంభములో అట్టి పూర్ణాంకములను కొట్టివేసితిమి. మన వాదములో ఏ లోపమును లేదు. అందువలన ఈ తర్కసంకటమునకు కారణము మనము ప్రారంభములో $\sqrt{2}=p/q$ అని వ్రాసినదియే. అనగా $\sqrt{2}$ అను పొడవును లేదా సంఖ్యను p/qకు అనురూప ముగా వ్రాయ సాధ్యముకాదు.ఇట్టి సంఖ్యలకు (అనగా p/q అను నిష్పత్తిరూపములో వ్రాయనసాధ్యమగు సంఖ్యలకు) కరణీయ సంఖ్యలని పేరు.

ఇటువంటి సంఖ్యలలో చేరునవి $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{15}$, π (π అనునది ఒక యూనిట్ వ్యాసముగల ఒకవృత్తము యొక్క పరిధి).

ఈ తత్త్వమును గ్రీక్ విజ్ఞాని పితాగొరస్ (క్రీ. పూ. 6 వ శతాబ్దము) కనిపెట్టినపుడు వారును, వారి శిష్యులును పూర్ణాంకములకు ఇట్టి లోపము ఉన్నదని దిగులుపడి ఈ విషయమును అతిరహస్యముగా ఉంచిరి. కాని కాలక్రమమున అది అందరికిని తెలిసిపోయెను. భిన్నములవలెనే అకరణీయసంఖ్యలను వాడుటకు త్రోవచూపినది యుడాక్సస్ (క్రీ. పూ. 408-355) అను గ్రీక్ గణితజ్ఞుడు. ఈ మార్గమునే యూక్లిడ్ తన జ్యామితియందు ఉపయోగించెను.

కరణీయసంఖ్యలను భిన్నాంకరూపమున వ్రాయుట సాధ్యముకాకపోయినను, అట్టి సంఖ్యలకు ఇష్టమైనంత దగ్గరనున్న భిన్నాంకములనో, దశాంశ సంఖ్యలనో కనిపెట్టవచ్చును. ఉదా: $1{\cdot}4142 < \sqrt{2} < 1{\cdot}4143$. ఇచ్చట 1·4142, 1·4143 భిన్నాంకములు. వీటికిని $\sqrt{2}$ కును ఉన్న వ్యత్యాసము 0·0001 కంటె తక్కువ. అందువలన వ్యవహారములో $\sqrt{2}$ కు సమమయిన భిన్నాంకము లేదనుట వలన ఏ శ్రమయును కలుగుటలేదు.

వాస్తవ సంఖ్యలు

ధన, ఋణ పూర్ణాంకములు, భిన్నాంకములు (వీనిలో పరిమిత దశాంశములు ఒక విభాగము), శూన్యము, ఇవన్నియు చేరిన సమూహమునకు అకరణీయసంఖ్యలని పేరు పెట్టితిమి. వీనిలో చతుర్విధ పరికర్మలు అనగా సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము సాధ్యము (శూన్యము హారముగా ఉండకూడదని ఒక నియమము). అట్లు లభించిన ఫలితములు అకరణీయ సంఖ్యలు. అటులనే అకరణీయసంఖ్యలును, కరణీయ సంఖ్యలును చేరిన సమూహమునకు వాస్తవ సంఖ్యా సమూహము అని పేరు. ఈ సమూహములో చతుర్విధ పరికర్మలుగాక, ధనాత్మకసంఖ్యలకు వర్గమూలము, ఘన మూలమువంటి పరికర్మలును సాధ్యమగుచున్నవి. ఒక ఋజురేఖపై అన్ని వాస్తవసంఖ్యలకు అనుగుణమైన బిందువులు అమర్చినచో, ఆ రేఖపై వేరు వాస్తవ బిందువులకు చోటులేదు. అన్ని కొలతలకును వాస్తవ సంఖ్యలు చాలినవగుచున్నవి.

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

అన్ని కొలతలకు వాస్తవసంఖ్యలు సరిపోవునప్పటికి గణిత శాస్త్రజ్ఞులు మరికొన్ని ఇతర సంఖ్యలనుకూడ కనిపెట్టి వాడిరి. వాటిలో ముఖ్యమయినవి 'సంకీర్ణ సంఖ్యలు.' ఇవి $x+iy$ రూపములో ఉండు సంఖ్యలు. ఇచ్చట x, y వాస్తవ సంఖ్యలు, i అనునది నూతనముగా ప్రవేశపెట్టబడిన సంకేతము. దీనిని $i^2=-1$ అను సంబంధముచే నిర్వచించెదము. అనగా ఇది ఋణచిహ్నము గల యూనిట్‌నకు వర్గమూలము. వాస్తవసంఖ్యల వర్గములుఅన్నియు ధనాత్మకములగుటచే, i అనునది వాస్తవ సంఖ్యకాదు. ఈ $x+iy$ రూపముగల సంకీర్ణ సంఖ్యలందు సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహారములు (శూన్యముతో భాగహారము మినహా) చేయనగును.

ఉదా: $(2+3i)+(4+7i)=6+10i$;

$$(2+3i)\times(4+7i)=8+14i+12i+21i^2.$$

అయితే $i^2=-1$. కాబట్టి

$$(2+3i)\times(4+7i)=-13+26i.$$

అటులనే $\dfrac{i}{1-i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$.

అందుచేత $x+iy$ రూపముననున్న సంఖ్యలన్నియు ఒకే క్షేత్రమునకు చెందినవగుచున్నవి. వీనిలో $y=0$ అని తీసికొనినచో ఒక అంశము వాస్తవ సంఖ్యాక్షేత్రము. కావున ఈ నూతన క్షేత్రము వాస్తవ సంఖ్యాక్షేత్రమున కన్న విశాలమయినది. ఈ క్రొత్త క్షేత్రములయొక్క ప్రయోజనమేమనగా వీనిని ఉపయోగించి $x^2=-4$, లేదా $x^2+x+1=0$ వంటి సమీకరణములను సాధింపవచ్చును. వాస్తవ సంఖ్యలు మాత్రము ఉపయోగించినచో పై వ్రాసిన సమీకరణములు సాధ్యముకావు. ఇవియేకాక

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_{n-1}x+a_n=0$$

వంటి సమీకరణమును ఇచ్చినను సంకీర్ణసంఖ్యలను ఉపయోగించి, దాని మూలములను కనిపెట్టవచ్చును. గుణకములగు a_0, a_1, …., a_n వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉండవచ్చును, లేదా అవి కూడ సంకీర్ణ సంఖ్యలుగానే ఉండవచ్చును. పై వ్రాసిన సమీకరణమునకు n మూలములు ఉండును. అందువలన అట్టి ఏ సమీకరణమునైనను సాధించుటకు వేరు సంఖ్యలు అవసరము లేదు.

బీజగణితము

అంకగణితమునకు తరువాత ఇదియే గణితములోని అతిసులభమును, ముఖ్యమునగు భాగము. ఇచ్చట సంఖ్యలను, అక్షరములను రెండింటిని ఉపయోగించెదము. ఇచ్చట $2x$ అనగా $2\times x$ అని అర్థము. $2x+3x=5x$ అను సర్వసమ సమీకరణమందు xకు ఏ సంఖ్యను విలువగా ఇచ్చినను అది సత్యమగును. అటులనే $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ అనునది

సర్వసమత ; అయితే $x^2 - 5x + 6 = 0$ అని వ్రాసితిమేని, ఇది $x = 2$, $x = 3$ అను రెండు విలువలకు మాత్రమే సత్యమగును. అట్టి విలువలను కనిపెట్టుటయే సమీకరణ వాదము. బీజగణితములో ఇది ఒక ముఖ్యమైన శాఖ. ఇందు ఒక సమీకరణమునకు మూలములు కనుగొనుట, మూలముల లక్షణములు, వాని పరస్పర సంబంధములు పరిశీలింపబడుట జరుగును.

మనకు తెలిసినంతవరకు అతిప్రాచీనమయిన సమీకరణము ఈజిప్టుదేశపు అమస్ సుమారు క్రీ. పూ. 1550 లో వ్రాసిన ప్రతి 'పపైరస్' పత్రములో ఉన్నది. ఇది "ఒక గుంపును దాని ఏడవ భాగముతో చేర్చినట్లయితే 19 అగుచున్నది. ఆ గుంపు విలువ ఎంత ?" అనునదియే. ప్రాచీన కాలమునందు '+' '−' అను సంకేతములు వాడుకలో లేవు. ప్రశ్నను దాని సాధనమును మాటలలోనే వ్రాయుచుండిరి.

భారతీయులు బీజగణితమును శుల్బసూత్రముల కాలమునకే (క్రీ. పూ. 800-500) గుర్తించిరి. బక్షాలీ తాళపత్ర గ్రంథములో వర్గ సమీకరణ సాధనమును చర్చించియుండిరి. దీని సాధనకు బ్రహ్మగుప్తుడు రెండు సూత్రములను ఇచ్చి ఉన్నాడు. ఆర్యభటుడు వర్గసమీకరణమునకు రెండు మూలములు కలవని నిరూపించియుండెను. ఇవిగాక ఎక్కువ తరగతుల సమీకరణములు కొన్ని ప్రత్యేకముగా వారిచే సాధింపబడెను. ఈ విషయములన్నియు ప్రాచీన భారతీయుల మేధాసంపత్తిని మనకు స్పష్టపరచుచున్నవి. ఇంతకంటె విశేష ప్రశస్తమయిన సమస్యలు భారతీయులు ఆ కాలముననే సాధించిరి. అందులో ఒకటి అనిశ్చిత ప్రథమ తరగతి సమీకరణసాధన: $ax - by = c$. ఇచ్చట a, b, c ధనాత్మక పూర్ణాంకములు. x, y యొక్క విలువలు పూర్ణాంకములై ఉండవలయును. ఆర్యభటుడు-I దీనికి వ్యాపక (అనగా సంపూర్ణ) సాధనము కనిపెట్టెను. అతని తరువాతి భారతీయులు 'కుట్టకము' (చూ) అను శీర్షిక క్రింద ఈ విషయమును ప్రత్యేక ప్రకరణములక్రింద విమర్శించిరి. బహుపద అనిశ్చిత ప్రథమ తరగతి సమీకరణములను కూడ వారు సాధించిరి.

రెండవ తరగతి సమీకరణము $Nx^2 + 1 = y^2$ ఇంతకంటె కష్టసాధ్యము. ఇచ్చటను N పూర్ణాంకము. x, y పూర్ణాంకమగు సాధనములు కావలెను. 'చక్రవాళము' అను పద్ధతిని ఉపయోగించి, భాస్కరాచార్య II బ్రహ్మగుప్తుని మార్గమును అభివృద్ధిచేసి ఈ కఠిన సమస్యను సాధించెను. 18వ శతాబ్దమునకు పూర్వము సంఖ్యావాదములో ఇదియే అత్యుత్కృష్టమగు సమస్యయని చెప్పవచ్చును. ఇపుడు దీనిని పెల్లియన్ సమీకరణము అని చెప్పుదురు. కాని దీనిని భాస్కరసమీకరణమని చెప్పుటయే ఉచితము.

భాస్కరాచార్య II చక్రవాళ పద్ధతిని వివరించుటకై 1150 లో $61x^2 + 1 = y^2$ సమీకరణమును సాధించెను. ఇది అతికష్టసాధ్యము. ఇదే సమస్యను 500 సంవత్సరముల తరువాత (1657) ప్రఖ్యాత స్విజర్లండ్ గణితవేత్త ఆయిలర్ ఒక పోటీ ప్రశ్నగా ప్రకటించెను. దీని జవాబును ఆయిలర్ 1657లో కనిపెట్టెను. అది $x = 226153980$, $y = 1766319049$. ఇంకను ఎన్నో జవాబులు ఉన్నవి. అయితే వాటి అన్నిటిలో పైన ఈయబడినదే అతిసులభమైనది. $Nx^2 + 1 = y^2$ లేదా $ax \pm by = c$ అను రెండు చలరాశులు x, y గల సమీకరణమును (ఇచ్చట N, a, b, c పూర్ణాంకములు) ఇచ్చి వేరే నియమములు లేకపోయినచో దీనికి ఎన్నో జవాబులు ఉన్నవి. ఎందుకన, మనము x కు కావలసిన విలువనిచ్చి, y ను కనిపెట్టవచ్చును. అయితే ఇట్టి సమీకరణములలో x, y రెండును పూర్ణాంకములుగా ఉండవలెనను మరియొక నియమము ఉన్నది. ఇటువంటి నియమములుగల సమీకరణములకు పాశ్చాత్యులు డయోఫాంటస్ సమీకరణములు (చూ) అని పేరుపెట్టి ఉన్నారు. డయోఫాంటైన్ అను గ్రీక్ విజ్ఞాని ఇటువంటి సమీకరణములను మొట్టమొదట క్రీ. శ. 3వ శతాబ్దములో చర్చించెను.

భారతదేశమునందు బీజగణితమునకు మరియొక పేరు 'అవ్యక్త గణితము'. ఇది సార్థకనామము. ఏలన అంకగణితములోని సంకేతములగు 1, 2, $3\frac{1}{2}$, $-\frac{17}{5}$ - వీని కన్నిటికిని ఒక వ్యక్తమూల్యము కలదు. బీజగణితమందున్న అక్షర సంకేతములు ఏ విలువనైనను తీసికొనవచ్చును, లేదా, సమీకరణవాదమందున్నట్టి ఒక కనిపెట్టవలసినవిలువను తీసికొనును.

మూడవ తరగతి సమీకరణములు 16 వ శతాబ్దమునందును, 4 వ తరగతి సమీకరణములు 18 వ శతాబ్దమునందును సాధింపబడినవి. వీని మూలములను సమీకరణ గుణకములనుండి $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $+$, $-$, $\times$, $\div$ ఈ పరికర్మలద్వారా పొందవచ్చును. అయితే 5 వ, లేదా 5 కంటె ఎక్కువ తరగతి సమీకరణములను ఇటుల అనగా పైన వివరించిన పరికర్మలను, $\sqrt[5]{}$ ను ఉపయోగించి వ్రాయుట సాధ్యముకాదని ఏబెల్ 1824 లో నిరూపించెను.

బీజగణితమునకు నేడు వాడు 'ఆల్‌జీబ్రా' అను పదము అరబ్బులు వ్రాసిన ఒక పుస్తకమునుండి తీసిన

పదము. బీజగణితము భారతదేశము నుండి బయలు దేరి, అరబ్బు విజ్ఞానులద్వారా యూరప్ చేరెను. అచ్చట 16 వ శతాబ్దము తరువాత వృద్ధిచెందెను. ఇప్పటి బీజగణిత సంకేతము 16 వ శతాబ్దమునందు వియేటా అను గణితజ్ఞుడు మొదట ఉపయోగించెను. బీజగణితమునందు ఆధునికకాలములో చర్చింపబడిన విషయములు ఏమనగా (1) మూలాధార తత్త్వముల పరిశోధన, (2) క్రొత్త బీజగణితముల సృష్టి, (3) ఆధునిక బీజగణితము.

ఫలవాదము

చలరాశులు, ఫలములు : బీజగణితమునందు మనము మొట్టమొదట చలరాసులు అను భావమును గ్రహించితిమి. అనగా విలువల ఒక సమూహములో ఏవో కొన్నిటినో, లేదా అన్నిటినో తీసికొనుశక్తిగల సంకేతము x ఒక చలరాశి. అట్లు x, y అను రెండు చలరాశి సంకేతములను తీసికొనెదము. వీనిలో y విలువ x విలువ మీద ఆధారపడి ఉన్నట్లయితే, అనగా x ఇచ్చినపుడు y ని కనిపెట్టుట సాధ్యమయితే $y = f(x)$ అని వ్రాయుదుము. ఉదా : ఒక చతురస్రముయొక్క వైశాల్యము y, దాని పొడవు x పై ఆధారపడియున్నది. ఇచ్చట $y = x^2$ అనగా $f(x) = x^2$. $y = f(x)$ అయితే కొన్ని సమయములందు, y విలువ ఇచ్చినట్లయిన x విలువ తెలుసుకొనవచ్చును. అప్పుడు x చలరాశి y మీద ఆధారపడియున్నది. దీనినే $x = f^{-1}(y)$ అని వ్రాయుదుము. f^{-1} కు విలోమ ఫలము అని పేరు. $y = f(x) = x^2$ అయితే $x = f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$ అనగా $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$. ఇది రెండు విలువలు గల ఫలము. చలరాశి x ను ఇచ్చి దానినుండి y ని కనిపెట్టిన, x ను స్వతంత్ర చలరాశి అనియును, y ను పరతంత్ర చలరాశి అనియును చెప్పెదము.

ఇవి అన్నియు 'ఫలవాదము' నకు మూలభావములు అగుచున్నవి. ఒకే ఒక చలరాశి x కు బదులు $x, y, z....$ మొదలగు అనేక స్వతంత్ర చలరాసులపై ఆధారపడి ఉన్న ఒక ఫలమును $U = f(x, y, z....)$ అని వ్రాయుదురు. ఉదాహరణమునకు శంకు ఘనపరిమాణము 'V' అనునది, దాని ఎత్తు h, వ్యాసార్ధము r ల ఫలమగును. ఇచ్చట $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ అనునది ఫలితము. దీనియందలి π అనునది ప్రఖ్యాతకరణీయ సంఖ్య. ఇది వృత్తపరిధికిని, దాని వ్యాసమునకును గల నిష్పత్తి. ఇది ఒక స్థిరసంఖ్య. పై అభియోగములో V అను ఫలము చలరాసుల ద్వారా వ్యక్తముగా ఈయబడినది. కాని, కొన్ని సమయములందు ఫలమగు u ను, చలరాసులగు $x, y, z....$ ను చేర్చి ఈయబడిన సంబంధము $f(u, x, y, z...) = 0$ నుండి ఫలమును కనిపెట్టవలసియుండును. ఇవి అవ్యక్తఫలములు. కొన్ని సమయములందు ఉదా : x అను స్థలమున, y అను కాలమందు తాపక్రమము 'u' అనినచో వీటికిగల సంబంధ సూత్రమును వ్యక్తముగా వ్రాయుట అసాధ్యము. అట్లే ఒక పట్టణమందలి x నంబరుగా గల ఒక పోలీసువాని పేరు 'u' అయిన, u అనునది సంఖ్యయే కాదు. y చలరాశి x చలరాశియొక్క ఫలము అనుటకు x ఇచ్చిన ఎడల y ఉన్నది అనే సంబంధము మాత్రమే.

సంఖ్యల వరుసలు, అవధులు

ఏదో ఒక నియయమును అనుసరించి వరుసగా ఉండు $a_1, a_2, a_3,........, a_n,........$ అను సంఖ్యలే సంఖ్యావరుస (సీక్వెన్స్)లు అనబడును. ఒక సంఖ్యలవరుస 'a' అను అవధిని పొందుట' అనునది గణితశాస్త్రములో మరియొక ముఖ్యభావము. దీని తాత్పర్యమేమనగా, మనము ఈ వరుసలో చాల దూరము పోవుకొలది ఆ వరుసలోని సంఖ్యలు అవధిసంఖ్యయగు a కు మిక్కిలి దగ్గరగ సమీపించుచున్నవనుటయే. అనగా ఎంత అతిసూక్ష్మసంఖ్య ε ఇచ్చినను, తగినంతదూరము వరుసలో ప్రయాణించినచో, దాని తరువాత వచ్చు సంఖ్యలన్నియు a నుండి ε కంటె తక్కువ వ్యత్యాసముగల సంఖ్యలు అగును. అనగా $n >$ ఏదో ఒక సంఖ్య అగునపుడు, $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

ఈ విధముగా ఒక వరుస ఒక అవధి a ను సమీపించిన ఎడల ఈయబడిన సూక్ష్మసంఖ్య $\varepsilon = 1/1000$ అనుకొనినచో అప్పుడు ε కు తగిన సంఖ్య N ఉన్నది. ఇది ఎటువంటిదనిన $n > N$ అయినప్పుడు $|a_n - a| < \frac{1}{1000}$ అగునటువంటిది. ఉదా : $1/3, 2/5, 3/7, 4/9........n/(2n+1)$ అను వరుస ఒక అవధిని సమీపించుచున్నదనియు, ఆ అవధి $\frac{1}{2}$ అనియు చెప్పుదుము ; దీనిని వ్రాయు విధము $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$ కారణమేమనగా వరుసలో చాలినంత దూరము పోయినట్లైన వరుసలోని సంఖ్యలు $\frac{1}{2}$ అను సంఖ్యను మేరలేకుండ సమీపించును. ఉదా : 10,000 పదములను ($n > 10,000$) దాటిపోయినచో వరుసలోని సంఖ్యలకును, $\frac{1}{2}$ కును ఉన్న వ్యత్యాసము

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2(2n+1)} < 0{\cdot}000025$$ అగును.

ఇచ్చట $\varepsilon = 0{\cdot}000025$ అయినచో N అనునది 10,000 గనో లేదా మరి ఎక్కువ సంఖ్యగనో తీసికొనవచ్చును.

a అను అవధి శూన్యమైఉండవచ్చును. అప్పుడు n అనంత మగునప్పుడు ($n \longrightarrow \infty$) $a_n \longrightarrow 0$ అని వ్రాసెదము.

అవధిలేని వరుసలుకూడా ఉన్నవి:

ఉదా: 1, 2, 3, 4.... ; 1, −1, 1, −1, +1, −1........

ఉపసరణ వరుసలందు పదములు a_n, అవధిసంఖ్య అగు a ని చేరవలయునను నియమము లేదు. చేరినను, చేరక పోయిననూ సరియే. ఉదా: 1, $1\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{3}$, 1, $1\frac{1}{4}$,.... ఈ పరంపరలో అవధి 1 ఎన్నోమార్లు పదముగా ఉన్నది. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$,........యొక్క అవధిసంఖ్య 1 అగును. అయితే ఈ విలువ వరుసలో రాలేదు.

పైన చెప్పిన ఉపసరణతా సూత్రము ($n \longrightarrow \infty$ అగునప్పుడు $|a_n - a| \longrightarrow 0$ అనునది) ప్రయోగించుటకు మొదటనే అవధి a తెలిసియుండవలెను. అయితే, అవధి a యొక్క విలువ తెలియకయే ఒక వరుస $a_1, a_2, ...a_n....$ ఉపసరణ వరుసా కాదా అని తెలిసికొనవచ్చునా అను ప్రశ్న కలుగుచున్నది. దీనికి జవాబు: అవును సాధ్యమే అనునదియే. ఒకే అవధి విలువ a ను సమీపించిన, వరుస సంఖ్యలు a_n తుదకు ఒకదాని నొకటి అతి దగ్గరగా సమీపించవలయును కదా? ఇదియే కోషీ సూత్రము. అనగా వాస్తవ సంఖ్యల ఒక వరుస a_n అనునది, ఒక అవధికి ఉపసరణతను పొందుటకు అవశ్యమైన నియమము: ఎంత చిన్నదైనను ఒక సంఖ్య ε ఈయబడిన, మనము మరి ఒక సంఖ్య N ను కనిపెట్టుట సాధ్యముగ ఉండవలెను. ఇది ఎట్టిదనిన: ఎప్పుడెప్పుడు $r > N$, $s > N$ అగునో, అప్పుడప్పుడు $|a_r - a_s| < \varepsilon$ అని ఉండవలెను.

పై సిద్ధాంతము అవధి ఉన్నదని చెప్పునే కాని, దానిని ఎట్లు కనుగొనవలసినది తెలుపదు. ఈ విషయములో సహజజ్ఞానముచే సూచించబడినట్టి రెండు సాధారణ సిద్ధాంతములు కలవు. ఒక వాస్తవ సంఖ్యల వరుసలో, సంఖ్యలు పెరుగుచు పోయినట్లు తీసికొనెదము. అనగా $a_1 < a_2 < a_3 .... < a_n < a_{n+1} < ....$ అప్పుడు ఆ వరుస రెండు విధములుగా ప్రవర్తింపవచ్చును. ఒకటి, ఆ వరుస అపరిమితముగా పెరగవచ్చును. అనగా ఏ స్థిరసంఖ్య ఇచ్చినను దాని కంటె పెద్దదిగా క్రమేణ పెరగవచ్చును. ఇట్టిచో మనము ఆ వరుస అపసరణత నొందుచున్నదని చెప్పుదుము. దీనికొక ఉదా: 1, 2, 3,.........n,..........

అట్లుగాక ఒక పెరుగుచున్న వరుసయందు అన్ని పదములును, ఒక స్థిరసంఖ్య K కన్న తక్కువగా ఉన్నవని అనుకొందము. అప్పుడు a_n అనునది K అను అవధికో, లేదా K కన్న చిన్నదగు మరియొక అవధికో ఉపసరణత నొందియే తీరును. ఈ ఫలితమును నిరూపించవచ్చును. ఇదేవిధముగా వరుసయొక్క పదములు తగ్గుచువచ్చి అన్ని పదములు ఒక స్థిరసంఖ్య K కు ఎక్కువైఉన్నట్లయితే ఆ వరుస K అవధికో, K కన్న ఎక్కువ సంఖ్య అవధికో ఉపసరణత కలిగిఉండును.

కరణీయ సంఖ్యలు అవధులుగా పొందుట

కరణీయ సంఖ్యలను అకరణీయ వరుసల అవధిగా పొందువిధమును చర్చింతము. అవధి అను ఈ నవీన భావమును అనేక ప్రయోజనములకై ఉపయోగించవచ్చును. వానిలో ఒకటి: కరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనము. మనకు పూర్ణాంకములు, భిన్నములు మాత్రమే తెలుసునని అనుకొందము. మనము క్రింది భిన్నాంక వరుస తీసికొనెదము.

$$1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, ...$$

ఇచ్చట హారములు వరుసగా 1, 10, 10^2, 10^3,....లవములను ఎట్లు తీసికొంటి మనగా:

$$\left(\frac{14}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{15}{10}\right)^2;$$

$$\left(\frac{141}{100}\right)^2 < 2 < \left(\frac{142}{100}\right)^2;$$

$$\left(\frac{1414}{1000}\right)^2 < 2 < \left(\frac{1415}{1000}\right)^2;........$$

అనగా పదముల వర్గములు 2 కన్న ఎక్కువ తక్కువగా ఉండునట్లు తీసికొనియున్నాము. ఆ వరుస $\sqrt{2}$ అను విలువకు ఉపసరణత నొందునని నిరూపించవచ్చును. ఇంతకు పూర్వమే $\sqrt{2}$ అనునది కరణీయసంఖ్య అనియు, దానిని p/q అనురూపములో (p, q లు పూర్ణాంకములు) వ్రాయలేమనియు తెలిసికొనియున్నాము. అయినప్పటికిని ఇచ్చట అకరణీయసంఖ్యల ఒక వరుసద్వారా కరణీయ సంఖ్య అగు $\sqrt{2}$ ను అవధిగా పొంది ఉన్నాము. వరుసల యొక్క పదములన్నిటికిని కల ఒక ఉమ్మడి గుణము దాని అవధియందు నష్టమైపోయినది. అనగా అకరణీయ సంఖ్యలనుండి ప్రారంభించి, అకరణీయ సంఖ్యల వరుసల అవధులుగా కరణీయ సంఖ్యలను పొందుటయే ఈ విధము. ప్రతి కరణీయ సంఖ్యను పై విధముగా పొందవచ్చును. పైన ఈయబడిన ఉదా: $\sqrt{2}$ ను దశాంశములను ఉపయోగించి ఏవిధమున నిర్ణయించవచ్చునో సూచించి ఉన్నాము. అదే సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యలవరుసయొక్క అవధిగా

అనేక విధములుగా పొందవచ్చును. కరణీయసంఖ్యల పై పద్ధతిని మొట్టమొదట ప్రవేశపెట్టినవాడు కాంటూర్. కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తమును తీసికొనిన పర్వడు విస్తృత సమితిని వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అనెదము. ఇట్లు విస్తృత వాస్తవ సంఖ్యలందు ఉపసరణ వరుసలను తీసికొనిన, ఆ వరుసల అవధులుకూడ వాస్తవ సంఖ్యలే అగును. ఈ పద్ధతి మూలమున నూతన సంఖ్యలేమియు సంభవించవు.

అనంతపదపరంపరల సంకలనము

అవధిభావముయొక్క రెండవ ఉపయోగము :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\ldots$$

వంటి అపరిమిత అనంత వరుస పదముల సంకలనరాశిని నిర్ణయించుటయే అగును. మొదటి $(n+1)$ పదముల సంకలనరాశి S_n ను తీసికొనెదము. ఇది నిశ్చితమైనసంఖ్య. దీని విలువ $2-\frac{1}{2^n}$. ఇప్పుడు " పదముల అనంత సంఖ్య యొక్క సంకలనరాశి " అను భావమునకు అర్థమును ఇచ్చుటకు ప్రయత్నించెదము. n పెద్దదగుకొలది S_n యొక్క అవధి 2 అగును; కారణమేమనగా $\frac{1}{2^n}$ శూన్యమును సమీపించును. అందువలన ఈ అనంతపరంపర యొక్క సంకలనరాశి 2 అనెదము. అనగా $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots.=2$. ఇదే రీతిగా $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots+a_n+\ldots.$ వంటి అనంతపద పరంపర సంకలనరాశిని S_n యొక్క అవధిగా నిర్ణయించవచ్చును. అనగా $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$, $S_n=a_1+a_2\ldots.a_n$, అనుక్రమమును తీసికొనెదము. n పెరిగి అనంతమగుకొలది $(n\longrightarrow\infty)$ S_n విలువ S అను అవధిని సమీపించినట్లయితే, ఆ అనంతపదపరంపర యొక్క సంకలనరాశి S అనెదము. ఉదా : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots\ldots$అనునది ఒక ఉపసరణ పరంపర. దీని సంకలనరాశి $\log_c 2$ అగును.

ఒక అనంత పరంపర ఉపసరణత నొందుటకు n అనంతమగునప్పుడు a_n అనునది శూన్యమును సమీపించవలయును. ఇది ఉపసరణత నొందుటకు ఆవశ్యకమైన నియమము ; కాని ఇది మాత్రము చాలదు.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots$$

అను పరంపరయొక్క పదములు శూన్యమును సమీపించును. కాని ఈ పరంపరయందు n ను తగినంతగా పెంచినచో S_nను కోరినంత పెద్దదిగాచేయ వీలగును. కావున ఇది అపసరణ పరంపర అగును.

ఒక సంఖ్యల వరుసలోని ఒక్కొక్క పదమునకునుఉన్న గుణము ఆ సంఖ్యల వరుస అవధికిని ఉండుట మనము నిరీక్షించకూడదని మునుపే చూచితిమి. ఉదా : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$\.......అను సంఖ్యల వరుసలో ఒక్కొక్క సంఖ్య ధనసంఖ్య. అయిన అవధిసంఖ్య శూన్యమగుచున్నది. అటులనే $\frac{2}{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots.\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ అనువరుసలో ఒక్కొక్క సంఖ్యయును అకరణీయ సంఖ్య అయినను వాటి అవధి కరణీయ సంఖ్యయగు *e అనంతపద పరంపరల సంకలనమును ఒక అవధిగా నిర్ణయించితిమి కనుక మితపద పరంపరలలోఉన్న గుణములు అనంతపదపరంపరలకు ఉండుననుకొనరాదు. ఉదా : ఒక మిత పరంపరలోని పదముల క్రమమును మార్చినట్లయితే సంకలనపు మొత్తము మారదు. అయితే రెండు అనంతపరంపరలలో ఒకదానిలోఉన్న పదములన్నియు మరియొక పరంపరలో ఉన్నప్పటికి వాటి సంకలనసంఖ్య వేరుగా ఉండవచ్చును.

ఉదా : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots\ldots$పరంపరలోను $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}$ పరంపరలోను ఉన్న పదముల సమూహము ఒకటే. అయితే మొదటి పరంపర మొత్తము $\log_c 2$ అగును. రెండవ పరంపర మొత్తము $\log_c 4$ అగును.

గుణకారపరంపరలు

సంకలనపరంపరలవలెనే గుణకారపరంపరలను పరిశీలించవచ్చును. $a_1\times a_2\times a_3\times\ldots a_n$ (దీనినే $a_1\,.\,a_2\ldots.a_n$ అని వ్రాయవచ్చును.) అను n పదములు గల గుణకార పరంపర విలువ P_n అనుకొనెదము. n పెరిగి అనంతమగునపుడు, P_n యొక్క అవధి P అయితే, దీనినే ఆ అనంత గుణకార పరంపర విలువ అనెదము. $n\longrightarrow\infty$ అగునపుడు $a_n\longrightarrow a$ అయితే ఈ పరంపర తుదకు $a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\ldots.$ అను రూపమును పొందును. అందువల్ల ఈ గుణకార పరంపర ఉపసరణ పరంపర అగుటకు అది తుదకు $1\cdot1\,.\,1\,.\,1\ldots.$ కావలెను. అనగా $a_n\longrightarrow1$ అనునది అవశ్యమైన నియమము. అయితే ఇదిమాత్రము చాలదు. అనంత సంకలన పరంపరలవలెనే అనంత గుణకార పరంపరలందును పదముల క్రమమును మార్చిన ఎడల ఉపసరణత గుణము నష్టముకావచ్చును. లేదా

* e అనునది గణితములో ఒక ప్రసిద్ధ కరణీయ సంఖ్య; దీని విలువ సుమారు 2.8182.......

ఉపసరణతగా ఉన్నను అవధి విలువ మారవచ్చును. ఒక అనంత గుణకారపరంపర యొక్క లాగరిదమ్ తీసికొనుట వలన దానిని ఒక సంకలన పరంపరగా మార్చవచ్చును. కొన్ని ప్రసిద్ధ గుణకారపరంపరలు క్రింద ఇవ్వబడినవి :

$$\text{(i)} \quad \sin\theta = \theta\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{(ii)} \quad \cos\theta = \left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{5^2\pi^2}\right) \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{6}{\pi^2} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right) \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{15}{\pi^2} = \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\left(1+\frac{1}{7^2}\right) \cdots\cdots\cdots$$

(iii), (iv) సూత్రములలో 2, 3, 5, 7, ...ప్రధాన సంఖ్యలు.

ఇటులనే మరియొక అనంత పరంపర ;

శృంఖలిత భిన్నాంక పరంపర—దీని రూపము :

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots\cdots}}}$$

ఇచ్చుటను మొదటి n పదములు, అనగా a_{n-1}, b_{n-1} వరకు తీసికొని, $n \longrightarrow \infty$ అగునప్పుడు దీని అవధినే శృంఖలిత భిన్నాంక పరంపర విలువగా తీసికొనెదము.

అనంత సంకలన పరంపరలు, అనంతగుణకార పరంపరలును, మొత్తముగా అవధి భావమును ఉపయోగించి క్రొత్త ఫలములను నిర్మించవచ్చును. ఉదా : బెసల్ ఫలము $J_0(x)$ ను క్రింద వ్రాసిన అనంత సంకలన పరంపరగా నిర్వచింపవచ్చును :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \cdots\cdots$$

అటులనే

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

మనము సాధారణ గణితములో వాడు ముఖ్యఫలములు ఏమనగా బహుపదములు, త్రికోణమితిఫలములు, లాగరిదమ్ ఫలములు, e^x మొదలగునవి. లాగరిదమ్‌లను మొదట 1614 లో జాన్ నేపియర్ కనిపెట్టెను. ఒకటినుండి 101,000 వరకు పూర్ణసంఖ్యల లాగరిదమ్‌ల పట్టీని హెన్రీబ్రిగ్జ్ 1624లో ప్రచురించెను.

అంతరీకరణ గుణకము

$f(x)$ యొక్క అంతరీకరణ గుణకము అనునది అవధి భావము యొక్క మరియొక ముఖ్యప్రయోగము. దీనికి ఒక చిన్న ఉదాహరణము : గాలియొక్క సంఘర్షణ లేనప్పుడు ఒక రాయి గురుత్వాకర్షణచే x కాలములో పడిన దూరమును గుర్తించు $16x^2$ అను ఫలమును తీసికొనెదము. $(x+h)$ కాలమున ఆరంభ స్థలమునుండి రాయిపడిన దూరము $16(x+h)^2$ అగును. అందుచేత x కాలము తరువాత h అను విరామ కాలములో రాయి పడిన దూరము $16(x+h)^2 - 16x^2 = 16(2xh+h^2)$ అగును. ఈ విరామకాలమునందు ఆ రాయి సరాసరి వేగము $16(2xh+h^2)/h = 32x + 16h$ అగును. 'x సమయమునందలి రాతి వేగము' అను మాటలకు అర్థమును ఇచ్చుటకు, x కాలము తరువాత h అను విరామ కాలమునందలి రాయి సరాసరి వేగమును తీసికొని, h ని అతిస్వల్పమైన దానినిగా చేయుచు పోగా, h శూన్యమును సమీపించుకొలది $16h$ శూన్యమును సమీపించును. కావున, అవధిగా $32x$ లభించును. $16x^2$ కు బదులు, మరి ఏ ఇతర x ఫలము $f(x)$ అయినప్పటికిని, x కాలము తరువాత h అను విరామకాలమందు $f(x)$ యొక్క అనగా దూరము యొక్క పెచ్చు $\{f(x+h)-f(x)\}/h$ అగును. $h \longrightarrow 0$ అయినప్పుడు పైదాని అవధి x అపేక్షయా $f(x)$ యొక్క అంతరీకరణ గుణకము అనెదము. ఫలముల అంతరీకరణ గుణకములకును, ఫలములకును గల సంబంధములను పరిశీలించు గణితశాస్త్ర భాగమే అంతరీకరణకలనము.

$y = f(x)$ అయినచో, $f(x+h) - f(x)$ అనునది $\Delta f(x)$ లేదా Δy (y లోని వృద్ధి). అటులనే $h = \Delta x$ అనునది x లోని వృద్ధి. $\Delta y / \Delta x$ యొక్క అవధిని (Δx శూన్యమును సమీపించగా) dy/dx అని వ్రాయుట

సంప్రదాయము. అందువలన dy/dx అనునది x అపేక్షయా y యొక్క అంతరీకరణ గుణకము.

భాస్కరాచార్య II గ్రంథములందు అంతరీకరణ గుణకముయొక్క భావమును చూడవచ్చును. అతడు దత్త ఫలము యొక్క అంతరీకరణమునకు 'తాత్కాలికగతి' అని పేరిడెను. జీవ θ ($\sin \theta$) యొక్క సూక్ష్మవృద్ధి $\cos \theta \; \Delta\theta$ అని అతడు వ్రాసెను. ఇది అంతరీకరణ కలనముయొక్క మూలభావము. కాని అతడు అవధి భావమును గ్రహించి మరియొక అడుగు ముందునకు పెట్టియున్నచో అప్పటికే భారత దేశమునందే కలన శాస్త్రము ఉద్భవించి అభివృద్ధిచెంది ఉండెడిది.

17 వ శతాబ్దములో ఇంగ్లీష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడగు సర్ ఐజక్ న్యూటన్, జర్మనీ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడగు లైబ్‌నిట్జ్ ప్రత్యేకముగా అంతరీకరణ కలనమును నిర్మించిరి. దీనితో ఆధునిక గణితశాస్త్రయుగము ప్రారంభ మయినది.

x అను విలువయందు $f(x)$ అను ఫలము యొక్క పెరుగుదల రేటు $dy/dx = f'(x)$ తెలిసినచో దాని పరిసర బిందువగు $(x+h)$ యందు $f(x)$ విలువను అందాజుగా $f(x) + h\ f'(x)$ ఉండునని చెప్పవచ్చును. ఇది h విరామములో పెరుగుదల రేటు స్థిరముగా ఉండునని భావించి గణించిన విలువ. $f(x+h)$ యొక్క అందాజు లేదా సరియైన విలువ కావలెనన్న ఇది మాధ్యమిక విలువ సిద్ధాంతముచే నీయబడును. ఈ సిద్ధాంత ప్రకారము :

$$f(x+h) = f(x) + h\ f'(x+\theta h) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

ఇంకను కచ్చితమైన విలువకై టేలర్ పరంపరను ఉపయోగించవచ్చును. ఈ సిద్ధాంతము చెప్పునదేమనగా :

$$f(x+h) = f(x) + h\ f'(x) + \ldots\ldots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(n+\theta h)$$

ఇచ్చట $(0 < \theta < 1)$

ఈ వరుసలో f', f'', f''' అనునవి మొదటి, రెండవ మూడవ అంతరీకరణ గుణకములు.

చయనీకరణము

$f(x)$ యొక్క అంతరీకరణ గుణకము $f'(x)$ అని చెప్పితిమి. కొన్ని సమయములందు అంతరీకరణ గుణకమునకు వ్యుత్పన్నము అను పదము పర్యాయముగా వాడబడును. కలనశాస్త్రములో $f(x)$ ఫలము ఇచ్చిన దాని వ్యుత్పన్నము $f'(x)$ కనుగొనుటకు సూత్రములు కలవు.

కొన్ని సమయములందు $f'(x)$ ఇచ్చిన $f(x)$ కనుగొనవలసి వచ్చును. ఈ వ్యుత్క్రమ విధానమును 'చయనీకరణము' అందురు.

$\int f'(x)\,dx = f(x)$. ఇది x అపేక్షయా $f'(x)$ యొక్క చయనీకరణ సంకేతము.

[చదువు విధము : చయనీకరణము $f'(x)\,dx$]

ఒక స్థిరరాశి మారని రాశి గనుక దాని అంతరీకరణ గుణకము (అనగా మారు రేటు) శూన్యము. అందువలన $\int f'(x)\,dx = \int \{0 + f'(x)\}\,dx = f(x) + K$ అని తీసికొనవచ్చును. ఇందు K ఒక స్థిరరాశి. ఈ చయనీకరణమును అనిశ్చిత చయనీకరణమని చెప్పుదుము. చయనీకరణము a నుండి b వరకు గావించినచో $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ అనెదము. దీనిని 'నిశ్చిత చయనీకరణము' అని చెప్పుదుము.

చయనీకరణమును సంకలన అవధిగా తీసికొనవచ్చును. $h = (b-a)/n$ అయినచో $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు అవధిలో : $\lim_{h \to 0}$

$$\left[f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \ldots\ldots f'(b)\right] h$$

$$= \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

అంతరీకరణ సమీకరణములు

ఒక అవిదిత ఫలము $f(x)$ కును, దాని వ్యుత్పన్నముల కునుగల సమీకరణమును ఇచ్చిన దానినుండి $f(x)$ ఫలమును కనిపెట్టుటకు అంతరీకరణ సమీకరణ సాధనము అని పేరు. ఉదాహరణముగ ఇట్టి సమీకరణము హరాత్మక గతిని విమర్శించునపుడు తారసిల్లును. దాని రూపము :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = 0\,;$$

దాని సాధనము $y = A \cos Kx + B \sin Kx$. ఇచ్చట A, B లు స్థిరరాశులు. సందర్భముల ననుసరించి వాటి విలువలను కనుగొనవలయును. వినియుక్త గణితమునందు తరచుగా ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణములు తారసిల్లును.

ఉదా : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

ఇందు స్వతంత్ర చలరాశి u, పరతంత్రచలరాశులు x, y, z, లపై ఆధారపడియుండును.

కొన్ని నవీనఫలములు, దీర్ఘవృత్తఫలములు. బెసల్ ఫలములు మొదలగునవి ఇట్టి అంతరీకరణ సమీకరణముల సాధనములుగా దొరకియున్నవి. (చూ. అంతరీకరణ సమీకరణములు ; దీర్ఘవృత్తఫలములు).

త్రికోణమితి

త్రికోణమితి ఒక ప్రాచీన గణితభాగము. భారతీయ ఖగోళశాస్త్రగ్రంథములలో అది ఒక భాగము ; భాస్కరాచార్య II 'గోళాధ్యాయి' యందు గోళీయ త్రికోణమితిని విపులముగా విమర్శనచేసిఉన్నాడు. అందు 'సమతల త్రికోణమితి' కూడ పరిశీలించబడినది. పాశ్చాత్యులలో పూర్వము గ్రీకులు, ఈజిప్టు దేశీయులును త్రికోణమితికి బీజావాపము చేసి శాస్త్రతరువును అభివృద్ధికి తెచ్చినారు. కాని భారతీయులు వారికంటె ఎక్కువ ప్రౌఢవిషయములను తమ గ్రంథములందు చర్చించిరి. ఆర్యభటుడు I అర్ధజీవమును కనుగొను సూత్రమును వివరించియున్నాడు. ఆర్యులు జీవ, జ్యా పదములను పర్యాయపదములుగా వాడుచు వచ్చిరి; ఈ గ్రంథమునందు 'జ్యా' పదము 'జ్యారేఖ' కు, కోణముల విషయములో 'జీవ' పదమును వాడబడును. భారతీయులు లంబకోణము (90°) ను 24 సమభాగములుగా చేసి $3\frac{3}{4}°$, $7\frac{1}{2}°$, $11\frac{1}{4}°$, 15°..................90° వరకు జీవల పట్టిక తయారుచేసియున్నారు.

జీవ లేదా జ్యా అనగా సైన్, కోటిజీవ లేదా కోటి జ్యా అనగా కోసైన్ అని అర్థము. 'జీవ' పదమునకు అరబ్బులు 'జీబ' అని వ్రాసిరి. తర్వాత అది 'జైబ్' గా మారి, 12వ శతాబ్దములో లాటిన్ అనువాదకులచే 'సైనస్' అయ్యెను. ఈనాడు ప్రచారములో ఉన్న 'సైన్', 'కోసైన్' పదములు సైనస్ నుండి జనించినవే.

వరాహమిహిరుని గ్రంథమునందును, సూర్యసిద్ధాంతమునందును π కి $\sqrt{10}$ అను విలువ ఈయబడినది. అరబ్బులు భారతీయ గణితమును స్వీకరించి, 10 వ శతాబ్దములో స్పర్శజీవ (టాన్‌జెన్ట్), కోటి స్పర్శజీవ (కోటాన్‌జెన్ట్) పట్టీలను గణించిరి. ఛేదకము (సీకన్ట్), కోటి ఛేదకము (కోసీకన్ట్) లను కూడ ఉపయోగించిరి.

తర్వాత త్రికోణమితిలో వెలుగు చూచిన ముఖ్య వికాసము లేమనగా : అనంత సంకలన పరంపరలను, అనంత గుణకార పరంపరలను ఉపయోగించుట ; త్రికోణమితి ఫలములకును, ఘాతఫలములకును గల సంబంధమును ఆయిలర్ కనిపెట్టెను. అది ఏమనగా,

$$\left[\, e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \,\right]$$

17 వ శతాబ్దమునకు చెందిన జేమ్స్ గ్రిగోరీ పేరుగల

$$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$$

అను అనంత పరంపర 12 వ శతాబ్దమందే కేరళ దేశమున మాధవునికి తెలిసియుండెను. అందువలన దీనికి గ్రిగోరీ పరంపర అను ప్రస్తుతపు పేరుకన్న మాధవుని పరంపర అని వర్ణించుటయే న్యాయము. ఈ పరంపరను ఉపయోగించి π విలువను* [చూ. పై (π) విలువ] 707 దశాంశ స్థానముల వరకు గణించియున్నారు. నేడు ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రములను ఉపయోగించి π విలువను 5000 దశాంశ స్థానములవరకు సాధించ వచ్చును.

ఆధునిక గణితము

ఇటీవల గణితశాస్త్రజ్ఞుల దృష్టిని ఆకర్షించిన గణితాంశములు : (1) శుద్ధబీజగణితము ; (2) బిందుసమూహముల టోపాలజీ.

శుద్ధబీజగణితము

ఈ శాఖ పరిశీలించు విషయములు : సంఖ్యా సమూహములో పూర్ణాంకములు, అకరణీయ సంఖ్యలు, వాస్తవ సంఖ్యలు, సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఉన్నవి. వీటి గుణములనువిభజించి సరళ, అమిశ్రమయిన గణితఆకారములనుఇది నిర్మించును.

పరికర్మ విభజనము: ఏ రెండు సంఖ్యలనైన చేర్చి ఒకే సంఖ్యను విలువగా గల 'సంకలనము' (+) అను పరికర్మ యొక్కటి యున్నది, అట్లు చేర్చిన లభించు విలువ కూడ సమూహములో ఉన్న సంఖ్యయే. ఇదికాక 'శూన్యము' (0) అను ఒక సంఖ్య మన సమూహములో ఉన్నది. దీనితో ఏ సంఖ్యను చేర్చినను ఆ సంఖ్య మారదు. ఏ సంఖ్య x ఇచ్చినను దానికి $x+y=0$ అను విలోమపరికర్మ సంఖ్య ఒకటి ఉన్నది. ఇదియే

* వృత్తపరిధి/వ్యాసము

$(-x)$ అనునది. కడపట 'సంకలనము' యొక్క గుణములు $(x+y)+z=x+(y+z)$ అను సంయోగనియమము. ఇట్టి గుణములు మాత్రముగల ఒక సమూహమునకు ఒక 'కూర్పు' (గ్రూప్) అని పేరు. ఇచ్చట 'కూర్పు పరికర్మ' సంకలనము అగుచున్నది. సాధారణ సంకలనమునకు మరియొక గుణము $x+y=y+x$ అను పరివర్తన నియమము ఉన్నది. అయితే ఇది 'కూర్పు' భావమునకు ఆవశ్యకమైనది కాదు. $x+y=y+x$ అయితే, అట్టి కూర్పులను ఏబెల్ కూర్పులు అందురు.

అందువలన శుద్ధబీజగణితములోని మొదటి పరిశీలనాంశము 'కూర్పులు' (చూ), కూర్పుల ధర్మములు, ఉపకూర్పులు, వాటి ధర్మములు ఇత్యాది విషయములు. వీటిలో సంకలనము అను ఒకే పరికర్మము ఉన్నది. కూర్పులలోని వస్తువులు సంఖ్యలుగా ఉండనక్కరలేదు. ఏవిధమైన వస్తువులుగనైన, ఏవిధమైన పరికర్మమైనను ఉండవచ్చును. అయితే కూర్పులోని ఏరెండు వస్తువులనైనను చేర్చిన మరియొక కూర్పులోఉన్న వస్తువును పొందు పరికర్మముగా ఉండవలెను. ఈ పరికర్మమునకే 'సంకలనము' అను నామధేయమిచ్చి '+' అను సంకేతమువలన గుర్తించెదము. ఒక కూర్పులో ఒకే పరికర్మము ఉండవలెను. '+' అను పరికర్మము ఉన్నట్లయితే '×' అను పరికర్మము లేదు.

మన సంఖ్యాసమూహములలో గుణకారము '×' అను మరియొక పరికర్మము ఉన్నది. దీనిని అనేక పర్యాయములు చేసిన సంకలనమని తలంపక మరియొక ప్రత్యేక పరికర్మముగా తలంపవలెను. సంకలన కూర్పు వస్తువులందు గుణకార పరికర్మమును స్వీకరించి a, b అను ఏ రెండు వస్తువులైనను, $a \times b$ అను సమూహములోనే ఉండి $a \times (b \times c)=(a \times b) \times c$ అయి, $a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c)$ అను సమీకరణము ఎల్లప్పుడును సత్యమయినట్లయితే ఆ సమూహమునకు మండలము(రింగ్)అని పేరు. మండలములో $a \times b=b \times a$ అనునది ఆవశ్యకము కాదు. అయితే ఇట్లుండినచో దానిని పరివర్తనమండలము అనెదము. ఉదా: $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots$ అన్నియుచేరి ఒక పరివర్తనమండలమగును. ఒక మండలములో 'యూనిట్' అను సంఖ్య ఉండనక్కరలేదు. యూనిట్‌నకు గుణమేమనగా దానితో ఏసంఖ్యను గుణకారరీతిగా చేర్చినను ఆసంఖ్య మారదు. యూనిట్‌ను '1' అని వ్రాయుట అలవాటు. యూనిట్ ఉన్నట్లయితే యూనిట్‌గల మండలమనెదము. పైన ఉదాహరించిన $\pm 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots\ldots$ అనునది యూనిట్ లేని మండలము. యూనిట్‌గల మండలమందు శూన్యముకాని ఒక్కొక్క సంఖ్య x కును, $x \times y=1$ అను గుణముగల సంఖ్య y ఉన్నట్లయితే, అట్టి సమూహమునకు క్షేత్రము (ఫీల్డ్) అనిపేరు. అకరణీయ సంఖ్యలు, వాస్తవ సంఖ్యలు, సంకీర్ణ సంఖ్యలు అన్నియు క్షేత్రములే. ఒక్కొక్క క్షేత్రమునందు సంకలనము పరికర్మముగా గల ఒక కూర్పు ఉన్నది. అదియుకాక శూన్యము మినహా మిగిలిన సంఖ్యలు గుణకారమును పరికర్మముగా గల మరియొక కూర్పు కూడ క్షేత్రములో ఉన్నది. కూర్పులు, మండలములు, క్షేత్రములు, ఉపకూర్పులు, ఉపమండలములు, ఉపక్షేత్రములు వీటినన్నిటిని పరిశీలించుశాస్త్రమే శుద్ధ బీజగణితము.

బిందుసమూహముల టొపాలజీ

టొపాలజీ అను నవీన గణితాంశము 'అవిచ్ఛిన్నత' అను భావముయొక్క వికాసము. ఏదోయొక మూలవస్తు సమూహమును తీసికొనెదము. ఈ మూలవస్తువులను బిందువులనియు, వాటి సమూహము R ను ఒక ఆకాశము అనియు వ్యవహరించెదము. x బిందువు R లోని బిందువైతే $x \in R$ అని వ్రాసెదము. ఒక బిందు సమూహము R మరియొక సమూహము S లోని అంశమైనచో $R \subset S$ లేదా $S \supset R$ అని వ్రాసెదము. అవిచ్ఛిన్న బిందు సమూహమునకు అతి సరళమైన ఉదాహరణము ఒక ఋజురేఖా ఖండము. సంఖ్యాదృష్టితో చూచినట్లయితే ఇది రెండు సంఖ్యల a, b మధ్యనున్న అన్ని సంఖ్యలను $a \leq x \leq b$, అన్ని కలిగిన ఒక సంవృత అంతరము. మొదటి సంఖ్య a యును కడపటి సంఖ్యను తీసివేసిన మిగిలిన సంఖ్యలను కల సమితిని వివృత అంతరము అనెదము. సాధారణముగా ఒక బిందు సమితి సంవృత సమితి అయితే, ఆ సమితిలోని ఏ ఉపసరణ వరుస తీసికొనినను దాని అవధియును ఆ సమితిలోనే ఉండును. ఉదా: $1 \leq x \leq 2$ అను సంబంధమును తృప్తిచేయు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసికొనెదము. ఇది సంవృత సమితి కాదు. ఏలన $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{5}-1$ అవధిగాగల ఉపసరణ వరుసలెన్నియో ఈ సమితిలో ఉన్నవి. కాని వాటి అవధులగు $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-1$ సమితిలో లేవు. అందువలన ఈ సమితి సంవృతమైనది కాదు. అయితే $1<x<2$ లో ఉన్న అన్ని కరణీయ సంఖ్యలను ఈ సమితికి చేర్చినట్లయిన ఇది సంవృత సమితి అగును. ఇట్లు ఒక సమితిలోని ఉపసరణ వరుసల అవధి బిందువులన్నియు ఆసమితికి చేర్చుటయే 'సంవృతీకరించుట' అనియు అట్లు విస్తరింప

బడిన బిందు సమితియే దత్తసమితియొక్క 'సంవృతి' అనియు అనెదము. పై ఉదాహరణములోని సంవృతి $1 \leq x \leq 1$ (x వాస్తవ సంఖ్య) అగును.

ఒక బిందు సమితిని X అను సంకేతముతో గుర్తించి నట్లయితే దాని సంవృతి $\overline{X}$ అని వ్రాసెదము. $\overline{X}$ సమితిని మరల సంవృతీకరించినట్లయిన దాని సంవృతి $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ గనే ఉండును. అనగా ఒకమారు సంవృతీకరించిన తరువాత మరియు దానిలోని ఉపసరణ సరంపరల అవధిగా ఇతర సంఖ్యలు కలుగవు. టొపాలజీ దృష్టిలో 'సంవృతీకరించుట' అను పరికర్మమును, ఒక సమితియొక్క సంవృతి అను భావమును, సాధారణ గణితశాస్త్రములోఉన్న అవధి అనుభావమున కంటె మౌలికములైనవి. అందువలన సంవృతీకరించుట అను పరికర్మము అన ఏమని వర్ణింపక, క్రింద వివరించిన మూలాధార తత్త్వములను అనుసరించు ఏదో ఒక పరికర్మము అనెదము. ఈ తత్త్వము లేమనగా (1) $X \subset \overline{X}$ అనగా సమితిలో ఉన్న బిందువులన్నియు దాని సంవృతిలో ఉన్నవి. (2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. (3) $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$. ఇచ్చట $\cup$ అనునది సమితులను సంకలనముచేయు పరికర్మము. X, Y రెండు బిందు సమితులైతే, $X \cup Y$ లో X బిందువులు ఉన్నవి; Y బిందువులు కూడ ఉన్నవి. అందువలన మూడవతత్త్వము, రెండు సమితుల సంకలనముయొక్క సంవృతి ప్రత్యేక సమితుల సంవృతుల సంకలనమని చెప్పుచున్నది. ఈ మూడు తత్త్వములను అనుసరించు ఏ పరికర్మగానైన అది ఉండవచ్చును.

సంప్రదాయ గణితములో $y = f(x)$ అను ఒక ఫలము $x = a$ అను బిందువులో అవిచ్ఛిన్నమై యున్నదనిన, ఆ ఫలమునకు $x = a$ యందు విచ్ఛేదము లేదన్నమాట. అనగా a అవధిగాగల ఏ వరుస $x_1, x_2, x_3, \ldots$ను తీసికొనినను $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots$ అను వరుసకు అవధియున్నది, దాని విలువ $f(a)$ అనుటయే. సంవృతి భాషలో దీనినే '$f(x)$ అవిచ్ఛిన్నఫలమైతే, $y = f(x)$ అను పరికర్మము సంవృత సమితులను సంవృతి సమితులుగా మార్చును' అని చెప్పవచ్చును. అనగా a బిందువు $\overline{X}$ చేరినదైతే $f(a)$ బిందువు $\overline{f(X)}$ కు చేరినదగును. బిందువుల మొత్తములో సంవృత బిందుసమితికి చేరని మిగిలిన బిందువులు ఒక వివృతసమూహమనెదము.

సంవృత సమూహములు, వివృత సమూహములు అను భావమునకు ప్రాముఖ్యము ఈయక టొపాలజీ మరియొక మార్గము అనుసరించవచ్చును. ఇది 'సామీప్యము' అను భావముపైన ఆధారపడియున్నది. ఒక్కొక్క బిందువునకును ఎన్నో సామీప్యములు ఉన్నవనియు ఒక బిందు సామీప్య బిందుసమూహములో ఆ బిందువు ఒక అంశమనియు, ప్రత్యేక బిందువులకు ప్రత్యేక సామీప్యములు ఉన్నవనియు ఇత్యాది ఆధారతత్త్వములను ఆశ్రయించి తద్వారా సంవృతిభావమును, అవధి భావమును ఈ మార్గములో ప్రవేశపెట్టవచ్చును.

టొపాలజీలోని మూడవ మార్గము, ఏ రెండు బిందువుల (P_1, P_2) కును సంబంధించిన 'దూరము' అను భావమును కల్పించుకొని తద్వారా సామీప్య, అవధి, అవిచ్ఛిన్నతా భావములను ప్రవేశపెట్టుటయే. వాస్తవ సంఖ్యా సమూహమును X-అక్షముపై బిందువులుగా భావించినచో x_1, x_2 రెండు బిందువుల దూరము $|x_1 - x_2|$, అనగా పెద్ద సంఖ్యలోనుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేసిన ఫలము అని తీసికొనవచ్చును. సమతలములో యూక్లిడ్ ప్రకారము బిందువులు (x_1, y_1), (x_2, y_2) కున్న దూరము $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ అగును. అయితే ఈ దూరమును పై సూత్రముచేత వర్ణించుటకు బదులుగా టొపాలజీలో రెండు బిందువుల (A, B) మధ్య దూరము అను వాస్తవ ధనసంఖ్య $d(A, B)$ ఒకటి ఉన్నది; $d(A, B)$ శూన్యమైతే ఆ బిందువులు A, B ప్రత్యేక బిందువులు కావు; దూరము $d(A, B) =$ దూరము $d(B, A)$; A, B, C మూడు బిందువులైనచో $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ అను ఇట్టి గుణములు మాత్రము నిర్వచించెదము కాని 'దూరము' అనునది ఏమని చెప్పము. ఇటువంటి బిందు సమూహములలో దూరభావములను ఉపయోగించి, సామీప్యభావమును క్రింది విధముగ వర్ణించవచ్చును. 'ఒక బిందువు యొక్క సామీప్యమనగా A నుండి ఏదో ఒక క్లుప్త సంఖ్యకన్న తక్కువ దూరమున ఉండు బిందు సమూహము. పరిమేయాకాశము*నందు ఒక బిందు సమితి R యొక్క సంవృతి $\overline{R}$ లో $\overline{R} - R$లో P ఒక బిందువైతే, P యొక్క ఎంత చిన్న సామీప్యమును తీసికొనినను, దానియందు P కాక R సమితికి చేరిన బిందువులు ఉన్నవనుటయే. అందువలన సంవృతిభావము సామీప్య భావమునుండి ఉత్పన్నమైనదిగా తీసికొనవచ్చును. పైన వివరించిన వేర్వేరు మార్గములవలన అవిచ్ఛిన్నతా భావమును టొపాలజీ పరిశీలించుచున్నది. సామీప్యభావమును ఆధారముగా తీసికొనినట్లైతే '$f(x)$ అను ఫలము $x = a$ అను బిందువునందు అవిచ్ఛిన్నముగా ఉన్నది' అనుటను క్రింది విధముగా చెప్పవచ్చును. '$b = f(a)$ అను బిందువు

* దేనియందు కొలతలు సాధ్యమగునో అట్టి ఆకాశమును పరిమేయాకాశము అందురు.

యొక్క ఏసామీప్యమైనను V_b ఇచ్చినట్లైతే $f(V_a) \subset V_b$ అగునట్లు a బిందువునకు ఒక సామీప్యము V_a కనిపెట్ట వచ్చును.' $f(x)$ అన్ని బిందువులందును అవిచ్ఛిన్నముగా ఉన్నదనుటకు నియమము ఏమనగా $Y = \overline{Y}$ అయినప్పు డెల్ల $f^{-1}(Y) = \overline{f^{-1}(Y)}$ అని ఉండుటయే.

పైన వివరించిన విశ్లేషణ గణిత వికాసములను అసం పూర్ణముగను, గణితశాస్త్రమునకు జీవాధారమగు నిష్ఠురతను పరిత్యజించియు సామాన్యజ్ఞానమునకు ఎంత గ్రాహ్యమగునో అంతమట్టునకు వివరించితిమి. గత 50 సంవత్సరములలో గణితముయొక్క స్వభావమును గురించియు, దాని తత్త్వములను గురించియు తీవ్ర చర్చ జరిగినది. దీని ఫలితముగా గణిత మూల ప్రతిష్ఠ పూర్ణాంకములను ఆధారముగా కలిగియుండవలెననియు, మరల ఇవియు వరుసక్రమము, ఒకటి కొకటి అనురూపత ఇటువంటి భావములమీదను 'మరియు' 'లేదా' 'అభివ్యాప్తి' అను తార్కిక భావముల మీదను ఆధారపడి ఉండవలెననియు గణితశాస్త్రజ్ఞులు నిశ్చయించిరి. ఈ విషయములను ఇప్పుడు పరిశీలించెదము.

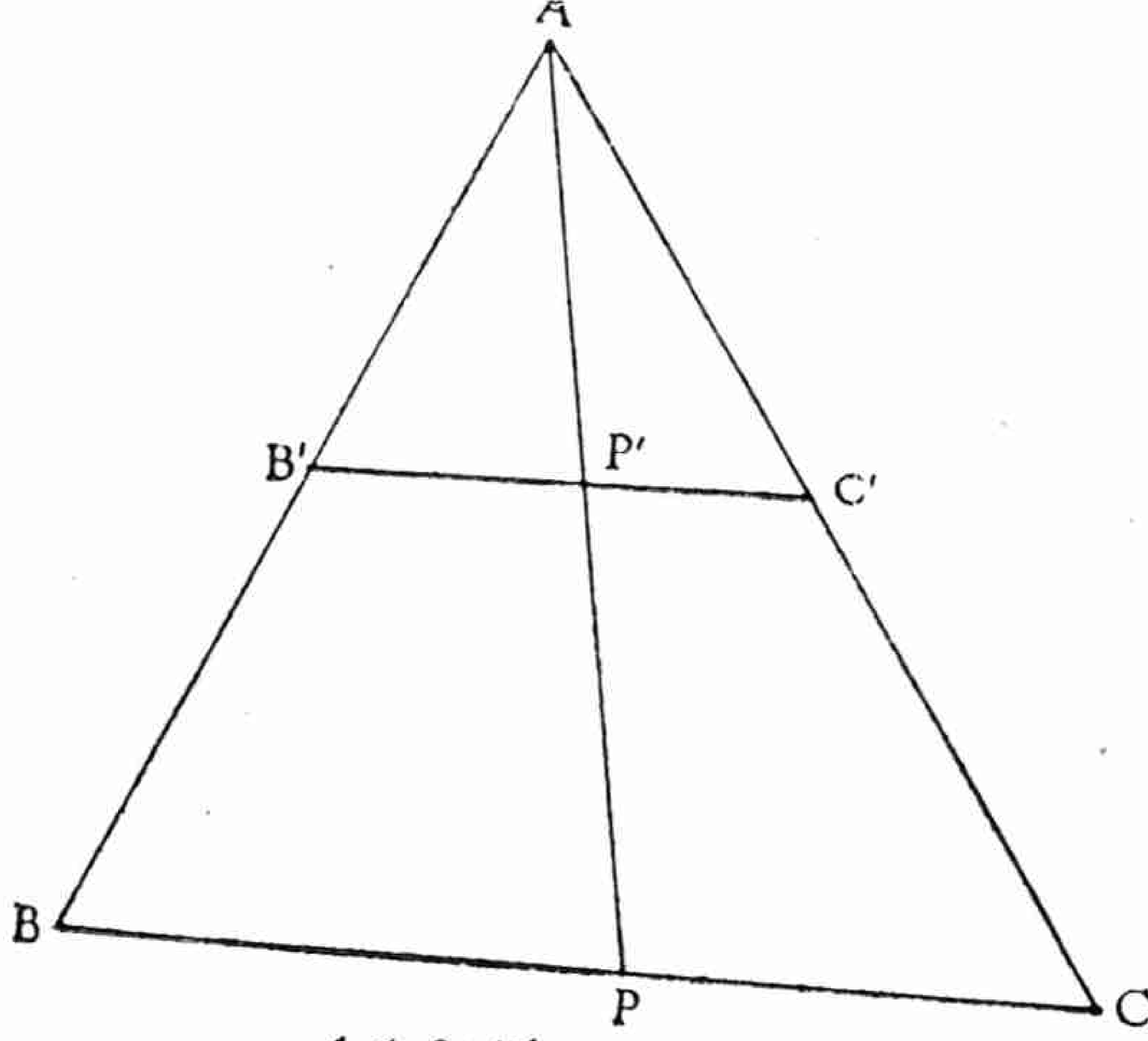
గణిత స్వభావము

ఒక ఆదర్శ గణితసృష్టి ఎట్లుండవలెనో యూక్లిడ్ మొట్టమొదట సూచించెను. అతడు అతిస్పష్టమైనవియు, స్వతఃప్రమాణమైనవియు అగు కొన్ని ఆధారతత్త్వములను ఉపపత్తి లేకయే అంగీకరించి తన జ్యామితిని నిర్మించెను.

యూక్లిడ్ వాద మేమనగా ఆధారతత్త్వములు స్వతః ప్రమాణములైనవి, మిగిలిన తత్త్వములు వాటినుండి తర్కరీతిగ అనుమానింపబడినవి. అందువలన జ్యామితి తత్త్వములన్నియు నిరంకుశముగా సత్యమైనవి. అదియు కాక జ్యామితి మనము వసించు లోకముయొక్క వర్ణన. అందువలన జ్యామితి సిద్ధాంతములనుండి తప్పించుకొనుటకు వీలులేదను నిశ్చయము కలిగెను. ఈ నిశ్చయమును తొలగించినది 19 వ శతాబ్దమునందు కనిపెట్టబడిన యూక్లిడేతర జ్యామితులు. వీటి ఆధారతత్త్వములు వేరు; వాటినుండి తర్కరీతిని సంపాదితమైన సిద్ధాంతములు వేరు. ఇవి సాధారణ జ్యామితికి విరుద్ధములైనవి. అయితే ఈ క్రొత్త జ్యామితులలోని సిద్ధాంతములందు పరస్పర విరోధము లేవియులేవు. ఈ పరిస్థితినుండి మనము ఊహింపవలసినదేమనగా, ఎన్నో జ్యామితులు ఉన్నవి. ఒక్కొక్కటియు స్వసంగతమైనది, ఆత్మావిరుద్ధమైనది. వీనిలో మనము ఏజ్యామితియొక్క ఆధారతత్త్వములను అంగీకరించెదమో, దాని సిద్ధాంతములను అంగీకరించియే తీరవలెను. కాని ఏ ఆధారతత్త్వములను ఒప్పుకొనెదమన్నది మన ఇష్టము. ఇన్ని సంగతమైన జ్యామితులు ఉన్నప్పుడు యూక్లిడ్ చర్చించినదే మన జగత్తునకు అన్వయించు జ్యామితి అనుట ఎట్లు న్యాయము? ప్రయోగమూలముగనే మనము దేనిని అంగీకరించవలయునను విషయము నిర్ణయించవలెను. అనగా శుద్ధజ్యామితి ఒక తార్కిక కల్పన. దానికిని మన ప్రత్యక్ష జగత్తునకును ఏ సంబంధమును లేదు. ప్రత్యక్ష జగత్తునకు ఏ తార్కిక గణితకల్పన ఉపయోగమగునను విషయము భౌతికశాస్త్ర పరిశీలన వలన కనిపెట్టవలయును. ఈ దృష్టి జ్యామితికి మాత్రమే కాక గణితశాస్త్ర మంతటికిని వ్యాపించినది. అందువలన ఆధునిక దృష్టిలో గణితస్వభావ మేమనగా 'A అను మూలతత్త్వ సముదాయము సత్యమైతే, B అను తార్కికరీతిగా పొందిన తత్త్వసముదాయము సత్యమని చూపుటయే.' A తత్త్వసముదాయము సత్యమా అని కనిపెట్టుటయు తద్ద్వారా B యొక్క సత్యమును స్థాపించుటయు గణిత శాస్త్రపు ఉత్తరవాదము కాదు. అందువలననే బెర్ట్రాండ్ రసెల్ 'తాను చెప్పునది సత్యమా కాదా అను విషయము గణితశాస్త్రమునకు అక్కరలేదు' అని అన్నాడు. A తత్త్వసమితికిని, B తత్త్వసమితికిని ఉండు సంబంధము చూపుటయే గణితముయొక్క లక్ష్యము. అదియు కాక ఒక ఆధారతత్త్వము సత్యమా? కాదా? అనుట దానిలోని పదములకు ఏ అర్థము మనమిచ్చెదము అను విషయమును అనుసరించి ఉన్నది. అందువలన 'సంపూర్ణము దాని అంశమునకన్నను పెద్దది' అను ఆధారతత్త్వము 'పెద్దది' అను మాటయొక్క అర్థముపై ఆధాపడియున్నది. 2 సెం. మీ. పొడవుగల రేఖలో 1 సెం.మీ. రేఖ ఒక అంశము. ఇదికాక మరియొక అంశము దానియందు ఉన్నందువలన 2 సెం.మీ. రేఖయే పెద్దదని చెప్పవచ్చును. అయితే 2 సెం.మీ. రేఖలోని బిందువులకును, 1 సెం.మీ. రేఖలోని బిందువులకును, ఒకటికొకటి అనురూపతను క్రిందచెప్పిన విధమున స్థాపించవచ్చును. అందువలన ఈ దృష్టిలో అవి రెండు సరిసమానము అని చెప్పవచ్చును.

ప్రక్కపుటలో ఉన్న చిత్రములో ABC ఒక త్రిభుజము BC పొడవు 2 యూనిట్‌లు. B' అనునది AB యొక్క మధ్య బిందువు. C' అనునది AC యొక్క మధ్యబిందువు. అందువలన $B'C'$ పొడవు ఒక యూనిట్. BC లోని P అను ఏ బిందువునైన A తో చేర్చినచో ఈ రేఖ $B'C'$ను ఒక

బిందువు P' వద్ద ఛేదించును. ఇచ్చట P ఇచ్చినచో P' ను నిస్సందేహముగ కనిపెట్టవచ్చును. P' ఇచ్చినచో P బిందువు నిస్సందేహముగ నిర్ణీతమగును. అందువలన BC లో ఎన్ని బిందువులు ఉన్నవో అన్నే బిందువులు $B'C'$ లోను ఉన్నవి.



1 వ చిత్రము

అందువలన ఆధునిక గణితములో ఏతత్త్వమును స్వప్రమాణమైనది అని చెప్పుటకు వీలులేదు. A సమితిని అంగీకరించిన తరువాత B సమితిని తర్కరీతిగా అనుమానించుటయే గణితధర్మము.

నిర్వచన విషయములోకూడా ప్రాచీన గణితమునకును, ఆధునికగణితమునకును భేదము ఉన్నది. యూక్లిడ్ తాను ఉపయోగించిన అన్నిపదములకు నిర్వచనము ఇచ్చెను. అయితే ఇట్లు నిర్వచనము ఇచ్చుటకు ఇతరపదములను ఉపయోగింపవలయును. ఇట్టి ఇతర పదములను నిర్వచించుటకు మరి వేరుపదములు కావలెను. ఇట్లు నిర్వచనమునకు ఒక అనంతపదవరుస కావలసియున్నది. ఈ అనంత వరుస మానుటకై ప్రారంభమందే కొన్ని పదములను నిర్వచనము లేకయే తీసికొనెదము. ఆ పదముల అర్థమునకు బదులుగా వాటి ధర్మములను అనగా ప్రయోగములో వాటి ప్రవర్తనమును వర్ణించెదము. ఆ పదముల అర్థము మనకు అనావశ్యకము. అందువలననే బెర్ట్రాండ్ రసెల్ 'గణితములో మనము ఏవిషయము గురించి చర్చించెదమో చెప్పలేము' అనెను. ఈ ఆధునిక గణితదృష్టిని మనము మరల జ్యామితిలో వివరించెదము. అంకగణితమునందు ఈ దృష్టి ఎటుల ఉపయోగపడుచున్నదో ఇచ్చట వివరించెదము.

గణితశాస్త్ర పునర్నిర్మాణము

సమత్వ సంబంధములు: అంకగణితములో మనము 'సంఖ్య' లను, రెండు సంఖ్యలు a, b మధ్య సమత్వము అను సంబంధమును ఆలోచించితిమి. అటులుండిన మనము $a = b$ అని వ్రాసెదము. '$=$' సంకేతమునకుగాని 'సమము' అను పదమునకుగాని పైన చెప్పినట్లు మనకు అర్థము తెలియ నక్కరలేదు. దాని ఆధార ధర్మములు తెలిసికొనిన చాలును. అవి ఏమనగా (i) $a = a$ సత్యము, (ii) $a = b$ సత్యము అయితే, $b = a$ సత్యము, (iii) $a = b$ యును, $b = c$ యును ఈ రెండును సత్యమైతే $a = c$ సత్యము. ఈ మూడు గుణములు మాత్రమే మనము అంగీకరించినచో, అవి గణితమునకు చాలును. ఈ గుణములు ఏ అర్థమునైన ఈయవచ్చును. లేదా అర్థము లేకయే 'సమము' అను పదమునో '$=$' అను సంకేతమునో ఉపయోగించవచ్చును. పైన ఈయబడిన ఆధారతత్త్వములనుండి మనము క్రింది సిద్ధాంతమును తర్కరీతిని రుజువుపరచవచ్చును: '$a = b$, $b = c$, $c = d$ అన్నియు సత్యమయితే, $a = d$ సత్యము.' ఉదా: a, b, c, d అందరు మనుజులనియు, $a = b$ అనగా a మనుజునికిని b మనుజునికిని ఒకే ఇంటి పేరు అనియు అర్థమిచ్చెదము. పైన చెప్పిన మూడు ఆధారధర్మములు ఈ అర్థమునకు అనుగుణముగా ఉన్నవి. అందువలన దీని నుండి తార్కికముగా పొందిన సిద్ధాంతములు అన్నియు సత్యమగును, అనగా a కును, b కును ఒకే ఇంటిపేరై, b కును c కును ఒకే ఇంటిపేరైతే, c కును d కును ఒకే ఇంటిపేరైతే, a కును d కును ఒకే ఇంటి పేరు ఉండును. అందువలన ఒకే ఇంటిపేరు వహించుట అనునది '$=$' అను సంకేతము ఒక దృష్టాంతము అగుచున్నది. మొత్తముగా '$=$' (సమతా) సంబంధము వస్తుజగత్తును ప్రత్యేక తరగతులుగా విభజించుచున్నదనియు, ఒకే తరగతికి చెందిన ఏ రెండు వస్తువుల మధ్యనైన ఈ '$=$' సమతా సంబంధము ఉన్నదనియు, వేర్వేరు తరగతులకు చేరిన వస్తువుల మధ్య ఈ సంబంధము లేదనియు విశదమగుచున్నది.

ఎక్కువ తక్కువ సంబంధములు: $a > b$ అను సంఖ్యా సంబంధమును తీసికొనెదము. దీని ఆధార ధర్మములు ఏమనగా (i) $a > a$ సత్యముకాదు (ii) $a > b$ సత్యమై, $b > c$ యు సత్యమైతే, $a > c$ సత్యము. $a > b$ అనుదానినే $b < a$ అనియును వ్రాసెదము. దీనినే 'a అనునది b కన్న ఎక్కువ' అనియు లేదా 'b అనునది a కన్న తక్కువ' అనియు చదివెదము. అంకగణితములో

మరియొక తత్త్వమేమనగా ఏ రెండు సంఖ్యలు a, b లను ఇచ్చినను, $a=b$, $a>b$, లేదా $b>a$ ఈ మూడు సంబంధములలో ఏదైన ఒకటి సత్యముగ ఉండవలెను. '$>$' అను సంబంధమునకు 'క్రమపరచు సంబంధము' అని పేరు. దీనిని ఉపయోగించి అన్ని పూర్ణాంకములను ఒక వరుసగా అమర్చవచ్చును. '$>$' కు బదులుగా '$\geq$' (సమము లేదా ఎక్కువ) అను సంబంధమునకు (i) $a \geq a$, (ii) $a \geq b$, $b \geq c$ అయితే $a \geq c$ అను సంబంధములో ఈ రెండు ధర్మములు ఉన్నవి. ఒక సమూహము A మరియొక సమూహము B లో ఒక అంశమైతే $B \supset A$ అనెదము. ($B \supset A$ అనగా B లో A ఇమిడియున్నదని అర్థము) '$\supset$' యొక్క ధర్మములు '$\geq$' ధర్మములే అగును.

ధన పూర్ణాంకములకు ఆధార తత్త్వములు : మనము ఇంతవరకు పూర్ణాంకములన ఏమియో చెప్పలేదు. అవియు ఆధునిక గణితములోని అనిర్వచనీయములు. వాటి ఆధార తత్త్వములను ఇటలీదేశపు 'పియానో' మొట్టమొదట వివరించెను. అవి ఏమనగా (i) ధన పూర్ణాంకములనెడి ఒక వస్తుసమితి (I) దీనిలో ఒక వస్తువునకు 'ఒకటి' అని పేరు. దీనినే '1' అని వ్రాసెదము. (ii) ఈ సమితిలో ఒక్కొక్క వస్తువు a కును తరువాత వచ్చు వస్తువు ఒకటున్నది. దీనినే a^* అని వ్రాసెదము. (iii) '1' అను వస్తువు ఏ వస్తువునకును 'తరువాత వచ్చు వస్తువు' కాదు. (iv) a, b వేర్వేరు వస్తువులైతే a^* ను b^* ను వేర్వేరు వస్తువులు. (v) ఏ ఉపసమితిలోనైనను '1' అను వస్తువును, ఉపసమితిలో ఉన్న ఒక్కొక్క వస్తువునకు తరువాత మరియొక వస్తువును ఉన్నచో, ఆ సమితిలో I అను ధనపూర్ణాంకసమితి ఉన్నది.

1^* నే '2' అని వ్రాసెదము. అటులనే 2^* నే '3' అని వ్రాసెదము. ఇటులనే ఈ సమితిలోని వస్తువులను క్రమపరచవలయుననిన $a^* > a$ అని మనము తీసికొనవచ్చును. ఇట్లు క్రమపరచినచో, ...$4>3>2>1$ అగును. పైన వివరించిన ఆధార తత్త్వములలో '1' అనునదియు 'తరువాత వచ్చుట' అనునదియు అనిర్వచనీయ పదములు. 'తరువాత వచ్చుట' అను సంబంధమునకు '$>$' సంకేతము, ధర్మములను వాడెదము.

మరియొక వస్తుసమితి I' ఉండి అదియు పైన చెప్పిన ఆధార తత్త్వములనే అనుసరించినచో, I' లోని వస్తువులకును I' లోని వస్తువులకును ఒకటి కొకటి అనురూపతను స్థాపించవచ్చును. దీనియందు I లో ఉన్న '1' కి I' లో ఉన్న '1' అనురూపముగ ఉండును. I లోని 'a' కు అనురూపముగ I' లో 'a'' ఉన్నట్లయిన, a తరువాత వచ్చు a^* కు అనురూపముగా a' తరువాత వచ్చు a'^* ఉండును. I లో $a<b$ అయితే I' లోను $a'<b'$ అగును. అందువలన పేరువేరు కాని I ను I' ను ఒకే గుణములు కల సమూహములు. I లోని ఏ రెండు వస్తువులు a, b లకు ఒక సంబంధము స్థాపించెదమో I' లోని అనురూపమయిన a', b' కును అదే సంబంధము కలదు, ఇటువంటి రెండు సమితులకు 'ఏకరూప (ఐసోమార్ఫిక్) సమితులు' అని పేరు.

అకరణీయ సంఖ్యల నిర్మాణము : I అను ధన పూర్ణాంక సమితిలో మొదట సంకలనము '+' అను పరికర్మమును ప్రవేశపెట్టెదము. ఇది ఎటులనుటకు $3+5$ సంకలన ఫలమగు సంఖ్యను కనిపెట్టెదము. 1, 2, 3, 4 ....అను వరుసను I గను, 3, 4, 5, 6........అను వరుసను I' గను తీసికొనెదము. వీటికి ఒకటి కొకటి అనురూపత ఉన్నది. ఈ అనురూపతలో I లోని 5 అను సంఖ్యకు అనురూపముగ, I' లో 8 ఉండును. ఇదియే $3+5$ అనెదము. $5+3$ యును ఈ సంఖ్యయే అని చూడవచ్చును. ఇతర సంకలనధర్మములను నిరూపించవచ్చును. రెండు సంఖ్యల గుణకారమును ఇటులనే నిర్వచింపవచ్చును. ఉదా: 3×5 అను సంఖ్య లభించుటకు 3, $3+3$, $3+3+3$, $3+3+3+3$....అను వరుసకును 1, 2, 3, 4, ...అను వరుసకును ఒకటి కొకటి అను రూపత కల్పించి, దీని యందు రెండవ వరుసలలోని 5 కు అనురూపమైనదియే 3×5 అని తీసికొనెదము.

ఇట్లు దొరకిన సంఖ్యలన్నియు I లో ఉన్నటువంటి సంఖ్యలే. వ్యవకలనము అను పరికర్మమును సంకలనము ద్వారా నిర్ణయించవచ్చును. a లో నుండి b వ్యవకలనము చేసినచో లభించిన సంఖ్య c ఎటులుండవలయుననిన $b+c=a$ అను సమీకరణమును తృప్తిచేయునట్లు ఉండవలెను. అట్లే a ను b చే భాగహారము చేసిన లభించిన d ను గుణకార మూలమగు $a=b \times d$ అను సమీకరణము వలన నిర్ణయించవచ్చును. అయితే I సమితిలో ఈ పరికర్మములు ఎల్లప్పుడును సాధ్యముకావు. ఉదా : 7 నుండి 10 ని వ్యవకలనము చేయుట సాధ్యముకాదు. అటులనే 10 ని 7 చే భాగహారముచేయ సాధ్యముకాదు. అందువలన I సమితిని విశాలపరచి ఒక క్రొత్త సమితి R ను ఈ పరికర్మములు ఎల్లప్పుడు సాధ్యమగునట్లు సృజింతము.

మొదట భాగహారము మాత్రము తీసికొనెదము. I సమితిలోని రెండు సంఖ్యలను తీసికొని వాటిని (a, b)

అను క్రమముగనో (b, a) అను క్రమముగనో జోడించి ఈ జతకు 'భిన్న సంఖ్య' లేక అకరణీయసంఖ్య అని పేరు పెట్టెదము. (a, b) ను (b, a) ను వేర్వేరుగా తీసికొన వలయును. ఈ క్రొత్త జత సంఖ్యాసమితిలో సమత్వము '$=$', పెద్ద, చిన్న భావములు '$>$', '$<$', సంకలనము '$+$', గుణకారము '$\times$' క్రింద వివరించినట్లు ప్రవేశ పెట్టెదము.

$a \times d = b \times c$ అయితే $(a, b) = (c, d)$ అనెదము. అటులనే $a \times d >$ లేదా $< b \times c$ అయితే $(a, b) > (c, d)$ లేదా $(a, b) < (c, d)$ అనెదము. $(a, b) + (c, d)$ అనునది $(a \times d + b \times c, b \times d)$ అని తీసికొనెదము. $a \times b$ అనునది ab అని ఇకమీద వ్రాసెదము. గుణకారము $(a, b) \times (c, d)$ అను దానిని (ac, bd) గా తీసికొనెదము. ఈ ధర్మముల రహస్యమేమనగా $a \div b$ ఒకపూర్ణాంకమగునపుడు $a \div b = (a, b)$ పైన వ్రాసిన ధర్మములను అనుసరించును. ఇట్లు నిర్ణయించుటలో I లోని తెలిసిన భావములనే ఉపయోగించుచున్నాము. ఇచ్చట క్రొత్త అనిర్వచనీయములు ఏమియు లేవు. ఈ క్రొత్త సమితికి R^+ (ధన అకరణీయ సమితి) అని పేరుపెట్టెదము. పైన చెప్పిన సూత్రముల ప్రకారము $(a, b) \times (bc, ad) = (abc, abd) = (c, d)$ కనుక R^+ లోని ఏ జత (c, d) నైనను ఏ జత (a, b) చేనైన భాగహారము చేయవచ్చును. భాగహార ఫలము (bc, ad). ఈ క్రొత్త సమితిలోని ఒక అంశమగు $(a, 1)$ అను జతలను తీసికొనిన, పైన చెప్పిన సూత్రముల ప్రకారము $(a, 1) = (b, 1)$ అయినచో $a = b$, $(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1)$, $(a, 1) \times (b, 1) = (ab, 1)$ అందువలన R^+ లోని $(a, 1)$ వస్తువులకును I లోని సంఖ్య a కును ఒకే ప్రవర్తనగలదు. పేరు వ్యత్యాసమేకాని గుణవ్యత్యాసము లేదు. అందువలన a అను పూర్ణాంకమే $(a, 1)$ అను నిష్పత్తి సంఖ్య అనవచ్చును. $(a, 1)$ అను దానినే a అని వ్రాయవచ్చును. ఇట్లు మనము ధన భిన్నములు సృజించియున్నాము. సంప్రదాయప్రకారము మనము $(3, 7)$ అనునదియే $\frac{3}{7}$ అని వ్రాసెదము (a, b) సమితిలో $(a, 1)$ ఒక అంశము కనుక, మనము ధన పూర్ణాంకములను విస్తరించి ధన భిన్నసమితిని సృజించియున్నాము. ఇకమీద R^+ లోని వస్తువులను (a, b) అని వ్రాయుటకు బదులు a లేదా x అని ఒకే సంకేతముగా వ్రాసెదము.

శూన్య, ఋణాంకముల నిర్మాణము : R^+ లో వ్యవకలనము ఎల్లప్పుడును సాధ్యముకాదు. ఉదా : $7 + x = 2$, $\frac{2}{3} + x = \frac{1}{3}$ అనగా 2 లో నుండి 7 వ్యవకలనము, $\frac{1}{3}$ లో నుండి $\frac{2}{3}$ వ్యవకలనము ఇవి సాధ్యముకావు. అందువలన వ్యవకలనము ఎల్లప్పుడును సాధ్యమగునట్లు R^+ ను మరల విస్తరించెదము. ఇట్లు చేయుటకు మునుపటి వలె x, y రెండును R^+ లోని సంఖ్యలైనచో (x, y) అని మరియొక క్రొత్త వస్తువును నిర్మించెదము. (x, y) వేరు (y, x) వేరు. వీటియందు క్రమము $(x + v) >$ లేదా $= (y + u)$ అయినప్పుడు $(x, y) >$ లేదా $= (u, v)$ అనెదము. సంకలనము $(x,y) + (u, v) = (x + u; y + v)$ గుణకారము $(x, y) \times (u, v) = (xu + yv, xv + uy)$ అనెదము.

పైన వ్రాసిన ధర్మముల రహస్యమేమనగా $x - y$ వ్యవకలనము సాధ్యమగునప్పుడు దానికి ఏయే గుణములు ఉన్నవో, అవే గుణములు (x, y) కిని ఉన్నవి. ఉదా: $(x, y) > (u, v)$ ఎప్పుడనగా $x - y > u - v$, అనగా $x + v > y + u$ సత్యమగునపుడు. అటులనే $(x - y) \times (u - v) = (xu + yv) - (xv + yu)$; దీనినే $(xu + yv, xv + yu)$ అని వ్రాసితిమి. ఈ సంఖ్యల జతలలో $(x, x) = (y, y) = (z, z)$ అనునవి శూన్యమునకున్న గుణములు కలవి. $(x + y, y)$ సంకలనములోను, గుణకారములోను x అను సంఖ్యవలెనే ప్రవర్తించుచున్నది. అందువలన $(x + y, y)$ ను x అనే వ్రాయవచ్చును. ఈ విస్తరించిన సంఖ్యా సమితిలో వ్యవకలనము ఎల్లప్పుడును సాధ్యము. ఏలన పైన చెప్పిన జతసంఖ్యల ధర్మప్రకారము $(a, b) + (b + c, a + d) = (a + b + c, a + b + d) = (c, d)$ అందువలన ఏ జత (c, d) నుండియైన మరియొక జతయగు (a, b) ను వ్యవకలనముచేయ సాధ్యమగును. వ్యవకలనమువలన లబ్ధఫలము పైనచూపినట్లు $(b + c, a + d)$ అగును. ఈ క్రొత్త సమితిని R అని పిలిచెదము. R లో R^+ ఒక అంశము, ఏలన R^+ లోని x ను R లో $(x + y, y)$ అని వ్రాయవచ్చును, అయితే ఇటుల R^+ లోని సంఖ్యలు (a, b) రూపములో వ్రాయుటయందు $a > b$ గనే ఉండును. అనగా $b > a$ అగునపుడు (a, b) కు అనురూపముగా R^+ లో సంఖ్యలేదు. (a, b) అను సంఖ్యను $a > b$ అయినపుడు ధనాత్మకసంఖ్య అనియు, $b > a$ అయినపుడు ఋణాత్మక సంఖ్య అనియు చెప్పుదుము. $a = b$ అయినప్పుడు (a, b) శూన్యము అగుచున్నది. ఒక్కొక్క ధనాత్మకసంఖ్య (a, b) $(a > b)$ కును దానికి అనురూపముగా ఒకే ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య (b, a) ఉన్నది. దీనినే $-(a, b)$ అని వ్రాసెదము. $(a, b) = x$ అను సంఖ్య R^+ లో ఉన్నందువలన R^+ ను విస్తరించి R ను సృజించుటయందు శూన్యము (0) అను ఒక క్రొత్త సంఖ్యను, R^+లో ఉన్న ఒక్కొక్క x కును ఒక $-x$ అను క్రొత్త సంఖ్యను

నిర్మించిఉన్నాము. R^+ లోని ఒక్కొక్క సంఖ్యయు p/q అను రూపమును (ఇచ్చట p, q రెండును I సమితికి చేరినవి) ధరించియుండుటవలన R లోని ఒక్కొక్క సంఖ్యయు p/q లేదా $-p/q$ లేదా 0 అని వ్రాయ వచ్చును. $-p/q$ ను ఋణఅకరణీయ సంఖ్య అనెదము. ఋణసంఖ్యలన్నియు 0 కంటె తక్కువ (<0) అని సులభముగా రుజువుపరచవచ్చును. ఇట్లు I సమితిలోనుండి R సమితిని పొందుటయందు క్రొత్త అనిర్వచనీయములు ఏవియు లేవని గుర్తించవలెను. (x, y) జతలలో x, y సంఖ్యలు R^+లో ఉండక, R లోనిదిగనే తీసికొనినట్లయితే అనగా x ఒక జత y ఒక జతగా తీసికొనినట్లయితే పై విస్తరింపువలన క్రొత్త సంఖ్యలుఏమియు దొరకవు. సంకలన ధర్మప్రకారము $(x+y, y) = (x, 0)$ అగును. అయితే $(x+y, y)$ ప్రవర్తన R లోని x వలెనే ఉన్నందువలన, దానినే x అని వ్రాయవచ్చునంటిమి. అందువలన $(x, 0) + (0, y) = (x, 0) - (y, 0) = x - y$. గుణకార ధర్మప్రకారము $(0, y) \times (0, z) = (yz, 0)$ అందువలన $(-y) \times (-z) = yz$ అనగా రెండు ఋణసంఖ్యల గుణకారము వలన దొరకు సంఖ్య ధనాత్మకము. ఇకమీద (x, y) అను దానికి బదులుగా $x - y$ అని ఒకే సంఖ్యగా వ్రాసెదము. $x > y$ అయినచో ఇది ధనాత్మకము. $y > x$ అయినచో ఇది ఋణాత్మకము. ఇచ్చట శూన్యము (0) చేత భాగహారము సాధ్యముకాదని చూడవచ్చును.

కరణీయసంఖ్యల నిర్మాణము : R అను అకరణీయ సంఖ్యా సమూహములో అంకగణితపు నాలుగు పరికర్మములును సాధ్యము (శూన్యముచేత భాగహారము మినహా); కాని, వర్గమూలము, ఘనమూలము ఎల్లప్పుడును సాధ్యముకావు. అదియుకాక, మనము మునుపే చూచినట్లు ఒక రేఖలోని బిందువులకును, సంఖ్యలకును అనురూపత ఏర్పరచునపుడు కొన్ని సంఖ్యలకు తగిన బిందువులులేవు; విలోమముగా కొన్ని బిందువుల దూరములను కొలుచుటకు తగిన సంఖ్యలు లేవు. ఉదాహరణమునకు యూనిట్ భుజ చతురస్రముయొక్క కర్ణమును కొలుచుటకు సంఖ్య R లో లేదు. ఇవియే కరణీయ సంఖ్యలు (ఇర్రేషనల్ నంబర్స్).

అకరణీయ సంఖ్యాసమూహమగు R నుండి కరణీయ సంఖ్యలను పొందుటకు రెండు మార్గములున్నవి. కాంటార్ కనిపెట్టినది ఒకటి. ఇది కరణీయ సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యల వరుసల అవధిగా పొందుట అనునది. ఉదా: $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(\frac{4}{3}\right)^3$,........$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ ....వరుస యొక్క అవధి e అను ప్రసిద్ధమైన సంఖ్య. ఈ మార్గమును 12వ పుటలో సూచించి ఉన్నాము.

మరియొక మార్గము: ఆర్ డేడెకిన్ట్ కనిపెట్టినది. R లోని అకరణీయ సంఖ్యలన్నిటిని A, B అను రెండు భాగములుగ విభజించవలెను. ఒక సంఖ్య x, A లో ఉన్నట్లయితే x కన్న R లోని తక్కువ సంఖ్యలన్నియు A లో ఉండవలెను. అటులనే y సంఖ్య B లో ఉన్నట్లయితే y కన్న ఎక్కువైన R లోని సంఖ్యలన్నియు B లో ఉండవలెను. ఇట్లు విభాగముచేసిన, B లోని ఏ సంఖ్యయైనను A లోని ఏ సంఖ్యకన్న పెద్దదిగనే ఉండును. ఉదా: 3 అను సంఖ్యయు, దానికన్న పెద్ద సంఖ్యలన్నియు B లోను, 3 కు తక్కువైన ధనసంఖ్యలన్నియు, ఋణ సంఖ్యలన్నియు శూన్యముతోసహా A లో ఉన్నట్లయిన పైన వివరించినటువంటి విభాగమగుచున్నది. ఇట్టి విభాగమునకు 'కోత' (కట్)అని పేరు. పైన వివరించిన కోతలో Bలో ఉన్న సంఖ్యలన్నిటికిని తక్కువైనది 3. A లోఅన్నిటికన్న ఎక్కువ సంఖ్య దానిలో లేదు. ఇటులనుండక A లో ఉన్న సంఖ్యలలో పెద్దది A లో ఉండవచ్చును. అప్పుడు B లో అతి చిన్నది ఉండదు. '3' అనుసంఖ్యను B లో నుండి తీసివేసి A లో చేర్చినచో ఇటువంటికోత దొరకును. ఈ రెండు కోతలు '3' అనుసంఖ్యను నిర్ణయించుచున్నవి అనెదము. కొన్ని సమయములందు A లో మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యయు ఉండదు, B లో మిక్కిలిచిన్నదియు ఉండదు. అటువంటి కోతలు ఒక కరణీయసంఖ్యను నిర్ణయించును. ఈ సంఖ్య Bలో ఉన్న అకరణీయసంఖ్యలకన్న చిన్నదనియు, A లో ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలకన్న పెద్దదనియు చెప్పెదము. ఉదా: p, q ధనపూర్ణాంకములైతే, $p^2 > 2q^2$ అయినప్పుడు p/q ను B లో వేసెదము. $p^2 < 2q^2$ అయితే p/q ను A లో వేసెదము, శూన్యమును (0) అన్ని ఋణఅకరణీయ సంఖ్యలను A లో వేసెదము. ఇది ఒక 'కోత'. దీనిలో, A లో మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యయు లేదు; B లో మిక్కిలి చిన్న సంఖ్యయు లేదు. అందువలన ఇది ఒక కరణీయసంఖ్యను నిర్ణయించుచున్నది, ఇదియే $\sqrt{2}$. ఇట్లు అకరణీయ సంఖ్యా సమూహముయొక్క కోతలన్నిటికి వాస్తవ సంఖ్యలని పేరు. దీనిలో అకరణీయ సంఖ్యలు, కరణీయ సంఖ్యలు రెండును ఉన్నవి. రెండు కోతలు నిర్ణయించు వాస్తవ సంఖ్యలు ఎప్పుడు సమము? ఏది పెద్దది? ఏది చిన్నది? రెండుకోతలను ఎటుల సంకలనముచేసి మరియొక కోత పొందుట? కోతలందు వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము ఇవి ఎటుల సాధ్యమగును? అను విషయములను డేడెకిన్ట్ స్పష్టముగా వివరించియున్నాడు. వాస్తవ

సంఖ్యలలో అకరణీయ సంఖ్యలును, కరణీయ సంఖ్యలును ఉన్నవి. ఒక్కొక్క కోతయు ఒక వాస్తవ సంఖ్య. శూన్యమును నిర్ణయించు కోతలో అన్ని ధనసంఖ్యలు p/q ను B భాగములో, అన్నిఋణసంఖ్యలు $-p/q$ ను A భాగములోను ఉండును.

సంకీర్ణ సంఖ్యల నిర్మాణము : వాస్తవ సంఖ్యా సమితి పొడవులను కొలుచుటకు చాలును. వాటిలోని ఏ ఉపసరణ వరుసను తీసికొనినను దాని అవధి ఒక వాస్తవ సంఖ్యగనే ఉండును. అయితే ఒక బీజగణిత సమీకరణములో ఉన్న గుణకములన్నియు వాస్తవ సంఖ్యలైనను, దానిమూలములు వాస్తవ సంఖ్యలుగ ఎల్లప్పుడును ఉండవు. ఉదా : $3x + 7 = 0$ అను సమీకరణమునకు మూలము $x = -7/3$. ఇది ఒక వాస్తవ సంఖ్య. $x^2 - 1 = 0$ అను సమీకరణమునకు రెండుమూలములు $1, -1$ ఉన్నవి. కాని $x^2 + 1 = 0$ అను సమీకరణమునకు వాస్తవ సంఖ్యా సమూహాములో మూలములు లేవు. ఈ పరిస్థితిని తొలగించుటకు సంకీర్ణ సంఖ్యలను ప్రవేశపెట్టెదము. మునుపటివలె సంఖ్యల జతలను తీసికొనెదము.

x, y వాస్తవ సంఖ్యలయినచో, (x, y) అను జతను ఒక సంకీర్ణసంఖ్య అనెదము. (x, y) వేరు, (y, x) వేరు. ఈ సంకీర్ణసంఖ్యలందు చిన్న, పెద్ద అనుభావములు లేవు. వీటి ధర్మములు ఏమనగా :

(i) సమత్వము $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ అని ఉన్నట్లైన, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ అనెదము.

(ii) సంకలనము $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. కనుక $(0, 0)$ ఇచ్చట శూన్యమువలె ప్రవర్తించుచున్నది.

(iii) గుణకారము

$$(x_1\ y_1) \times (x_2\ y_2) = (x_1\ x_2 - y_1\ y_2,\ x_1\ y_2 + x_2\ y_1).$$

ఈ సంకీర్ణసంఖ్యలలో సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము సాధ్యమనియు, అట్లు లభించు ఫలితములను వాస్తవసంఖ్యల జతలే అనియు సులభముగా చూపవచ్చును. అసాధ్యమగు పరికర్మము '0' చే భాగహారము ఒకటియే. ఈ సంకీర్ణ సంఖ్యలలో ఒక అంశమగు $(x, 0)$ జతలు, గణితపరికర్మములలో వాస్తవసంఖ్య x వలెనే ప్రవర్తించుచున్నవి. అందువలన $(x, 0)$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యయు x అను వాస్తవ సంఖ్యయు ఒకటే అనవచ్చును. సంకీర్ణ సంఖ్యాధర్మముల ప్రకారము $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \times (0, 1)$. $(0, 1)$ అనునది వాస్తవ సంఖ్యకాదు. దానికి i అని నామకరణము చేసెదము. $(y, 0)$ అనునదియే వాస్తవ సంఖ్య y. అందువలన (x, y) ను $x + iy$ అని వ్రాయవచ్చును. i యొక్క విశిష్టమైన గుణమేమనగా $i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$. అనగా $i = \sqrt{(-1)}$. ఈ క్రొత్త సంఖ్య i అను దానిని వాస్తవ సంఖ్యలతో చేర్చుకొనుటవలన సంకీర్ణసంఖ్యలు ఉద్భవించినవని చెప్పవచ్చును. i ను ఉపయోగించి ఋణవాస్తవ సంఖ్యలకు వర్గమూలములు కనిపెట్టవచ్చును. ఉదా : $\sqrt{(-16)} = 4i$ లేదా $-4i$, $\sqrt{(-5)} = i\sqrt{5}$ లేదా $-i\sqrt{5}$. సంకీర్ణ సంఖ్యల ఉపయోగించి వాస్తవ సంఖ్యలనో, సంకీర్ణసంఖ్యలనో గుణకములుగాగల ఏ n వ తరగతి సమీకరణమునకునైన n మూలములు ఉన్నవని రుజువుపరచ వచ్చును.

చతుష్కములు : సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఇంకను విస్తరింపవచ్చును. ఇట్లు విస్తరించుటవలన లభించు ఒక విధమైన సంఖ్యలకు చతుష్కము (క్వాటర్నియన్) లనిపేరు. ఇచ్చట ఒక్కొక్క సంఖ్యయు $a + bi + cj + dk$ అను రూపము కలిగియుండును. a, b, c, d వాస్తవ సంఖ్యలు. i, j, k వాస్తవ సంఖ్యలు కాదు. వీటి ధర్మములు $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \times j = -j \times i = k$, $j \times k = -k \times j = i$, $k \times i = -i \times k = j$. వీటిని చతుష్క సంఖ్యలనవచ్చును. ఏలన $1, i, j, k$ అను నాలుగు యూనిట్‌లు పెట్టుకొని వాస్తవ సంఖ్యలు a, b, c, d, గుణకములుగా తీసికొని $a \times 1 + b \times i + c \times j + d \times k$ ను పొందవచ్చును. ఈ చతుష్కసంఖ్యలలో $x \times y = -y \times x$ ఉండును. ఉదా : $i \times j = -j \times i$. $c = d = 0$ గా ఉన్నచో ఈ చతుష్క సంఖ్య సంకీర్ణసంఖ్య అగుచున్నది. ఈ చతుష్కసంఖ్యల మరియొక విశేష మేమనగా ఇవియొక క్షేత్రమగుటయే. అనగా వీటిలో సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము అన్నియు సాధ్యము. 0' చేత అనగా $0 + 0i + 0j + 0k$ చేత మాత్రము భాగహారము సాధ్యము కాదు. అయినను $x \times y$ వేరు $y \times x$ వేరు. అటులనే భాగహారములో $\frac{x}{y}$ అను సాధారణ సంఖ్యకు బదులుగా $x \times \frac{1}{y}$ అని ఒకటియును, $\frac{1}{y} \times x$ అని మరియొకటియును రెండు చతుష్కములు ఉన్నవి.

క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలు : మనము సాధారణ గణితములో వాడు ధన పూర్ణ సంఖ్యలన్నియు పరిమిత సంఖ్యలు. అనగా పరిమిత సమూహాములోని వస్తువులను ఎంచుట ద్వారా సంభవించిన సంఖ్యలు. ప్రత్యక్ష వస్తు సమూహాములన్నియు పరిమిత సమూహములే. అయిన, గణిత శాస్త్రమందు అపరిమిత వస్తుసమూహాములను పరిశీ

లించెదము. ఉదాహరణమునకు 1, 2, 3, 4,........అను ధనాంకపూర్ణ సంఖ్యల సమూహము, అపరిమితమైనది. ఎంతదూరము ఈ వరుసలో మనము ప్రయాణము చేసినను, ఇంకను ఎంచవలసిన సంఖ్యలు ముందున్నవి. అటులనే 1, 4, 9, 16, 25........అను వరుసలోను అపరిమిత సంఖ్యలు ఉన్నవి. మరియు ధన, వాస్తవ సంఖ్యలన్నియు ఒక అపరిమిత సమూహమే. ఇట్టి సమూహములలో ఎన్ని వస్తువులు ఉన్నవి, అను ప్రశ్నకు ప్రత్యుత్తరము 'అది ఒక క్రాంత పరిమిత సంఖ్య' (ట్రాన్స్ ఫైనైట్ నంబర్) అనే చెప్పవలెను. అపుడు ఈ మూడు సమూహములకును సంబంధించిన క్రాంత పరిమిత సంఖ్య ఒకటేనా? వేర్వేరా? రెండవ వరుసలోని వ్యక్తులన్నియు మొదటి సమూహము లోనే ఉన్నవి; కనుక అది మొదటి దాని అంశమగు చున్నది. కనుక మొదటి సమూహ సంఖ్యకన్న రెండవది తక్కువ సంఖ్య అనవచ్చునా? రెండు క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలలో తారతమ్యము ఉన్నదా? రెండు అపరిమిత సమూహముల సంఖ్యలందు సమత్వము, పెద్ద చిన్న భావములు ఎటుల ఏకరీతిగా ప్రవేశపెట్టుట? ఒక సెంటీమీటరు పొడవులో ఉన్న బిందువులకును, రెండు సెంటీమీటరులందున్న బిందువులకును ఒకటికొకటి అను రూప భావమున్నదని 19 వ పుటలో చూచితిమి. కనుక ఈ రెండు బిందు సమూహములలో ఉన్న బిందువుల సంఖ్య సమమని చెప్పవచ్చునా?

క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలలో సంకలనము, గుణకారము ఇటువంటి పరికర్మములను ప్రవేశపెట్టి ఒక అంకగణిత మును నిర్మించవచ్చునా?

ఇట్టి ప్రశ్నలకు ప్రత్యుత్తరము సమర్పించి క్రాంత పరిమిత అంకగణితమును జార్జ్ కాంటార్ (1845-1918) నిర్మించెను.

సంకీర్ణ చలరాశి ఫలవాదము (థియరీ ఆఫ్ ఫంక్షన్స్ ఆఫ్ ఏ కాంప్లెక్స్ వేరియబుల్): x, y వాస్తవ చలరాశులైతే $x + iy = z$ ఇచ్చట $(i^2 = -1)$ ఒక సంకీర్ణ చలరాశి అని చెప్పవచ్చును. అప్పుడు $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy = w$ ఒక z యొక్క ఫలమగుచున్నది. దీనియొక్క వ్యుత్పన్నము $\frac{dw}{dz} = 2z$ అగుచున్నది. ఇటుల z యొక్క ప్రత్యక్ష ఫలముగా తీసికొనక, $w = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ అని తీసికొన వచ్చును. ఇచ్చట $\phi(x, y)$ యును $\psi(x, y)$ యును వాస్తవఫలములు. అనగా x, y వాస్తవ సంఖ్యలగునపుడు ϕ యును ψ యును వాస్తవసంఖ్య లగును. ఇటులున్నచో, x, y చలరాశులు $x + \Delta x$, $y + \Delta x$ గా మారగా, అనగా z చలరాశి $z + \Delta z$ గా మారగా ($\Delta z = \Delta x + i\Delta y$), w ఫలము $w + \Delta w$ గా మారు ననుకొనెదము. అపుడు $\Delta z \longrightarrow 0$ అగునప్పుడు $\lim \frac{\Delta w}{\Delta z}$ అద్వితీయమైన విలువను పొందునా, ఆవిలువ z విలువపై మాత్రము ఆధారపడిఉండునా అను ప్రశ్న ఉద్భవించుచున్నది. దీనికి ప్రత్యుత్తరము, అటుల ఎల్లప్పుడును సంభవించదనియు, అటుల సంభవించుటకు నిబంధనలు

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

అను కోషీ - రీమాన్ అంతరీకరణ సమీకరణములను తృప్తిపరచవలెననుటయే.

ఇట్టి ఫలములు $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. వాటిగుణములను పరిశీలించు గణితశాఖయే సంకీర్ణ చల రాశి ఫలవాదము.

గణిత తర్కము (సింబాలిక్ లేదా మేతమాటికల్ లాజిక్): తార్కిక విచారణలు, ఉపపత్తులను కల్పిం చుటకు జార్జ్ బూల్ 1854 లో ఒక బీజగణితమును కనిపెట్టెను. ఇది ఒక క్రొత్త బీజగణితము. దీనిలో $a + a = a$; $a \times a = a$. ఇచ్చట a ఈ బీజగణితములోని సంకేతము. అయితే ఇది సంఖ్యకాదు (చూ. బూలియన్ బీజగణితము).

మనము ఇంతవరకు పూర్ణాంకములతో ప్రారంభించి గణితమునకు కావలసిన అన్ని భావములను అనగా భిన్నాంకములు, వాస్తవ సంఖ్యలు, అవధిభావము, అవి చ్ఛిన్నతాభావము, ఫలభావము, వివిధ సంఖ్యాసమితులను ఎట్లు కల్పింపవచ్చునో చూపితిమి. పూర్ణాంకములను ఎటుల '1' 'తరువాత వచ్చుట' లేదా '>' అను భావ ముల నుండి సృజించవచ్చునో చూచితిమి. జ్యామితిని అంకగణితముమీద ఆధారపడి, నిరూపకముల ద్వారా డేకార్ట్ చూపినట్లు సృష్టిచేయవచ్చును. ఇట్లు గణిత మంత టిని పూర్ణాంకములమీద ఆధారపడి సృజించుటకు 'గణి తము అంకగణితముపై ఆధారపడుట' అందురు. ఈ ప్రయత్నము 19 వ శతాబ్దములో జరిగెను.

అంకగణితపు భావములను 'పూర్ణాంకము' 'పెద్ద' 'చిన్న' భావములను మరింత సులభమగు తార్కిక భావ ముల నుండి పొందవచ్చునా అను ప్రశ్నను పరిశీలించి యున్నాము. ఈ ప్రయత్నములో 'అంశము', 'ఉన్నది', 'లేదు', 'ఒకటికొకటి అనురూపత' అను తార్కిక భావములను మాత్రము ఉపయోగించి యున్నాము.

భారతీయ గణితము

భారత దేశములోని అతి ప్రాచీనమైనది వేదకాలము (క్రీ. పూ. 1500-750). తరువాత శుల్బసూత్ర కాలము (క్రీ. పూ. 750 - 400) శుల్బసూత్రములలో, చతురస్రముల లోను, దీర్ఘచతురస్రములలోను భుజములకును వికర్ణము లకును ఉన్న సంబంధము ఈయబడినది. దీర్ఘచతురస్ర మునకు సమమైన వైశాల్యముగల చతురస్రములు కనిపెట్టుట, వాటికి సమమైన వైశాల్యమగు వృత్తములు కనిపెట్టుట ఇటు వంటి ప్రశ్నలను విచారించిరి. ఈ సూత్రకారులు ఋషులు (బౌధాయన క్రీ. పూ. 800; ఆపస్తంబ క్రీ. పూ. 500; కాత్యాయన క్రీ. పూ. 500, మైత్రాయన, వరాహ, వాధుళ మొదలగువారు). పితాగొరస్ సిద్ధాంతమునకు దృష్టాంతముగ ఆపస్తంబుడును, బోధాయనుడును ఈ క్రింది సమీకరణములను వెలిబెట్టిరి. $3^2 + 4^2 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 13^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$; $12^2 + 35^2 = 37^2$; $15^2 + 36^2 = 39^2$. వీని మూలమున లంబకోణ నిర్మాణమునకు అన్వయించు పొడవులో గల త్రాళ్ల (శుల్బము) ను ఉపయోగించి లంబకోణములను నిర్మించిరి. కాత్యాయన ఋషి వీటికి బదులు $a\sqrt{2}$, a రెండు భుజములుగాను, 90° కోణమును గల త్రిభుజము నకు మూడవ భుజము $a\sqrt{3}$ అను సూత్ర్యమును ఉపయో గించియున్నాడు. బౌధాయన, ఆపస్తంబ, కాత్యాయన సూత్రములలో ఉన్న క్రింది శ్లోకము

"ప్రమాణం తృతీయేన వర్ధ్యతే, త చ్చతుర్థేన,
ఆత్మ చతుః త్రింశ్యోనేన సవిశేషః"

దీని అర్థము - 'కొలతకు దాని మూడవ భాగమును, ఈ మూడవ భాగము యొక్క నాల్గవ భాగమును చేర్చి తరువాత ఈ నాలుగవ భాగము యొక్క 34 వ భాగమును వ్యవకలనము చేసిన దొరకునదియే సవిశేషము'.

చతురస్రము యొక్క భుజపుకొలత ఒకటైనచో దాని వికర్ణము పై శ్లోకము ప్రకారము

$\sqrt{2} = 1 + 1/3 + 1/3 \times 4 - 1/3 \times 4 \times 34 = 1{\cdot}41429$

ఈ అద్భుతమైన ఫలము 5 వ దశాంశస్థానమువరకు సరియైనది. ఆ కాలపు మరికొన్ని గణిత ఫలములు :

(i) వృత్తము యొక్క పరిధి $C = \sqrt{10}\, d$.
(d = వ్యాసము). $A = \frac{1}{4}Cd$ (A = వైశాల్యము).

(ii) ఒక వృత్తఖండము యొక్క చాపము (ఆర్క్) $= a$ ను, దాని జ్యా $= c$ ను, దాని ఎత్తు h అయితే

$c = \sqrt{4h\,(d - h)}$

$h = \frac{1}{2}\,(d - \sqrt{d^2 - c^2})$

$a = (\sqrt{6h^2 + c^2})$

$d = (h^2 + c/4^2)\,/\,h$

బక్షాలితాళపత్రము : బక్షాలి అను పంజాబ్ గ్రామములో దొరకిన ఒక తాళపత్ర గ్రంథము నుండి ఆ కాలపు అంక, బీజ, గణితములను జ్యామితిని గురించియు మనకు వివరములు దొరికినవి. దీని కాలము సుమారు క్రీ. పూ. 300 అయి ఉండవలెను. ఈ తాళపత్ర గ్రంథము వర్గ మూలమునకు ఒక సుమారు విలువను క్రింద సమీకరణములో ఇచ్చియున్నది :

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \Big/ \; 2\left(a + \frac{r}{2a}\right)$$

దీనిని గ్రీస్ దేశపు హిరాన్ కనిపెట్టినదిగా చెప్పెదరు, కాని హిరాన్ కాలమునకు (సుమారు క్రీ. పూ. 120) రెండు శతాబ్దములకు పూర్వమే ఇది భారతదేశములో వాడుకలో ఉండెను.

భారతీయ గణితములో మూడవయుగము (క్రీ. శ. 400 నుండి 600 వరకు) ఖగోళ యుగము. ఈ కాలములోనే ఆర్యభటుడు-I (పుట్టినది క్రీ. శ. 476), వరాహమిహిరుడు (క్రీ. శ. 505) జీవించిరి. వరాహమిహిరుడు 'పంచ సిద్ధాంతిక' అను ఖగోళ గ్రంథమునందు ఆ కాలమునకు చెందిన పులిశ, రోమక, సూర్య, వశిష్ఠ, పైతామహ అను ఐదు సిద్ధాంతములను సంగ్రహించి యున్నాడు. వీటిలో సూర్యసిద్ధాంతమే (క్రీ. శ. 450 - 550) చాల మేలైనదని వ్రాసి ఉన్నాడు.

ఈ కాలములోని ముఖ్యపురుషులు బ్రహ్మగుప్తుడు (క్రీ. శ. 628), లల్ల, పద్మనాభ, శ్రీధర (క్రీ. శ. 8 వ శతాబ్దము), మహావీర (9 వ శతాబ్దము), శ్రీపతి, భాస్కరాచార్య-II (పుట్టినది క్రీ. శ. 1114). వీరిలో బ్రహ్మగుప్తుని గణితజ్ఞానము అతి ప్రఖ్యాతిని పొందినది.

జ్యామితిలో బ్రహ్మగుప్తుడు కనిపెట్టిన సిద్ధాంతములలో ముఖ్యమైనవి : చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము $\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$.

చతుర్భుజపు వికర్ణములు x, y కును భుజములు a, b, c, d కును ఉన్న సంబంధము :

$$x = \sqrt{\left(\frac{ad + bc}{ab + cd}\right)\,(ac + bd)}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{ab + cd}{ad + bc}\right)\,(ac + bd)}$$

అనీ ఇచ్చియున్నాడు. దీని నుండి $xy = ac + bd$ అను టాలెమీ సిద్ధాంతము లభించుచున్నది. పైన చెప్పిన సిద్ధాంతములు ఒక వృత్తములో అమర్చిన చతుర్భుజమునకు అన్వయించునే కాని అన్ని చతుర్భుజములకు ఉపయోగపడవు. ఈ విషయము బ్రహ్మగుప్తునికి తెలిసియుండెను. కాని తరువాత వచ్చిన వారు ఈ హద్దు ఉన్నదని గుర్తింపలేదు. కడపట, భాస్కరాచార్య-II ఈ సిద్ధాంతమును (చతుర్భుజ వైశాల్యము = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ అను దానిని) ఖండించెను. మరియొక విశిష్టమైన సిద్ధాంతము బ్రహ్మగుప్తునిది: $a^2 + b^2 = c^2$; $A^2 + B^2 = C^2$ ల నుండి, aC, cB, bC, cA పొడవులు గల ట్రెపీజియమ్ ఒక వృత్తమందు అమర్చిన ట్రెపీజియమ్. దాని వికర్ణములు పరస్పర లంబములు అనునదియే ఆ సిద్ధాంతము.

భారతీయులు గ్రీకులవలె జ్యామితి యందు కంటె అంకగణితములోను, ఖగోళశాస్త్రములోను, మిక్కిలి శ్రద్ధను తీసికొనిరి. భారతీయ గణితశాస్త్రజ్ఞులలో అతి ప్రసిద్ధుడు భాస్కరాచార్య-II.

మొత్తముమీద గ్రీకులు జ్యామితిలో సమర్థులు. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ వలె ఉన్న బీజ గణితపు సిద్ధాంతములను కూడ జ్యామితి సిద్ధాంతములుగానే పరిగణించిరి. ఒక గణిత సిద్ధాంతమును తార్కికరీతిగా రుజువుచేసినతరువాతనే దానిని నమ్మవచ్చును. వేలకొలది ప్రత్యేకమైన ఉదాహరణములలో ఒక సిద్ధాంతము సత్యమైనను దానిని నమ్మరాదు అని గుర్తించినవారు గ్రీకులే. అయితే గ్రీకులు అంకగణితమును, జ్యామితిని వేరు వేరు గదులలో బిగించి ఉంచిరి. ఒక్కొక్క రేఖకు దాని కొలత అను సంఖ్య అని కలదు, ఒక్కొక్క సంఖ్యను పొడవు రూపముగా ఒక రేఖయందు అమర్చవచ్చును అని వారు గుర్తించలేదు : లేదా గుర్తించుటకు సమ్మతించలేదు. ఇదియే గ్రీక్ గణితపు దౌర్బల్యము. బాబిలోనియా, భారతీయ గణితములలో ఈ విభాగమునకు స్థానమియ లేదు. ఇది వీరి గణితమునకు బలమునిచ్చెను. అయితే భారతీయ గణితములో ఏ ప్రశ్నకైనను సమాధానమును ఇచ్చినప్పుడు అది సరియైనది అని రుజువును దానితో ఇచ్చుటలేదు. అందువలన అది అనుభవమును ఆధారముగా గొని కనిపెట్టినదా, అనుమాన తర్కము నుండి సంపాదితమా అను విషయము మనకు తెలియదు. భారతదేశమునందు ప్రధాన గణితాచార్యులు వారి సిద్ధాంతములను ఉపపత్తిలేకయే ఇచ్చియున్నారనుటకు రెండు కారణములు ఉన్నవి. మొదటి కారణమేమన, భారతదేశమందు గణితమును సూత్రరూపముగ, అనగా, అతిహ్రస్వశైలిలో పద్యరూపములో వ్రాయుట ఒక పూజ్యమైన ప్రాచీన పద్ధతి. ముఖ్యవిషయములను కంఠస్థము చేయుటకు ఇట్టి శైలి చాల సహాయకరమైనది. కనుక ఫలితములను మాత్రము తమ గ్రంథములలో ఇట్లు తెలిపి, వాటిని రుజువుచేయు విధమును తమ విద్యార్థులకు బోధించుట వాడుక. ఇది కాక, ఇట్టి ఆచార్యుల గ్రంథమునకు వ్యాఖ్యానము చేయువారు, దానిలో ఉండు సూత్రములకు ఉపపత్తులను ఇచ్చెదరు.

మరియొక కారణము : గ్రీకులు 'జ్ఞానార్జనము జ్ఞానము కోసమే' అని నమ్మినవారు. అతి సరళ ఆధారతత్వముల నుండి ప్రారంభించి ఒక పెద్ద రాజగృహమును తర్కరీతిగా నిర్మించుటయే వారి లక్ష్యము. గణితము వారికి తర్కతాండవమునకు ఒక రంగభూమిగా కనపడెను. అయితే భారతీయులకు 'జ్ఞానముయొక్క లక్ష్యము జ్ఞానమే' అను భావము నచ్చలేదు. ఒక్కొక్క శాస్త్రమునకు ఒక హేతువు ఉండవలెను అని వారి అభిప్రాయము. ఆత్మసాక్షాత్కారమును, జనన మరణ చక్రమునుండి విడిపించుకొనుటయు మనుజ జీవితముయొక్క ముఖ్య లక్ష్యమగుటచేత, ఈ లక్ష్యమునకు సహాయకమగు శాస్త్రములనే వారు వృద్ధి చేసిరి. కనుక వారి దృష్టిలో గణితము, ఖగోళశాస్త్రము. జ్యోతిషము ఇవన్నియు వైదిక యజ్ఞకర్మాదులకు సహాయకరమైనటువంటి అంశములు. కనుకనే భారతదేశమునందు గణితమును మాత్రము ప్రత్యేకముగా పరిశీలించు గ్రంథములు 3 మాత్రమేయున్నవి. అవి బక్షాలి తాళపత్రము, త్రిశటిక, గణితసారసంగ్రహము. మిగిలిన గణిత గ్రంథములు ఖగోళశాస్త్రమునకు జ్యోతిషమునకు సహాయకరమైనవి, లేదా వేది నిర్మాణమునకు ఉపయుక్తమైనవి, లేదా వ్యవహార సంబంధములైనవి. ఉదా: ప్రస్తారములు, సంయోగములను (పర్ముట్యేషన్స్ అండ్ కాంబినేషన్స్) పరిశీలించినది ఛందశ్శాస్త్రమునకై ; గణిత పరంపరలు, త్రికోణమితి జైనసృష్టి విషయకశాస్త్రమునకును, ఖగోళ గణనములకును; శుల్బసూత్రములు వేది నిర్మాణమునకు, ఉపయుక్తములు.

ఇట్టి వినియుక్త పరిమిత దృష్టియొక్క దురదృష్ట ఫలితముగా భారతీయులు ఇతర దేశములందు కనిపెట్టిన జ్ఞాన భాండాగారముల నన్నింటిని తిరస్కరించి ఖగోళశాస్త్రమును మాత్రము స్వీకరించిరి. గ్రీకులతో సంపర్కము 2000 సంవత్సరములకు పూర్వమే ఏర్పడినను, సుప్రసిద్ధ 'యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్' 18 వ శతాబ్దమునందే సంస్కృత భాషకు అనువాదమయ్యెను. ఈ అనువాదమును చేసినది

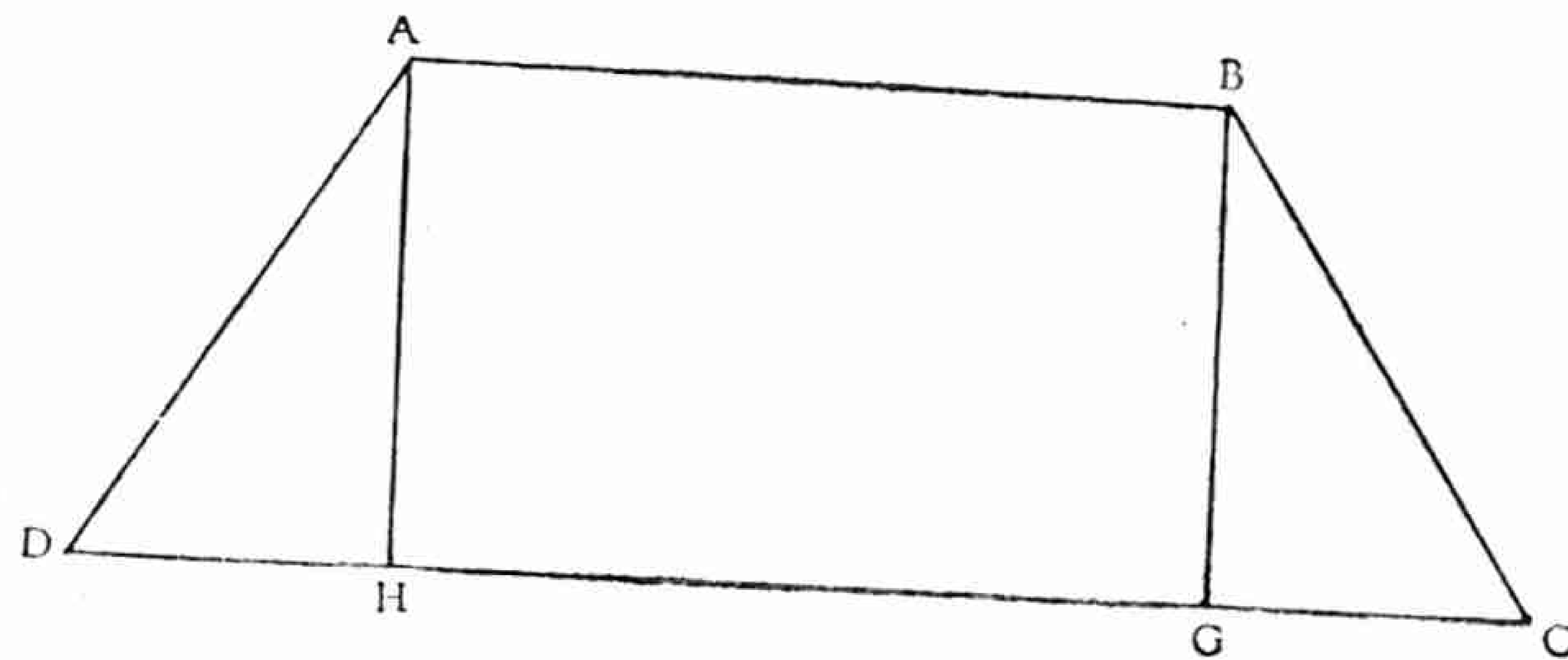
ఖగోళశాస్త్ర ప్రేమియగు జయసింహుని ఆస్థాన పండితుడగు జగన్నాథుడు. దీనికిమునుపే యూరప్‌నందున్న ముఖ్య గణిత గ్రంథములను పరిశీలించి భారతదేశమునకు తీసికొనివచ్చుటకై కొందరిని పంపియుండిరి. కాని వారి దృష్టికి న్యూటన్ వ్రాసినటువంటి ప్రిన్సిపియా కనబడలేదు. ఆ కాలముననే ఆ పుస్తకముయొక్క సంస్కృత ప్రతి భారతదేశమందున్నచో, ఇచ్చటి గణితాభ్యుదయమునకు హేతువుగా ఉండెడిది.

మొత్తముమీద భారతీయులకు నచ్చినది జ్యామితి కంటెను, జ్యామితి అంకగణితముల సమ్మేళనము. ఇటువంటి ప్రశ్నలలో వారు ఎక్కువ సామర్థ్యమును, ఉత్సాహమును చూపియున్నారు. ఉదాహరణమునకు వారు పరిష్కరించిన కొన్ని కొన్ని ప్రశ్నలను వివరించెదము.

శుల్బసూత్రములలోనే $x^2 + y^2 = z^2$ సమీకరణమునకు అనుగుణముగా సంఖ్యలను కనిపెట్టుటకు మార్గము చూపియున్నారు. ఇది

$$(\sqrt{n})^2\, a^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 a^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2$$

అను సమీకరణమునకు సరియగుచున్నది. అయిన బీజగణితములో ఇట్లు సంకేతములతో సంక్షేపముగా వ్రాయుట క్రీ. శ. 13వ శతాబ్దమువరకు అలవాటులోనికి రాలేదు. అంతవరకు అన్ని సిద్ధాంతములను వాక్యరూపముగనే వ్రాయుచుండిరి. బ్రహ్మగుప్తుడే $x^2 + y^2 = z^2$ అను సమీకరణమునకు అనుగుణమగు పూర్ణసంఖ్యలను మొట్టమొదట కనిపెట్టెను. అవి $x = m^2 - n^2$, $y = 2\,mn$, $z = m^2 + n^2$ (m, n వేర్వేరైన పూర్ణసంఖ్యలు). దీనిని ఉపయోగించి భుజములు, వైశాల్యము, లంబము, భుజలంబమువల్ల విభజింపబడిన పీఠముయొక్క రెండు భాగములు, అన్నియు పూర్ణసంఖ్యలే.



చిత్రము 2. ట్రెపీజియమ్

అకరణీయ సంఖ్యలను పొడవుగాగల త్రిభుజములను మహావీర కనిపెట్టెను. ఇటువంటి త్రిభుజము యొక్క భుజముల పొడవులు

$$AB = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{p} + p\right);\quad BC = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{q} + q\right)$$

$$CA = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{p} - p\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{q} - q\right)$$ అని ఇచ్చెను.

ఇచ్చట m, p, q పూర్ణసంఖ్యలు. ఇటులనే బ్రహ్మగుప్తుడు ట్రెపీజియమ్ $ABCD$ ని కనిపెట్టుటకు మరొకమార్గము చూపియున్నాడు. దీనిలో నాలుగు భుజములు AB, BC, CD, DA ; వికర్ణములు $AC = BD$, వైశాల్యము, సమాంతర భుజములు ($AB \parallel CD$), వాటికి లంబరేఖల వలన విభజించిన భాగములు $DH = GC$, HG అన్నియు పూర్ణసంఖ్యలుగానో, లేదా అకరణీయసంఖ్యలుగానో ఉండవలెను.

దీనికంటెను ఆశ్చర్యకరమైన ఒక ప్రశ్నను బ్రహ్మగుప్తుడు పరిశీలించెను. ఒక వృత్తములో అమర్చబడు అనగా 4 శిఖరములు ఒకే వృత్తముపై ఉన్నటువంటి అన్ని చతుర్భుజములను కనిపెట్టవలయును. దీనిలో అన్ని భుజములు, వికర్ణములు, లంబములు, ఖండములు (వికర్ణములను భుజములును వానికి లంబరేఖల వలన కలుగు ఖండములు, వికర్ణముల ఛేదనమువలన కలుగు ఖండములు) వైశాల్యములు, వృత్తవ్యాసము అన్నియు పూర్ణసంఖ్యలుగానే ఉండవలయును. ఇటువంటి చతుర్భుజములకు బ్రహ్మగుప్త చతుర్భుజములని పేరు.

మొత్తముమీద ప్రాచీన భారతీయులు గణితసరస్వతికి సమర్పించిన కానుకలలో అతిప్రశస్తమైనవి క్రిందివి :

(1) అంకగణితమందు శూన్యము అను ఒక సంకేతమును, స్థలమూల్య భావమును ఉపయోగించి ఆధునిక సంఖ్యల వ్రాయుపద్ధతిని కనిపెట్టుట. ఇది గణితమునకొక మహాసేవ. ఏలన, ఇంత సులభముగను, సంక్షేపముగను అంకెలు వ్రాయుటవలననే అంకగణితమేకాక గణితశాస్త్రము అద్భుత పురోగతిని పొందెను.

(2) బీజగణితము యొక్క ప్రారంభమున $(-a)(-b) = +ab$ ఇత్యాది విధానములు బ్రహ్మగుప్తునికి తెలుసును. వర్గ సమీకరణములకు మూలములు కనిపెట్టు మార్గము భారతీయులు కనిపెట్టిరి ; వానికి రెండు మూలములు ఉన్నవి అని గుర్తించిరి.

(3) త్రికోణమితిలో జ్యా (సైన్), కోటిజ్యా (కోసైన్) లను ప్రవేశపెట్టి వాటిని గణించి ఉపయోగించిరి. ఆర్యభటుని అనుయాయిలకు $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ అను అనంతపరంపర (గ్రిగోరీ పరంపర) ను

$\sin x$, $\cos x$ యొక్క పరంపరను కనిపెట్టిరి. ఇవి కేరళ గ్రంథములో ఉన్నవి.

(4) $ax + by = c$, $Nx^2 + 1 = y^2$ ఇటువంటి సమీకరణములకు x, y పూర్ణ సంఖ్యలలోనే సాధనమును కనిపెట్టు (డయోఫాంటైన్, పెల్లియన్ సమీకరణములు) ప్రశ్నలలో అతి సామర్థ్యమును చూపి చక్రవాళమను మార్గమును కనిపెట్టిరి. ఇటువంటి ప్రశ్నలు యూరప్‌లో 17 వ శతాబ్దములోనే పరిశీలించబడినవి.

అరబ్బుల గణితము

క్రీ శ. 622 లో మహమ్మదు మెక్కానుండి మెదీనాకు తరలెను. ఆ తరువాత 10 సంవత్సరములలోనే అరబ్ దేశపు చెదరియున్న జాతులు మత ప్రచారపు ఉత్సాహము వల్ల ఐకమత్యమునుపొంది, చేతిలో ఖడ్గములను ధరించి, సిరియా, మెసపొటేమియా దేశములను స్వాధీనపరచుకొనిరి. తరువాత పారశీక దేశమేకాక దూరమునఉన్న భారత దేశమువరకు వారి సామ్రాజ్యమును వ్యాపింపచేయదొడగిరి. ఆఫ్రికా ఖండము ఉత్తరభాగము, స్పెయిన్ దేశముయొక్క చాలభాగము వారివశమయి, వారి సామ్రాజ్యము తుదకు స్పెయిన్‌నుండి భారతదేశమువరకు వ్యాపించెను. వారిలో వారికి పోరాటములు వచ్చుటవలన రెండు విభాగములై ఒక సామ్రాజ్యము బాగ్దాద్ ముఖ్య పట్టణముగను, మరియొకటి స్పెయిన్‌లోని కార్డోవా ముఖ్య పట్టణముగను రెండు కలీఫా రాజ్యములు సాగినవి.

అలెగ్జాండ్రియా నగరము క్రీ. శ. 641 లో అరబ్బుల వశమైనది. గ్రీకులు చిరకాలముగా చేర్చియున్న అతి ప్రశస్తమైన అలెగ్జాండ్రియా లైబ్రెరీకి అరబ్బులు నిప్పు పెట్టిరి. పుస్తకములను కాల్చుటకే ఆరునెలలైనదట!

అయితే ప్రారంభమునందు మతోన్మాదముచే పుస్తకములను కాల్పించినను, కాలక్రమమున వారే శాస్త్ర పోషకులై గ్రీస్‌నుండియు, ఇండియానుండియు విద్వాంసులను పిలిపించి, వారి ముఖ్యగ్రంథములను అరబ్బీ భాషలోనికి అనువాదము చేయించిరి. ఇండియానుండి ఖగోళ, గణిత గ్రంథములు క్రీ. శ. 825 లో అనువాదము చేయబడి భారత సంఖ్యావివరణము అరబ్బులకు సంక్రమించెను. అపలోనియస్, ఆర్కిమీడీజ్, యూక్లిడ్, టాలెమీ ఇంకను ఇతరులు వ్రాసిన గ్రంథములను కూడ భాషాంతరము చేసిరి. అరబ్బీశాస్త్రజ్ఞులలో ఆల్ కొవారిజ్మీ మూలముననే బీజగణితమునకు 'ఆల్జీబ్రా' అను పేరు వచ్చినది.

తరువాత ఈ పుస్తకములలో ముఖ్యమయినవి అరబ్బీ భాషనుండి లాటిన్ భాషకు అనువాదము చేయబడి, యూరప్‌నకు గ్రీకుల జ్యామితి, భారతీయుల అంక, బీజగణితములును అందెను. అరబ్బుల కాలములో క్రొత్తగణిత తత్త్వ పరిశోధనలు ఎక్కువ లేవు. మూడవ తరగతి సమీకరణసాధనకై బీజగణితపు పద్ధతులు ప్రవేశపెట్టుట జరిగినది.

పాశ్చాత్య గణితము (16వ శతాబ్దము)

యూరప్‌లో గణితశాస్త్ర పునరుజ్జీవనము 15 వ శతాబ్దములోనే ప్రారంభించెనని చెప్పవచ్చును. 13 వ శతాబ్దములోనే పారిస్, ఆక్స్‌ఫర్డ్, కేంబ్రిడ్జ్, బోలోన్యా, నేపిల్స్, ప్రాగ్ నగరములలో యూనివర్సిటీలు స్థాపింపబడినవి. బి.ఎ., ఎమ్.ఎ., పట్టములను ఈయ ప్రారంభించిరి. అయినను ముఖ్యమయిన చదువులు లాటిన్ వ్యాకరణము, తర్కము, మత సంబంధమైన వ్యాసంగములు మాత్రమే. ఈ కాలములోనే అరబ్బులు శేషించిన గ్రీక్, భారతీయ గణిత గ్రంథములను అరబ్బీ భాషనుండి లాటిన్ భాషకు అనువాదము చేయదొడగిరి. రోజర్ బేకన్ (క్రీ. శ. 1214 - 1294) శాస్త్ర జ్ఞానోపార్జనయందు ప్రయోగమునకున్న ప్రాధాన్యమును బోధించెను. పూర్వ గ్రంథములను మాత్రము పఠించి ప్రపంచ తత్త్వములను కనుగొన పూనుకొనకుండ ప్రత్యక్షముగా వస్తువులను పరీక్షించి, యథార్థ జ్ఞానమును సంపాదించు పద్ధతికి ఈయనే మార్గదర్శకుడు. క్రీ. శ. 15వ శతాబ్దములో లియనార్డో డావిన్సీ అనుప్రసిద్ధుడైన శిల్పి, చిత్రకారుడు, శాస్త్రవేత్త ప్రాదుర్భవించెను. ఈయన ప్రయోగము యొక్క ప్రాధాన్యమును బోధించి, అట్టి ప్రయోగ ఫలితములను గణితశాస్త్ర నియమములతో విమర్శించిన తుది నిర్ణయములు మరల ప్రయోగముచే పరీక్షించ వలయునను ఆధునిక పద్ధతిని ఆ కాలముననే ఉద్ఘాటించెను.

క్రీ. శ. 1453 లో ప్రాచ్యరోమన్ సామ్రాజ్య ముఖ్య పట్టణమగు కాన్‌స్టాంటినోపుల్‌ను తురుష్కులు వశము చేసికొనిరి. అచ్చటనుండిన గ్రీక్ పండితులు తమ గ్రంథములతో ఇటలీదేశమునకు పారిపోయి విజ్ఞానమును వెదజల్లిరి. సుమారు ఇదేకాలముననే ముద్రణయంత్రము నిర్మితమయ్యెను. అందువల్ల పుస్తకములు సమృద్ధిగను,

చవుకగను దొరకసాగెను. 15 వ శతాబ్దమునందు రీజియొమాన్టానస్ గ్రీక్ మూలగ్రంథములను పరిశీలించి లాటిన్ భాషలో వ్రాసి, భారతీయ త్రికోణమితిని సూక్ష్మీకరించి ఒక ప్రత్యేక శాస్త్రముగ వ్రాసెను. సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతమును ప్రచురించెను. 16 వ శతాబ్దమునందు మూడవ తరగతి సమీకరణమును సాధించువిధము టార్టాల్యా (1535) కనిపెట్టెను. దానిని కార్డాన్ 1545 లో ఆర్స్ మాగ్నా అను తన గ్రంథమున చేర్చెను. సమీకరణము $x^3 + px = q$ అయితే

$$x = \left[\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}\right]^{\frac{1}{3}} - \left[\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

అను సూత్రమువలన దాని మూలములు కనిపెట్టవచ్చునని అతడు నిరూపించెను.

ఈ శతాబ్దమునందే టైకోబ్రాహి యొక్క కచ్చితమైన ఖగోళ అవేక్షణములును వాటినుంచి నిష్కృష్టమైన జోహాన్ కెప్లర్ గ్రహగతి సూత్రములును ఖగోళ శాస్త్రమునందు ఒక క్రొత్త యుగమును స్థాపించెను.

సంఖ్యాగణనకు మిక్కిలి ఉపయోగకరమైన లాగరిదమ్‌లను కనిపెట్టిన గౌరవము ఈశతాబ్దమునందు పుట్టిన స్కాట్లండ్ దేశపు జాన్ నేపియర్ (1550-1617)కు చెందును. ఈయన కనిపెట్టిన పద్ధతి 1614 లో ప్రచురింప బడినది. 1624 లో హెన్రీ బ్రిగ్జ్ (1556-1631) యును ఇతరులును ఆ పద్ధతికి ఉపయోగమగునట్లు ఒకటి నుండి 101,000 వరకును పూర్ణసంఖ్యలకు లాగరిదమ్‌లను గణించి ప్రచురించిరి.(చూ. లాగరిదమ్‌లు) 16 వ శతాబ్దములో గణితాభ్యుదయము మరల ప్రారంభించిన దనుటకు సందేహమేమియు లేదు.

జ్యామితి

మనము ఇప్పుడు గణితముయొక్క రెండవశాఖ అగు జ్యామితివైపు మన దృష్టిని త్రిప్పుదము. అతిప్రాచీన కాలమున అనగా క్రీ. పూ. 700 కు మునుపు గణితపథమునందు అడుగుపెట్టిన దేశములలో రెండు మన దృష్టిని ఆకర్షించుచున్నవి. అవి మెసపొటేమియా, ఈజిప్టు.

మెసపొటేమియా

వీటిలో అతి ప్రాచీనమయినది టైగ్రిస్, యూఫ్రేటీజ్ కనుమలలో వర్ధిల్లిన మెసపొటేమియా (సూమర్, అక్కాడ్ చేరియున్న బాబిలోనియా) (చూ. బాబిలోనియా గణితము). జ్యామితియందు క్రీ. పూ. 2000 లకు పూర్వమే దీర్ఘచతురస్రము, లంబకోణ త్రిభుజము, ట్రెపీజియమ్ వాని వైశాల్యములు; 3, 4, 5 యూనిట్‌ల పొడవులు గల త్రిభుజము లంబకోణత్రిభుజము అన్న విషయమును వీరికి తెలిసియుండెను. క్రీ. పూ. 2000 లో వారు నిర్మించిన ఒక మృత్ఫలకమునుండి వారు $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 100$ సమీకరణములను సాధించు శక్తిగలవారని తెలియుచున్నది. ఆ కాలములో బీజగణితము లేదు; సంకేతములు లేవు. ఈ విషయములను జ్ఞాపకముంచుకొనినచో వీరు అంకగణితమందు ఎంత పాండిత్యమును పొందియుండిరో గుర్తింపవచ్చును.

ఈజిప్టు

అతి ప్రాచీన కాలమునందు గణితాభ్యున్నతి పొందిన రెండవ స్థలము నైలునదీతీరప్రాంతమైన గీజా (ఈజిప్టు)లో ఉన్న పెద్ద పిరమిడ్ యొక్క నిర్మాణకాలము క్రీ. పూ. 3000. ఇది సుమారు 5·25 హెక్టేరులు వైశాల్యమును ఆవరించి, 1,00,000 పనివారు 300 సంవత్సరములు ఉద్యమించి, నిర్మించిన కట్టడము. దీనికై ఒక్కొక్కటి రెండున్నర మెట్రిక్ టన్నులు బరువుగల 2,000,000 రాళ్ల మొద్దులను నైలునదీతీరము నుండి తీసికొనివచ్చి, పైకి కప్పుటకు 54 మెట్రిక్ టన్నుల మొద్దులను 966 కి. మీ. దూరమునుండి తీసికొనివచ్చి, వాటిని 61 మీటరుల ఎత్తున అమర్చి ఉన్నారనునప్పుడు గణితమునను, సాంకేతికశాస్త్రమునను వారెంత నైపుణ్యమును కలిగి ఉండవలెనో మనమే ఊహింపవచ్చును. వారికి జ్యామితిలో సుమారు క్రీ. పూ. 1800 లోనే వృత్తముయొక్క వైశాల్యము $= \pi r^2$ ($\pi = 256/81 = 3{\cdot}1605$*), శంకుయొక్క ఘనపరిమాణము (చూ. ఈజిప్టు గణితము), త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము ($\frac{1}{2}ap$), గోపురము యొక్క ముఖములు, పీఠముతో చేయు కోణముల కోటిస్పర్శజీవము (కోటాన్‌జెంట్) - ఇవన్నియును తెలియును. అన్నిటికంటె ఆశ్చర్యకరమైనది $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ అను ఒక కత్తిరించిన గోపురము యొక్క ఘనపరిమాణము. ఈ సాంకేతికమును సంఖ్యలలో చర్చించిన ఒక ప్రశ్నయందు గుర్తించెదము. ఇచ్చట a, b రెండు చదురపు పీఠముల భుజములు, h చిన్న గోపురముయొక్క ఎత్తు.

బాబిలోనియన్‌లకును, ఈజిప్షన్‌లకును తరువాత అనగా క్రీ. పూ. 3,500 నుండి క్రీ. పూ. 600 వరకును గణితశాస్త్రాభివృద్ధి గోచరించలేదు.

* ఇది నవీన దశాంశపద్ధతిలో π యొక్క విలువ.

గ్రీక్ జ్యామితి

ఇందు క్రీ. పూ. 600 నుండి క్రీ. శ. 500 వరకు గ్రీస్‌లో వెలసిన జ్యామితిని గూర్చి వివరించబడును.

గ్రీకులు సత్యమును, జ్ఞానమును తీవ్రముగ ప్రేమించువారు, విషయములను యథార్థముగ తెలిసికొన దృఢ నిశ్చితులు, కుశాగ్రహేతువాదులు, సౌందర్యప్రియులు; ఆ కాలముననే కాక తరువాతి సహస్రాబ్దముయొక్క సంస్కృతికి కూడ మార్గదర్శకులు. గణితమునందు - ముఖ్యముగా జ్యామితియందును ఖగోళశాస్త్రమునందును గ్రీకులు వెలిపుచ్చిన జ్ఞానము వారి కాలమునకు సువర్ణ యుగము అను బిరుదును సంపాదించి పెట్టినది.

గ్రీకులు జ్యామితిలో కనిపెట్టిన విషయములు ఋజురేఖలు, కోణములు, త్రిభుజములు వాని విశేష గుణములు, గోళము, శంకు, స్తూపము వాని ఛేదనములవలన లబ్ధమగు శాంకవములు మొదలగునవి. మనము నేర్చుకొనిన జ్యామితి సిద్ధాంతములందు అధిక భాగము గ్రీకులు కనిపెట్టినవియే. ఈ యుగమందు ప్రఖ్యాతిగాంచిన ముఖ్యపురుషులను, వారి కాలములను చర్చించెదము.

క్రీ. పూ. 600లో మైలీటస్ నగరవాసి శాలుడైన తేలీజ్ ఈజిప్టుదేశ విజ్ఞానమును నేర్చుకొనుచుండెను. క్రీ. పూ. 500 లో పితాగొరస్ ప్రఖ్యాతిని పొంది తన శిష్యులకు గణితమును బోధించెను. క్రీ. పూ. 400 లో బాలకుడు ప్లేటో తన గురువు సోక్రటీస్‌కు కలిగిన దౌర్భాగ్యమును తప్పించుకొనుటకై ఏథిన్స్ నగరమునుండి పారిపోయెను. క్రీ. పూ. 300 లో యూక్లిడ్ తన 'ఎలిమెంట్స్' అను పుస్తకములను వ్రాయుచుండెను. ఈ కాలముననే ఆర్కిమీడీజ్, ఎరాటొస్తెనీజ్ వర్ధిల్లిరి. క్రీ. పూ. 200లో అపలోనియస్ తన ప్రఖ్యాత శాంకవములను గురించిన పుస్తకమును వ్రాసెను. క్రీ. పూ. 150 - క్రీ. శ. 200 లో ఆలెగ్జాండ్రియా నివాసి, ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్ర, యాంత్రిక శాస్త్రవేత్త హీరో జననము. క్రీ. శ. 100 లో ఖగోళ శాస్త్ర సంస్కర్తయగు టాలెమీ జననము. క్రీ. శ. 200 లో గ్రీక్ సామ్రాజ్యముపైన, సంస్కృతిమీద అంధకారము ఆవరించ మొదలిడినది. ఈ అంధకారము 1000 సంవత్సరములవరకు యూరప్‌లో నిర్విరామముగ నిలిచి ఉండెను.

యూక్లిడ్: గ్రీకులలో యూక్లిడ్ లోకప్రసిద్ధి పొందెను. ఈయన ఆలెగ్జాండ్రియా నగరనివాసి అనునది తప్ప వేరేమియు ఈయన గురించి తెలియదు. ఈయన తన కాలమున తెలిసిన గణితతత్త్వము లన్నిటిని సమకూర్చి, వాటిని తర్కశాస్త్రరీతిని క్రమముగా సవరించి, 'ది ఎలిమెంట్స్' అను 13 పుస్తకములు వ్రాసెను. వీటిలో 1, 2, 3, 4, 5, 6 పుస్తకములందు జ్యామితి, 11, 12, 13, పుస్తకములందు త్రిపరిమాణిక ఆకాశ జ్యామితి, మిగిలిన వానియందు అంకగణితము చర్చించబడినవి.

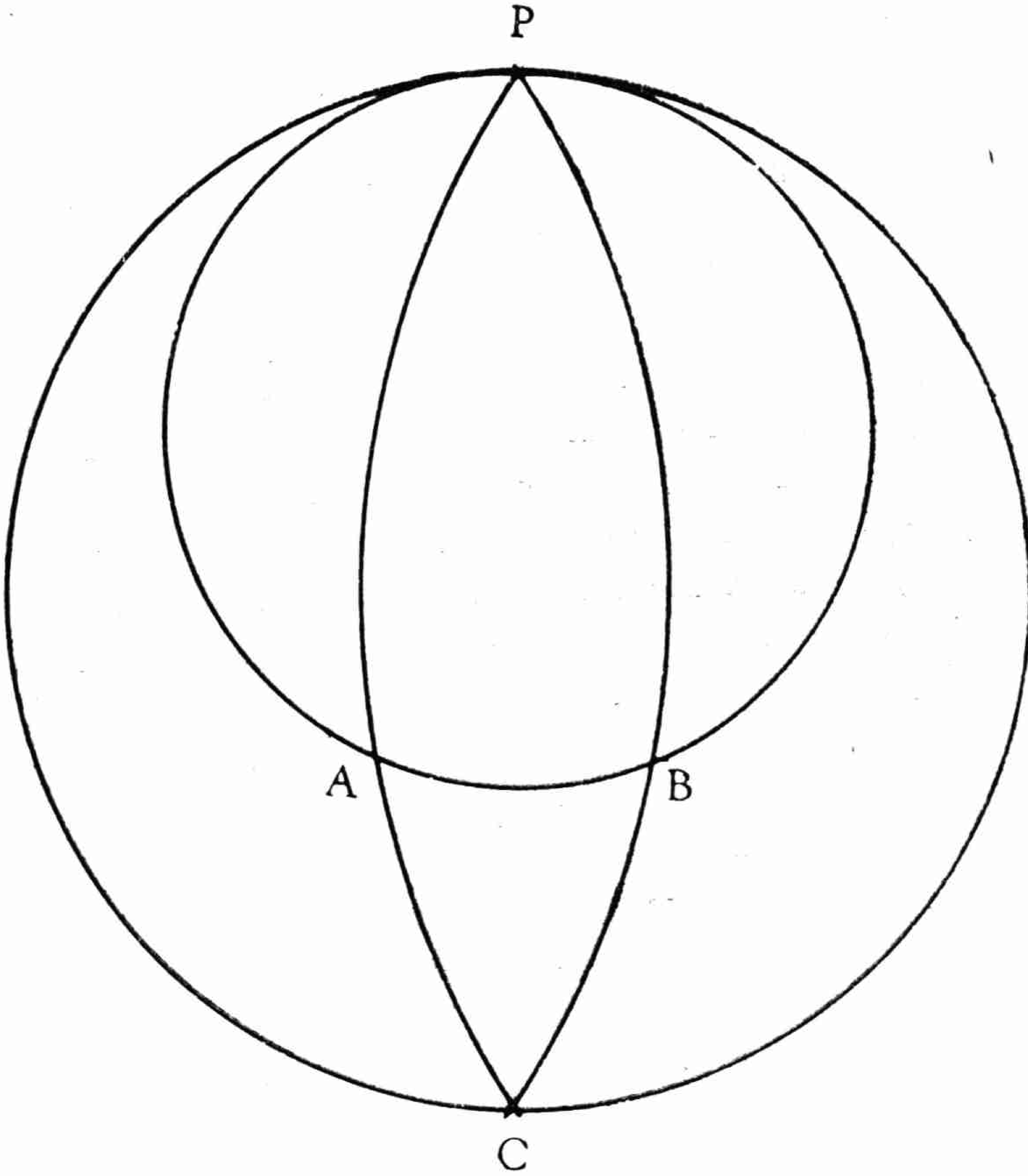
యూక్లిడ్-గణిత స్వభావము : యూక్లిడ్ అవలంబించిన మార్గమును రెండు వేల సంవత్సరములవరకు ఏ ఆక్షేపణ లేక గణితశాస్త్రజ్ఞులు అనుసరించిరి. ఇప్పటికిని యూక్లిడ్ చూపిన త్రోవను - అనగా ప్రారంభములోనే మనము పరిశీలించు అన్ని వ్యక్తు (బిందువులు, ఋజురేఖలు, తలములు) లను గురించి ఏయే గుణములను ఆధార తత్త్వములుగా నిరూపణలేకయే తీసికొనెదమో వాటిని స్పష్టముగా జాబితా వేయుట; తరువాత వచ్చు ఒక్కొక్క సిద్ధాంతమును ఆధార సిద్ధాంతముల నుండియును, పూర్వము నిష్కృష్టమయిన సిద్ధాంతముల నుండియును రుజువుచేయుట - గణితముయొక్క యుక్తమయిన వికాస మార్గముగ ఒప్పుకొనుచున్నారు. గణితము చర్చించు వస్తుసమూహమేమియని మనము తెలిసికొన నక్కరలేదు. 'బిందువు', 'ఋజురేఖ', 'ఒక బిందువు ఒక రేఖమీద ఉండుట, లేదా ఒక రేఖ ఒక బిందువును కలిగిఉండుట' అను సంబంధముల అర్థము మనకు తెలియుట అనావశ్యకము. గణితమును నిర్మించుటకు కావలసినది ఏమనగా ఈ అర్థములేని బిందువులను 'రేఖలను' వాని అర్థములేని రేఖమీద, బిందువు అను సంబంధములను గురించిన ఆధార తత్త్వములు మాత్రమే. ఉదా: ఏవో రెండు ప్రత్యేక బిందువులను కల రేఖ ఒకటి ఉన్నది. ఆ రేఖమీద మరియొక మూడవబిందువు ఉన్నది. ఇటువంటివే ఆధార తత్త్వములు. ఈ ఆధారతత్త్వములు అర్థరహితములు. కాబట్టి వానికి పెక్కు అర్థములు ఈయవచ్చును, లేదా అర్థమే లేకుండ ఉండవచ్చును. దీనివల్ల ఆ గణితమునకు ఏ లోపము కలుగదు. ఏలన గణితము ప్రత్యక్షవస్తువుల గుణమును వర్ణించదు.

బిందువులు, ఋజురేఖలు అర్థములేని పదములు. వాటికి ఆధారతత్త్వములకు అవిరోధముగ వేరు అర్థములు ఈయవచ్చును అను అభిప్రాయమునకు దృష్టాంతముగ క్రింది పదములకు వేరు అర్థములను ఇచ్చెదము. ఇదియొక క్రొత్త జ్యామితి అగును. అవేపదములు ప్రయోగించినను ఆ ఆపదమునకు క్రొత్త అర్థమిచ్చునప్పుడు మనము ఆ పదమును ప్రత్యేకముగా సూచించెదము. తలములో ఒక బిందువు P ను తీసికొందము. తలములో P తప్ప మిగిలిన

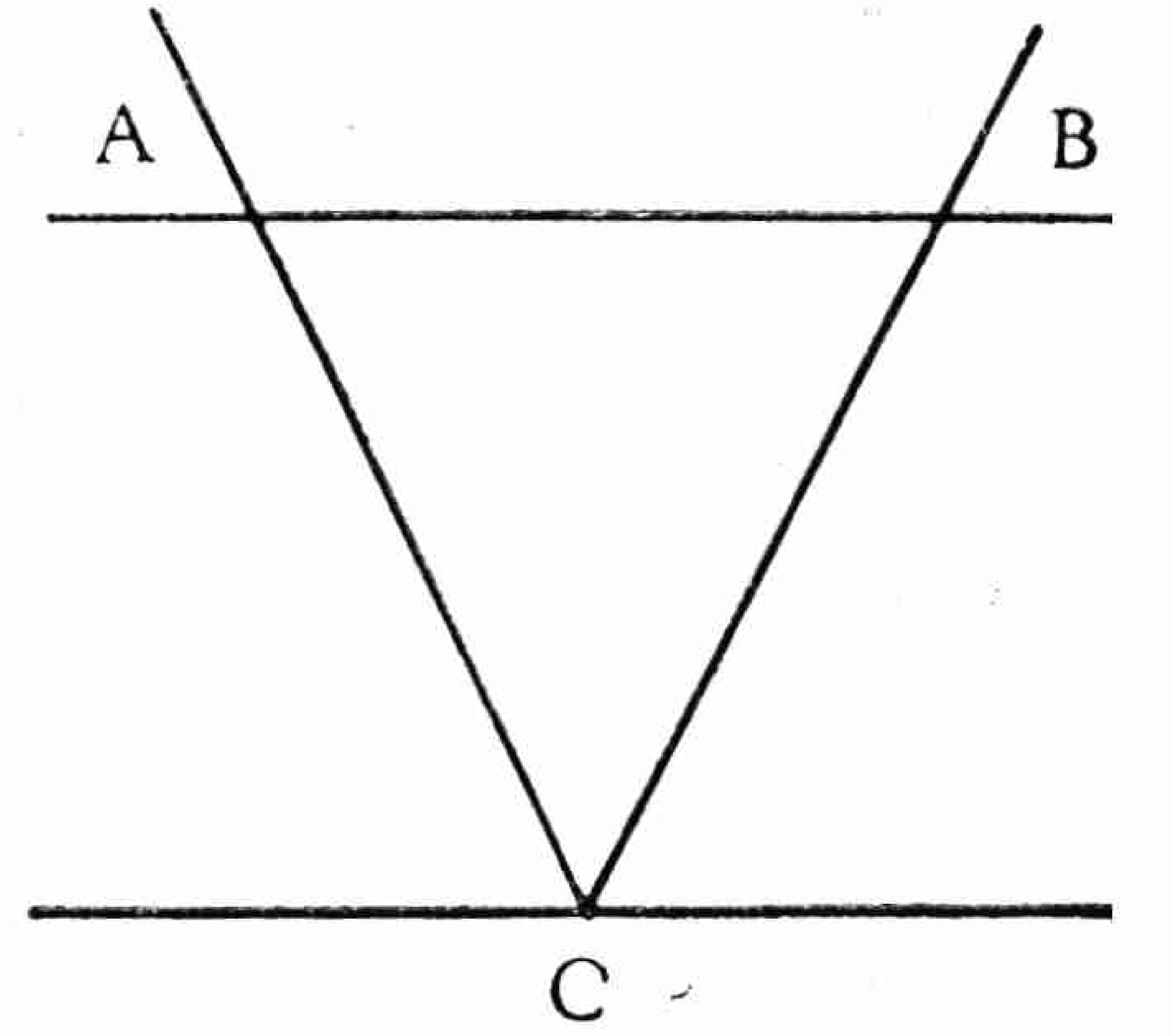
బిందువులను 'బిందువులు' అనెదము. 'ఋజురేఖ' అనగా P ద్వారాపోవు వృత్తములు. 'వృత్తములు' అనగా P ద్వారాపోవని వృత్తములు. 'కోణము' అనగా కోణము. ఇప్పడు ఆధారతత్త్వములను గమనింతము. ఇప్పుడును 'ఋజురేఖ' ఒక 'బిందు' సమూహామే. A, B అను రెండు ప్రత్యేక బిందువులున్న, ఋజురేఖ ఒక్కటి మాత్రమే కలదు, మరి వేరొక్క రేఖలేదు అను ఆధారతత్త్వము సత్యమే; ఏలన ఈ క్రొత్తశాస్త్రములో ఋజురేఖ అనగా P ద్వారా పోవు వృత్తము PAB ఈ మూడు బిందువులను లభించు సిద్ధాంతమిదియే: "P ద్వారా వెళ్ళు ఒక వృత్తము PAB ను, దానిమీదలేని ఒక బిందువు C (ఇది P కాదు) ఇచ్చిన P, C బిందువుల ద్వారా PAB ని ఛేదించని వృత్తము ఒకటి కలదు. అటులున్నది ఒకటే". ఈ సిద్ధాంతము సత్యమే; ఏలన P, C ద్వారా PAB ను P లో స్పర్శించు వృత్తము ఒకటే కలదు. ఇదే విధముగా పాతశాస్త్రములోని ఒక్కొక్క సిద్ధాంతమునకు క్రొత్త అర్థమియవచ్చును. ఉదా: PAB, PBC, PCA వృత్తములు నిర్ణయించు త్రిభుజముయొక్క కోణసంకలనము 180° అగును (చూ. చిత్రములు 3; 4).

ఇటుల మనకు ఇష్టమైనటువంటి వ్యక్తులను, మూలతత్త్వములను స్వీకరించి, వాటి నుండి తార్కికరీతిని ఆ వ్యక్తులను గురించి ఇతర సిద్ధాంతములను పొందుటయే ఒక గణితశాఖ అగును. మూలతత్త్వములు ఏమయినప్పటికి, వాటి నుండి పొందిన సిద్ధాంతములు చేరిన సమూహములో పరస్పర విరోధము ఉండకూడదు. ఇది ఒక్కటియే నియమము.

గ్రీకుల కాలములో ఈ పథమును జ్యామితి యందు మాత్రము శాస్త్రజ్ఞులు



చిత్రము 3.



చిత్రము 4.

గల వృత్తము ఒకటే ఉన్నది. సాధారణ జ్యామితి యందు ఒక రేఖ AB ను, దానిమీదలేని ఒక బిందువు C ను ఇచ్చిన C బిందువు నుండి ఆ రేఖను ఛేదించని (అనగా AB రేఖకు సమానాంతరమయిన) రేఖ ఒకటి ఉన్నది; అది ఒక్కటే. ఈ తత్త్వమును క్రొత్త శాస్త్రములోని సిద్ధాంతముగ మనము చూచితిమేని, అనగా బిందువులు, రేఖలకు బదులుగా 'బిందువులు'; 'రేఖలు' అని తీసికొనిన మనకు అవలంబించిరి. అయితే గత 100 సంవత్సరములలో ఇదే పథమును అంకగణితములోను, బీజగణితములోను, యాంత్రికశాస్త్రములోను, ఇంకను ఇతర క్షేత్రములలోను అతివిజయవంతముగ అనుసరించి ఉన్నారు.

యూక్లిడ్ ఆధారతత్త్వములు: యూక్లిడ్ తాను స్వీకరించిన ఆధారతత్త్వములను రెండువిధములుగ విభ

జించెను. మొదటివి ఆధారతత్త్వములు (ఆక్సియమ్స్) స్వత స్సిద్ధమైనవియును అన్ని శాఖలయందును ఉపయుక్తము లైనవి. ఇవి ఏమనగా,

A_1. రెండు వస్తువులు ఒకే వస్తువునకు సమమైతే ఆ రెండును ఒకదాని కొకటి సమము ;

A_2. సమమైనవానికి సమమైనదానిని సంకలనము చేయుట వలన లభించు మొత్తములు కూడ సమమే ;

A_3. సమమైనవాని నుండి సమమైనదానిని వ్యవకలనము చేయుటవలన కలుగు భేదములు సమమే అగును ;

A_4. సంపూర్ణమైనది దాని భాగమున కంటె పెద్దది.

రెండవ విభాగములో ఉన్న తత్త్వములు, లేదా అంగీకృత తత్త్వములు (పోస్ట్యులేట్స్) జ్యామితికి సంబంధించినవి. అవి ఏమనగా

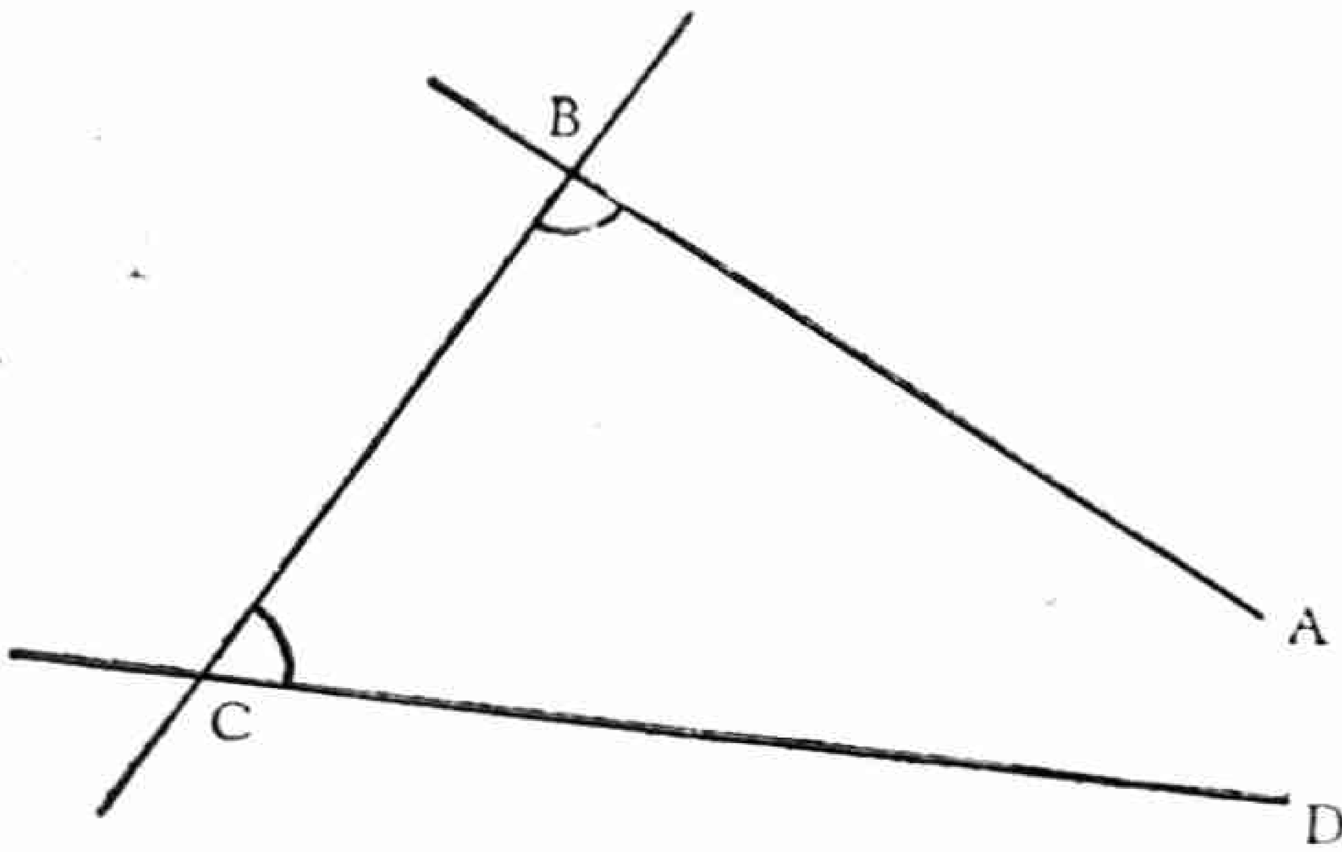
P_1. రెండు బిందువులను చేర్చి ఒక ఋజురేఖ వ్రాయవచ్చును ;

P_2. ఒక పరిమితమైన ఋజురేఖ ఖండమును ఎడతెగకుండ ఇరుప్రక్కలు పొడిగింపవచ్చును ;

P_3. ఒక బిందువు కేంద్రముగను, ఇచ్చిన పొడవు వ్యాసార్థముగను ఒక వృత్తమును గీయవచ్చును ;

P_4. అన్ని లంబకోణములును సమానకోణములు ;

P_5. ఒక ఋజురేఖ రెండు ఋజురేఖలమీద పడినపుడు ఒకే ప్రక్కన ఉన్న లోపలి కోణముల మొత్తము రెండు లంబకోణములకు తక్కువైతే, ఆ రెండు రేఖలు కావలసినంత దూరము పొడిగించిన ఏ ప్రక్కన రెండు లంబకోణముల (180°) కు తక్కువగా ఉన్నదో ఆవైపున సంధించును.



చిత్రము 5

అనగా పై చిత్రములో $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$ అయితే BAను CD ను కావలసినంత దూరము పొడిగించినచో కుడిప్రక్కన సంధించును.

యూక్లిడ్-ఆధునిక విమర్శనలు : యూక్లిడ్ అనుసరించిన మార్గము సరియైనది. అయితే అతడు కొన్ని మరుగులో ఉన్న ఆధారతత్త్వములను గుర్తించలేదు. అందువల్ల వాటిని బహిరంగపరచకయే ఉపయోగించి ఉన్నాడు. ఉదా : 'నడుమ' అను భావము. ఒక రేఖయందు A, B, C అను మూడు బిందువులు క్రమముగా A తరువాత B, B తరువాత C ఉన్నచో, B అను బిందువు A కును, C కును 'నడుమ' ఉన్నది. ఈ నడుమ అను భావమును దాని సంబంధమైన గుణములను స్పష్టముగ చెప్పకయే యూక్లిడ్ ఉపయోగించి ఉన్నాడు. ఈ లోపము తీర్చవలయుననిన క్రింద వివరించిన గుణములను 'నడుమ' అనుదాని ఆధార తత్త్వములుగా స్వీకరించవలయును.

(i) B అను బిందువు A, C అను బిందువుల 'నడుమ' ఉన్నచో, అది C, A ల 'నడుమ' ఉన్నది.

(ii) B అను బిందువు A, C 'నడుమ'ను C అను బిందువు B, D 'నడుమ'ను ఉన్నచో అప్పుడు B అను బిందువు A, D 'నడుమ' ఉండును.

(iii) ABC అను త్రిభుజములో ఒక ఋజురేఖ AB రేఖను A, B ల 'నడుమ'ను, BC రేఖను B, C ల 'నడుమ'ను ఛేదించినచో, అది AC రేఖను ఛేదించు బిందువు A, C 'నడుమ' ఉండదు.

ఈ మూడు ఆధార తత్త్వములను అవలంబించినచో 'నడుమ' అను పదమునకు అర్థము తెలియకయే పై చెప్పబడిన గుణములను మాత్రము ఉపయోగించి జ్యామితిని నిర్మించవచ్చును.

ఇటులనే ఆర్కిమీడిజ్ నిర్వచించిన ఆధార తత్త్వమును గుర్తించకయే యూక్లిడ్ ఉపయోగించి ఉన్నాడు. ఈ తత్త్వము ప్రకారము AB, CD రెండు పరిమిత రేఖలైన, దానిలో చిన్నదైన AB ను మరల, మరల చేర్చుటవలన CD కన్న పొడవైన రేఖను పొందవచ్చును.

(2) యూక్లిడ్ తాను ఉపయోగించు ఒక్కొక్క పదమునకును ఒక్కొక్క నిర్వచనము ఇచ్చుటకు ప్రయత్నించెను. అయితే ఒక పదమును వివరించుటకు ఇతర పదములు కావలెను కదా ? ఈ ఇతర పదములను వివరించుటకు మరికొన్ని ఇతర పదములు కావలెను. ఇట్లు ఒక అనంతమైన పరంపర లభించును. దీనినే అనంత పరంపరదోషము (ఇన్ఫినిట్ రిగ్రెషన్) అందురు. అందువలన ప్రారంభమునందు కొన్ని మూలపదములను వర్ణనలేకయే అనిర్వచనీయముగా తీసికొనవలసియున్నది. తరువాత వచ్చు పదములను వీటి ద్వారా నిర్వచించవచ్చును.

ఉదా: "బిందువు", "ఋజురేఖ", "రేఖమీద బిందువు ఉండుట" లేదా 'బిందువు ద్వారా రేఖ వెళ్ళుట' "నడుమ" ఇటువంటి పదములను అనిర్వచనీయములుగా తీసికొనవలసియున్నది.

(3) యూక్లిడ్ A_1, A_2, A_3, A_4 (చూ. పు. 33) ఆధార తత్త్వములను స్వతస్సిద్ధమని నమ్మెను. ఇది వట్టి

భ్రాంతి. ఏ ఆధార తత్త్వముయొక్క సత్యమైనను దానిలోని పదములకు మనము ఇచ్చు అర్థముపై ఆధార పడియున్నది. అందువలన 'రెండు వస్తువులు ఒకే వస్తువునకు సమమైన అవి సమము' అను ఆధార తత్త్వమును ప్రకటించుటకు బదులుగా, మనము చెప్పవలసిన దేమనగా 'సమము' అను రెండు వస్తువులకు గల సంబంధము క్రింద వివరించిన గుణములు గల ఏదో ఒక సంబంధము. A, B రెండు వస్తువులయిన $A = B$ (A,Bకు సమానము) లేదా $A \neq B$ (Aకును Bకును సమాన సంబంధము లేదు). ఈ రెండింటిలో ఒక్కటి సత్యము (చూ. సమీక్ష సమత్వ సంబంధములు - పు. 20). $A = A$ సత్యము ; $A = B$ సత్యమయితే, $B = A$ సత్యము ; $A = B$, $B = C$ ఇవి రెండును సత్యమైతే $A = C$ యు సత్యము. పైన వివరించిన 4 లక్షణములే సమత్వము '=' అను సంబంధమును పూర్ణముగా వర్ణించును.

'సంపూర్ణము దాని భాగము కన్న పెద్దది' అను 4 వ ఆధార తత్త్వమును విచారించెదము. 1, 2, 3, 4...., అను అనంత సంఖ్యల సమూహములో 2, 4, 6, 8........అను వరుస ఒక అంశము ; అయినను ఈ రెండు వరుసలకును ఒకటి కొకటి జోడింపును క్రింద సూచించిన రీతిగా స్థాపించవచ్చును.

1	2	3	4	5	6	7	8...........
2	4	6	8	10	12	14	16...........

అందువలన అంశము అయినటువంటి 2, 4, 6, 8........ వరుస, పూర్ణమైనటువంటి 1, 2, 3, 4........వరుసకు సమముగా ఉన్నది. ఇదియుకాక పూర్ణమైన 1, 2, 3, 4.... వరుసనుంచి అంశమైనను పూర్ణమునకు సమానమైన 2, 4, 6, 8........వరుసను తీసివేసినచో, మిగులు అంశము 1, 3, 5, 7........అను వరుస, పూర్ణమైన వరుస 1, 2, 3, 4, 5........కు సమానమైనదని సులభముగా గ్రహింతుము*.

అందువల్ల స్వతస్సిద్ధతత్త్వములకును, స్వీకృత తత్త్వములకును ఉన్నవ్యత్యాసము సారములేనిది. అన్నియు గణిత శాస్త్రములోని అంశములగురించి అంగీకృతమైన ఆధార సిద్ధాంతములే.

గ్రీకుల ప్రసిద్ధ ప్రశ్నలు : గ్రీకులు మూడు ప్రశ్నలకు సమాధానమును ఇచ్చుటకు గొప్ప ప్రయత్నములుచేసిరి. ఈ సమాధానములలో వారు ఉపయోగించుటకు అనుమతించిన సాధనములు యూక్లిడ్ వివరించినవియే. (i) అనగా ఒక గురుతులులేని రూళ్లకర్రను తీసికొని ఇష్టము వచ్చిన పొడవుగల ఋజురేఖలు గీయవచ్చును. రెండు బిందువులను ఋజురేఖవలన చేర్చి దానిని పొడిగించవచ్చును. (ii) ఒకబిందువును కేంద్రముగ ఎంచుకొని ఏ పొడవునైన వ్యాసార్ధముగా తీసికొని ఒక వృత్తమును వృత్తలేఖిని సహాయముతో గీయవచ్చును. ఇవి రెండే అనుమతించబడిన నిర్మాణ కార్యములు.

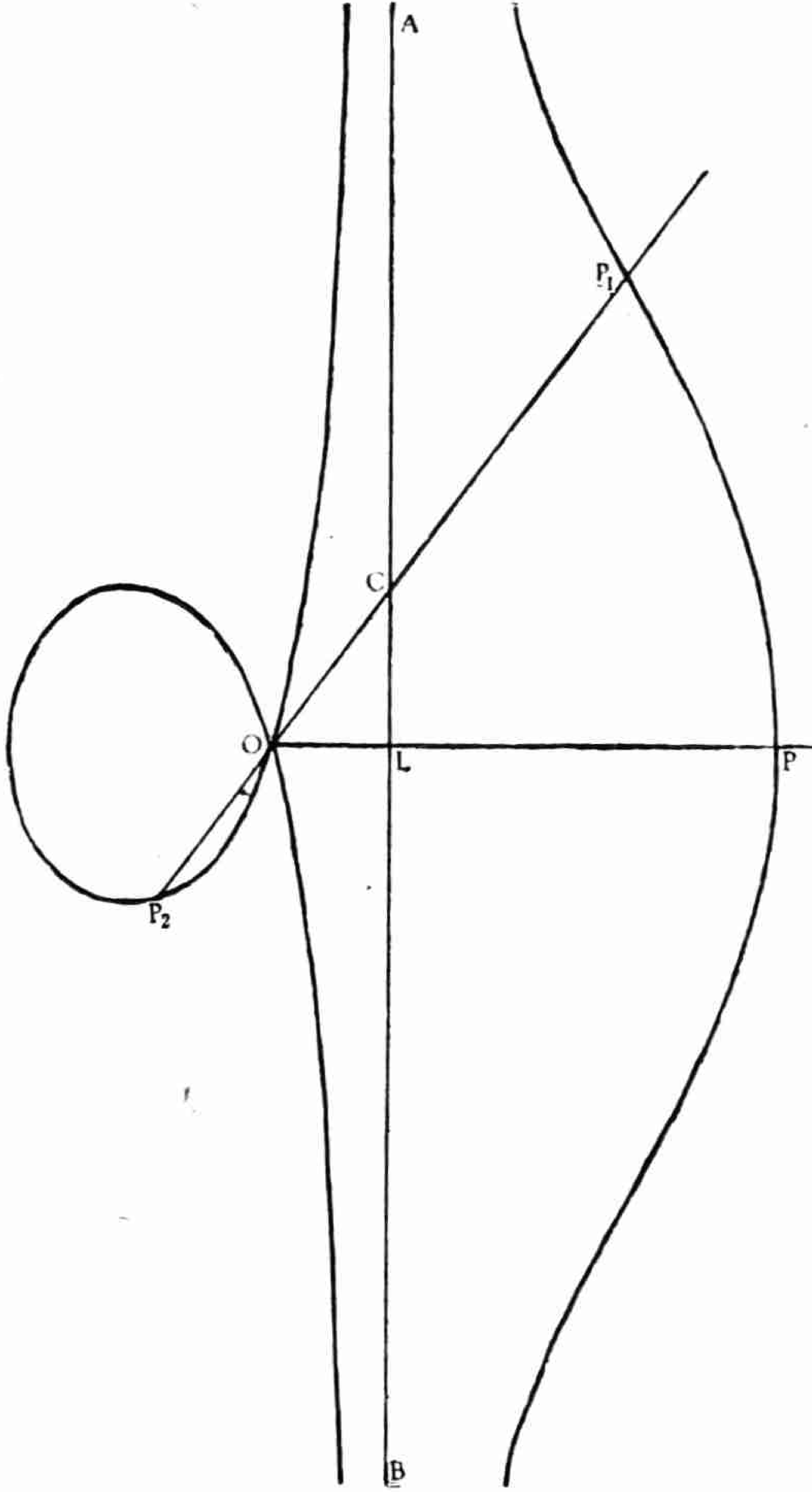
మొదటి ప్రశ్న : ఒకకోణమును మూడు సమభాగములుగా విభజించుట. ఒకలంబకోణమును ఇట్లు విభజించుట అతిసులభము. తక్కిన ఏకోణమును ఇచ్చినను దానిని ఇట్లు విభజించు ప్రయత్నములు అన్నియు నిష్ఫలములు అయ్యెను. దీనితోనే సంబంధించిన మరొకప్రశ్న: ఒక వృత్తమునందు n భుజములుగల క్రమబహుభుజిని వ్రాయుట. యూక్లిడ్ వివరించిన సాధనములతో ఏ కోణమునైనను మూడు సమభాగములుగ ఛేదించుట అసాధ్యమని, ఆధునిక కాలముననే నిరూపించబడినది. కారణ మేమనగా యూక్లిడ్ ఇచ్చిన సాధనములతో ఇచ్చిన పొడవుల సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము, వర్గమూలము కనిపెట్టుట మాత్రమే సాధ్యమగును. అందువలన ఒకప్రశ్న బీజగణితరీతిలో కొన్ని 2 వ తరగతి సమీకరణములపై ఆధారపడినచో దానిని యూక్లిడ్ సాధనములతో విడదీయవచ్చును. అయితే ఒకకోణమును మూడు సమభాగములుగ విభజించుట 3 వ తరగతి సమీకరణము $4x^3 - 3x - a = 0$ ను ఆశ్రయించియున్నది. అందువల్ల అది అన్ని సందర్భములలోను సాధ్యముకాదు. అయితే యూక్లిడ్ సాధనములైన రూళ్లకర్ర, వృత్తలేఖిని (కాంపస్)తో అసాధ్యమైనప్పటికిని మూడవ లేదా నాల్గవ తరగతి వక్రరేఖలను వ్రాయు సాధనములవలన ఏ కోణమునైనను త్రిభాగించవచ్చును. గ్రీకులలో నికోమిడీస్ అను గణితశాస్త్రజ్ఞుడు క్రీ. పూ. 180 లోనే కాంగ్‌కాయిడ్ అను వక్రము సహాయమున కోణమును కచ్చితముగ త్రిభాగింప ఒక త్రోవను చూపెను. ఈ కాంగ్‌కాయిడ్ క్రింద (చూ. చిత్రము పుట 35) వివరించిన విధముగా లభించును. O ఒక స్థిరబిందువు. AB ఒక స్థిరమైన ఋజురేఖ. O బిందువుద్వారా ఏదైన ఒక రేఖను తీసికొని దానిని పొడిగించి అది AB రేఖను C బిందువులో ఛేదించినది అనుకొనెదము. C నుండి ఇరుప్రక్కలు $CP_1 = CP_2 = k$ (k ఒక స్థిరరాశి) అను పొడవులను కొలచిన ఎడల P_1, P_2 బిందువుల పథమగు రేఖయే కాంగ్‌కాయిడ్ అగును.

* ఇట్టి అనంత వరుసల విచారములతో మనకు ఉపనిషత్ వాక్యము 'పూర్ణస్య పూర్ణ మాదాయ పూర్ణమేవా వశిష్యతే' జ్ఞాపకమునకు వచ్చుచున్నది.

దీని సమీకరణము :

$$(x^2+y^2)(x-b)^2 = k^2x^2. \quad (k = \text{స్థిరాంకము})$$

క్రీ. శ. 1796 లో గాస్ అను ప్రసిద్ధ జర్మనీ విజ్ఞాని యూక్లిడ్ సాధనములతో ఒక n భుజములు గల క్రమ బహుభుజిని గీయుట ఎప్పుడు సాధ్యమగును అను ప్రశ్నకు ప్రత్యుత్తరమిచ్చెను. సాధారణముగా P ఒక ప్రధాన సంఖ్య అయి అనగా P అను సంఖ్య $2^{2^t}+1$ అనురూపము కలిగియుండిన, P భుజములు గల క్రమబహుభుజిని రూళ్ళ



చిత్రము 6 కాంగ్ కాయిడ్

కర్ర, వృత్తలేఖనిని మాత్రము ఉపయోగించి నిర్మించుట సాధ్యమగును. ఇచ్చట t ఒక పూర్ణాంకము. $t = 0$, 1, 2, 3, 4 అయినచో $2^{2^t}+1$ రూపమున మనకు లభించు సంఖ్యలు 2, 3, 5, 17, 257, 65537. ఇవన్నియు ప్రధాన సంఖ్యలు. అందువలన ఈ సంఖ్యల భుజములుగా కల క్రమబహుభుజులను యూక్లిడ్ సాధనములతో నిర్మించవచ్చును. 17 భుజములు గల క్రమబహుభుజిని నిర్మించుటకు గాస్ త్రోవ చూపెట్టి, 257 భుజములు 65537 భుజములు ఉన్న క్రమబహుభుజులకును ఆ త్రోవను ఎట్లు ఉపయోగించుటో వివరించెను.

రెండవ ప్రశ్న : ఇది వృత్తచతురస్రీకరణము. ఒక దత్త వృత్తమునకు సమాన వైశాల్యముగల ఒక చతురస్రమును వ్రాయుట. వృత్తముయొక్క పరిధి $2\pi r$. కనుక ఈ పరిధిని ఒక భుజముగను, $\frac{1}{2}r$ మరియొక భుజముగను కల దీర్ఘచతురస్రమును సృజించినచో, దీనిని యూక్లిడ్ చెప్పిన రీతిని సమాన వైశాల్యమైన చతురస్రముగా మార్చవచ్చును. అందువలన r, ఇచ్చినట్లైతే $2\pi r$ పొడవు గల రేఖను వ్రాయవలెను. యూక్లిడ్ సాధనములతో పొడవుల గుణకారము సాధింపవచ్చును. కనుక తుదకు ఈ ప్రశ్న π పొడవు గల రేఖను వ్రాయుటయే అగుచున్నది. r వ్యాసార్ధముగల ఒక స్తూపముపై ఒక గురుతు చేసి దీనిని ఒకమారు ఒక సమతలముపై దొర్లించినచో $2\pi r$ పొడవు లభించును. గురుతుంచిన స్తూపమును ఒక సాధనముగా యూక్లిడ్ ఒప్పుకొనడు [చూ. పై (π) విలువ].

మూడవ ప్రశ్న : ప్రాచీనకాలపు **మూడవప్రశ్న**, ఒక ఇచ్చిన ఘనమునకు రెట్టింపు ఘనపరిమాణము గల మరియొక ఘనమును నిర్మించుట. ఇచ్చిన ఘనమునకు పొడవు a ను, నిర్మించనున్న ఘనమునకు పొడవు x అయినచో $x^3 = 2a^3$. అనగా $x = a\sqrt[3]{2}$ అగుచున్నది. యూక్లిడ్ ఒప్పుకొనిన సాధనములతో ఈ పొడవు a నుండి నిర్మించుట సాధ్యముకాదు. అయితే ఇతర సాధనములవలన ఈ ప్రశ్నను సాధించవచ్చును. హిపోక్రటీజ్ క్రీ.పూ. 460 లో చూపినట్లు $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ అను సమీకరణముల నుండి $x = a\sqrt[3]{2}$ అగును. కనుక $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ అను పరావల ఛేదనబిందువు యొక్క x విలువ ఈ ప్రశ్నకు సాధనము నిచ్చును.

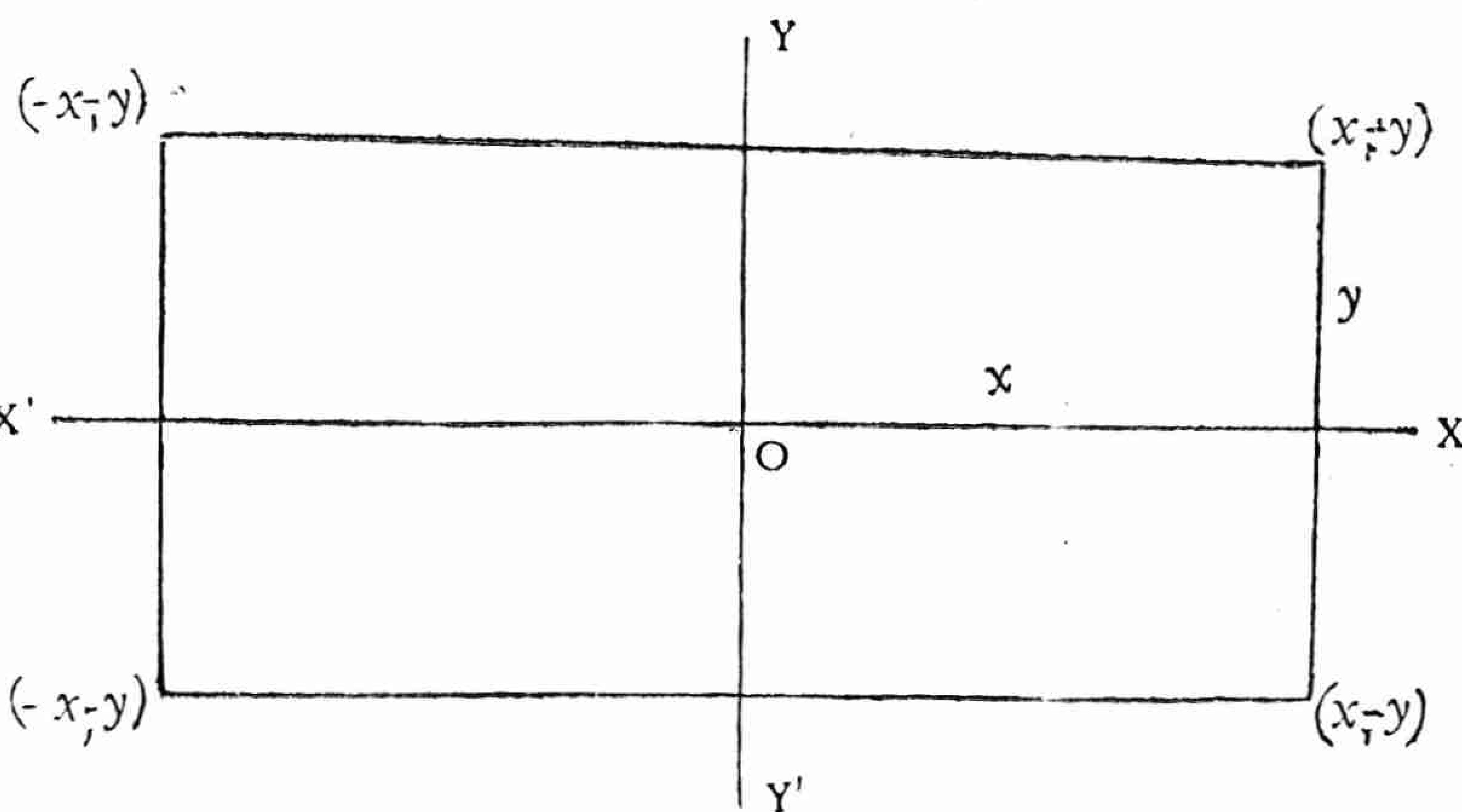
డయోక్లీస్ (క్రీ. పూ. 180 ?) అను గ్రీక్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, సిస్సాయిడ్ అను మూడవ తరగతి వక్రరేఖ సహాయముతో ఈ ప్రశ్నకు సమాధానమును కనిపెట్టెను.

ఈప్రశ్ననుగురించి ఒక కథ కలదు. ఏథెన్స్ నగరములో క్రీ. పూ. 430 లో ఒక తీవ్రమైన ప్లేగు వ్యాధి వచ్చెను. అప్పుడు ఆ పురవాసులు డీలాస్‌లో ఉన్న దేవవాక్యము చెప్పువారిని అడుగగా, 'అపొల్లో దేవాలయమందున్న బలిపీఠ ఘనపరిమాణమును రెట్టింపుచేయుడు, దానివలన ప్లేగు తొలగును' అను వాక్యము వినపడినది. ఈబలిపీఠము ఘనరూపముగా ఉండెను. గణితము తెలియని మూఢ

జనులు ఆ బలిపీఠముయొక్క పొడవును రెట్టింపుచేసిరి. అనగా ఘనపరిమాణమును ఎనిమిదింతలు చేసిరి. అప్పుడు అపొల్లో దేవుడు కోపగించుకొని వారి గణిత అజ్ఞానమునకై ప్లేగును ఇంకను ఉద్ధృతము చేసెనట. అందువలననే ఈ ప్రశ్నకు డీలియన్ ప్రశ్న అని పేరు వచ్చినది.

నిరూపక జ్యామితి

ఫ్రాన్సుదేశపు దార్శనికుడును, గణితశాస్త్ర విశారదుడును అగు రెనీ డేకార్ట్ (1596 - 1650) 1637లో ప్రచురించిన గ్రంథమందు ఈ పద్ధతిని తెలియజేసెను. ఈపద్ధతి ప్రకారము ఒక స్థిర రేఖ OX ను దానియందు ఒక స్థిర బిందువు O ను తీసికొనవలెను. O నుండి బయలుదేరి OX దిక్కులో x దూరము ప్రయాణముచేసి తరువాత OX కు లంబమైన OY దిక్కులో ఇంకను y దూరము ప్రయాణముచేసిన, మరియొక బిందువు P ని చేరెదము. P అను బిందువు x, y అను రెండు సంఖ్యల వలన నిర్ణీత మగుచున్నది. అటునుంచి ఇటు P ఇచ్చిన ఎడల (x, y) కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట OX రేఖలో కుడి దిక్కున అమర్చినవి$(+x)$ ధనసంఖ్యలనియు దాని ఎదుటి దిక్కున అమర్చినవి $(-x)$ ఋణసంఖ్యలనియు అటులనే OY కు ఒక ప్రక్కన y ధనమనియు, ఎదుటివైపున y ఋణమనియు గణించవలెను. P ఒక ఋజు లేదా వక్ర రేఖయందు ఉన్నట్లైతే x, y సంఖ్యలకు ఒక సంబంధమేర్పడును. అట్లే ఒక సంబంధము $y=f(x)$ ఇచ్చినచో ఈ సంబంధమును అనుసరించు అన్ని బిందువులును ఒక రేఖపై ఉండును. ఉదా : $ax+by+c=0$ అనిన, (x, y) బిందువులు ఒక ఋజురేఖమీద ఉండును. అందువలన, జ్యామితిలో ఉన్న రేఖల గుణములను పరిశీలించుటకు దానికి సంబంధించిన బీజగణిత ఫలము $f(x, y)$ను పరిశీలించిన చాలును. బీజగణితమునకును జ్యామితికిని ఒక సంబంధమును ఈపద్ధతి వలన డేకార్ట్ కలిగించెను. అందువలననే ఈ పద్ధతికి మరియొక పేరు బీజగణితీయజ్యామితి (ఆల్‌జీబ్రేయిక్ జామెట్రీ).



చిత్రము 7 లంబాక్ష నిరూపకములు

డేకార్ట్ చూపించిన పథములో అన్ని అంశములు క్రొత్తవి కావు. ఈజిప్టుదేశమునందు భూమాపకులకు ఒక తలమున ఉన్న బిందువును x, y అను రెండులంబములచే గుర్తింపవచ్చునని తెలియును. గ్రీకులును పరాస (పెరాబోలా) లో $y^2 = px$ అను సంబంధమును గుర్తించిరి. కాని ఒక చిత్రములో సమయమునకు తగినట్లు వేర్వేరు రేఖల నుండి లంబములు తీసికొనుచుండిరి. ఒక బీజగణిత సమీకరణములో ఒక రేఖయొక్క అన్ని గుణములును అణగియున్నవి అను విషయము డేకార్ట్‌నకు ముందు వారు స్పష్టముగా గుర్తించలేదని చెప్పవచ్చును. గ్రీకులు జ్యామితిని పరిశీలించు మార్గములో ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు, ఒక్కొక్క రేఖకు ప్రత్యేకమైన మార్గమును అవలంబింపవలసి వచ్చెను. అయితే నిరూపక జ్యామితియందు రాజబాటవలె మార్గములు ఉన్నవి. ఒకే మార్గమును ఏ రేఖ కయినను ఉపయోగింపవచ్చును. డేకార్ట్ గుర్తించిన మరియొక ముఖ్య విషయము ఏమనిన ఒకే (X, Y) అక్షములను ఉపయోగించి రెండు రేఖల సమీకరణములను సమకాలిక సమీకరణములు (సైమల్ టేనీయస్ ఈక్వేషన్స) గా భావించి ఆ రేఖల ఛేదనబిందువులను కనిపెట్టవచ్చును.

నిరూపక జ్యామితిని ఉపయోగించి సాధించిన మొదటి ప్రశ్న పాపుస్ అను గ్రీక్ విజ్ఞాని ప్రస్తావించినది. ఒక తలములో ఒక బిందువునుండి m స్థిర ఋజురేఖలకున్న లంబముల గుణకార లబ్ధఫలితములు, అటులనే అదే బిందువు నుండి మరికొన్ని n స్థిరఋజురేఖలకున్న లంబముల గుణకార ఫలితమునకు అనుపాత సంబంధము ఉన్నచో అనగా $p_1 \; p_2 \dots p_m = kq_1 q_2 \dots q_n$ అయితే (ఇచ్చట $p_1 \; p_2 \dots q_1 \; q_2 \dots$ లంబదూరములు)ఆ బిందుపథము (లోకస్) ను కనిపెట్టవలయును. $m=1$, $n=1$ ను,

$m=1$, $n=2$ కును బిందు పథములను ప్రాచీనకాలము లోనే కనిపెట్టిరి. $m=2$, $n=2$ అయితే బిందు పథము ఒక శాంకవము (కానిక్) గా ఉండవచ్చునని పాపుస్ ఊహించెను. అయితే నిరూపకజ్యామితి పద్ధతి ప్రకారము ఈ పథము రెండవ తరగతి రేఖ ; అందువల్ల ఇది శాంకవమే అని తక్షణము గుర్తించగలము. మరియు m, n ఏ ధనపూర్ణ సంఖ్యలైనను. $m>n$ అయితే బిందు పథము m తరగతిరేఖయై ఉండునని స్పష్టమగుచున్నది.

ఒక తలముపై x, y దిక్కులు పరస్పర లంబములుగా ఉండనిచో వీటికి తిర్యక్ నిరూపకములు (ఒబ్లీక్ కో ఆర్డినేట్స్) అనిపేరు.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశమును x, y, z అను మూడు నిరూపకముల మూలమున పరిశీలింప వచ్చుననియు డేకార్ట్ గుర్తించెను.

ఫోంటానా (1735 - 1805) అను ఇటలీ విజ్ఞాని ధ్రువీయ నిరూపకముల (పోలార్ కోఆర్డినేట్స్)ను మొదట ఉపయోగించెను.

మొదట పరస్పర లంబములుగ ఉన్న నిరూపక అక్షములు, తర్వాత తిర్యక్ అక్షములును వాడబడినవి. కాల క్రమేణ నిరూపక జ్యామితిలో పలుమార్పులు కలిగెను.

మొదట వాడిన నిరూపకములకు లంబాక్ష (రెక్టాంగ్యులర్) నిరూపకములు అని పేరు. ధ్రువీయ, స్పర్శీయ (టాన్జెన్షియల్), వైశాల్య (ఏరియల్), త్రిరేఖీయ (ట్రైలీనియర్),స్తూపీయ(సిలింద్రికల్),గోళీయ(స్ఫెరికల్) నిరూపకములు తర్వాత వాడుకలోనికి వచ్చెను.

జ్యామితి పురోగతి : ఒక సమతలములో నిరూపకములు (x,y). త్రిపరిమాణిక ఆకాశమునందు నిరూపకములు (x, y, z). వీటిద్వారా యూక్లిడ్ సిద్ధాంతములను నిరూపించుటకు ఒక నూతనమార్గము కల్పించబడినది; బీజగణితమునకును, జ్యామితికిని ఒకవంతెన ఏర్పరుచబడినది. ఈ వంతెనద్వారా నూతన భావములు జ్యామితిలో ప్రవేశింపతొడగెను.

నిరూపకములు (x, y), (x, y, z) వాస్తవసంఖ్యలని భావించితిమి. అయితే నిరూపకములు సంఖ్యలేకదా ? అవి ఎందుకు వాస్తవసంఖ్యలుగానే ఉండవలయును ? అవి సంకీర్ణసంఖ్యలైతే ఆ బిందువునకు సంకీర్ణ బిందువని పేరు పెట్టెదము. a, b, c సంకీర్ణసంఖ్యలైన $ax+by+c=0$ అనునది ఒక సంకీర్ణ ఋజురేఖను సూచించును. ఇటువంటి సంకీర్ణబిందువులు, రేఖలు కాగితము మీద చిత్రింప సాధ్యముగాదు. కాని బిందువుల, రేఖల ప్రధానమైన గుణములకును (ఉదా : రెండు బిందువులు ఒకే ఋజురేఖమీద ఉండును), ఆధార తత్త్వములకు ఏ అతేపణయు ఏర్పడదు. ఇటువంటి రెండు సంకీర్ణబిందువులు (x,y), (x_1, y_1) తీసికొనిన వాటి దూరమును మునుపటివలె $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ అను సూత్రము వలన నిర్ణయించవచ్చును. అయితే ఇప్పుడు ఒకే రేఖ $y=ix=0$ లో ఉన్న రెండు ప్రత్యేక బిందువుల $(2, 2i)$, $(3, 3i)$ మధ్య దూరము శూన్యమగును. $x^2+y^2=4$ అను సమీకరణము ఒక వృత్తమును సూచించును. దీని యందు అమితమైన వాస్తవ బిందువులు $(1, \sqrt{3})$ వంటివే కాక ఇంకను అమితమైన సంకీర్ణ బిందువులును (ఉదా: $3, i\sqrt{5}$) వంటివి ఉన్నవి. ఒక ఋజురేఖ $y=c$ ని తీసికొనినచో, అది వృత్తము $x^2+y^2=4$ ను ఛేదించు బిందువుల x నిరూపకము $\sqrt{(4-c^2)}, -\sqrt{(4-c^2)}$ పై రెండు సమీకరణములనుండి లభ్యమగును. అనగా రెండు బిందువులలో ఒకటి $\{\sqrt{(4-c^2)}, c\}$ మరియొకటి $\{\sqrt{(4-c)^2}, c\}$ ఇచ్చట $c<2$ అయితే $y=c$ అను రేఖ వృత్తకేంద్రమగు $(0, 0)$ నుండి వ్యాసార్ధముకన్న తక్కువ దూరములో ఉన్నది. అప్పుడు ఆరేఖ వృత్తమును రెండు వాస్తవ బిందువులందు ఛేదించును. ఈ బిందువుల నిరూవకములే పైనచెప్పినవి. అయితే, $c>2$ అయిన $y=c$ అనురేఖ వృత్తమునకు బయట ఉండును. అందువలన వృత్తమును ఛేదించదు అనియే యూక్లిడ్ జ్యామితి ప్రకారము చెప్పవలెను. $c=2$ అయితే అది స్పర్శరేఖ (టాన్జెన్ట్). అందువలన ఒకే బిందువునందు ఛేదించునని చెప్పవలెను. అయితే సంకీర్ణజ్యామితి దృష్టిలో ఎల్లప్పుడును ఒక ఋజురేఖ ఒక వృత్తమును రెండు బిందువులలోనే ఛేదించును. $c<2$ అయితే ఇవి రెండు వాస్తవ బిందువులు ; $c>2$ అయితే ఇవి రెండు సంకీర్ణబిందువులు. అందువలన అవి దృష్టిగోచరములు కానివి. $c=2$ అయినచో అవి రెండును ఒకే స్థలమునందు ఉండును. అటులనే యూక్లిడ్ ప్రకారము రెండు వృత్తములు రెండు బిందువులందు ఛేదింపవచ్చును ; లేదా ఒకే బిందువునందు స్పర్శింపవచ్చును, లేదా ఛేదన బిందువులే లేకుండా ఉండవచ్చును. ఇటువంటి వ్యత్యాసములు సంకీర్ణ జ్యామితిలో లేవు. m, n తరగతుల రెండు రేఖలకు ఎల్లప్పుడును $m \times n$ ఛేదన బిందువులు ఉండును. ఇది ఒక ముఖ్యమయిన ప్రయోజనము. అయితే వాస్తవ బిందువులను, ఒకే స్థలమునందున్న బిందువులను, సంకీర్ణ బిందువులను అన్నిటిని పరిగణించవలెను. సంకీర్ణ సంఖ్యలనేగాక ఏదైన క్షేత్రమునకు చేరిన సంఖ్యలను నిరూపకములుగా తీసికొని మరియొక జ్యామితిని నిర్మించవచ్చును.

పరిమిత జ్యామితులు

ఉదాహరణమునకు ఒక పరిమిత క్షేత్రమును తీసికొనెదము. 0, 1, 2, 3, 4 *(మా 5) అటువంటి క్షేత్రము. దీనిలో పైన వ్రాసినవి అయిదేసంఖ్యలు. అంకగణితమునకు చెందిన పరికర్మములన్నియు ఇచ్చట సాధ్యము. రెండు పూర్ణసంఖ్యల x, y భేదము (x, y), 5 వలన నిశ్శేషముగా విభాజ్యమయినచో $x \equiv y$ (మా 5) అని వ్రాసెదము. ఉదా : $52 \equiv 2$ మా. 5. ఈ సంఖ్యలను నిరూపకములుగా తీసికొనిన మనకులభించు జ్యామితిలో మొత్తముబిందువులు (x, y), $x = 0, 1, 2, 3, 4$; $y = 0, 1, 2, 3, 4$అనగా $5 \times 5 = 25$ మాత్రమే, మొత్తము రేఖలు $y = mx + c$, $(m, c = 0, 1, 2, 3, 4)$ 25 ను ఈ జాబితాలో రాని రేఖలు $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, అందువలన మొత్తము 30 రేఖలు. $y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$ అను రెండు రేఖలందు, $m_1 = m_2$ అయితే వీటిని సమానాంతరము (పారలెల్) లు అనెదము. సమాంనాంతరము కాని రెండు ఋజురేఖలు ఛేదించు బిందు నిరూపకములు $x = (c_1 - c_2)/(m_2 - m_1)$; $y = (m_2 c_1 - m_1 c_2)/(m_2 - m_1)$ సమానాంతర రేఖలు ఛేదించవు. ఏలన $m_2 - m_1 = 0$ అగుటవలన అది హారముగా ఉండజాలదు.

ఈ జ్యామితియందు ఒక్కొక్క రేఖమీదను 5 బిందువులు మాత్రము ఉండును. ఉదా : $y = 2x$ రేఖమీదఉండు బిందువులు (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3) మాత్రమే. (5, 10) అనునదియే (0, 0), అటులనే (−1, −2) అనునదియే (4, 3) : ఏలన ఈ గణితములో $5 \equiv 0$, $4 \equiv -1$, $3 \equiv -2$ (మా 5) ఏ బిందువు ద్వారానైన వెళ్లు రేఖలు ఆరు. ఉదా : (0, 0) ద్వారా వెళ్లు రేఖలు $y = 0$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 4x$, $x = 0$. ఇట్లు తలములో ఉన్న 25 బిందువులన్నిటిద్వారా వెళ్లు $25 \times 6 = 150$ రేఖలు ఉన్నవి. అయితే ఈ ఎంచుటయందు ఒక్కొక్క రేఖను దానిపై ఎన్ని బిందువులు ఉన్నవియో అన్నిసార్లు, అనగా 5 సార్లు గణించెదము. అందువలన ఈ జ్యామితిలోఉన్న మొత్తము రేఖలు ఇదివరకే చెప్పినట్లు $150/5 = 30$. ఒక రేఖ $y = x$ కు సమానాంతర రేఖలు నాలుగు. $y = x + 1$, $y = x + 2$, $y = x + 3$, $y = x + 4$ ఏ రెండుబిందువులనైన చేర్చు రేఖ ఈ జాబితాలోని 30 రేఖలలోనే ఉన్నది. ఉదా : (1, 2), (3, 5) చేర్చురేఖ $\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{3-1}$ అనగా $2y - 4 = 3x - 3$ అనగా $3x - 2y + 1 = 0$ అగును.

పరిమిత క్షేత్రములు అన్నియు గాల్వా క్షేత్రములు. (చూ. గాల్వా క్షేత్రములు), ఏ గాల్వా క్షేత్రములలోని సంఖ్యలనైన నిరూపకములుగా తీసికొని ఒక పరిమిత జ్యామితిని సృజించవచ్చును.

n - పరిమాణిక జ్యామితి : సమతలమునందు (x, y) అను రెండు సంఖ్యలు, అంతరాళమందు (x, y, z) అను మూడుసంఖ్యలు ఒక బిందువును నిర్ణయించునని చెప్పితిమి. ఇటులనే n సంఖ్యలు $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ ఒక బిందువునకు నిరూపకములుగా తీసికొనినచో, మనకు లభించునది n - పరిమాణకఆకాశము, మనకు ఇట్టి $(n > 3)$ మూడు కన్న ఎక్కువ పరిమాణములుగల ఆకాశమును గురించిన అనుభవము లేకపోయినను, గణితరీతిగా అటువంటి ఆకాశములను, దానియందుండు రూపములను పరిశీలించవచ్చును. ఉదా : చతుఃపరిమాణిక ఆకాశమందు నిరూపకములు x_1, x_2, x_3, x_4. ఇవి మొదటి తరగతి సమీకరణమగు $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 = 0$ ను అనుసరించినచో ఆ బిందుసమూహము ఒక చిపిటము (ఫ్లాట్) అగు త్రిపరిమాణిక ఆకాశమగును. అటులనే రెండు మొదటితరగతి సమీకరణములను తృప్తిపరచు బిందువులన్నియు ఒకే తలముపై ఉండును. రెండు బిందువులదూరము

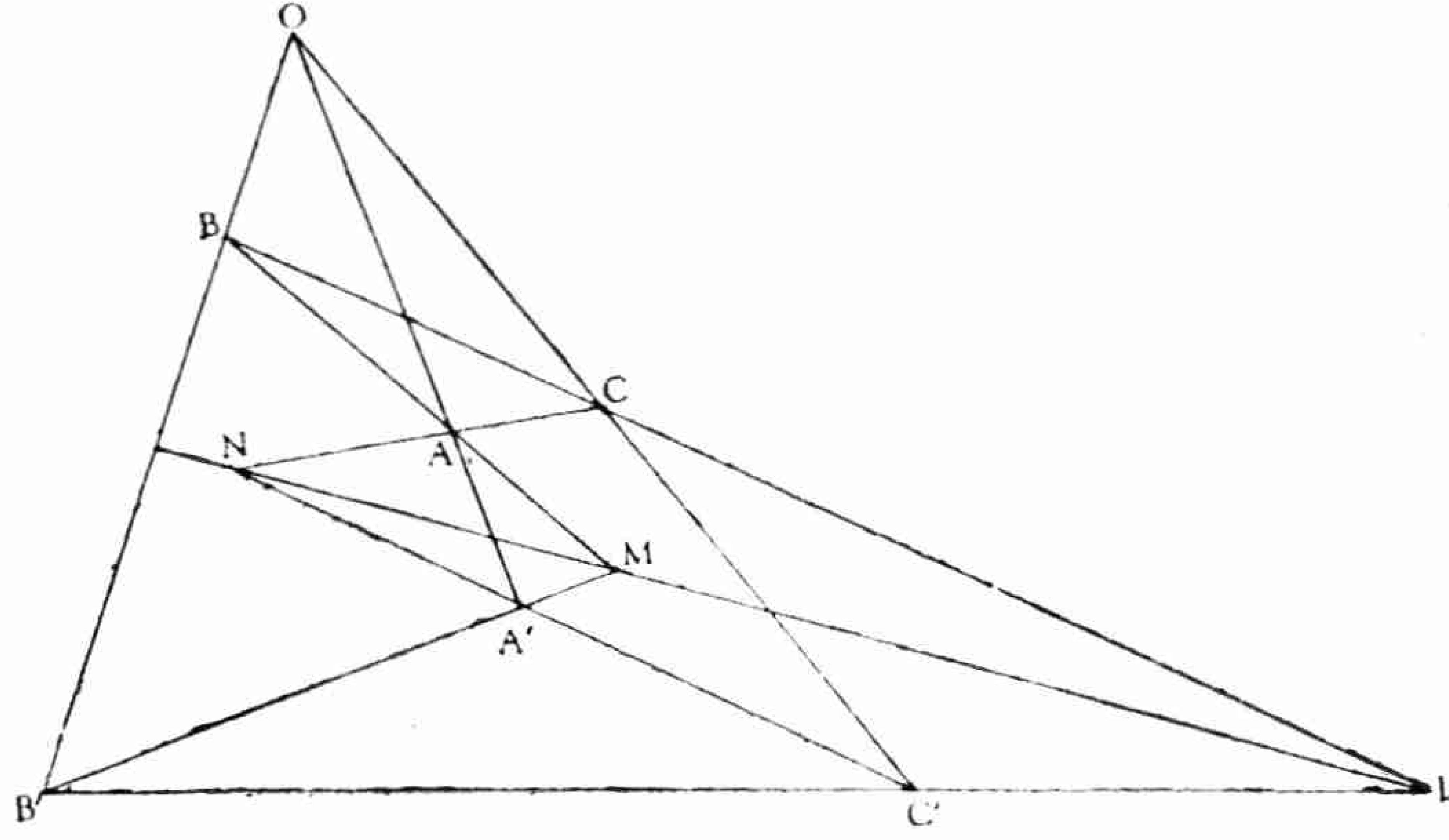
$$d = \sqrt{\{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots \ldots (y_4 - x_4)^2\}}$$

అని నిర్ణయించినచో, ఇది యూక్లిడ్ ఆకాశమగుచున్నది. చతుఃపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక తలములో ఒక బిందువునుండి ఆ తలమునకు లంబముగా ఋజురేఖలు గీసినచో, అవి అన్నియు మరియొక తలమున ఉండును. ఈ ఆకాశములో రెండు తలములు ఒక బిందువునందు ఛేదించును. అయితే ఆ రెండు తలములు ఒకే త్రిపరిమాణిక ఆకాశమునందున్నట్లైతే వాటి ఛేదనబిందువులు ఒక రేఖమీద ఉండును. సాధారణముగా చతుఃపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక తలమును ఒక ఋజురేఖ సంధింపదు.

ఇటులనే n - పరిమాణిక ఆకాశమును గణితరీతిగా చర్చింపవచ్చును. ఇచ్చట ఒక బిందువునకు n నిరూపకములు $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ ఉన్నవి. ఇవి ఒక మొదటి తరగతి సమీకరణమును అనుసరించినచో అట్టి బిందువులు ఒక $(n - 1)$ పరిమాణిక చిపిట ఆకాశముమీద ఉండును. అట్టి రెండు సమీకరణములను అనుసరించు బిందువులు ఒక $(n - 2)$ పరిమాణిక ఆకాశముపై ఉండును. n - పరిమాణిక ఆకాశములో ఒక r పరిమాణిక చిపిటతలమును మరియొక s పరిమాణిక చిపిటతలమును తీసికొనెదము. $r + s < n$ అయితే అవి సంధింపవు. $r + s = n$ అయితే ఒక బిందువునందు ఛేదించును. $r + s > n$ అయితే వాటి

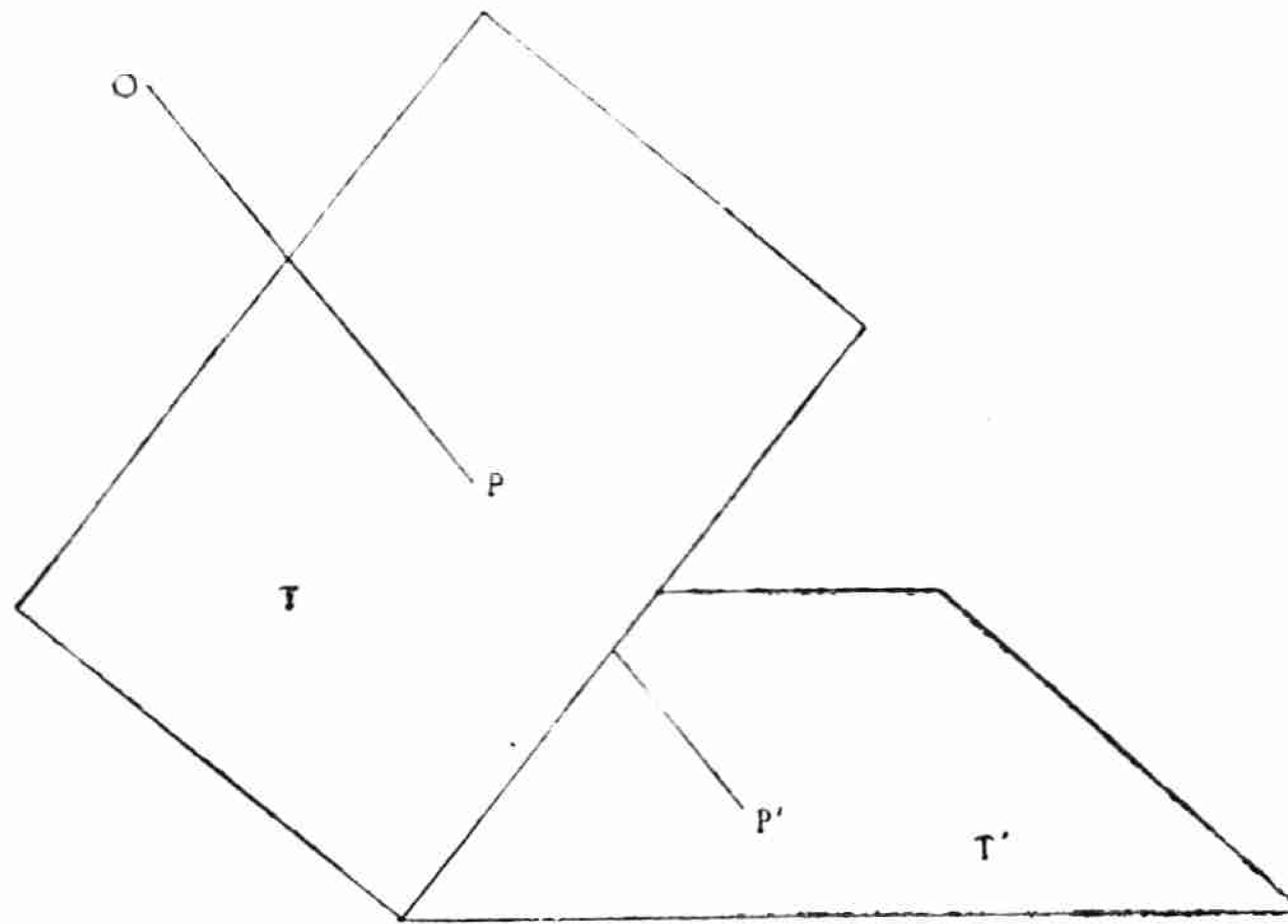
* మా = మాపాంకము = modulus (mod)

ఛేదనము ఒక $r+s-n$ పరిమాణిక చిపిటతలముపై ఉండును. ఒక ఋజు రేఖను స్థాపించుటకు రెండు బిందువులు కావలెను. ఒక తలమును స్థాపించుటకు మూడు బిందువులు కావలెను. అయితే అవి ఒకే రేఖలో ఉండకూడదు. సాధారణముగా ఒక r పరిమాణముగల చిపిట తలమును నిర్ణయించుటకు $(r+1)$ బిందువులు చాలును. అయితే ఇవి $(r-1)$ పరిమాణిక చిపిటతలముమీద ఉండకూడదు. n-పరిమాణిక ఆకాశములో రెండవ తరగతి సమీకరణములు వక్రమయిన, $(n-1)$ పరిమాణిక బిందు సమూహములను స్థాపించును. అటువంటి వక్ర ఆకాశముల మీద $n/2$ లేదా $(n-1)/2$ పరిమాణిక చిపిటములు పూర్తిగా ఉండును. ఇవియే త్రిపరిమాణిక ఆకాశమునందు ఒక కాంగ్ కాయిడ్ మీద ఉండు జనక రేఖలను పోలిఉన్నవి.



చిత్రము 8 డెజార్గ్ సిద్ధాంతము

n-పరిమాణిక ఆకాశమువలె అనంత (∞) పరిమాణిక ఆకాశములను కూడ గణితమందు పరిశీలించి ఉన్నారు. ఇచ్చట ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకములు ఒక అనంతమయిన $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots$ వరుసగా ఉండును. ఈ వరుస Σx_n^2 ఉపసరణ వరుసగా ఉన్నచో ఈబిందువుల సమూహమునకు 'హిల్బర్ట్ ఆకాశము' అని పేరు. ఇది క్వాంటం సిద్ధాంతమునందు చాల ఉపయోగముగా ఉన్నది.



చిత్రము 9 విశేషము

విశేషక జ్యామితి

ఇది యూక్లిడ్ జ్యామితికన్నను సులభమైనది. ఎందుచేతననగా దీనియందు పొడవు, వైశాల్యము, కోణముల కొలత - ఇవి ఎవ్వియు లేవు. సమానాంతర రేఖలు లేవు. ఇది కేవలము బిందువులు, ఋజు రేఖలు, బిందువు ద్వారా రేఖలు వెళ్లుట, ఛేదనబిందువులు - ఇటువంటి భావములపై మాత్రము ఆధారపడిఉన్నది. ప్రాచీన కాలములో ఈ జ్యామితికి చేరిన సిద్ధాంతములను, కొలతలుగల యూక్లిడ్ జ్యామితి సిద్ధాంతములను వేరుపరచలేదు. ఉదా: పాపుస్ క్రీ. పూ. 300లో నిరూపించిన క్రింది సిద్ధాంతము విశేషక జ్యామితికి చెందినదే.

'A, B, C అనునవి ఒకే ఋజు రేఖలోఉన్న మూడు బిందువులుగను A', B', C' అనునవి మరియొక ఋజురేఖ మీద ఉన్న మూడు బిందువులుగను ఉండిన, BC', $B'C$ ఋజురేఖల ఛేదన బిందువు L; CA', $C'A$ ల ఛేదన బిందువు M; AB', $A'B$ ల ఛేదన బిందువు N గా ఉండిన, అప్పుడు L, M, N మూడు బిందువులును ఒకే ఋజురేఖమీద ఉండును.'

ఈ సిద్ధాంతములో కొలతలే లేవని గుర్తించవలయును. మరియొక సిద్ధాంతము డెజార్గ్ 18వ శతాబ్దమునందు నిరూపించినది. ABC, $A'B'C'$లు రెండు త్రిభుజములు. వీటి కోణములనుచేర్చు రేఖలు AA', BB', CC' ఒకే బిందువు O నందు ఏకీభవించినచో BC, $B'C'$ భుజములు ఖండించు బిందువు L; అటులనే CA, $C'A'$ ఖండించు బిందువు N; AB, AB' ఖండించు బిందువు M; ఈ మూడును ఒకే ఋజురేఖమీద ఉండును. ఇచ్చట కూడ కొలతలే లేవు.

తలములోని విశేషక జ్యామితిని మరియొక విధముగా దర్శించవచ్చును. T, T' అను రెండు తలములను తీసికొనుము.

అవి రెండును L అను ఒక ఋజురేఖలో ఖండించును. ఈ రెండు తలములలోను లేని ఒక స్థిరబిందువు O ను తీసికొనుము. ఇప్పుడు T తలములో ఒక బిందువు P ని తీసికొని OP ఋజురేఖను పొడిగించి అది ఎచ్చట T' తలమును ఛేదించునో ఆ బిందువునకు P' అని పేరు పెట్టెదము. O అను శిఖరము ద్వారా T' తలమునుండి P బిందువును T' తలమునకు విక్షేపించుటవలన లభించు బిందువును P' అనెదము. (చూ. చిత్రము 9 - పు. 39). ఇట్టి విక్షేపమువలన T లో ఉన్నటువంటి బిందువులు P, బిందు సమూహములగు రేఖలును, T' తలములోని బిందువులు P' గను, బిందు సమూహములగు రేఖలుగను మారును. ఇట్టి మార్పులకు విక్షేపక మార్పులు (ప్రొజెక్టివ్ ట్రాన్స్‌ఫర్మేషన్స్) అని పేరు. ఋజురేఖ M, ఋజురేఖ M' గను, M మీద ఉండు బిందువులు P, M' మీద ఉండు బిందువులు P' గను మారును.

విక్షేపకజ్యామితి సిద్ధాంతములు ఒకతలమునుండి మరియొక తలమునకు (ఏదో శిఖరముద్వారా) విక్షేపించినప్పుడు మారని గుణములను వర్ణించును. ఒకతలమునందు రెండు పొడవులో, కోణములో, కొలతలో సమానమైతే మరియొక తలమునకు పోవునపుడు అవి సమముగా ఉండవు. అందువలన సమానమైన కొలతల గురించిన సిద్ధాంతములు ఈ జ్యామితియందు రావు. రేఖలు ఒక బిందువునందు ఏకీభవించుట, ఒకబిందువు ఒక రేఖమీద ఉండుట, ఇటువంటి భావసంబంధమైన సిద్ధాంతములే ఇందు వచ్చును. ఒక వృత్తముయొక్క విక్షేపము మరియొక వృత్తము కాదు. అందువలన ఒక వక్రరేఖ వృత్తమా? పరావలయమా? దీర్ఘవృత్తమా? అతిపరావలయమా? అను ప్రశ్నలకు ఈజ్యామితిలో అవకాశము లేదు. ఏలన విక్షేపమువలన ఇవి ఒకటి మరొకటిగా మారగలవు.అయితే ఒక రేఖ శాంకవము అను గుణము మారదు. అందువలన ఇది విక్షేపకధర్మము అగును. సమానాంతరరేఖల సమూహము విక్షేపమువల్ల ఒకే బిందువునందు ఏకీభవించు రేఖలుగా మారును. అందువలన విక్షేపక జ్యామితిలో రెండు సమానాంతర రేఖలు సంధింపవు అని చెప్పజాలము. వాటికిని ఒక ఛేదన బిందువు ఉన్నది. అయితే అది అనంతదూరములో ఉన్నది అనియే చెప్పవలెను. విక్షేపమువలన ఈ అనంతదూరములోఉన్న బిందువును మితదూరమునకు తీసికొని రావచ్చును. O శిఖరముద్వారా T' తలమునకు సమానాంతర తలమును నిర్మించినచో అది T తలమును ఒకరేఖ RS లో ఛేదించును. T తలములో RS మీదఉన్న ఒక్కొక్క బిందువు P, విక్షేపమువలన T'లో అనంత దూరములోఉన్న బిందువుగా మారును; అయితే సాధారణముగా ఒకఋజురేఖయొక్క విక్షేపము ఋజురేఖయేకదా! కాబట్టి T' తలములో అనంతదూరమున ఉన్న బిందువులు అన్నియు ఒకే ఋజురేఖమీద ఉన్నవనియే పరిగణించవలయును. దీనికి T' లోని అనంత దూరములో ఉన్న రేఖ అని పేరు. అటులనే T తలములోను ఒక అనంతదూరములో ఉన్న రేఖ ఒకటి యున్నది. విక్షేపము వలన సాధారణరేఖ మరియొక తలములోని అనంతములోఉన్న రేఖగా మారును. అటులనే ఒక తలములోఉన్న అనంతదూర రేఖ మరియొక తలములోని సాధారణరేఖగా మారును.

అందువలన యూక్లిడ్ జ్యామితి తలమునకు ఒక అనంతములో ఉన్న రేఖయు, దానిమీద ఉండు బిందు సమూహమును చేర్చినచో అది విక్షేపకతలమగు చున్నదని చెప్పవచ్చును.

యథాదర్శన జ్యామితి : మనము దూరమున ఉండు వస్తువును చిత్రించునపుడు, లేదా దానియొక్క ఛాయా పటమును తీయునపుడు, అది యదార్థముగా ఎటులున్నదో అటులనే చిత్రములో ఉండదు. ఉదా : ఒక వృత్తరూపము గల బావి ఛాయా పటములో ఒక దీర్ఘ వృత్త రూపమునే ధరించును. అది ఎట్లు మనకంటికి తోచుచున్నదో అటులనే చిత్రించవలెను, గాని దాని నిజరూపములో వ్రాయ కూడదు. దూరమున ఉన్న వస్తువులు చిన్నవిగను, దగ్గర వస్తువులు పెద్దవిగను, సమానాంతర రేఖలు సంధించు రేఖలుగను తోచును. అటులనే చిత్రింపవలెను. కంటికి వస్తువులు ఎటుల కనబడుచున్నవో అటులనే కచ్చితముగా వ్రాయు శాస్త్రమునకు యథాదర్శన శాస్త్రము (సైన్స్ ఆవ్ పర్‌స్పెక్టివ్ డ్రాయింగ్) అని పేరు. వస్తువుల దృశ్యరూపము కనిపెట్టుటకు ఒక బిందువు O ఒక కన్నుగా తీసికొని, చిత్రము వ్రాయు ఉదగ్రతలమును T' తలముగా తీసికొని వస్తువుయొక్క ఒక్కొక్క బిందువు P యును O బిందువునకు చేర్చి ఆ చేర్పురేఖ చిత్రతలమగు T' ను ఎచ్చట ఛేదించునో దానినే P' (అనగా P యొక్క చిత్రము) అని తీసికొనినచో O యందున్న కంటికి P' ను P ఒకే బిందువుగ దృశ్యమగును. అందువలన P' బిందువే P బిందువునకు కచ్చితమైన చిత్రము. మనకు రెండు కన్నులు ఉన్నప్పటికి, దూరవస్తువులను చూచునపుడు ఒక కంటికి గోచరమగు దానికిని మరియొక కంటికి గోచరమగు దానికిని ఎక్కువ భేదము లేదు. అందువలన దూరమున ఉన్న వస్తువులుచూచు యథాదర్శన చిత్రకారునికి ఏకాక్షి దృశ్యము చాలును! మరియొక కన్ను అనావశ్యకము!

ఇప్పుడు O శిఖరముగాను, భూమితలమును T తలముగను ఉదగ్రతలము T' చిత్రతలముగను ఎంచిన చిత్ర

కారుని నిర్మాణము విక్షేపకరీతి నిర్మాణమే అగును. అందువలన గణితశాస్త్ర రీతిగా విక్షేపశాస్త్రమునకును, యథాదర్శన జ్యామితికిని భేదము లేదు.

విక్షేపక నిరూపకములు : మనము సాధారణముగా నిరూపక జ్యామితియందు వాడు x, y నిరూపకములు విక్షేపవ్యవహారములకు ఉచితములు కావు. ఏలన, విక్షేపక తలమునందు సాధారణ బిందువులు కాక అనంతములో నివసించు బిందువులు కూడా ఉన్నవి. అయితే డేకార్ట్ వివరించిన జ్యామితిలో అట్టి బిందువులకు నిరూపకములు అనంత విలువలు కలవి. $y=mx$ రేఖమీద అనంతములో ఉండు బిందువు యొక్క నిరూపకములు $(\infty, m\infty)$ అనియో, లేదా అవధి (t, mt), $t \longrightarrow \infty$ అనియో చెప్పవలెను. అయితే అనంతమును ఒక సంఖ్యగా ఉపయోగించుటలో చాల చిక్కులు ఉన్నవి. అటులనే (x, y) అక్షములను a, b దూరమునందు సంధించు ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ అగుచున్నది. అందువలన అనంతములోఉండు ఋజురేఖాసమీకరణమును కనిపెట్టుటకు $a \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow \infty$ చేయవలెను. అప్పుడు $\frac{x}{a} \longrightarrow 0, \frac{y}{b} \longrightarrow 0$ అగును. ఆ రేఖ సమీకరణము $0x+0y=1$ లేదా $0=1$ అను అసత్యమైన సమీకరణమగును. కనుక అనంతములోఉన్న బిందువులకును, రేఖకునుకూడ మితసంఖ్యలుగల సమీకరణము ఉన్నటువంటి క్రొత్త నిరూపకములు కావలెను. ఇవియే సమఘాత నిరూపకములు.

ఒక తలములోని త్రిభుజము ABC ను తీసికొనెదము. అదే తలములో P ఒక బిందువైతే $X=\triangle PBC/\triangle ABC$; $Y=\triangle PCA/\triangle ABC$; $Z=\triangle PAB/\triangle ABC$ ఇవియే ఆ బిందువు యొక్క క్రొత్త నిరూపకములుగా తీసికొనెదము. ఇచ్చట $\triangle ABC$ అనగా ABC త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము. $\triangle PBC$ అనగా PBC త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము. మిగిలినవియు అటులనే. BC రేఖకు P, A లు ఒకే ప్రక్కన ఉన్నచో, PBC వైశాల్యము ధనరాశి అనియును, వేర్వేరు ప్రక్కలనున్న ఋణరాశి అనియు ఎంచవలెను. A, B, C యొక్క నిరూపకములు $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ అగును. $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ లను అటులనే ధనమా, ఋణమా అని నిర్ణయించవలెను. ఇట్లు సంజ్ఞలు ఇచ్చినఎడల ఎల్లప్పుడును $X+Y+Z=1$ గనే ఉండును. అందువలన $X : Y : Z$ అను అనుపాతములను ఇచ్చిన ఎడల, $X+Y+Z=1$ ను ఉపయోగించి X, Y, Z లను ప్రత్యేకముగ కనిపెట్టవచ్చును. $X=0$ అయితే P బిందువు BC మీద ఉండును. అందువలన ABC యొక్క భుజముల సమీకరణములు $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ అగును. $X+Y+Z=1$ ఉపయోగించి ఒక్కొక్క సమీకరణమును సమఘాతముగా చేయవచ్చును. ఉదా : $X=\frac{1}{2}$ అను ఋజురేఖనే $2X=(X+Y+Z)$ అనగా $-X+Y+Z=0$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇదియే AB, AC యొక్క మధ్య బిందువులను చేర్చు రేఖ. ఇటులనే అన్ని ఋజురేఖల సమీకరణములును $lX+mY+nZ=0$ అను రూపమున ఉండును. శాంకవముల సమీకరణములు $aX^2+bY^2+cZ^2+2fYZ+2gZX+2hXY=0$ అను రూపమున ఉండును. అన్ని సమీకరణములు సమఘాతములైనందువలన X, Y, Z కు బదులు kX, kY, kZ అనియు సమీకరణములో వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $(k \neq 0)$, X, Y, Z లన్నియు ఏకకాలములో శూన్యముగా ఉండవు. ఏలన $X+Y+Z=1$. అందువలన kX, kY, kZ లు ఏకకాలమున శూన్యము కాజాలవు. X, Y, Z అను మూడు సంఖ్యలున్నను వాటి పరస్పర నిష్పత్తులే $X : Y : Z$ లు ఒక బిందువును స్థాపించును.

అందువలన ఒక విక్షేపక నిరూపకమును ఇట్లు వివరించవచ్చును :

"విక్షేపకతలములో ఒక బిందువు అనగా మూడు సంఖ్యల వరుస (X, Y, Z). ఇవన్నియు ఏకకాలములో శూన్యముగా ఉండకూడదు. అనగా $(0, 0, 0)$ ఒక బిందువు కాదు. (X, Y, Z) బిందువు (kX, kY, kZ) $(k \neq 0)$ బిందువును ఒకే బిందువు."

అనంతదూరమున ఉన్న బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనిపెట్టెదము. $X=0$ అనునది BC రేఖ. $X=\frac{1}{2}$ లేదా $-X+Y+Z=0$ అనునది మునుపే చూపినట్లు AB, AC యొక్క మధ్య బిందువులద్వారా వెళ్లు రేఖ. ఈ రెండు సమానాంతర రేఖల ఛేదనబిందువును కనిపెట్టుటకు $X=0$, $-X+Y+Z=0$ అను సమీకరణములను తృప్తిపరచు $X : Y : Z$ అనుపాతములను కనిపెట్టవలయును. ఈ బిందువు $(0, 1, -1)$ అనునదియే. నిరూపకములు పరిమితిగల సంఖ్యలైనను ఇది అనంత దూరములో ఉన్న బిందువు. దీనిని సరిచూపుటకు BC కు సమానాంతరమైన రేఖాసమూహము $X=C$ ని తీసికొనెదము. ఇచ్చట C ఒక స్థిరరాశి. దీనినే $X=C(X+Y+Z)$ అనగా $(C-1)X+C(Y+Z)=0$ అని వ్రాయవచ్చును. $(0, 1, -1)$ అను బిందువు ఈ సమానాంతర రేఖ లన్నిటి మీదను ఉన్నది. అందువలన వాటన్నిటికిని చేరినదే ఈ

అనంతమున ఉండు బిందువు. అటులనే AC రేఖలో అనంతమునఉండు బిందువు $(-1, 0, 1)$, BA రేఖలో అనంతములో ఉండు బిందువు $(-1, 1, 0)$. ఈ మూడును $X+Y+Z=0$ అను సమీకరణమును తృప్తిపరచుచున్నవి. అందువలన ఈనిరూపకములలో $X+Y+Z=0$ అనునదియే అనంతములోఉన్న రేఖయొక్క సమీకరణము.

X, Y, Z నిరూపకములకు 'వైశాల్య నిరూపకములు' అని పేరు.

ఒక బిందువు P యొక్క వైశాల్య నిరూపకములు X, Y, Z అయితే X, Y, Z పరిమాణము గల బరువులను A, B, C యందుంచిన, వీటి గురుత్వకేంద్రము P యందుండును. X, Y, Z బరువులకు బదులుగ kX, kY, kZ బరువులు పెట్టినను $(k \neq 0)$ గురుత్వకేంద్రము మారదుకదా? ఈ నిరూపకములను కనిపెట్టినది మోబియస్ అను జర్మనీ శాస్త్రజ్ఞుడు.

సమఘాత నిరూపకములలో ఇంకొక రకము త్రిరేఖీయ నిరూపకములు. ఈ రీతిలో P నుండి CB, AC, BA లకు లంబదూరములగు α, β, γ లను నిరూపకములుగా తీసికొనెదము. అందువలన $X=a\alpha/2\Delta$, $Y=b\beta/2\Delta$, $Z=c\gamma/2\Delta$. ఇచ్చట a, b, c భుజముల పొడవులు, Δ అనునది ABC వైశాల్యము. ఇచ్చట ఎల్లప్పుడును $a\alpha+b\beta+c\gamma \equiv 2\Delta$ అను సర్వసమత ఉన్నది. పైవ్రాసిన సూత్రముల నుండి (X, Y, Z), (α, β, γ) లలో ఏదైన ఒక త్రయమిచ్చినట్లయితే రెండవదానిని కనిపెట్టవచ్చును. ఈ త్రిరేఖీయ నిరూపకములలో అనంతదూరమున ఉన్న రేఖయొక్క సమీకరణము $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ అగును.

విక్షేపక మార్పులు : T తలములో ఒక త్రిభుజము ABC ను తీసికొని, T' తలములో మరియొక త్రిభుజము $A'B'C'$ ను నిరూపక త్రిభుజముగా తీసికొని P యొక్క నిరూపకములు X, Y, Z గను P' యొక్క నిరూపకములు X' Y' Z' గను గ్రహింతము. P యొక్క విక్షేపక బిందువు P' అయితే, $X:Y:Z$ ఇచ్చినచో $X':Y':Z'$ అద్వితీయముగ దొరకును. అటులనే $X':Y':Z'$ నుండి $X:Y:Z$ అద్వితీయముగ దొరకును. అందువలన వాటి సంబంధములు క్రింద వివరించినట్లు ఉండును :

$$k'X' = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z$$
$$k'Y' = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z \qquad (k' \neq 0)$$
$$k'Z' = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z$$

ఇవియే విక్షేపక మార్పుల సమీకరణములు. వీటిలో నిర్ధారకము $|a_{rs}|$ శూన్యము కాకపోయిన ఎడల X, Y, Z లను X', Y', Z' ద్వారా వ్రాయవచ్చును; (చూ. నిర్ధారకములు) అనగా :

$$kX = b_{11}X' + b_{12}Y' + b_{13}Z'$$
$$kY = b_{21}X' + b_{22}Y' + b_{23}Z'$$
$$kZ = b_{31}X' + b_{32}Y' + b_{33}Z'$$

అనురూపములో వ్రాయవచ్చును.

ఈ మార్పుల విశేషమైన ధర్మమేమనగా $|a_{rs}| \neq 0$ అగు మార్పులన్నియు ఒక కూర్పు అగును. అనగా కూర్పులోఉన్న ఒకటి వెనుక మరియొక మార్పుల ప్రయోగమువలన లభించినమార్పు కూర్పులోఉన్న వేరొక మార్పే అగును. కూర్పులోఉన్న ఒక్కొక్క మార్పునకు విలోమమగు మార్పుకూడ ఆ కూర్పులోనే ఉండును. ఈ మార్పుల సమూహములో సర్వసమపరివర్తనము అగు మార్పు ఒకటి $(X':Y':Z' = X:Y:Z)$ ఉన్నది. ఈ మూడు గుణములుకల మార్పుల సమూహములను కూర్పులు అనెదము (చూ. కూర్పులు).

అందువలన విక్షేపకజ్యామితి కూర్పులోని అన్ని మార్పులవలనను మారని గుణములను పరిశీలించు శాస్త్రము. అటువంటి గుణములలో ముఖ్యమైనది ఒకటి : వక్రరేఖయొక్క తరగతి. ఈ వక్రరేఖను ఒక ఋజురేఖ ఎన్ని బిందువులందు ఛేదించును అను సంఖ్యయే ఇది. ఇచ్చిన రేఖయొక్క సమీకరణము X, Y, Z లలో మొత్తము n వ తరగతిగా ఉన్నచో, ఒక్కొక్క ఋజురేఖయును ఈ రేఖను n బిందువులందు ఛేదించును. అయితే వాస్తవబిందువులు, సంకీర్ణ బిందువులు, ఏకీభవించిన బిందువులు అన్నియును గణనములోనికి రావలెను. నిరూపకములు X, Y, Z లేదా (x, y) వాస్తవసంఖ్యలు మాత్రమైయున్న ఎడల పైనచెప్పిన సిద్ధాంతము సత్యము కాదు.

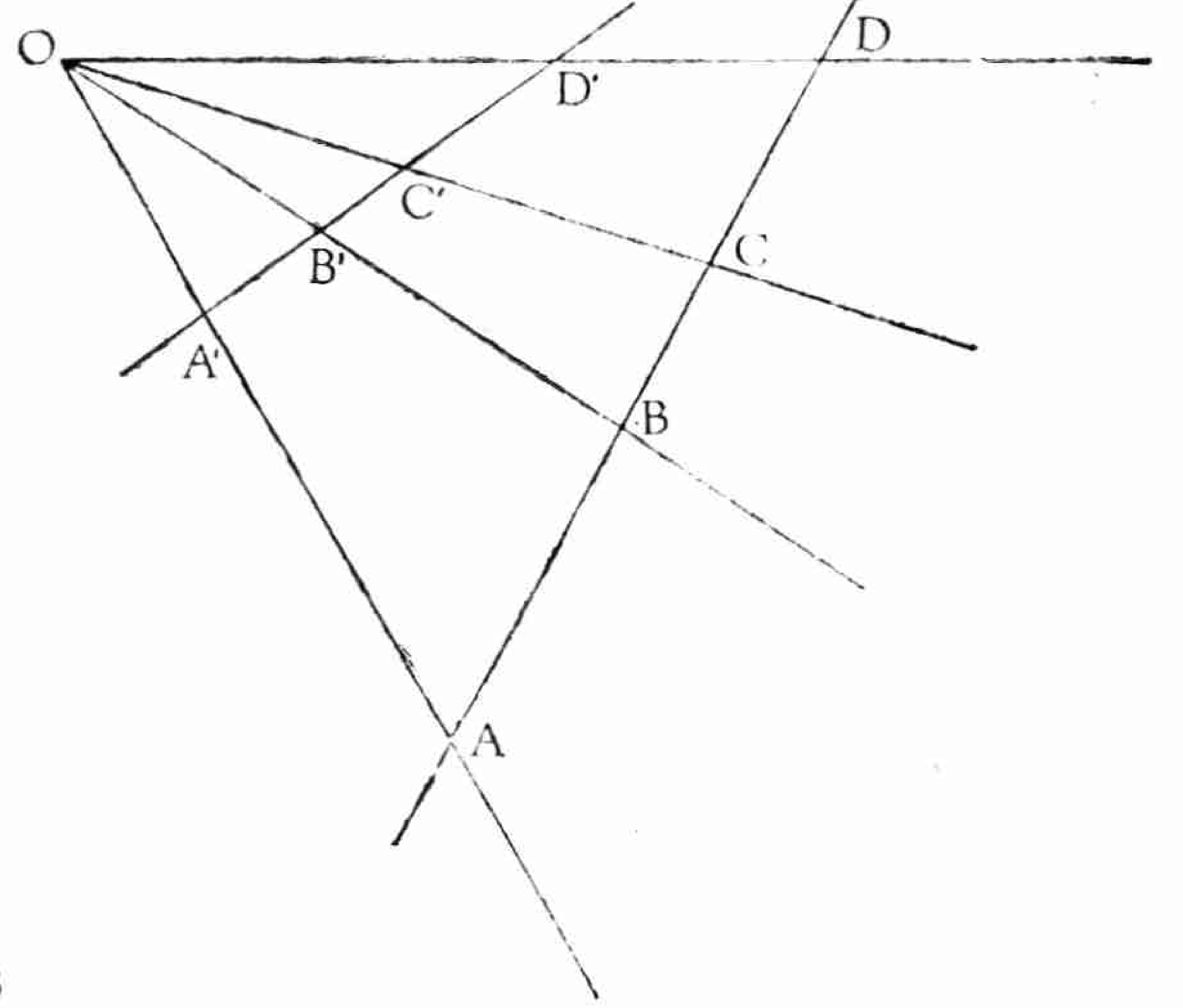
వజ్ర నిష్పత్తి : విక్షేపము వలన ఒక రేఖయొక్క పొడవు మారును అని మునుపే చెప్పితిమి. ఒక ఋజురేఖ మీద మూడు బిందువులు A, B, C ఉన్నచో AB/BC అను రెండు పొడవుల నిష్పత్తి కూడ విక్షేపమువలన మారిపోవచ్చును. అయినను ఒకే ఋజురేఖమీద రెండుజతల బిందువులు AC, BDతీసికొని AB/BC నిష్పత్తికిని AD/DC నిష్పత్తికిని ఉన్న నిష్పత్తి అనగా $\frac{AB}{BC} \Big/ \frac{AD}{DC} = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$ అను నిష్పత్తుల నిష్పత్తి లేదా వజ్రనిష్పత్తి మారదని చూపవచ్చును. అందువలన ఈ వజ్ర నిష్పత్తిని మాత్రము ఉపయోగించి వ్రాయదగిన సిద్ధాంతములు విక్షేపమువలన మారవు. $\frac{AB.CD}{AD.CB}$ అను విలువను $(ABCD)$ అని

వ్రాయుట వాడుక. AC, BD ఈరెండు జతలలో. ఒక జతలో ఉన్న ఒక బిందువు మరియొక జతలో ఉన్న ఒక బిందువుతో ఏకీభవించిన ఎడల $(AC, BD)=0$ లేదా అనంతము. $(ABCD) = (AC, BD) = -1$ అయితే $AB/BC = -AD/DC$ అనగా AC రేఖా ఖండము B యందు లోపలగాను, D యందు వెలుపలగాను ఒకే నిష్పత్తిలో ఛేదింప బడుచున్నది. BD రేఖా ఖండమును లోపల C యందును బయట A యందును ఒకే నిష్పత్తిలో ఛేదింపబడుచున్నదనియును చెప్పవచ్చును. $(AC, BD) = (BD, AC)$ అని సరిచూప వచ్చును. అట్టి జత బిందువులు AC, BD ఒకటి నొకటి హరాత్మకముగా విభాగించు చున్నవని, లేదా AC బిందు జతకు BD హరాత్మక జత అనియు చెప్పెదము. D అను బిందువు అనంతదూరమున ఉన్నట్లయితే $\frac{CD}{AD} = 1$ అగుచున్నది. అందువలన

$$(ABCD) = \frac{AB.CD}{AD.CB} = -\frac{AB}{BC}$$

$\therefore (A\ B\ C\ D) = -1$ అయి D అనంత బిందువైతే $A\ C$ రేఖా ఖండమునకు B మధ్యబిందువు అగును. అందువలన AC జతకు అనంతబిందువుయొక్క హరాత్మక యుగళము AC యొక్క మధ్యబిందువు B అగును.

ఒక ఋజు రేఖమీదనున్న నాలుగు బిందువులకు బదులుగా ఒకే బిందువులో సంధించు నాలుగు ఋజురేఖలను OA, OB, OC, OD తీసికొనెదము. వీటిని మరియొక ఋజు రేఖ (O ఈ రేఖమీద ఉండకూడదు) ఖండించు బిందువులు A', B', C', D' గా ఉండనిమ్ము. అప్పుడు A, B, C, D, యొక్క వజ్రనిష్పత్తి $(A\ B\ C\ D)$ యును $(A'B'C'D')$ వజ్రనిష్పత్తికి సమముగా ఉండును. ఏ ఇతర రేఖ ఈ నాలుగు రేఖలను ఖండించినను వజ్రనిష్పత్తి ఒకే సంఖ్యగా ఉండును. ఈ విలువనే $O\ (ABCD)$ రశ్మి శలాకముయొక్క వజ్రనిష్పత్తి యని చెప్పవచ్చును. ఇది -1 అయితే హరాత్మక శలాకము అని చెప్పెదము. OA. OC అను రేఖల జత OB, OD రేఖలను హరాత్మకముగా విభజించుచున్నవి అనియు చెప్పెదము. దీనికొక ఉదా: OA, OC రెండు రేఖలును, వాటి మధ్య ఉన్న కోణమును రెండు సమభాగములుగా విభజించు OB, OD అను ద్విభాజకములను ఈ రెండు జతలే. విలోమముగా రెండురేఖలు OB, OD మరిరెండు రేఖలు OA, OC ను హరాత్మకముగా విభజించి $OB \perp OD$ గ ఉన్న ఎడల OB, OD రేఖలు AOC కోణమును రెండు సమభాగములుగా విభజించును. OA, OB, OC, OD రేఖల సమీకరణములు $y=m_1 x$, $y=m_2 x$, $y=m_3 x$, $y=m_4 x$ అయితే ఈ శలాకము యొక్క వజ్రనిష్పత్తి $\frac{(m_1-m_2)(m_3-m_4)}{(m_1-m_4)(m_3-m_2)}$ అగును. దీనినుండి $x=0$, $y=0$



చిత్రము 10

రేఖలు $y=mx$, $y=-mx$ రేఖలను హరాత్మకముగా విభజించుచున్నవని చూపవచ్చును. అనగా ఈ రేఖల జతల వజ్రనిష్పత్తి -1 అని తెలిసికొనవలెను. మరియొక ముఖ్య ఉదాహరణమును తీసికొనెదము. $m_2 = i$, $m_4 = -i$, $i=\sqrt{(-1)}$ అయితే, $y=m_1 x$, $y=m_2 x$, $y=m_3 x$, $y=m_4 x$ అను రశ్మిశలాకము యొక్క వజ్రనిష్పత్తి

$$K = \frac{(m_1 - i)\ (m_3 + i)}{(m_1 + i)\ (m_3 - i)}$$

$$= \left(1 + i\ \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}\right) \quad \left(1 - i\ \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}\right) = e^{2i\theta}.$$

ఇచ్చట θ అనునది OA కును, OC కును మధ్యకోణము $\angle AOC$. $y=ix$, $y=-ix$ అను సంకీర్ణ రేఖలకు 'వర్తుల రేఖలు' అని పేరు. ఏ బిందువుద్వారా నైనను వెళ్లు ఇట్టి రెండు వర్తుల రేఖలున్నవి. అందువలన కోణము యొక్క కొలత అను యూక్లిడ్ జ్యామితి భావమును విక్షేపక జ్యామితి దృష్టితో ఇట్లు వర్ణింపవచ్చును: ఒక బిందువు O నుండి వెడలు OI, OJ వర్తుల రేఖలను తీసికొని $O(AICJ)$ యొక్క వజ్రనిష్పత్తి K ను కనుగొని దాని నుండి $\frac{1}{2i} \log K$ ను పొందవచ్చును. ఇదియే θ, అనగా ఆ కోణపు కొలత. $K = -1$ అయితే $\theta = 90^\circ$ లంబకోణ

మగుచున్నది. అనగా O నుండి వెడలు వర్తుల రేఖల OI, OJ జత ఒక లంబకోణబాహువుల జతను హరాత్మకముగా విభజించును. ఏలన, $\frac{1}{2i}\log(-1) = \frac{\pi}{2}$ కనుక $\theta = \pi/2$ రేడియన్లు. అనగా $\theta = 90^\circ$ అగుచున్నది.

అనంతవర్తుల బిందువులు : విశేషక జ్యామితి దృష్టిలో $y = mx$, $y = mx + c_1$, $y = mx + c_2$.... వంటి ఒకే దిక్కుగల సమానాంతర రేఖాశలాకమునకు ఒక ఆపాతబిందువు అనంతదూరములో ఉన్నది. ఈ బిందువు m విలువ వలన నిర్ణీతమగుచున్నది. $m = i$ అయితే, ఈ బిందువు పేరు I; అటులనే $m = -i$ అయితే బిందువు పేరు J. I, J లు రెండింటికిని అనంతములో ఉండు వర్తుల బిందువులు అని పేరు. ఇవి సంకీర్ణస్థిరబిందువులు. ఇప్పుడు తలములో ఉన్న అన్ని వృత్తములును I, J బిందువుల ద్వారా వెళ్లుచున్నవని నిరూపించెదము.

మూలబిందువు కేంద్రముగాగల ఒక వృత్తము యొక్క సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$ కదా. $y = mx$ అను రేఖ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ అను రేఖను ఛేదించు బిందువు L యొక్క నిరూపకములు $x = \frac{ab}{b + am}$, $y = \frac{abm}{b + am}$. ఈ L బిందువు $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తము మీద ఉన్నట్లయిన $1 + m^2 = r^2\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{b}\right)^2$. ఈ సమీకరణమునుండి m కు రెండు మూల్యములు దొరకును. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ అనంత దూరమునకు వెళ్లునపుడు $a \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow \infty$ అగుచున్నవి. అందువలన పై సమీకరణము $1 + m^2 = 0$ అవధిలో అగుచున్నది. అనగా $m = i$ లేదా $m = -i$, అనునవి OL యొక్క నిమ్నత విలువలు ; ఈ రెండు మూల్యములు నిమ్నతలుగా గల రేఖలు $y = ix$, $y = -ix$ అనంతదూరములో ఉన్న రేఖను రెండు బిందువులలో ఖండించును. ఈ బిందువులు I, J, $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తములో ఉన్నవని చూచితిమి. అనగా $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తములు I, J బిందువుల ద్వారా వెళ్లుచున్నవి అని గ్రహించెదము. అయితే ఏ వృత్తమునైనను కేంద్రబిందువు మూలబిందువుగా తీసికొని $x^2 + y^2 = a^2$ రూపములో వ్రాయవచ్చును అందువలన తలములోని అన్ని వృత్తములును అనంతములో ఉండు I, J అను రెండు స్థిరబిందువుల ద్వారా వెళ్లును.

విచిత్ర ప్రవర్తన : I, J వర్తుల బిందువులు అనంత దూర రేఖలో ఉన్నవి అని పైన చెప్పితిమి. అయిన ఏ వృత్తము (కేంద్రబిందువు O, వ్యాసార్ధము r) ను తీసికొనినను I, J లు ఆ వృత్తము మీదను ఉన్నవి. అందువలన $OI = r$, $OJ = r$ అగును. O బిందు తలము మీద ఎచ్చటనైనను ఉండవచ్చును. r మూల్యము ఎంతైనను ఉండవచ్చును. అందువలన 'I' నుండి r దూరములో ఉన్నవి ఏయే బిందువులు అని అడుగగా, ఈ ప్రశ్నకు ప్రత్యుత్తరము 'తలములోని అన్ని బిందువు' లనియే చెప్పవలెను ! r చిన్నదైనను, పెద్దదైనను, శూన్యమైనను, ఇదే ప్రత్యుత్తరము ! J బిందువునకును ఇదే గుణము.

మరియొక వింత : $y = ix + c$ రేఖమీద రెండు బిందువులు $(x_1, ix_1 + c)$ $(x_2, ix_2 + c)$ తీసికొనెదము, వాటి దూరము $\sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (ix_1 - ix_2)^2\}} = 0$ అందువలన మనము $y = ix + c$ అనగా I ద్వారా వెళ్లు ఏ ఋజురేఖ OI ను తీసికొనినను, దానిమీద ఉండు ఏ రెండు బిందువుల దూరమైనను శూన్యమగును. అనగా OI రేఖమీద మనము ఎక్కడ బయలుదేరి ఎచ్చటకు వెళ్లినను మనము వెళ్లిన దూరము ఎల్లప్పుడు శూన్యముగనే ఉండును !

దూరపు కొలత సంబంధములోనే కాక, కోణముల కొలతలోను I, J లు పరస్పర విరుద్ధ గుణములను ఏక కాలములోనే కలిగి ఉన్నవి. $y = mx$ అను ఒక రేఖకు, $y = ix$ అను మరొక రేఖకును మధ్యకోణము θ అయినచో, సూత్రము ప్రకారము $\tan\theta = \frac{i - m}{1 + mi} = i$ ఈ మూల్యము వాస్తవ సంఖ్య కాదనుటలో ఆశ్చర్యము లేదు. ఏలన $y = ix$ వాస్తవ రేఖకాదు. అయిన ఆశ్చర్యకరమైన విషయమేమనిన ఈ మూల్యములో m లేనేలేదు. అందువలన m విలువ ఏది తీసికొన్నను θ విలువ ఒక్కటే ! అనగా OI, రేఖాతలములో ఉన్న అన్ని రేఖలతోను ఒకే కోణము చేయుచున్నది ! ఇటులనే OJ. ఇది చేయు కోణము $\tan^{-1}(-i)$ అగును. ఈ కోణములకు $\sin\theta = \infty$, $\cos\theta = \infty$.

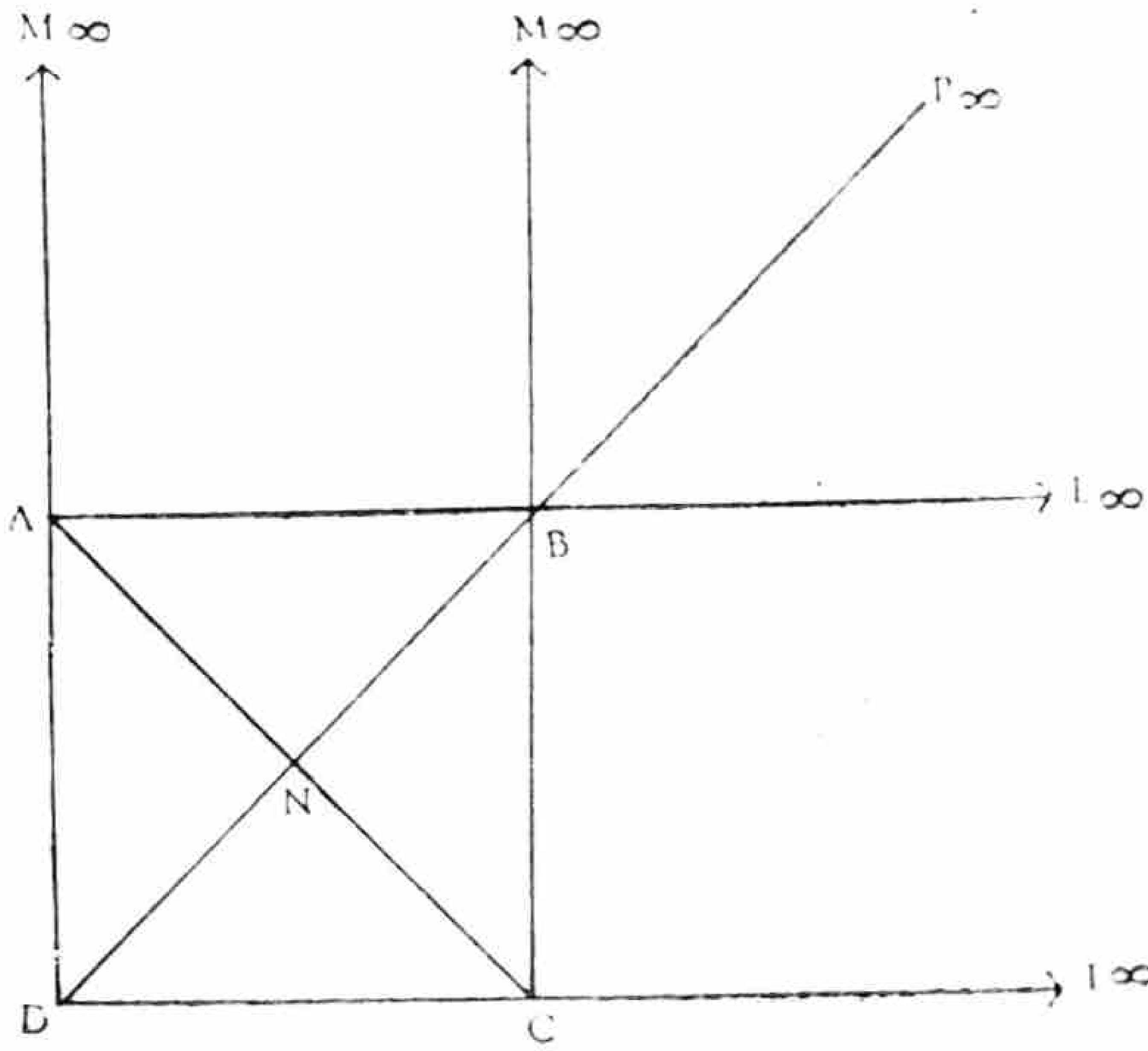
O కేంద్రము గల ఒక వృత్తమును తీసికొనెదము. ఇది I, J ద్వారా వెళ్లుచున్నది. I, J బిందువులందు స్పర్శ రేఖలు ఏవి ? వృత్తసమీకరణము నుండి ఈ స్పర్శరేఖలు OI, OJ అని చూపించవచ్చును. అయిన వృత్తము యొక్క గుణము ఒక్కొక్క బిందువు P లోను వ్యాసరేఖ OP, స్పర్శరేఖయు ఈ రెండును పరస్పర లంబములు. ఈ సూత్రములను I, J బిందువులకు ప్రయోగించినచో వ్యాసరేఖ OI స్పర్శరేఖ OI కు లంబముగ ఉండును. అందువలన OI రేఖ తనకు తానే లంబముగ ఉన్నది అని

చెప్పవలెను! ఇటులనే $OJ \perp OJ$. (అనగా OJ తనకు తానే లంబముగ ఉన్నది). $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ పరస్పర లంబములగుటకు నియమము $m_1 m_2 = -1$. అందువలన ఒక రేఖ తనకు తానే లంబమైతే $m^2 = -1$ అనగా $y = ix$ అట్టి రేఖ ; $y = -ix$ ను అట్టిదే. $\therefore m = \pm i$, $y = \pm ix$ వాస్తవరేఖలు కావు. ఏలన ఒక వాస్తవరేఖ తనకు తానే లంబముగా ఉండజాలదు, ఒక ప్రత్యేక దిక్కులేని దూరపు కొలతయులేని OI, OJ వంటి రేఖలు, సంకీర్ణతలములో ఉండునుగాని, వాస్తవబిందు తలములో ఎట్లుండును ?

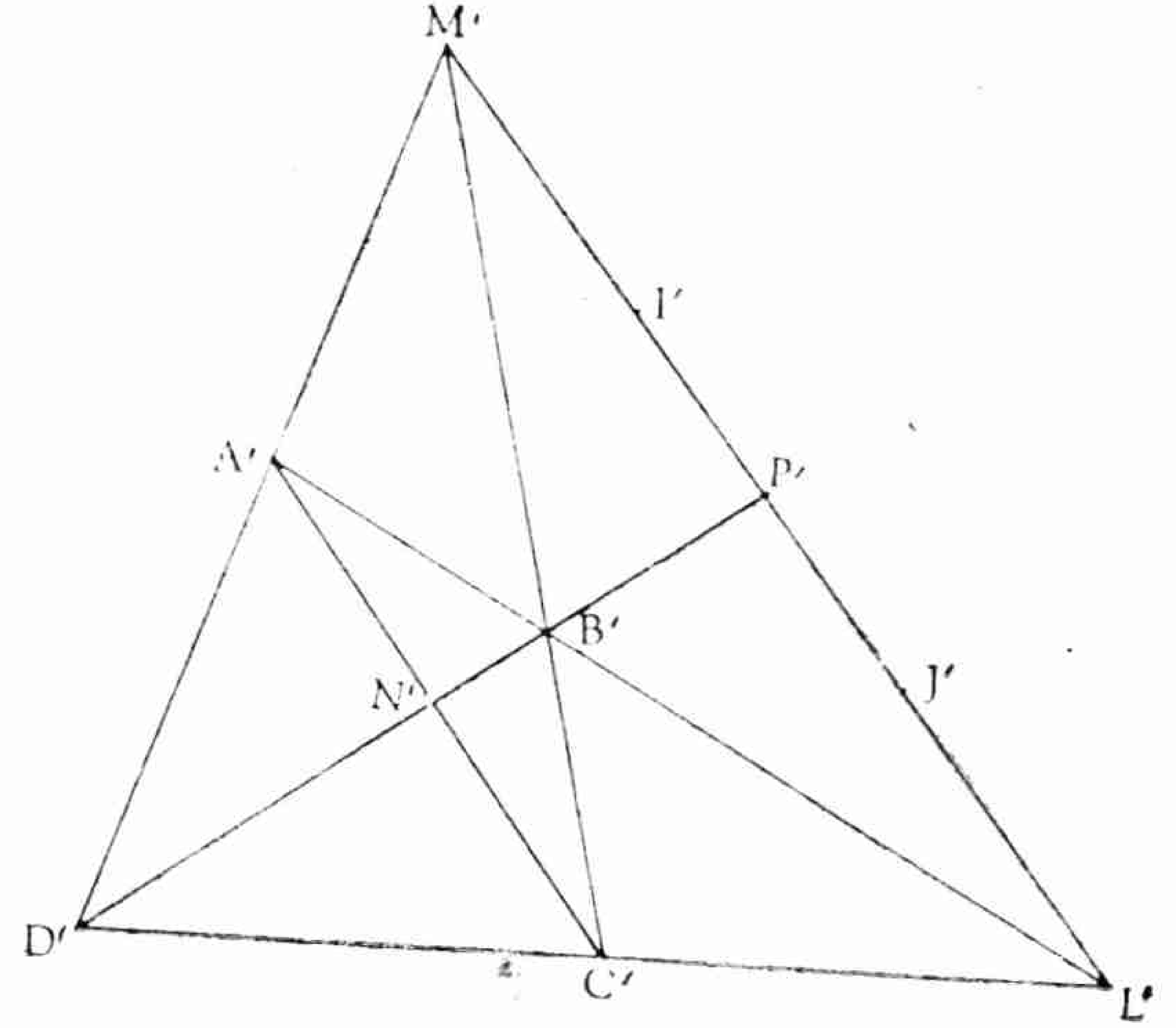
పైన ప్రతిపాదించిన ఫలితములనుండి I, J బిందువులకు సంబంధించినంతవరకు నిడివి కొలత, కోణపుకొలత ఇవి అర్థములేని మాటలని వ్యక్తమగుచున్నది. యూక్లిడ్ తలములో సంకీర్ణబిందువులు లేవు. అనంతదూరపు రేఖయు లేదు, దానిమీదఉన్న వర్తుల బిందువులు I, J లును లేవు. ఇవి విక్షేపకతలములో ఉన్నవి. యూక్లిడ్ తలమును విక్షేపకదృష్టిలో మనము వీక్షించినపుడు I, J బిందువుల IJ అనగా అనంతదూరపు రేఖ అవతరించుచున్నది.

మేమియు లేదు. విక్షేపకమార్పులలో T తలములోని ఏ రెండు బిందువులనైన T' తలములో వర్తుల బిందువులుగా మార్చవచ్చును. Tలో ఉన్న వర్తులబిందువులు (I, J) T' లోని సాధారణ బిందువులగు (I', J') గా మారును. అటులనే శిఖరము O బిందువును విక్షేపకతలము T' ను తగినట్లు స్థాపించుటవలన T లోని ఏరేఖనైనను T' లోని అనంతదూరరేఖగను, T లోని ఏ రెండు కోణములనైన T' లో లంబకోణములుగను మార్చవచ్చును.

విక్షేపక నియమముల దృష్టాంతముగా ఒక చతురస్రము $A\ B\ C\ D$ ఎట్లు మారునో గమనించెదము. విక్షేపమువల్ల అది ఒక చతుర్భుజము $A'\ B'\ C'\ D'$ గా మారును. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ కనుక వాటి ఖండన బిందువులు L, M లు అనంతదూరములో ఉన్నవి. AC, BD వికర్ణముల ఖండన బిందువే చతురస్రమునకు కేంద్రబిందువు, N. వీటి విక్షేపకములు $L'M'N'$ అనుకొనెదము. T' తలములోని $A'\ B'\ C'\ D'$ చతుర్భుజమునకు $L'\ M'\ N'$ హరాత్మక త్రిభుజము (చూ. చిత్రము 12).



చిత్రము 11 T తలము



చిత్రము 12 T' తలము

తలములోని కొలతలన్నియు I, J పై ఆధారపడి ఉన్నవి. అవి కొలతలకు అధీష్ట దేవతలు! I, J బిందువులకో, వాటినుండి వెడలు రేఖలకో కొలతభావము ప్రయోగించుట అనుచితము.

నిడువుల కొలతలు, కోణముల కొలతలు ఇవన్నియు యూక్లిడ్ జ్యామితిలోని ముఖ్యభావములు. అందువలన యూక్లిడ్ జ్యామితిలోనే I, J బిందువులకు ప్రాముఖ్యము గలదు. కొలతలు లేని విక్షేపకతలమున వీటికి ప్రాముఖ్య

D, B లకు మధ్యబిందువు N ; కనుక DB రేఖలోని అనంత దూరబిందువు P_∞ అయితే, $(B\ D,\ N\ P_\infty) = -1$ ఈ వజ్రనిష్పత్తి మారదు. కనుక T' తలములోని $(B'\ D',\ N'\ P') = -1$ అనగా $L'\ B'$, $L'\ D'$ జత $L'\ P'$, $L'\ N'$ జతను హరాత్మకముగా విభజించును. హరాత్మక త్రిభుజము $L'\ M'\ N'$ యొక్క ఏకోణము L' నుండి వెడలు రెండు భుజములు $L'\ M'$, $L'\ N'$ ను అదే కోణము L' ద్వారా వెళ్లు చతుర్భుజ భుజములను అనగా $(L'B'A'$,

$L' C' D'$)ను హరాత్మకముగా, విభజించును. ఇట్లు చతుర్భుజములందు విశిష్టమైన చతురస్రమునుండి అనుమానించి మనకు వ్యాపక చతుర్భుజమగు $A'B'C'D'$ దొరకినది. అటులనే I, J యొక్క విక్షేపక బిందువులు $I' J'$ అయిన $A'I'$, $A'J'$ జతరేఖలు $A'D'$, $A'B'$ ను హరాత్మకముగా విభజించును. ఏలన T తలములో AD, AB కి లంబమైనందువలన అనగా AD, AB జత AI, AJ జతను హరాత్మకముగా విభజించుచున్నది.

సమానాంతర, లంబవిక్షేపములు : విక్షేపకశిఖరము 'O' అతిదూరమునకు వెళ్లినపుడు, అన్ని రేఖలు OPP' సమానాంతరములు అగుచున్నవి. దీనికే సమానాంతర విక్షేపము అనిపేరు. ఇటువంటి విక్షేపములో T తలములోని అతిదూరరేఖయే T' తలములోని అతిదూరరేఖగా మారును. అందువల్ల T లోని సమానాంతర రేఖలు T' లోను సమానాంతరరేఖలుగానే మార్చబడును. ABC అను ఋజురేఖమీద ఉండు మూడు బిందువులు $A'B'C'$ అను ఋజురేఖమీద ఉండు బిందువులుగా మారును. AB/BC నిష్పత్తి $A'B'/B'C'$ నిష్పత్తికి సమానముగా ఉండును. O అను శిఖరము అతిదూరములో T' తలమునకు లంబదిక్కులో ఉన్న ఎడల P నుండి T' కు లంబము యొక్క అడుగే P' అగును. దీనికి లంబవిక్షేపము అని పేరు. దీనిలో T, T' ఛేదించు రేఖకు సమానాంతరముగ ఉన్న రేఖాఖండములని పొడవులు విక్షేపమువలన మారవు. అయిన ఈ రేఖకు లంబదిక్కులోఉండు రేఖాఖండములన్నియు ఒకే నిష్పత్తిప్రకారము తగ్గును. ఇంజనీరింగ్ నందలి ఒక యంత్రమును లేదా ఒక కట్టడమును చిత్రించుటకు దాని ముఖ్య బిందువులను, రేఖలను ఒక అంబుతలముమీదను, ఒక ఉదగ్రతలము మీదను విక్షేపించు చిత్రములను ఇచ్చుట వాడుక. వీటికి ఇంగ్లీషులో 'ప్లాన్' అనియు 'ఎలివేషన్' అనియు పేర్లు. ఈ రెండు చిత్రములనుండి వస్తువుయొక్క నిజరూపమును దాని కొలతను కనిపెట్టవచ్చును.

విక్షేపకతలములో ద్వైత భావము : యూక్లిడ్ తలములో ఏ రెండు బిందువులను ఇచ్చినను వానితో ఆపాత సంబంధము గల ఋజురేఖ ఉన్నది. అదియే వాటిని చేర్చు రేఖ. అయితే రెండు ఋజురేఖ లిచ్చినచో వాటితో ఆపాతసంబంధముగల బిందువు ఎల్లప్పుడును ఉన్నదని చెప్పజాలము. ఏలన, అవి సమానాంతర రేఖలైతే ఎంత దూరము పొడిగించినను అవి సంధింపవు. అందువలన బిందువులకును, రేఖలకును పూర్తియైన ద్వైతస్వభావము లేదు. విక్షేపకతలమునకు ఈ దోషము లేదు. ఇచ్చట సమానాంతరరేఖలకు కూడ ఒక అతిదూర బిందువునందు సంగమము కలదు. అతిదూర బిందువుల ప్రవేశము వలన ఈ దోషము తొలగినది. అందువలన విక్షేపక తలములో బిందువులకును, ఋజురేఖలకును పూర్ణద్వైత స్వభావము ఉన్నది. విక్షేపకతలములో ఒక రేఖకు సమీకరణము $LX + MY + NZ = 0$ రూపము పొందిఉండును - ఇచ్చట L, M, N మూడు సంఖ్యలు ఏకకాలమున శూన్యము కాకూడదు. $k\,LX + kMY + kNZ = 0$ $(k \neq 0)$ అను సమీకరణమును k చేత భాగించినచో తొలిని తీసికొనిన సమీకరణమే దొరకును. అందువలన kL, kM, kN నిర్ణయించు రేఖయు L, M, N నిర్ణయించురేఖయు ఒకటే. మనకు $(0, 0, 0)$ కాని మూడుసంఖ్యల వరుస (P, Q, R) ఇచ్చినచో వీటిని బిందు నిరూపకములు (X, Y, Z) గ నైనను రేఖానిరూపకములు (L, M, N)గ నైనను తీసికొనవచ్చును. బిందువు (P, Q, R) కును రేఖ (P, Q, R) కును పరస్పర అనురూపత ఇట్లు కలుగుచున్నది.

విక్షేపకతలములో రేఖలకును బిందువులకును ఉన్న ద్వైత స్వభావమును క్రింద వివరించెదము :

బిందువు	ఋజురేఖ
(1) రెండు బిందువులతో ఆపాతము గలది ఒకే రేఖ,	(1) రెండు రేఖలతో ఆపాతముగలది ఒకే బిందువు.
(2) ఒక రేఖను, దానితో అనుపాతము గల బిందువుల సమూహముగా పరిగణించవచ్చును.	(2) ఒక బిందువును, దానితో ఆపాతముగల రేఖను సమూహముగా పరిగణించ వచ్చును.
(3) ఒక రేఖలో ఆపాతము గల 4 బిందువుల వజ్ర నిష్పత్తి విక్షేపము వలన మారదు.	(3) ఒక బిందువుతో ఆపాతము గల 4 రేఖల వజ్రనిష్పత్తి విక్షేపము వలన మారదు.
(4) X, Y, Z ఒక బిందువు నిరూపకములు. ఒక రేఖ యొక్క సమీకరణము $LX+MY+NZ=0$	(4) L, M, N ఒక రేఖయొక్క నిరూపకములు. ఒక బిందువుయొక్కసమీకరణము $LX+MY+NZ=0$
(5) ఒక వక్రరేఖను దాని బిందువుల సమూహముగా పరిగణించవచ్చును.	(5) ఒక వక్రరేఖను దాని స్పర్శరేఖల సమూహముగా పరిగణించ వచ్చును.
(6) ఒక వక్రరేఖలో ఉండు రెండు దగ్గర బిందువుల చేరికయే ఆ బిందువునందు స్పర్శరేఖ అగుచున్నది.	(6) ఒక వక్రరేఖను స్పర్శించు రెండు దగ్గర స్పర్శరేఖల ఛేదనమే స్పర్శబిందువు అగుచున్నది.

ఈ ద్వైత స్వభావమును ఇంకను స్పష్టముగ గ్రహించుటకు విక్షేపకతలములోని ఒక పరిమిత జ్యామితిని

పరిశీలించెదము. మునుపటివలెనే నిరూపకములకు 0, 1, 2, 3, 4, (మాపనాంకము 5) సంఖ్యలు మాత్రము గల క్షేత్రమును ఉపయోగించెదము. అయిన ఇప్పుడు మూడు సంఖ్యలు కావలెను. (0, 0, 0) ఉపయోగపడదు. (X, Y, Z)ను, (kX, kY, kZ) ను $k \neq 0$ ఒకే బిందువు. X, Y, Z కు 0, 1, 2, 3, 4 అను సంఖ్యలు అన్నివిధముల తీసికొనినచో 125 త్రయములు దొరకును. నీటిలో (0, 0, 0) త్యాజ్యము. మిగిలినవి 124. ఒక్కొక్క బిందువు దీనిలో నాలుగు మార్లు ఎంచబడును. వలన (X, Y, Z), $(2X, 2Y, 2Z)$, $(3X, 3Y, 3Z)$, $(4X, 4Y, 4Z)$ అన్నియు ఒకే బిందువు. అందువలన వేరువేరుగా ఉండు త్రయముల సంఖ్య $124/4 = 31$. వీటిని (X, Y, Z) బిందు నిరూపకములుగనో, లేదా (L, M, N) రేఖా నిరూపకములుగనో తీసికొనవచ్చును. అందువలన ఈ పరిమిత విక్షేపకతలములో 31 బిందువులు, 31 ఋజురేఖలు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క రేఖమీద ఉండు బిందువులు 6. ఒక్కొక్క బిందువుద్వారా వెళ్లు రేఖలు 6. ఉదా : $X = 0$ రేఖమీద ఉండు ప్రత్యేక బిందువులు (0, 0, 1) (0, 1, 0) (0, 1, 1) (0, 1, 2) (0, 1, 3) (0, 1, 4), ఇదే ప్రశ్నను యూక్లిడ్ పరిమిత తలములో పరిశీలించి మొత్తము రేఖలు 30 అని చెప్పితిమి. అతి దూరమున ఉన్న రేఖ ఈ గణనలో రాదు. మొత్తము బిందువులు 25 అని చెప్పితిమి, విక్షేపక క్షేత్రములోని అనంతదూర రేఖయు దానిమీద ఉండు 6 బిందువులను వదలిపెట్టిన యూక్లిడ్ పరిమిత తలములోని 25 బిందువులును, 30 రేఖలును లభించును (చూ. పు. 38).

విక్షేపక n-పరిమాణిక ఆకాశములు (ప్రొజెక్టివ్ n - డైమన్షనల్ స్పేసెస్) : n - పరిమాణిక యూక్లిడ్ ఆకాశములో ఒక బిందువు అనగా n సంఖ్యల వరుస $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ అని చెప్పితిమి. ఈ సంఖ్యలలో ఎన్ని అయినను శూన్యముగా ఉండవచ్చును. అయితే n పరిమాణిక విక్షేపక ఆకాశములో $(n+1)$ సంఖ్యల పరస్పర నిష్పత్తులే ఒక బిందువును నిర్ణయించును. $(x_1 : x_2 : \ldots \ldots x_n : x_{n+1})$. ఇచ్చట $(0, 0, 0 \ldots\ldots\ldots)$ త్యాజ్యము. $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, x_{n+1})$ బిందువును $(kx_1, kx_2, \ldots\ldots kx_n, kx_{n+1})$ $(k \neq 0)$ బిందువును ఒకటే. ఒక మొదటి తరగతి సమీకరణము :

$$l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots \ldots l_nx_n + l_{n+1}x_{n+1} = 0$$

ఒక $(n-1)$ పరిమాణిక విక్షేపక ఆకాశమును సూచించును. ఇచ్చటను $l_1, l_2, \ldots l_{n+1}$ అన్నియు ఏక కాలమున శూన్యముగ ఉండకూడదు. $\Sigma l_r x_r = 0$ రేఖయు, $\Sigma kl_r x_r = 0$ రేఖయు ఒకటే. అందువలన ఇటువంటి $(n+1)$ సంఖ్యల నిష్పత్తులను ఒక బిందువును నిరూపకముగనో లేదా ఒక $(n-1)$ పరిమాణిక ఆకాశము యొక్క నిరూపకముగనో తీసికొనవచ్చును. n - పరిమాణిక ఆకాశములోని బిందువులకును $(n-1)$ పరిమాణిక ఆకాశములకును ద్వైత సంబంధము ఉన్నది. అట్లే రేఖలకును, $(n-2)$ పరిమాణిక ఆకాశములకును, అటులనే r - పరిమాణిక ఆకాశములకును, $(n-r-1)$ పరిమాణిక ఆకాశములకును జంటతనము కాననగును.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో బిందువులకును, తలములకును జంట ; ఋజురేఖలకు ఋజురేఖలకు జంట. ఒక ఋజురేఖ రెండు బిందువులను చేర్చు రేఖగను, రెండు తలముల ఛేదనముగాను నిర్ణయింపవచ్చును.

పైన చెప్పిన ఆకాశములన్నియు చిపిట ఆకాశములు (ఫ్లాట్ స్పేసెస్) ; అనగా వాటిలో రెండు బిందువులు A, B ఉన్నట్లయితే వాటిని చేర్చు ఋజురేఖ AB పూర్ణముగా అదే ఆకాశములోనే ఉండును.

యూక్లిడ్ జ్యామితి మార్పులు

విక్షేపకతలము యొక్క మార్పులను, వాటి సమీకరణములను మనము గమనించితిమి. విక్షేపక జ్యామితి ఈ మార్పుల వలన మారని గుణములను పరిశీలించును అని చెప్పితిమి. ఫెలిక్స్ క్లైన్ అను 19 వ శతాబ్దపు గణిత శాస్త్రవేత్త ఈ భావమును వికాసపరచి ఒక్కొక్క మార్పుల కూర్పుతోను ఒక్కొక్క జ్యామితిని సంయోజనము చేయవచ్చునని ప్రతిపాదించెను. ఆ మార్పుల కూర్పులోని పరికర్మముల వలన మారని గుణముల పరిశీలనయే ఆ కూర్పు యొక్క జ్యామితి అని వివరించి ఉన్నాడు. అటులైనచో యూక్లిడ్ జ్యామితి ఏ కూర్పు యొక్క నిర్వ్యక్త వివరణమని ప్రశ్న ఉదయించవచ్చును.

ఒక తలములోని అన్ని బిందువులను ఏదో ఒక దిక్కులో ఒకే దూరము జరిపిన, ఒక చిత్రము యొక్క స్థలము మారును కాని దానియందున్న పొడవులు, కోణపు కొలతలు, వైశాల్యములు మారవు. అటులనే తలములోని అన్ని బిందువులు ఏదో ఒక బిందువును కేంద్రముగ పెట్టుకొని దాని చుట్టు ఒక భ్రమణకోణము 'θ' ద్వారా తిరిగినట్లయిన, అప్పుడును చిత్రము యొక్క స్థలములు మారును ; కాని దానిలోని పరిమాణములు మారవు. ఈ రెండు పరికర్మల వలన (x, y) బిందువు, (x', y') బిందువుగా మారినట్లయితే ఈ నిరూపకముల సంబంధము

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b$ గా ఉండును.

ఇచ్చట పరిభ్రమణ కేంద్రము $(0, 0)$ గా తీసికొని ఉన్నాము. X దిక్కులో జరుగు దూరము a అనియు Y దిక్కులో జరుగు దూరము b అనియు తీసికొని ఉన్నాము. ఇట్టి అన్ని విధములైన జారుటలు, అన్ని విధములైన పరిభ్రమణములు చేరినదియే యూక్లిడ్ జ్యామితి మార్పుల కూర్పు అగుచున్నది.

ఇది విక్షేపక మార్పుల కూర్పులో ఒక అంశము; జారుట వలనకాని పరిభ్రమణమువలన కాని అతిదూరములోఉన్న బిందువులు అతిదూరములోనే ఉండును. అటులనే ఒక వృత్తముకూడ వృత్తముగనే ఉండును. అందువలన వృత్తములును, అనంతమందున్న ఋజురేఖయు ఛేదించు బిందువులగు, I, J ఈ మార్పులవలన మారవు. అతిదూర రేఖలోని మిగత బిందువులు తమలోనే తాము మార వచ్చును. అందువలన I, J మాత్రము మారని విక్షేపక మార్పుల ఉపకూర్పుతో సంబంధించిన జ్యామితియే యూక్లిడ్ జ్యామితి. అది విక్షేపకజ్యామితిలో ఒక ఉప జ్యామితి అగును. రేఖలలో ప్రతి బింబము తీసికొనుట అను పరికర్మలను అంగీకరించిన ఎడల I మారి J కావచ్చును; J మారి I కావచ్చును.

యూక్లిడ్ జ్యామితిలో ఒక వృత్తమును ఒక దీర్ఘ వృత్తమును వేరు జాతి రేఖలుగా ఎన్నెదము. ఏలన, అవి ఒకటి ఇంకొకటిగా జారుటవల్లనో, భ్రమణమువలననో మారవు. కాని, విక్షేపకగణితములో అవి రెండు ఒకటే; ఇంకను చూడబోయిన ఋజురేఖయుగళము తప్ప అన్ని రెండవ తరగతి రేఖలును ఒకటే. ఏలన, విక్షేపమువలన అన్నిటిని ఒక వృత్తమునకు మార్చవచ్చును. రెండవ తరగతి రేఖలలో మూడే జాతులు (1) వృత్తమునకు సమానమైనవి; (2) రెండు ఋజురేఖలకు సమానమైనవి $(xy = 0)$; (3) ఒకే రేఖ రెండుసార్లు తీసికొనుటకు సమానమైనవి $(x^2 = 0)$.

క్రెమోనా మార్పులు

విక్షేపక మార్పులనే ఒక విశిష్టపతముగా గల ఇంకను విశాల మార్పులు ఉన్నవా? అని అడుగ వచ్చును? అవును, ఉన్నవి. విక్షేపకమార్పులలో ఒక ఋజురేఖ ఋజురేఖగానే మారును. ఇప్పుడు వివరించు మార్పులో ఒక ఋజురేఖ శాంకవము అనగా రెండవ తరగతి రేఖగా మారవచ్చును. అటువంటి మార్పులకు ఒక చిన్న దృష్టాంతము ఇచ్చెదము. విక్షేపకతలములో $P(X : Y : Z)$ బిందువును $P'(X' : Y' : Z')$, $(X' = YZ,\ Y' = ZX,\ Z' = XY)$ గా మార్చు పరికర్మమును తీసికొనెదము. ఇచ్చట P ఇచ్చిన P' సాధారణముగా నిస్సందేహముగా దొరకును. $P' : (X' : Y' : Z')$ ఇచ్చిన, వీటినుండి $(Y'Z' : Z'X' : X'Y') = (X^2YZ : XY^2Z : XYZ^2) = X : Y : Z$ అని తేలును. ఈ నిరూపకములలో $(kX : kY : kZ)$ ను $(X : Y : Z)$ ను ఒకే బిందువు. అందువలన $P(X : Y : Z) = (Y'Z' : Z'X' : X'Y')$ అనునది సాధారణముగా అద్వితీయముగనే నిశ్చయింపబడుచున్నది. అయిన ఒక చిక్కు తటస్థించును. X', Y', Z' లో రెండు శూన్యమైతే (అనగా; $X' = 0$, $Y' = 0$)$X : Y : Z = (0, 0, 0)$ ఇవి బిందువునకు నిరూపకములే కావు. అటులనే $(X, Y, Z) = (1. 0, 0)$ అయితే (X', Y', Z') నిరూపకములు $(0, 0, 0)$ అగుచున్నవి. అందువలన ప్రతి తలములోను $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ఈ మూడు బిందువులు తప్ప మిగిలిన బిందువులకు ఇతర తల బిందువులకు ఒకటి కొకటి అనురూపత ఉన్నది. ఇప్పుడు $P = (1, 0, 0)$ క్రమక్రమముగా అవధిగా గల ఒక బిందువు $P(1, p\varepsilon, q\varepsilon)$ను తీసికొనెదము. p, q సాధారణ సంఖ్యలు : ε అనునది శూన్యమును అవధిగాగల ఒక సూక్ష్మ (అనగా $\varepsilon \longrightarrow 0$) రాశి. పూర్వమిచ్చిన విధానము ప్రకారము $P' = (pq\varepsilon^2, q\varepsilon, p\varepsilon) = (pq\varepsilon, q, p)$. అనగా $\varepsilon \longrightarrow 0$ అగునపుడు ఇది $(0, q, p)$ అగుచున్నది. అందువలన P బిందువు $(1, 0, 0)$ ను అవధిగా వేర్వేరు దిక్కులందు సమీపించునపుడు, P' బిందువు $B'C'$ రేఖలో ఒక బిందువు $(0, q, p)$ ను చేరును. అది ఏ బిందువును చేరును అనునది P ఏదిక్కునుండి $(1, 0, 0)$ ను సమీపించుచున్నది అన్న భూతార్థముపై అనగా p/q నిష్పత్తిపై ఆధార పడిఉన్నది. కనుక P తలములో $A = (1, 0, 0)$ బిందువునకు అనురూపముగా P' తలములోఒక బిందు సమూహము అనగా ఒక రేఖ $X' = 0$ దొరకుచున్నది. అటులనే $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ బిందువులకు మరియొక తలములో అనురూప ప్రత్యేక బిందువులులేవు. అయినను రేఖలు $C'A'$ $(Y' = 0)$, $A'B'$ $(Z' = 0)$ అగును.

P తలములో ఒక n వ తరగతి రేఖను $f(X, Y, Z) = 0$ తీసికొనినచో, దానికి P' తలములో అనురూపముగ దొరకునది $f(Y'Z', Z'X', X'Y') = 0$ అను $2n$ వ తరగతిరేఖ. అటులనే $g(X', Y', Z') = 0$ అను P' తలము లోని m - తరగతి రేఖకు $g(YZ, ZX, XY) = 0$ అను తరగతికి రెట్టింపైన $2m$-వ తరగతి రేఖ దొరకును. అయినను $f(X, Y, Z) = 0$ రేఖ, విశేష స్థలములైన

(1, 0, 0) లేదా (0, 1, 0) లేదా (0, 0, 1) ద్వారా వెళ్ళిన ఎడల, దానికి అనుగుణమైన మరియొక తలములోని రేఖ ఆ యా బిందువులకు అనుగుణమైన $X'=0$ లేదా $Y'=0$ లేదా $Z'=0$ ను విసర్జించి, తన తరగతిని తగ్గించుకొనును. ఉదా: ఒక శాంకవము $X^2+3YZ=0$ దానికి అనురూపమైన రేఖ $(Y'Z')^2+3(X'^2Y'Z')=0$ దానిలో $Y'=0$, $Z'=0$, అను రెండు ఋజురేఖలున్నవి. ఇవి పోగా $Y'Z'+3X'^2=0$ అను శాంకవముగా మారును. P తలములోని మూడు విశేష బిందువులద్వారా వెళ్లెడు శాంకవము $pYZ+qZX+rXY=0$ అగును. దీనికి అనుగుణముగా దొరకెడు నాలుగవ తరగతిరేఖ $X'=0$, $Y'=0$, $Z'=0$. అను మూడు రేఖలను విసర్జించి ఒక ఋజురేఖ $pX'+qY'+rZ'=0$ అగును.

మనము చర్చించిన దృష్టాంతము అతిసులభమైన దైనను, క్రెమోనా మార్పులను గురించిన అన్ని ముఖ్యాంశములు దానిలో ఉన్నవి. అవి ఏవనగా (1) రెండు తలములలో ఉన్న బిందువులు P, P' సాధారణముగా ఒకటికొకటి అనురూపత కలవి. అయితే కొన్ని విశేష బిందువులు A_1, A_2........ఒక తలములోను B'_1, B'_2........మరియొక తలములోను ఉన్నవి. ఈ బిందువులకు అనురూపముగా మరియొక తలములో ఒంటరి బిందువులు లేవు. బిందు సమూహములు, అనగా రేఖలు a'_r మాత్రమే ఉన్నవి. P తలములో ఒక రేఖ A_r బిందువు గుండ వెళ్లిన దానికి అనురూపరేఖ a'_r ఒక భాగముగను, మరియొక మిగిలిన తరగతి రేఖగను పగిలిపోవును.

(2) P (X, Y, Z), P' (X', Y', Z') అనునవి అనురూప బిందువులు అయితే వాటికి క్రింద నీయబడినటువంటి సంబంధము ఉండును.

$$X=\phi_1(X',Y',Z'),\ Y=\phi_2(X',Y',Z'),\ Z=\phi_3(X',Y',Z')$$
$$X'=\psi_1(X,Y,Z);\ Y'=\psi_2(X,Y,Z),\ Z'=\psi_3(X,Y,Z)$$

ఇచ్చట ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 అన్నియు ఆయా చలరాశులలో బహుపదములుగా ఉండును. ఆ బహుపదముల తరగతి m అయినచో, అది ఒక తలములోని n వ తరగతి వక్రరేఖను సాధారణముగ nm వ తరగతి వక్రరేఖగా మార్చును.

(3) పైన వ్రాసిన సమీకరణములు సాధ్యమగుటకు $\psi_1=0$, $\psi_2=0$, $\psi_3=0$ అను రేఖలు కొన్ని కొన్ని స్థిర బిందువుల ద్వారా వెళ్లును, మరికొన్నిటిద్వారా రెండుసార్లు వెళ్లును; మరికొన్నిటిద్వారా మూడుసార్లు వెళ్లును. ఇవియే విశేష స్థలములు. మరియొక తలములోను $\phi_1=0$, $\phi_2=0$, $\phi_3=0$ రేఖలు కొన్ని స్థిరబిందువులు ద్వారా ఒకసారో పెక్కుసార్లో వెళ్లును.

ఇటువంటి క్రెమోనా మార్పులను తలములోనే కాక, త్రిపరిమాణిక, బహుపరిమాణిక ఆకాశములలో కూడ పరిశీలించవచ్చును.

తలములోని క్రెమోనా మార్పులవలన ఒక రేఖ యొక్క తరగతి మారవచ్చునంటిమి. అయితే మారని గుణము ఒకటి ఉన్నది. ఇదియే 'జాతి' (జీనస్) అను సంఖ్య. ఇది ఆ తరగతికి సాధ్యమైన యుగళబిందువుల (డబుల్ పాయింట్) మొత్తపు సంఖ్యకును, ఆ రేఖయందున్న బిందు యుగళములకును ఉన్న వ్యత్యాసము. బిందు యుగళము అనగా ఒకే బిందువుద్వారా రేఖ రెండుమార్లు వెళ్లుచున్నదని చెప్పవచ్చును. నాలుగవ తరగతి రేఖకు 3 యుగళములు సాధ్యము. కనుక ఒక 4 వ తరగతి వక్రమునకు రెండు బిందు యుగళములు ఉన్నట్లయితే, దాని జాతి $3-2=1$. జాతిసంఖ్య శూన్యమైతే ఆ రేఖయొక్క సమీకరణము $X=f_1(t)$, $Y=f_2(t)$, $Z=f_3(t)$ అను రీతిగా వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట f_1, f_2, f_3 అనునవి t చలరాశిగా గల బహుపదములు.

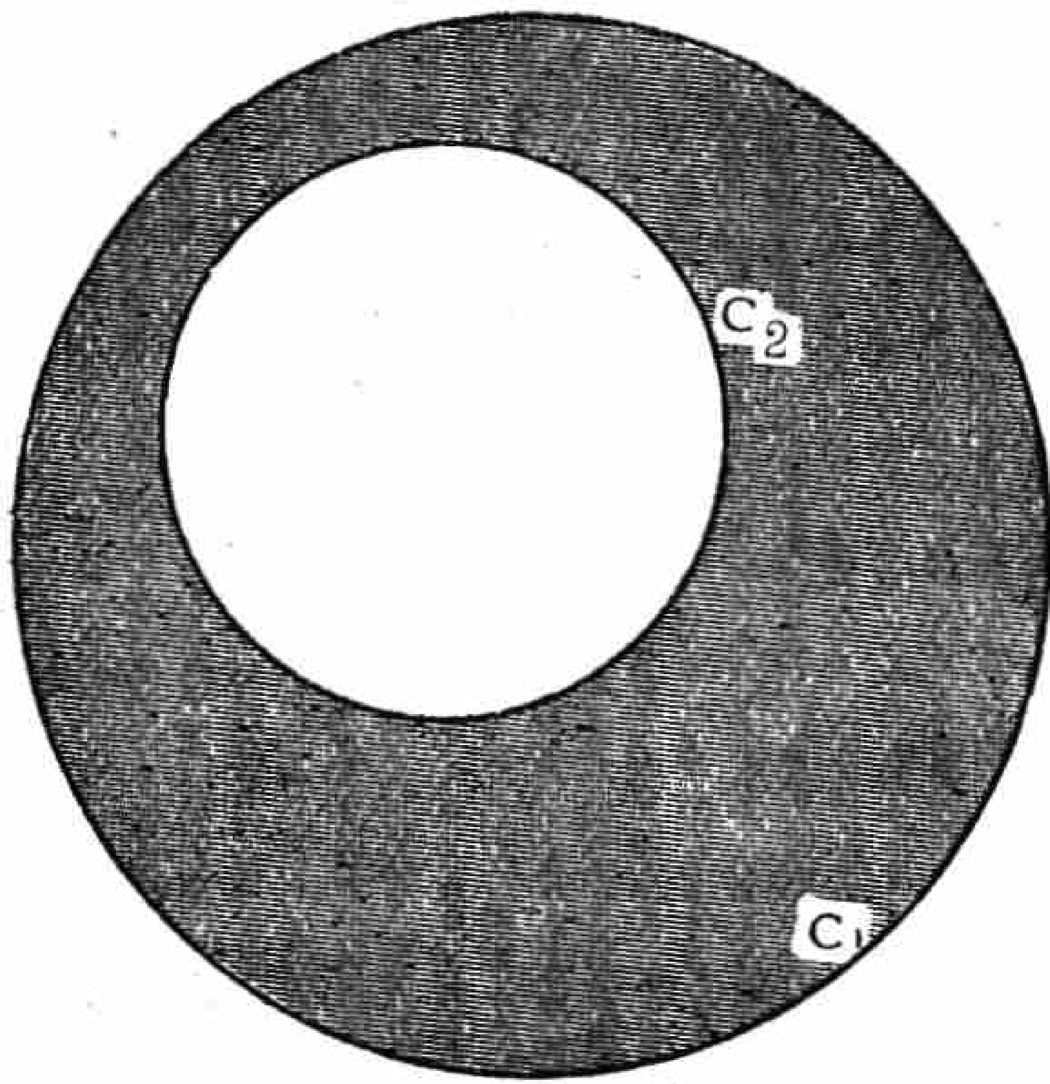
అవిచ్ఛిన్న మార్పుల జ్యామితి

ఇప్పుడు పైన వివరించిన మార్పుల కన్నిటి కంటెను విశాలీకృతమైన మార్పులను గమనించెదము. R ఒక ప్రదేశము. ఇటులనే R' దానికి అనురూపమైన ప్రదేశము. P, P' ఈ ప్రదేశములలోని బిందువులు. R ప్రదేశములో P ఇవ్వబడిన ఎడల, R' ప్రదేశములో దానికి అనురూప బిందువు P' ఒక్కటి ఉండవలెను. అటులనే R' లో ఉన్న ఒక్కొక్క P' బిందువునకును ఒకేఒక అనురూప బిందువు P, R లో ఉండవలెను. ఇదికాక R లో రెండు బిందువులు P_1, P_2 చాలా దగ్గరకు సమీపించి ఏకీభవించిన, అదే సమయమున P'_1, P'_2 సమీపించి ఏకీభవించవలెను. ఇట్లు ద్విపార్శ్వ ఏకరూపతను, ద్విపార్శ్వ అవిచ్ఛిన్నతను చూపు మార్పులే టొపాలజీ మార్పులు. ఇట్టి మార్పుల వలన మారని గుణములనే అవిచ్ఛిన్న మార్పుల జ్యామితి పరిశీలించును. దృష్టాంతమునకు, ఒక చిత్రమును ఒక రబ్బరు పత్రము మీద వ్రాసి, దానిని లాగి, వంచి, నులిపి, అదిమి దాని రూపమును మార్చినట్లయిన, ఇట్టి మార్పులు టొపాలజీ మార్పులుగనే ఉండును. పత్రమును చింపకూడదు (ఏలన ఏకీభవించిన బిందువులు వేరైపోవును). అంటించకూడదు (ఏలన వేర్వేరుగ ఉన్న బిందువులు ఏకీభవించును). ఇట్టి మార్పుల వలన ఒక త్రిభుజమును

చతుర్భుజముగనో, వృత్తముగనో, దీర్ఘవృత్తముగనో మార్చవచ్చును. అందువలన, ఈ జ్యామితిలో వీటికి వ్యత్యాసము లేదనియే చెప్పవలెను. ఋజురేఖకును, పరాసవంటి వక్రరేఖకును వ్యత్యాసములేదు. అయినను ఒక సంవృతరేఖ ఈ మార్పులవలన సంవృతరేఖగనే మారును. ఒక వివృతరేఖ వివృతరేఖగనే ఉండును. అందు వలన, ఒక వక్రరేఖ సంవృతమా ? వివృతమా ? అనునది అవిచ్ఛిన్న మార్పుల జ్యామితిలో ఉచితప్రశ్న అగును.

ఈ జ్యామితి 19 వ శతాబ్దములోనే పరిశీలింపబడినది. అయినను దీనిలోని కొన్ని తత్త్వములు 200 సంవత్సరములకు మునుపే డేకార్ట్ 1640 లోను, ఆయిలర్ 1752 లోను కనిపెట్టిరి. అందులో ఒకటి బహుతలకము యొక్క శిఖరముల సంఖ్య (V) కును అంచుల సంఖ్య (E) కును ముఖముల సంఖ్య (F) కును ఉన్న సంబంధము. ఇది : $V - E + F = 2$ అనునదియే. ఉదాహరణమునకు ఒక ఘనమునకు 8 శిఖరములు, 12 అంచులు, 6 తలములు ఉన్నవి. $8 - 12 + 6 = 2$ అని సరిచూచెదము. ఒక శిఖరమును కత్తిరించి పారవేయుదము. అప్పుడు $V = 10$, $E = 15$, $F = 7$, ఇప్పుడును $10 - 15 + 7 = 2$ అగుచున్నది. ఈ సిద్ధాంతము సత్యమగుటకు బహుతలకము యొక్క ముఖములు చదునుగ ఉండనక్కరలేదు ; వంగి ఉండవచ్చును ; అంచులు వక్రరేఖలుగా ఉండవచ్చును. కాని, బహుతలకము సంవృతమై ఉండవలెను. దాని శరీరములో ఒక ద్వారము ఉండకూడదు. అటులున్నచో పై సిద్ధాంతము కొంచెము మారును.

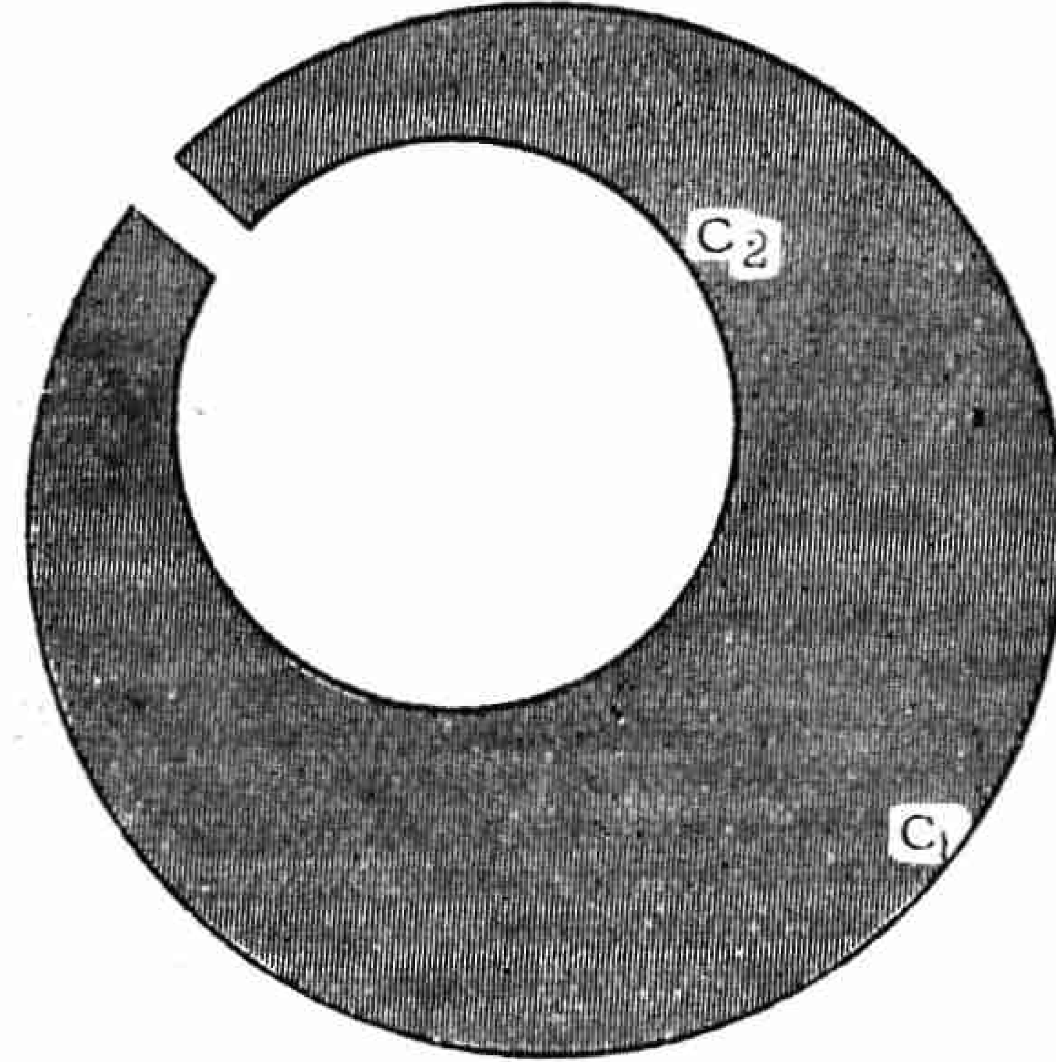
ఇప్పుడు సమ తలములోని వృత్తములోపలివంటి ప్రదేశము R ను గమనించెదము. దీనిలో తన్నుతానే ఛేదించని సంవృతరేఖను తీసి కొనుము. దానిని కొంచెము కొంచెముగా చిన్నదిచేసి ఒక బిందువుగా మార్చ వచ్చును. ఈ అవిచ్ఛిన్న మార్పులు R ప్రదేశమునుండి బహిఃప్రదేశములోనికి వెళ్ళకయే చేయవచ్చును. ఇటువంటి ప్రదేశములను సరళ సంబద్ధ ప్రదేశములు అనెదము.



చిత్రము 13 R_1 ప్రదేశము

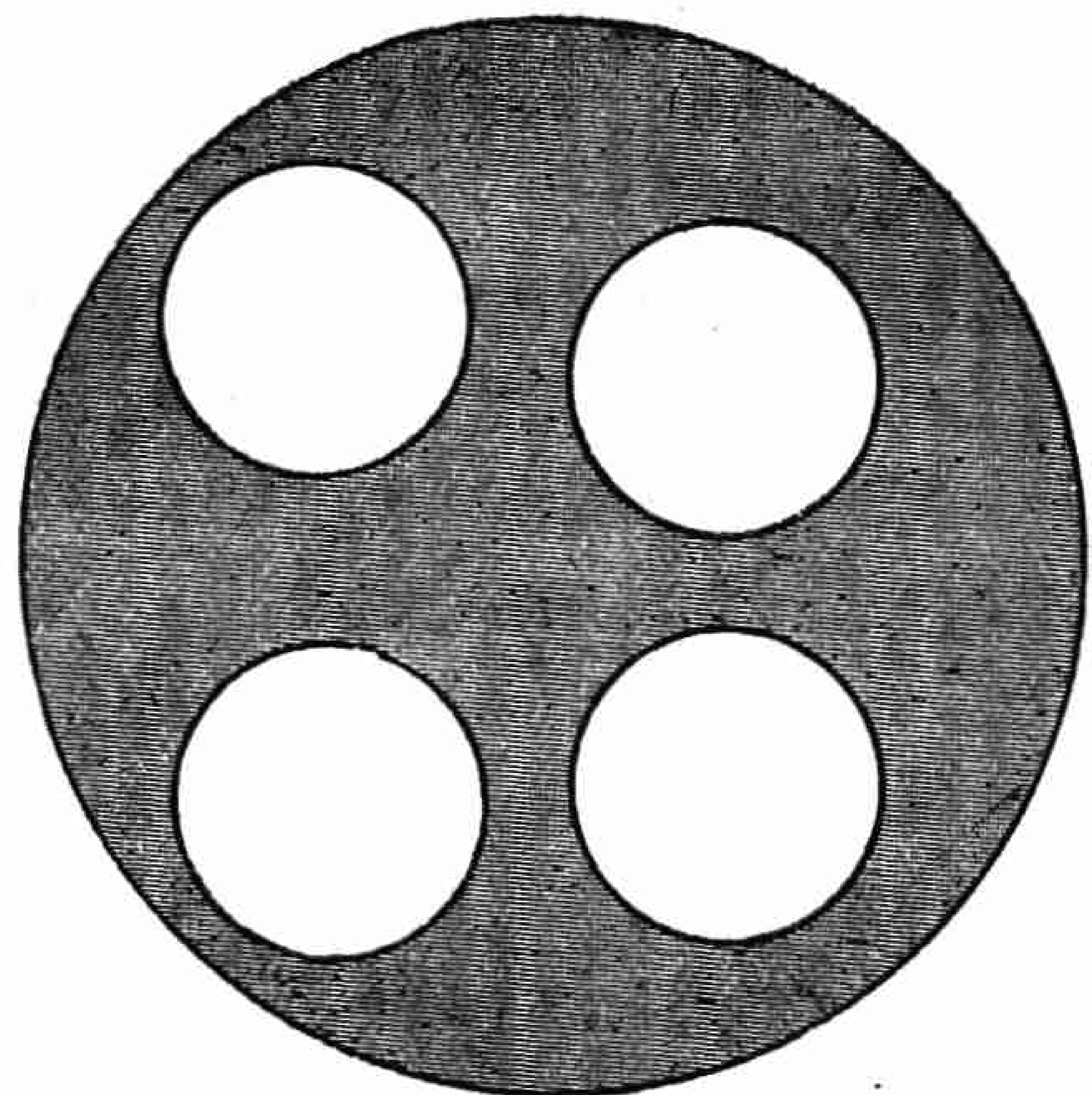
ఇప్పుడు మరియొక ప్రదేశము R_1 ను గమనించెదము. ఇది C_1 అను పెద్ద వృత్తములోపలను దానియందున్న C_2 అను చిన్న వృత్తమునకు బయటను ఉన్న ప్రదేశముగ తీసికొనెదము. మొదటిచిత్రమును చూడుము.

ఈ ఉంగరపు రూపముగల R_1 ప్రదేశము లోని కొన్ని సంవృతరేఖలను క్రమేణ చిన్నవిచేసి ఒక బిందువుగా మార్చవచ్చును. అయితే మరి కొన్ని సంవృత రేఖలను ఇట్లు R_1 లో ఉన్నట్లే, బిందువుగ మార్చ సాధ్యముకాదు. ఇవియే లోపల వృత్తమును పరివేష్టించునవి. అందువల్ల R_1 ప్రదేశమును బహువిధబంధిత ప్రదేశమనెదము. దీనిని సరళ బంధిత ప్రదేశముగా మార్చవలెననిన చో, లోపలి వృత్త పరిధినుండి బయటివృత్తపరిధి వరకు ఒక కత్తిరింపు చేయవలెను (రెండవ చిత్రమును చూడుము). కత్తిరింపు C_2 పరివేష్టనమును ఆపుచున్నది. ఒకే కత్తిరింపు చాలును కనుక ఇటువంటి ప్రదేశములకు బంధితము ఒకటి అనెదము.



చిత్రము 14 సరళబంధిత ప్రదేశము

ఒక తలములోని ప్రదేశమునకు ' బంధితము ' n అనగా దానిలో n కత్తిరింపులువేసి, ఒక సరళబంధిత ప్రదేశముగా మార్చవచ్చు నన్నమాట. n కంటె తక్కువ


చిత్రము 15

కత్తిరింపులలో ఇట్టిమార్పు అసాధ్యముగ ఉండవలయును. n బంధితప్రదేశమునకు దృష్టాంతము ఒక పెద్ద వృత్తము లోపలను దాని లోపల వేర్వేరుగ ఉన్న $n-1$ చిన్న వృత్తముల బయటను ఉన్నటువంటి ప్రదేశము. దీనికి కావలసిన కత్తిరింపులు లోపలి ఒక్కొక్క వృత్తమునుండి బయలుదేరి బయటి వృత్తమునందు అంతమగు రేఖలను సూచించు పథములు 15వ చిత్రములో $n = 5$ ను చూపించి యున్నాము (చూ. టొపాలజీ).

ఈ జ్యామితిలో ఒక మనోరంజకమైన ప్రశ్న: ఒక భూగోళపటములో ఎన్నో దేశములు ఒకటినొకటి ఆనుకొని ఉన్నవి. రెండు దేశములు ఒకే రేఖను ఎల్లగా కలిగి యున్న ఎడల ఆ దేశములను పటములో వేర్వేరు వర్ణములలో చిత్రించవలెను. అయిన రెండు దేశములు ప్రత్యేక బిందువులలో స్పర్శించినను, స్పర్శయే లేకయున్నను, రెండింటికిని ఒకే వర్ణము ఉపయోగింపవచ్చును. ఇట్టి నియమముల క్రింద ఏ పటమునైనను చిత్రించుటకు ఎన్ని వర్ణములు అవశ్యము? అనునదియే ఈ ప్రశ్న. అనుభవములో ఒక తలములోని ఎటువంటి పటమునకైనను 4 వర్ణములు చాలునని తెలియుచున్నది. అయిన, గణిత రీతిగా నిరూపించిన సిద్ధాంతము 5 వర్ణములకన్న ఎక్కువ అక్కరలేదనియు, మొత్తపుదేశములు 38 కంటె ఎక్కువైతే 4 వర్ణములు చాలును అనియు మాత్రమే. ఒక గోళముమీది పటమునకును ఇదే ఉత్తరము. అయిన ఒక లంగరు వలయము (టోరస్ లేదా యాంకర్ రింగ్) పైన ఉన్న పటమునకు గణితరీతిగను ప్రత్యక్షముగను, గణిత పరిశీలన వలనను 7 వర్ణములు కావలెనని రుజువైనది.

అంతరీకరణ జ్యామితి

అంతరీకరణ కలనపద్ధతిని జ్యామితి ప్రశ్నలకు ఉపయోగించినచో లభించుఫలములే అంతరీకరణ జ్యామితి (డిఫరెన్షియల్ జామెట్రీ). ఒక వక్రరేఖమీద ఉండు రెండు బిందువులు P_1, P_2 చాల దగ్గరకు వచ్చిన ఎడల వాటిని చేర్చు ఋజురేఖ యొక్క అవధికి స్పర్శరేఖ అనిపేరు. దీనియొక్క నిమ్నిత ఉ స్థలములోని $\frac{dy}{dx}$ విలువ అగును కనుక, $y=f(x)$ రేఖకు (x_0, y_0) యందు స్పర్శరేఖ $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ అగును. ఒక వక్రరేఖకును, దానియొక్క స్పర్శరేఖకును గల ఖండన బిందువులలో స్పర్శబిందువునందు రెండు ఏకీభవించిన బిందువులుగ ఎంచవలెను. ఆకాశములోని ఒక వక్రరేఖకు P_1 బిందువునందున్న స్పర్శరేఖను దాని దగ్గర నుండు మరియొక P_2 ను గల తలము తీసికొని, $P_2 \longrightarrow P_1$ అగునపుడు ఆ తలము యొక్క అవధికి 'పరిస్పర్శతలము, (ఆస్క్యులేటింగ్ ప్లేన్) అని పేరు. వక్రరేఖ యొక్క సమీకరణము $x=f_1(t)$ $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ అయితే, t బిందువు నందున్న పరిస్పర్శతలమునకు సమీకరణము.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & 1 \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) & 0 \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

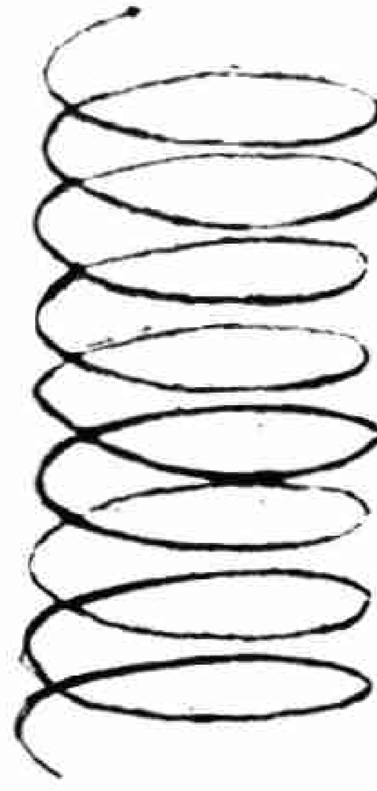
ఇచ్చట f' అనగా df/dt, f'' అనగా d^2f/dt^3.

ఒక బిందువు P ఒక వక్రరేఖమీద జరుగునపుడు అచ్చట ఉన్న స్పర్శరేఖ దిక్కు మారును. ఆ బిందువు, ∂s దూరము జరుగునపుడు స్పర్శరేఖ యొక్క భ్రమణకోణము $\partial \psi$ అయిన, $\partial \psi / \partial s$ యొక్క అవధి (K అనునది) ఆ బిందువు నందుండు ఆ రేఖల యొక్క వక్రతా పరిమాణమును సూచించును. ఒక బిందువు ఒక వక్రరేఖమీద జరుగునపుడు దాని స్పర్శరేఖ భ్రమణవేగము $d\psi/dt$ కును బిందు వేగము ds/dt కును ఉన్న నిష్పత్తి $d\psi/dt \div ds/dt = K$ అగును. $ds/d\psi = 1/K = \rho$ అనునది ఒక పొడవు. దీనికే 'వక్రతా వ్యాసార్ధము' అని పేరు. P_1, P_2, P మూడు దగ్గరగనుండు బిందువులు ఒక వక్రముపై తీసికొనెదము. వీనిలో P స్థిరబిందువు. P_1, P_2లు P ని సమీపించినచో P, P_1, P_2 ల ద్వారా వెళ్లు వృత్త అవధికి P యందున్న వక్రతా వృత్తమునకు (సర్కిల్ ఆవ్ కర్వేచర్) అని పేరు. దీనియొక్క వ్యాసార్ధమే ρ అగును. ఒక తలములోని రేఖ సమీకరణము $y = f(x)$ అయినచో, (x, y) బిందువునందు ఆ వక్రమునకున్న వక్రతా వ్యాసార్ధము

$$\rho = \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$$

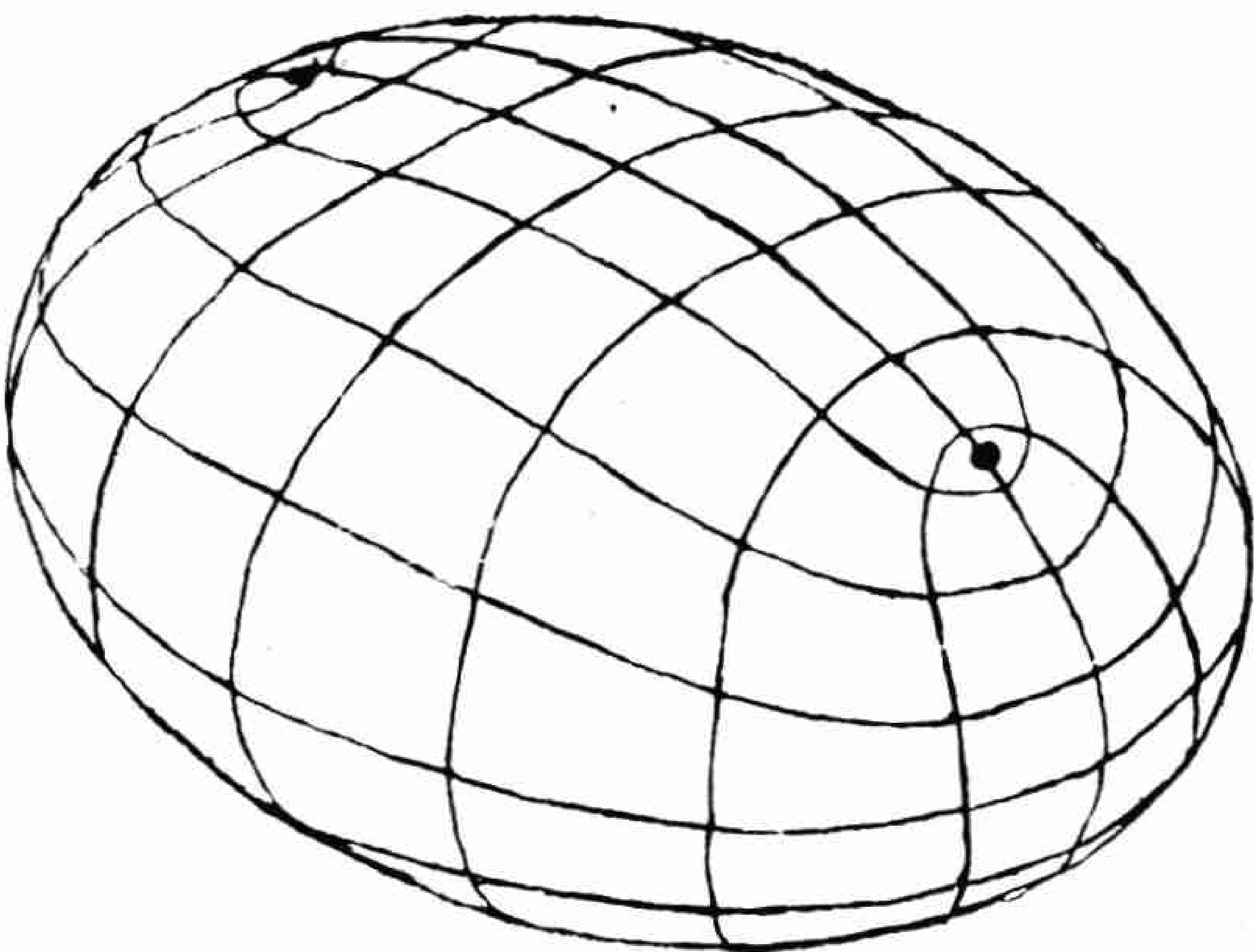
అను సూత్రము నుండి కనుగొనవచ్చును. ఆకాశములోని వక్రరేఖలకు మరియొక రెండవ వక్రత ఉన్నది. P బిందువు వక్రరేఖమీద జరుగగా, అచ్చటి పరిస్పర్శతలము స్పర్శరేఖ అక్షముగా కలిగి భ్రమణము చేయును. P బిందువు ∂s దూరము జరుగగా, ఈ భ్రమణకోణము $\partial \theta$ అయితే $\partial \theta / \partial s$ యొక్క అవధి $\frac{d\theta}{ds} = \tau$ కు 'విమోటనము' (టార్షన్) అని పేరు. ఒక రేఖకు వక్రత Kయు, విమోటనము τ యు ఒక్కొక్క స్థలమునందును తెలిసినచో ఆ రేఖను పూర్తిగా నిర్మించ

వచ్చును. K, τ లు రెండును అన్ని స్థలములందును స్థిరముగ ఉన్న రేఖకు 'హెలిక్స్' అని పేరు. దీని యొక్క సమీకరణము $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ఇది ఒక స్తూపము మీద నుండి, దాని ఉత్పాదకములను ఒకే కోణములో ఛేదించును.



చిత్రము 16 హెలిక్స్

వక్రతలములో ఒక బిందువు చుట్టు ప్రదేశమును ఈ జ్యామితి పరిశీలించును. P సాధారణ బిందువైతే P యందున్న స్పర్శరేఖలన్నియు ఒక తలమునందు ఉండును. ఇదియే P యందున్న స్పర్శతలము. దీనికి లంబరేఖయే P యందుండు అభిలంబరేఖ. P అందు అభిలంబరేఖ ద్వారా తలములను తీసికొనినచో అవి ఒక్కొక్కటి వక్ర తలమును ఒక వక్రరేఖలో ఛేదించును. ఇవియే P యందు అభిలంబ ఛేదనములు (నార్మల్ సెక్షన్). అటువంటి ఒక్కొక్క ఛేదనరేఖకు P యందు ఒక వక్రత ఉండును. వాటిలో ఒకటి అన్నిటికంటె ఎక్కువ వక్రత K_1 ను కలిగి ఉండును. మరియొకటి అన్నిటికంటె తక్కువ వక్రత K_2 ను కలిగి ఉండును. ఈ రెండు ఛేదన తలములును పరస్పరలంబములు అనునది ఒక ముఖ్య సిద్ధాంతము. ఈ రెండు ఛేదన రేఖలకు P యందున్న దిక్కులే వక్రతలమునకు P యందు 'ముఖ్యదిక్కులు' (ప్రిన్సిపల్ డైరక్షన్స్) అని పేరు. ఇవి పరస్పరము లంబములుగా ఉండు దిక్కులు. ఒక స్తూపమునకు $K_1 = 0$, $K_2 = 1/r$ (ఇచ్చట r స్తూపము యొక్క వ్యాసార్ధము). ఒక గోళము నకు $K_1 = K_2 = 1/r$ (r గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము). K_1, K_2 అను రెండు ప్రత్యేక వక్రతలకు బదులుగా $K_1 + K_2$ మొదటి వక్రత అనియు, $K_1 \times K_2$ అనునది రెండవ వక్రత అనియు చెప్పుట పరిపాటి. ఒక రేఖ వక్రతలముమీద నుండి ఒక్కొక్క స్థలములోను ఆ రేఖ దిక్కు వక్రతలము యొక్క ముఖ్యమైన దిక్కులలో ఒకటియై ఉండినచో ఆ రేఖకు 'వక్రతారేఖ' (లైన్ ఆవ్ కర్వేచర్) అని పేరు. ఇట్లు ఒక్కొక్క వక్రతలముపై రెండు రకముల 'వక్రతా రేఖా సమూహములు' ఉండును. ఏ బిందువునందైనను ఒక్కొక్క రకపు రేఖ ఒక్కటి ఉండును. అవి రెండును పరస్పర లంబములుగ ఉండును. వక్రతలము భ్రమణతలమైన (సర్ఫేస్ ఆవ్ రివల్యూషన్)చో దానియందున్న 'వక్రతారేఖల' లో ఒక రకము అక్షరేఖద్వారా వెళ్లు తలములలో ఉండును. ఇవియే యామ్యోత్తర ఛేదన రేఖలు. మరియొక రకము అక్షరేఖకు లంబముగా ఉండు తలములలో ఉండును. ఇవన్నియు వృత్తములు.



చిత్రము 17 ఎలిప్సాయిడ్ దాని తలముమీదఉన్న వక్రరేఖలు

వక్రతలమును సార్థకముగ పరిశీలించుటకు దానిమీద నిరూపకములను ప్రవేశపెట్టుట అవసరము. ఒక వక్ర తలమునందు ఒక బిందువును నిర్ణయించుటకు రెండు సంఖ్యలు u, v కావలెను. అనగా రెండు రకములైన రేఖలను u, v లను ప్రవేశపెట్టి ఒక్కొక్క u రేఖకు ఒక సంఖ్యను, అటులనే ఒక్కొక్క v రేఖకు ఒక సంఖ్యను ఈయవలెను. P బిందువును నిర్ణయించుటకు P ద్వారా వెళ్లు u, v రేఖల సంఖ్యలిచ్చిన చాలును. ఉదా : ఒక గోళముమీద ఉన్న బిందువును నిర్ణయించుటకు దాని రేఖాంశమును అక్షాంశమును, ప్రవేశపెట్టిన ఎడల రెండు దగ్గరగఉన్న బిందువులు (u, v), $(u + \partial u, v + \partial v)$ యొక్క దూరము, ds క్రింద నిచ్చిన రూపమును ధరించును.

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

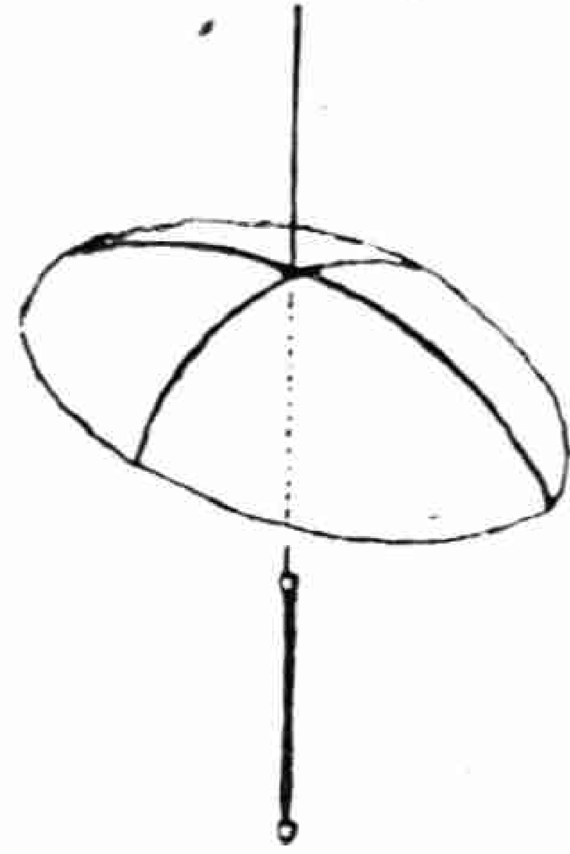
ఇచ్చట E, F, G రాశులు u, v లను చలరాశులుగా గల ఫలములు. ఉదాహరణమునకు $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ అను గోళము తీసికొనెదము. దీనిమీద రేఖాంశము v అక్షాంశము u లను నిరూపకములుగా తీసికొనినచో $x = r \cos u \cos v$, $y = r \cos u \sin v$, $z = r \sin u$ అని గోళములోని బిందునిరూపకములను వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $ds^2 = r^2 (du^2 + \cos^2 u\, dv^2)$ అగును. u రేఖలును v రేఖలును పరస్పర లంబములైనందువలన F శూన్యమై ఉన్నది.

పైనచెప్పినది ప్రథమవర్గ అంతరీకరణ రూపము అను పేరు కలిగియున్నది. వక్రతలమునకు మరియొక వర్గ అంతరీకరణ రూపము కలదు. దీనిని

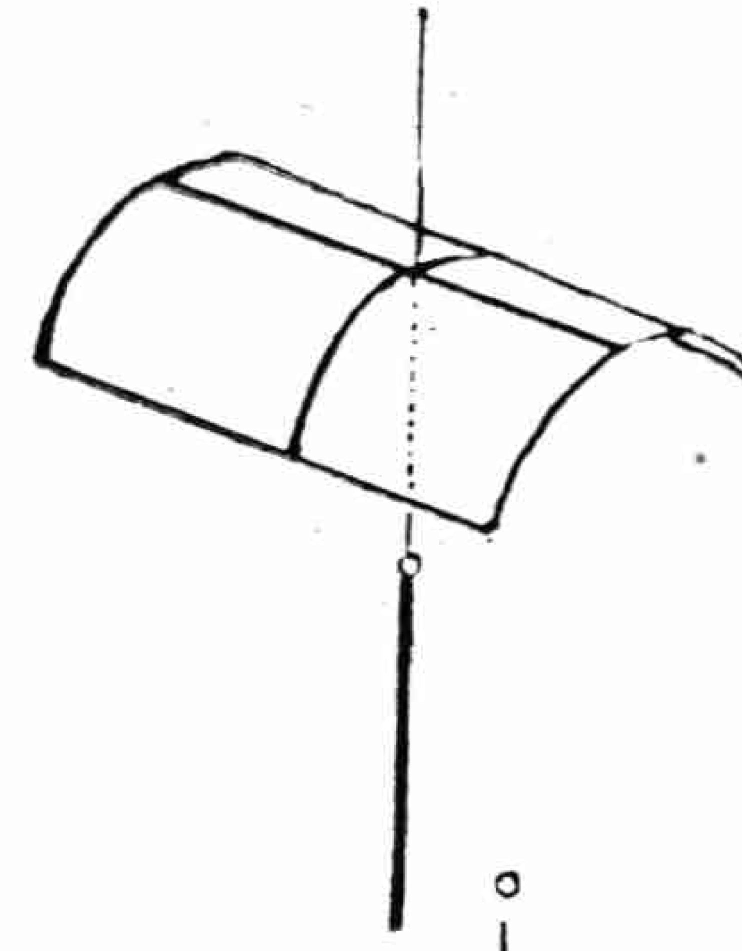
$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

అని వ్రాయుట వాడుక. ఇచ్చటను L, M, N అనునవి u, v చలరాశులుగా గల ఫలములు. ఇది $(u + \varrho u$

$v+\partial v$) బిందువునుండి (u, v)లో ఉన్న స్పర్శతలముల కున్న లంబదూరము. ఇది శూన్యమగు రెండు దిక్కుల dv/du లో, వక్రతలము స్పర్శతలమును దాటి ఒక వైపుననుండి మరియొక వైపునకు వెడలును. ఈ దిక్కులను చూపు dv/du వాస్తవ సంఖ్యలైనచో వక్రతలమునకును, స్పర్శతలమునకును వాస్తవ ఛేదన రేఖ ఉండును. ఆ రేఖకు స్పర్శబిందువు P ఒక యుగళబిందువు (నోడల్ పోయింట్) అగును. K_1, K_2 వ్యతిరేక సంజ్ఞలను కలిగి యుండును. అందువలన $K_1 \times K_2$ ఋణ సంఖ్యగా ఉండును. వక్రతలము ఈ స్థలమునందు గుర్రపుజీనువలె ఉండును.

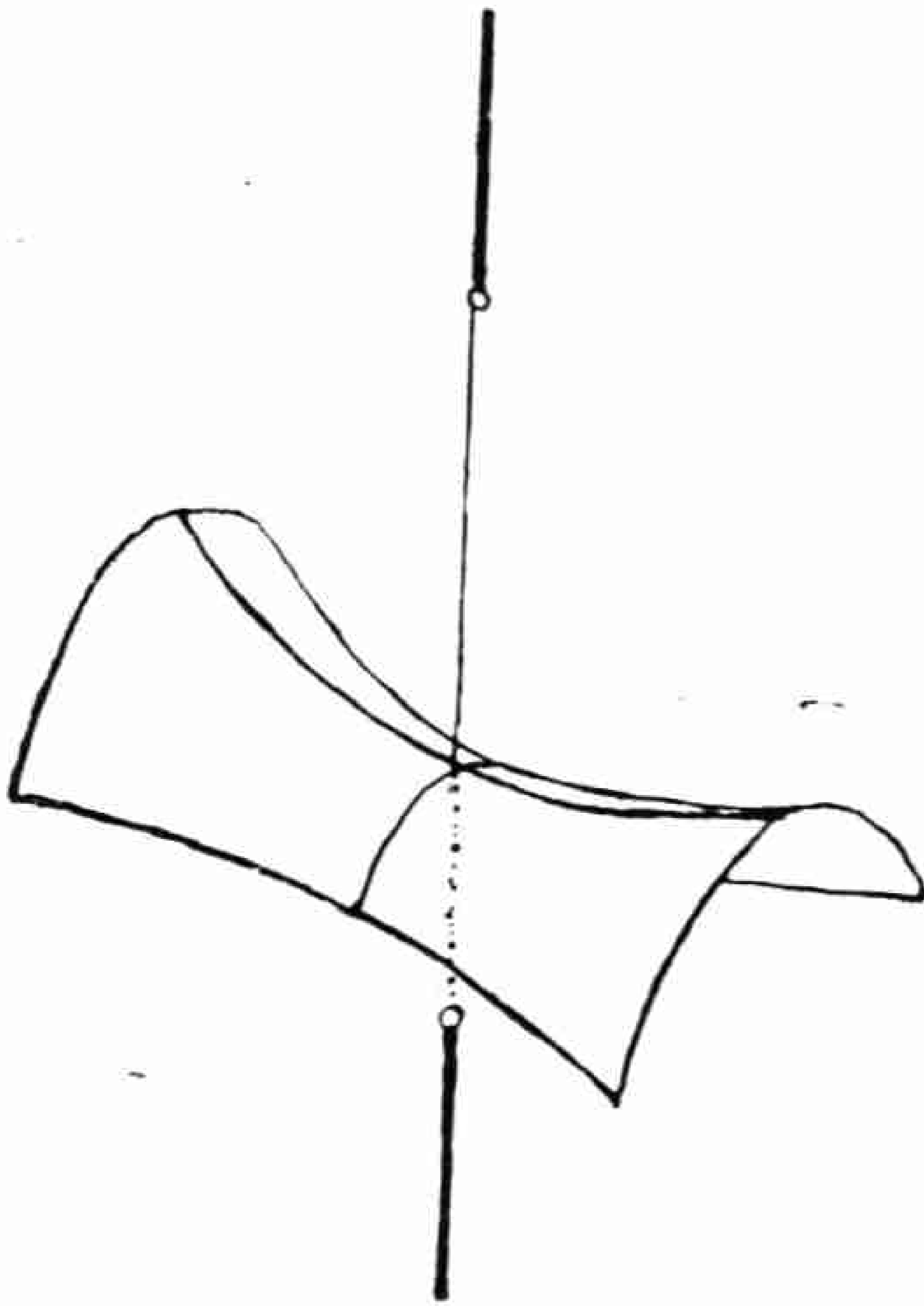


చిత్రము 18
వక్రత $K_1>0$, $K_2>0$
గల వక్రతలము



చిత్రము 20
వక్రత $K_1>0_2$, $K_2=0$
గల వక్రతలము

ఈ శాస్త్రమునకు మూలపురుషుడగు కార్ల్ ఫ్రీడ్రిక్ గాస్ (1777-1855) అను ఆయన వక్రతలము యొక్క అంతరీకరణ గుణములలో కొన్నిటిని లోపలి గుణములనియు, మరికొన్నిటిని బయటి గుణములనియు వర్ణించి యున్నాడు. బహిర్గుణము లనగా ఈ వక్రతలము ఆకాశములోని ఒక అంశము అనుభావముపై ఆధారపడిన గుణములు. ఇట్టి సూత్రములలో E, F, G, L, M, N అన్నియు రావచ్చును. లోపలి గుణములు లేక స్వాభావిక గుణములు అనగా ఈ భావమును ఉపయోగింపక, ఆ వక్రతలమే ఒక సంపూర్ణ లోకమని ఎంచి దానియందు దొరకిన కొలతలపై ఆధారపడు సిద్ధాంతములు. ఒక బిందువు నందున్న ముఖ్యదిక్కులు అనునవి బయటి గుణము. అటులనే K_1+K_2 బహిర్గుణములు. అయిన K_1K_2 అనునది వక్రతలముయొక్క స్వాభావిక గుణము. అనగా E, F, G ఇచ్చిన K_1K_2 ను కనిపెట్టవచ్చును. ఇది అత్యాశ్చర్యకరమైన సిద్ధాంతము. ఒక వక్రతలములో ఉన్న జీవులు తమ తలమునకు బయటికి వెళ్లకయే, తమ తలములోని కొలతలద్వారా తమ తలము యొక్క వక్రతను అనగా K_1K_2 ను కనిపెట్టవచ్చు నన్నమాట. అయితే వారు అటువంటి కొలతలవల్ల K_1 కాని K_2 కాని K_1+K_2 కాని కనిపెట్టజాలరు. వారు ఒక బిందువు P ను కేంద్రముగా పెట్టుకొని పెక్కు వృత్తములు గీచి, వాటి పరిధులను అతి సూక్ష్మముగా కొలిచి, పరిధి C కిని వ్యాసము $2r$ కును ఉన్న నిష్పత్తిని గణింతురు. ఇది ఒక స్థిరసంఖ్య π గా ఉన్నచో, వారితలము, గాస్ వక్రత లేనిదని తెలిసికొందురు. అయిన, వ్యాసము పెరుగగా $\pi=C/2r$ పెరుగుచున్నట్లయిన, వారున్న తలము వక్రతలమనియు దాని గాస్ వక్రత K_1K_2 ఋణసంఖ్య అనియు కనిపెట్టుదురు. వ్యాసము పెరుగగా $\pi=C/2r$ తగ్గుచున్నట్లయిన, వారితలము వక్రతలమనియు దాని గాస్ వక్రత K_1K_2 ధనరాశి అనియు గుర్తించుదురు. ఇట్టి కొలతలవలన వారు K_1K_2 విలువను కనిపెట్టవచ్చును. ఇటులనే మనము వసించు త్రిపరిమాణిక ఆకాశము వక్రమా ? చదునుగా ఉన్నదా ? అని కనిపెట్టుటకు సూత్రాత్మకముగా మార్గము ఉన్నది. అది ఏమనగా ఒకే కేంద్రబిందువు గల పెక్కు గోళములను తీసికొని వాటి ఉపరితల వైశాల్యమునకును వ్యాసము యొక్క వర్గమునకును ఉన్న నిష్పత్తిని గమనించి కనిపెట్టుటయే.



చిత్రము 19
వక్రత $K_1>0$, $K_2<0$ గల వక్రతలము

ఒక వక్రతలమునకున్న స్వాభావిక లేదా లోపలి భావములలో మరియొక్కటి 'హ్రస్వతమరేఖా' (జియొడెసిక్) భావము. మితదూరములో ఉండు రెండు బిందువులు P_1, P_2 లను చేర్చునట్టియు వక్రతలముమీదనే ఉండునట్టియు వక్రరేఖలు ఎన్నో ఉన్నవి. వాటిలో చాల తక్కువ పొడవు గలదే 'హ్రస్వతమరేఖ'. గణితదృష్టిలో దీనిని, 'రూపమును కొంచెము మార్చుటవలన పొడవు మారనిరేఖ' అని చెప్పవచ్చును. ఇవి వక్రతలమునందు ఋజురేఖలకు పోలికగల రేఖలు. ఇట్టి రేఖలనే ఋజురేఖలుగా తీసికొని ఒక జ్యామితిని, త్రికోణమితిని సృజించవచ్చును. గోళముమీద హ్రస్వతమరేఖలు గోళముయొక్క మహావృత్తములు. గోళముమీద ఉన్న జ్యామితియే యూక్లిడ్ జ్యామితికి విరుద్ధమైన జ్యామితులలో ఒకటి.

వినియుక్త గణితము

గణితమును శుద్ధగణితము (ప్యూర్ మేథమెటిక్స్), వినియుక్త గణితము (అప్లైడ్ మేథమెటిక్స్) అని విభజించుట పరిపాటి. అయితే ఇది తృప్తికరమైన విభాగము కాదు. ఎన్నో సమయములలో శుద్ధగణితమునకు ఒక క్రొత్త ఉపయోగము ఏర్పడి ఉన్నది. ప్రయోగము నుండియు శుద్ధగణిత ప్రశ్నలు ఉద్భవించి దాని అభ్యుదయమునకు కారణములై ఉన్నవి. దీనికి ఒక దృష్టాంతము ఫోరియర్ పరంపరలు (ఫోరియర్ సీరీస్).

సాధారణ జీవితములో పెక్కు సమయములందు ప్రాథమిక గణితమును ఉపయోగించుచున్నాము. ఈ సమీక్షయందు ఉన్నత గణితముయొక్క ప్రయోగములను మాత్రము వివరించెదము.

యాంత్రిక శాస్త్రము

పెక్కు వినియోగములకు ఆధారమైనది యాంత్రిక శాస్త్రము. దీనియందు ఒక అంశము స్థితి శాస్త్రము (స్టేటిక్స్). ఇది అచలవస్తువులను పరిశీలించును. రెండవది గతిశాస్త్రము (డైనమిక్స్); ఇది చలనములోఉన్న వస్తువులను పరిశీలించును.

జ్యామితి లోని పొడవు, వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము అను రూపభావములే కాక మరికొన్ని భావములను ఉపయోగించియే యాంత్రికశాస్త్రమును వివరించుట సాధ్యము. దీనిలో మొదటిది 'కాలము'. దీనిని కొలుచు యంత్రమే గడియారము. వేర్వేరు స్థలములలో ఉన్న గడియారములను సరిపోల్చి, వాటిని సమకాలీనము చేయుట సాధ్యమనునదియే ఈ శాస్త్రములోని ఒక స్వీకృత ఆధారతత్త్వము. దీనిని ఎటుల సాధించవచ్చును, అను విచారణలోనే సాపేక్షతావాదము ఉద్భవించెను. అయితే ఇచ్చట మనము చర్చించునది సాపేక్షయాంత్రిక శాస్త్రము (రెలెటివిస్టిక్ మెకానిక్స్) కాదు. కనుక ఒక్కొక్క స్థలములోను అనగా స్థిరస్థలములలోను, చలన స్థలములలోను గడియారములు ఉన్నవనియు, ఇవన్నియు ఒకే ప్రకేవలకాలము (అబ్సల్యూట్ టైమ్) ను చూపునవనియు అనుకొనెదము. ఒక స్థలమునుండి మరియొక స్థలమునకు అనంత వేగముతో ఒక వర్తమానము పంప సాధ్యమైతే, తద్వారా ప్రకేవలకాలమును అన్ని గడియారములలోను స్థాపించవచ్చును.

ఒక సంఘటనను, అనగా ఒక స్థలములో ఒక సమయములో జరిగిన సంభవమును సూచించుటకు, స్థల నిర్ణయ నిరూపకములు మూడు (x, y, z) ను కాలనిరూపక మొక్కటి (t) కావలెను. కనుక సంఘటనలన్నియు ఒక చతుఃపరిమాణిక ఆకాశములోని బిందువులని తలంపవచ్చును. ఒక బిందువు జరుగుతూ ఉన్నట్లయిన దాని పటము ఈ (x, y, z, t) నిరూపకములుగల చతుఃపరిమాణిక ఆకాశములోని రేఖ అగుచున్నది.

నిడివికొలతలు, కాలపు కొలతలుకాక యాంత్రిక శాస్త్రమునందు మనమువాడు భావములు ఒక వస్తువుయొక్క ద్రవ్యరాశి; వేగము, గతిభారము, త్వరణము, బలము వీటి సంకలనమునకు కావలసిన సమానాంతర చతుర్భుజనియమము, శక్తి, పని మొదలగునవి.

స్థితి శాస్త్రము

ఒక వస్తువుమీద బలప్రయోగమున్నను ఎటువంటి పరిస్థితులలో అది స్థిరముగా ఉండును అని పరిశీలించు శాస్త్రము స్థితి శాస్త్రము (స్టేటిక్స్). దీని మూలకర్త గ్రీక్ దేశపు ఆర్కిమీడీజ్ అని చెప్పవచ్చును. ఏలన ఆయన గురుత్వకేంద్ర తత్త్వమును ఉచ్చాలక (లీవర్) యంత్రానుశీలన సందర్భమున ప్రతిపాదించెను. అయితే ఈ శాస్త్రము సరియైన వికాసము పొందినది 17 వ శతాబ్దములోనే.

బలములను సదిశ రేఖలవలన నిరూపించ వచ్చును. అట్లు నిరూపించిన తరువాత సమానాంతర చతుర్భుజ నియమము ద్వారా రెండు రెండుగా ఆ బలములను చేర్చిన వాటిమొత్తము శూన్యమైనట్లైతే ఆ వస్తువు కదలక ఉండునని చెప్పవచ్చును. ఉదా: ఒక త్రాడు కొనలను ఇద్దరు మనుష్యులు పట్టుకొని ఎదురెదురుగ లాగిన ఎడల వారిద్దరు ప్రయోగించు బలములు సమానమైనచో ఆ త్రాడు జరుగదు. ఇచ్చట ఈ రెండు బలములు ఎదురెదురుగా ప్రయోగింపబడుచున్నవి. కనుక వాటి సంయోజనము వలన కలుగు బలము శూన్యము.

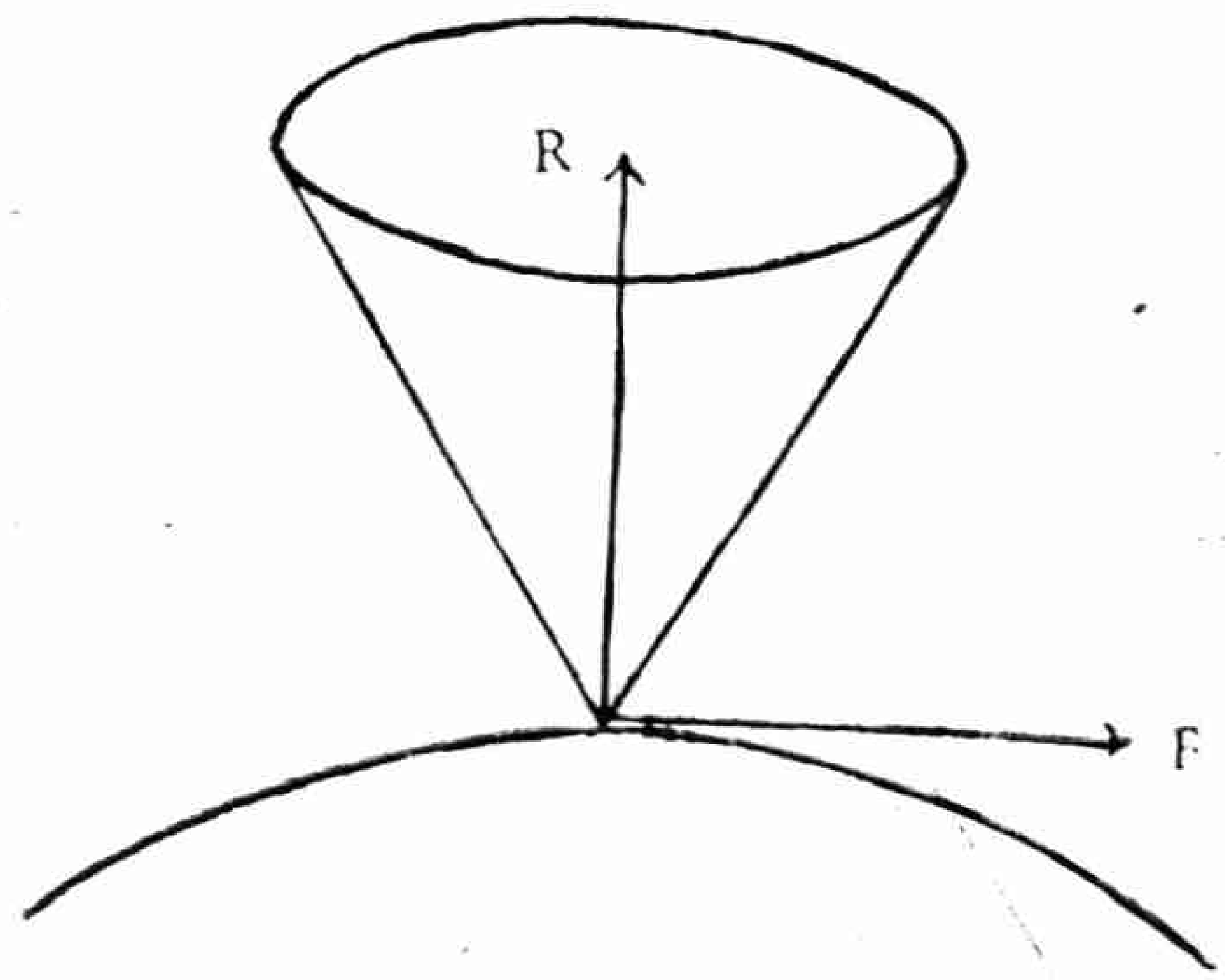
ఒక వస్తువుమీద 3 బలములు ప్రయోగింపబడి ఆ వస్తువు కదలక స్థిరముగా ఉన్నచో, అప్పుడు (i) ఆ మూడు బలములును ఒకే తలములో ఉండవలెను; (ii) మూడు బలప్రయోగ రేఖలు ఒకే బిందువునందు ఏకీభవించి ఉండవలెను; (iii) ఆ మూడు బలముల దిక్కులును, పరిమాణములును ఒక త్రిభుజము ABC యొక్క భుజములగు ***AB***, ***BC***, ***CA*** చేత చిత్రింపబడవలెను. స్థితి శాస్త్రములో ఇది ఒక ముఖ్యమైన సూత్రము.

ఒక వస్తువు స్థిరముగనుండిన, దానిమీద ప్రయుక్తమగు బలముల మొత్తము శూన్యముగ ఉండవలెను. ఇట్లు వస్తువుమీద ప్రయోగింపబడు బలముల జాబితా తీసికొనునపుడు ఆ వస్తువుబరువు, దానిని తాకుచున్న ఇతర వస్తువులు, దానిమీద ప్రయోగించు బలములను తీసికొనవలెను. ఇతర వస్తువుల స్పర్శమువల్ల ఉద్భవించిన బలములకు క్రింద వివరించిన సూత్రమొకటి ఉన్నది.

స్పర్శ స్థానమందు నునుపైన రెండు వస్తువులు ఒకటిపైన మరియొకటి ప్రయోగించు బలము స్పర్శతలమునకు లంబమై ఉండును. అనగా స్పర్శబిందువునందు అభిలంబరేఖ ద్వారా ఆ బలము ప్రవర్తించును. ఇది క్షేపముగా ఉండును. న్యూటన్ గతినియమముల ప్రకారము ఇవి రెండును సమముగను, విరుద్ధ దిక్కులలోను ఉండును. ఈ సూత్రము బలము యొక్క పరిమాణము గురించి ఏ విషయమును చెప్పలేదు.

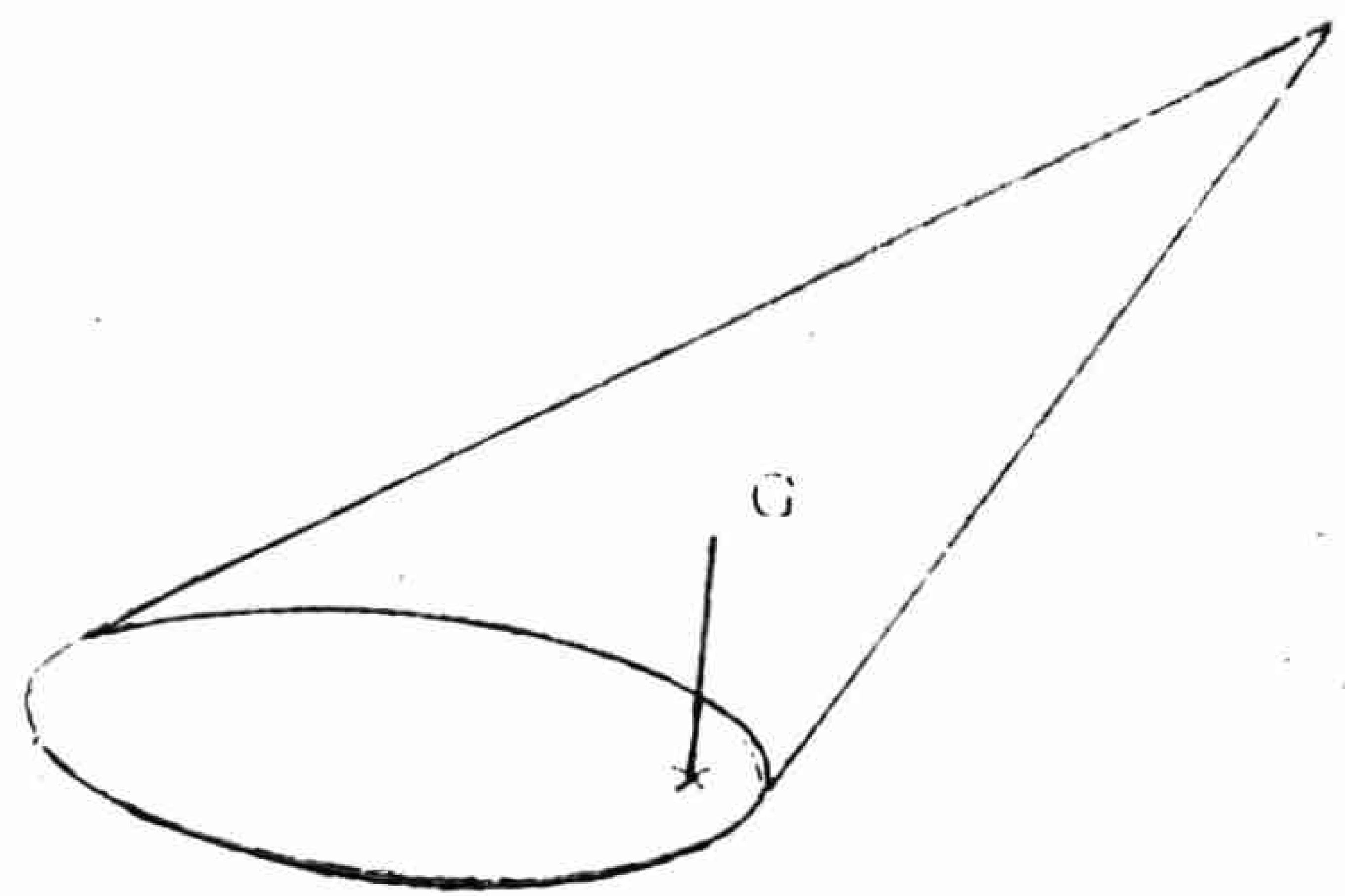
ఉదా: ఒక బరువైన కణము ఒక నునుపైన గోళతలముమీద ఉన్నదనుకొనెదము. అప్పుడు ఆ ద్రవ్యకణము మీద రెండు బలములు ఉన్నవి. వానిలో ఒకటి ఆ ద్రవ్యకణము యొక్క బరువు. ఇది అధరదిక్కులో ప్రవర్తించును. మరియొకటి గోళతలముయొక్క క్షేపము. ఇది స్పర్శతలమునకు అభిలంబరేఖ ద్వారా అనగా, ఆ కణము ద్వారా వెళ్లు వ్యాసము దిక్కులో ప్రవర్తించును. ఇవి రెండు ఎదురెదురు దిక్కులలో ఉండవలెను. కనుక ఆద్రవ్యకణము స్థిరముగ నిలిచి ఉండు స్థలము గోళతలము యొక్క అత్యున్నతస్థలముగనే ఉండవలెను.

గరుకైన వస్తువులు - ఘర్షణబలము : రెండు వస్తువులు ఒకటి నొకటి తాకు స్థలము గరుకైనచో, వానిలో ఒక్కటి మరియొక దానిపై ప్రయోగించు బలములో రెండు అంశములు ఉండును. దీనిలో ఒకటి పైన చెప్పిన క్షేపబలము R. మరియొకటి స్పర్శతలములో ఉన్న ఘర్షణబలము F. R, F బలముల పరిమాణము ఎంతైనను ఉండవచ్చును. అయితే వాటి నిష్పత్తి F/R ఒక స్థిరరాశి μ కు, తక్కువగనే ఉండును. μ యొక్క విలువ స్పర్శతలము యొక్క గరుకుదనముపై ఆధారపడి ఉండును. R పై ఆధారపడి ఉండదు. $F/R < \mu$. μ కు ఘర్షణ గుణకము (కో ఎఫిషియంట్ ఆవ్ ఫ్రిక్షన్) అని పేరు. ఒక బలము P అనునది ఒక వస్తువును ఒక దిక్కున లాగినప్పుడు స్పర్శతలము గరుకైనచో ఆ వస్తువు P వైపున జరగదు. P ను ఎదిరించి ఘర్షణ బలము యొకటి F ప్రారంభించి ప్రారంభములో $F = P$, కనుక P ఎక్కువ కాగా ఈ ఘర్షణబలము F ను ఎక్కువగుచుండును. అయితే $F/R \leq \mu$ కదా? కావున $P = \mu R$ అగువరకు పెరిగి తరువాత అది నిలిచిపోవును. ఈ అవధిని దాటకయే ఆ వస్తువును కదలకుండ చేయు బలము చాలినట్లయితే దానికి తగిన విలువను మాత్రము F తీసికొనును. ఆ వస్తువును నిలుపుటకు $F = \mu R$ బలము చాలకపోయినచో, ఆ వస్తువు P వైపు జరుగ నారంభించును. అందువలన ఒక వస్తువు కదలకుండ ఉన్నచో, ఆ వస్తువు మీద ప్రయుక్తమైన ఘర్షణబలము $F \leq \mu R$ అని ఊహించవచ్చును. μ యొక్క విలువను $\tan \alpha$ అను రూపములో వ్రాసినట్లయిన F, R ల సంయోగము వలన కలుగు బలము ఆ తలముయొక్క అభిలంబరేఖతో ఆ బలము చేయు కోణము α కంటె తక్కువగనే పై సిద్ధాంత ప్రకారము ఉండవలెను. అనగా క్షేపము, ఘర్షణ బలముల సంయోగము వలన కలుగు మొత్తపు బలము ఆ బిందువునందున్న అభిలంబరేఖ అక్షముగా గల



చిత్రము 21 ఘర్షణశంకు

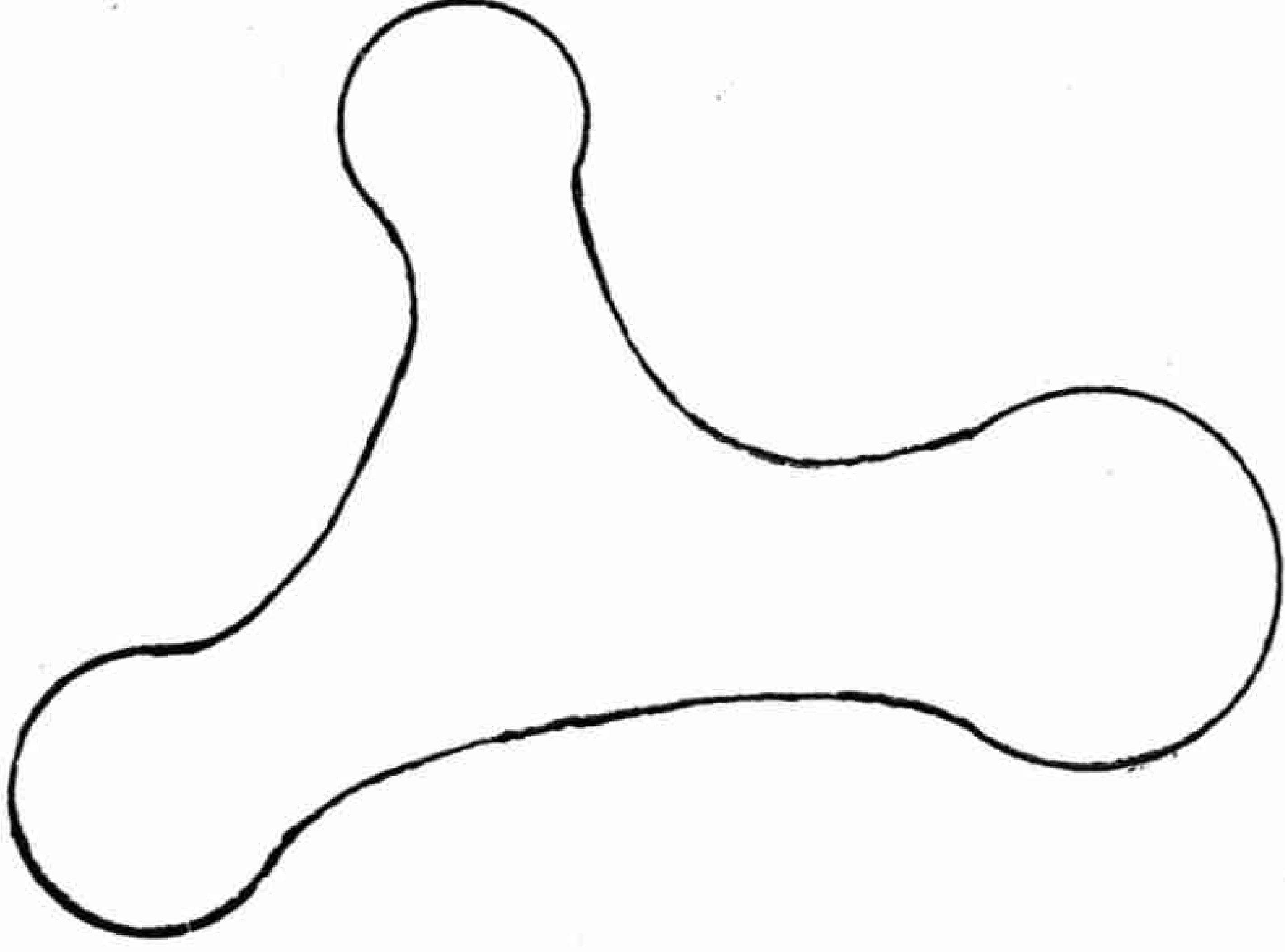
ఒక శంకువు లోపలనే ఉండును. ఈ శంకు కోణము α. దీనికే ఘర్షణశంకు (కోన్ ఆవ్ ఫ్రిక్షన్) అని పేరు.



చిత్రము 22 'G' గరిమనాభి

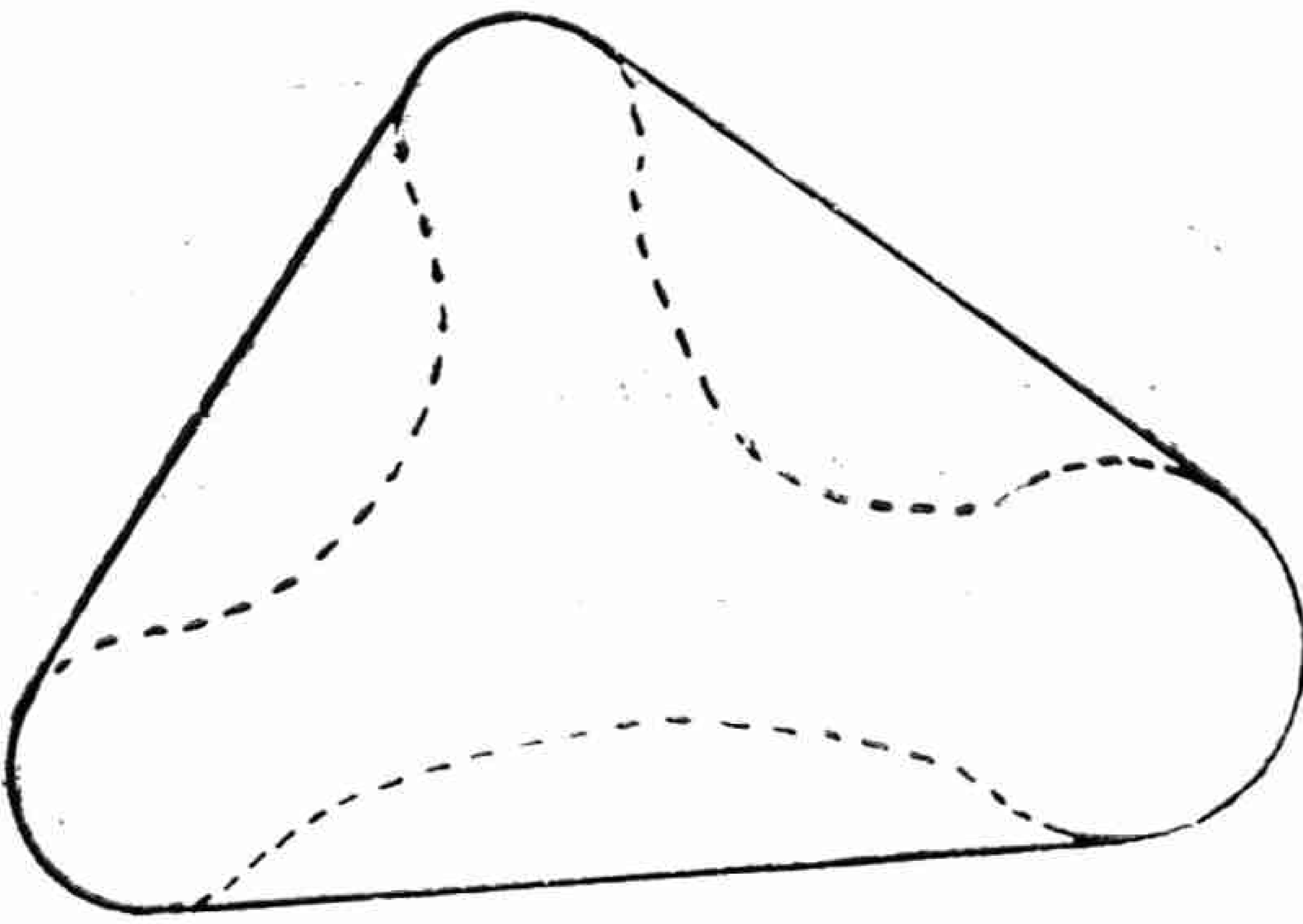
ఒక స్థూలవస్తువు యొక్క ఒక్కొక్క కణమునకును బరువు ఉన్నది. ఈ బలము ఆ కణము ద్వారా అధరదిక్కులో

ప్రవర్తించును. ఈ కణముల బరువులగు బలములన్నిటిని సంకలనము చేయగా ఒక మొత్తపు బలము దొరకును. వస్తువును ఎటుల త్రిప్పినను ఈ బలము ఆ వస్తువులోని ఒక స్థిరబిందువును ఆశ్రయించి అధరదిక్కులో ప్రవర్తించును. ఈ స్థిరబిందువునకే 'గురుత్వకేంద్రము' (సెంటర్ ఆవ్ గ్రావిటీ) లేదా 'గరిమనాభి' అని పేరు. ఆవస్తువును భూతల



చిత్రము 23 ఉన్నతోదరము కాని పీఠము

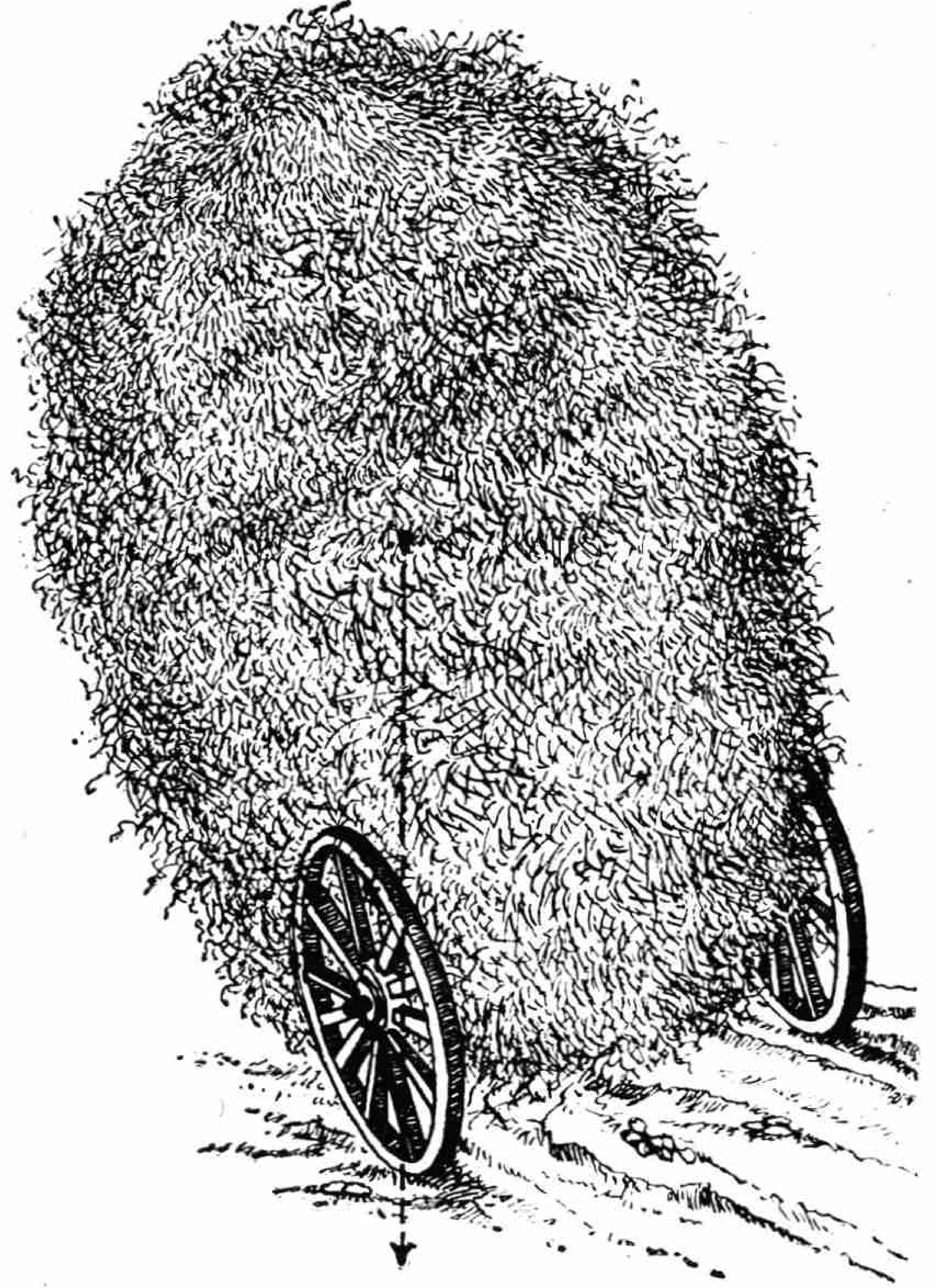
లముమీద పెట్టిన, దానిగురుత్వకేంద్రము 'G' నుండి భూతలమునకు వ్రాలెడు లంబరేఖ ఆ వస్తువు పీఠములోపలనే పడినట్లయిన, ఆ వస్తువు పడిపోకుండ స్థిరముగా నిలచును. ఈ లంబరేఖ భూమిని సంధించు బిందువు పీఠములోపలనో,



చిత్రము 24 ఉన్నతోదర పీఠము

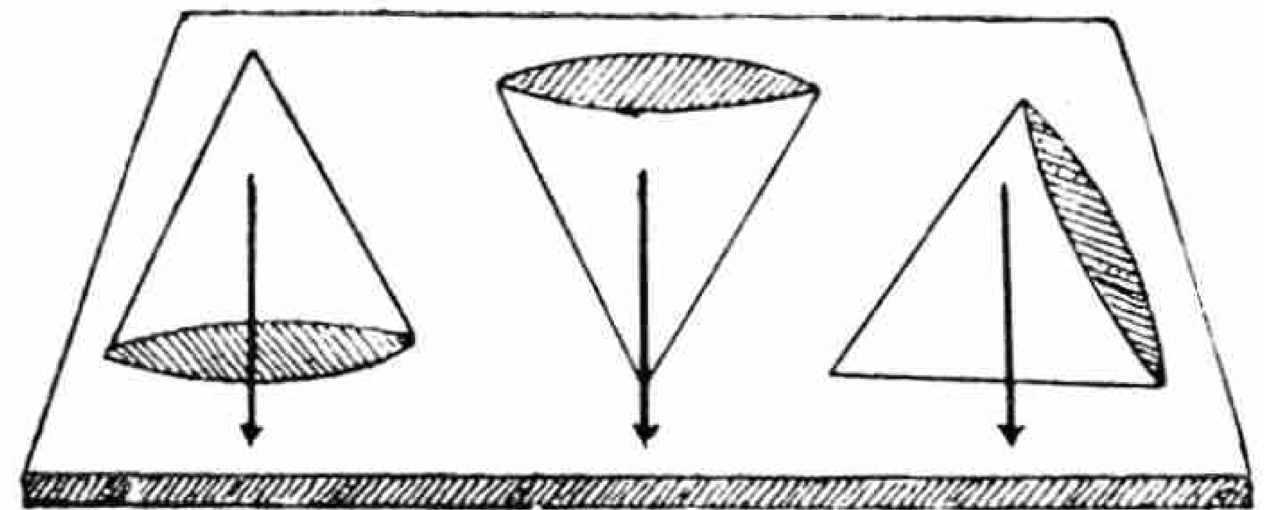
పీఠమును పూర్తిగా కలిగియుండు కనిష్ఠ ఉన్నతోదర రూపము (కాన్వెక్స్ ఫిగర్)లో ఉన్నట్లయిన, ఆ వస్తువు స్థిరముగ నిలచును. ఈ సూత్రమును ఉపయోగించియే పీసా నగరములోని వ్రాలిన గోపురము నిర్మించబడినది.

పీఠముపై నిలిచియున్న వస్తువు నిశ్చలత : ఒక వస్తువు పీఠముపై నిలిచియున్నప్పుడు దాని గరిమనాభినుండి వచ్చు నిలువురేఖ ఆ వస్తువు ఆనియున్న పీఠములో పడినచో, ఆ వస్తువు నిశ్చలత పొందియుండును. కాని పై నిలువు రేఖ పీఠమునకు బయటపడినచో వస్తువు పడిపోవును. ఎక్కువ ఎత్తుగ భారములు వేయబడిన బండి మిట్టపల్లములుకల నేలపై పయనించునపుడు సులువుగ బోర్లపడును (చూ. చిత్రము 25). ఒకచోట ఆనియున్న వస్తువు సమతాస్థితి 3 రకములు (చూ. చిత్రము 26).



చిత్రము 25

1. స్థిరసమతాస్థితి : ఇందు వస్తువును కొంచెము కదిపి విడిచినచో అది తిరిగి తన తొల్లిటి నిశ్చలస్థితికి వచ్చును. ఇందు గరిమనాభి వీలైనంత క్రిందుగా ఉండును.



చిత్రము 26

స్థిర సమతాస్థితి, అస్థిర సమతాస్థితి, తటస్థ సమతాస్థితి.

2. అస్థిర సమతాస్థితి : ఇందు వస్తువును కొంచెము కదిపివిడిచినచో, అది తొల్లిటి స్థితికి రాక క్రిందపడును. ఇందు కదలించుటవలన గరిమనాభి క్రిందికి దిగును.

3. తటస్థ సమతాస్థితి: ఇందు వస్తువును కొంచెము కదిపినను అది నిశ్చలముగనే ఉండును. ఇందు గరిమ నాభి ఎత్తులో మార్పు లేదు.

శుద్ధగతి శాస్త్రము

గతిశాస్త్రములో 'బలము' అను భావమును ప్రవేశ పెట్టక కేవలము వస్తువుల గతిని మాత్రము వర్ణించు శాస్త్రము ఇది. ఒక బిందువు గతిని వర్ణించుటకు ఒక్కొక్క కాలము t లోను అది ఎచ్చట ఉన్నదిఅనుటకు తాత్కాలిక నిరూపకములు $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ఇచ్చిన ఎడల, దాని గతి పూర్తిగ నిర్ణీతమగును. ఒక బిందువునకు భాగములు లేవు కనుక, అది తనచుట్టు తానే తిరుగుచున్నదను వర్ణన అర్థము లేనిది.

ఒక పరిమాణముగల వస్తువు జరిగినను, దానియొక్క ఏ రెండు బిందువుల దూరము మారక ఉన్నట్లయిన అది దృఢవస్తువు అనబడును. ఇట్లు లేకపోయినచో అది ద్రవ వస్తువు (ఫ్లూయిడ్) అనబడును. ఒక ఫలకము ఎల్లప్పుడును ఒకేతలములోనే ఉన్నదనుకొనెదము; తలముమీద దాని స్థానమును నిర్ణయించుటకు మూడు సంఖ్యలు కావలెను. దానిలో ఉండు ఏదైన స్థిరబిందువు (ఉదా: దాని గురుత్వ కేంద్రము) ను స్థాపించుటకు రెండు నిరూపక సంఖ్యలు కావలెను. అటుల ఒక బిందువును స్థిరపరచిన తరువాత ఫలకమును ఆ బిందువును కేంద్రముగా పెట్టుకొని తన తలములోనే త్రిప్పవచ్చును. భ్రమణ కోణమును నిర్ణయించుటకు మరియొక నిరూపకము కావలసి ఉన్నది. అందువలన ఒక తలములో ఉండు ఫలకమునకు 3 రీతుల గతి స్వాతంత్ర్యము ఉన్నదని చెప్పవచ్చును. అటులనే త్రిపరమాణిక వస్తువునకు 6 రీతుల స్వాతంత్ర్యము ఉండును.

ఏ వస్తువులకైన కల ఒక సులభమైన చలనమునకు స్థానాంతరప్రాప్తి అని పేరు. ఈ చలనములో ఆ వస్తువు యొక్క అన్ని బిందువులును ఒకే దిక్కులో ఒకే దూరము జరుగును. మరియొక సులభమైన చలనము శుద్ధభ్రమణము. ఒక ఫలకము తన తలములోని ఒక బిందువు A ను కేంద్ర బిందువుగా ఉంచుకొని, దానిచుట్టు తిరుగుట భ్రమణము (రొటేషన్) అనబడును. ఈ చలనములో ఆ ఫలకము యొక్క ఒక్కొక్క బిందువును A కేంద్రముగా గల ఒక వృత్తమును గీయును. ఒక ఫలకమునకు ఆరంభస్థలమును, కడపటి స్థలమును ఇచ్చిన ఎడల ఈ స్థలము మార్పును ఒక శుద్ధభ్రమణరీతిగా సాగింపవచ్చునని ఈ శాస్త్రములో ఒక సిద్ధాంతము కలదు. ఒక ఫలకము కొంచెము కొంచెముగా జరుగుచున్నట్లయిన పై సిద్ధాంతము ప్రకారము ఒక్కొక్క క్షణములోను ఏదో ఒక తాత్కాలిక కేంద్రము I చుట్టు కొంచెము తిరిగినదిగా తలంపవచ్చును. అయిన I క్షణ క్షణము మారుచుండును. I యొక్క స్థానములు I_1, I_2, I_3……ఆ ఫలకముమీద ఒక పథము C ను గీయును. అటులనే తలముమీదను $I_1 I_2 I_3$……గురుతులు చేసినట్లయిన మరియొక పథము D ఆ స్థిరతలము మీద నిర్ణీతమగును. C లోని I_1, D లోని I_2 ఏకీభవించిన ఒక క్షణము ఫలకము I_1 ను కేంద్రముగ కలిగి కొంచెము తిరుగును. ఈ తిరుగుటవలన C లో ఉన్న I_2 బిందువు D లో ఉన్న I_2 బిందువును కలిసికొనును, ఈ సమయమందు ఆ ఫలకము I_2 కేంద్రము చుట్టు కొంచెము తిరుగును. ఇటులనే ఒక్కొక్క క్షణమును C లో ఉన్న I_3, I_4….D లో ఉన్న I_3, I_4……తో ఏకీభవించి అప్పటి తాత్కాలిక భ్రమణ కేంద్రము అగును. అందువలన ఫలకమునకు స్థిరతలములో ఎటువంటి చలనమున్నను, దానిని ఫలకములోని ఒక వక్రరేఖ C, స్థిరతలముమీద ఉన్న మరియొక వక్రరేఖ D పై జారకుండ కేవలము దొర్లుట వలన లభింపజేయవచ్చును.

పొడవు, వెడల్పు దళసరి మూడునుగల వస్తువుయొక్క చలనము త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఉండును. ఇచ్చట భ్రమణమునకు ఒక అక్షరేఖ ఉండును. ఈ రేఖలోని బిందువులు చలించవు. మిగిలిన బిందువులన్నియు ఈ అక్ష రేఖకు లంబతలములలో వృత్తములను గీయును. ఒక స్థలములో నుండి మరియొక స్థలమునకు ఒక వస్తువును తీసికొని పోవుటకు ఒక్క పరిభ్రమణము మాత్రము చాలదు. దానితో ఒక స్థానాంతర ప్రాప్తియు కావలయును. అనగా ఒక మర (స్క్రూ) చలనమువలన సాధింపవచ్చును,

గతిశాస్త్రము

వినియుక్త గణితములో ఇది అతిముఖ్యమైనదియును, అనేక ఉపయోగములకు మూలమనగు శాస్త్రము. దీని మూలభావములగు ఆధారతత్త్వములను వ్యక్తపరచి, ఒక శాస్త్రముగా నిర్మించినది న్యూటన్ మహాశయుడే. అతడు మూడు గతినియమములను ఇచ్చెను. అవి ఏమనగా (1) 'బాహ్య బలప్రేరణ లేనిచో ప్రతి వస్తువును తన విశ్రాంతి స్థితిలోనే ఉండును, లేదా ఒక ఋజురేఖలో ఒకే వేగముతో జరుగును'. (2) 'ఒక వస్తువుయొక్క గతి భారము (మోమెంటమ్) లో మార్పులు ఏర్పడిన, అది ఏదో బాహ్యబల ప్రవర్తనను సూచించును. ఆ బాహ్యబల

ప్రవర్తన దిక్కు గతిభారము యొక్క మార్పు రేటుకు అనుపాతముగ ఉండును'. (3) 'ప్రక్రియ (యాక్షన్) కైనను విరుద్ధదిక్కులో సమానమైన విలువగల ప్రతిక్రియ (రియాక్షన్) ఉండును.'

లోకానుభవములో ఒక వస్తువు స్థిరస్థితిలో ఉండిన, అది అటులనే ఉండును అనునది అందరు ఒప్పుకొను విషయము. అయినను, చలనముగల వస్తువు జోలికి పోవక విడిచిన అది ఎల్లప్పుడును అదే విధముగ జరుగుచునే ఉండును అనునది అనుభవ విరుద్ధము. దీనికి న్యూటన్ ఇచ్చిన సమాధానము ఏమనగా, ప్రపంచములో జరుగు చున్న అన్ని వస్తువులకును ఘూస్పర్శమువలన రాపిడియో లేదా గాలివలన కలుగు ప్రతిబంధకమువంటి బాహ్య బలములు ఉన్నవి. అందువలననే ఆ వస్తువుల చలనము కొంచెము కొంచెముగ క్షీణించి, అవి ఆగిపోవును. ఏ బాహ్యబలమును లేనిచో అవి నిరంతరముగ ఒకేదిక్కులో ఒకే వేగముతో జరుగుచునే ఉండును. ఈ మొదటి గతి నియమము గెలీలియో గుర్తించినదే. రెండవ నియమము బాహ్యబలమున్నచో ఒక వస్తువుయొక్క గతి ఎట్లు మారునో సూచించుచున్నది. బాహ్యబలము గతిభారము యొక్క మార్పు రేటైనందువలన, యూనిట్ బలము (యూనిట్ ఫోర్స్) అనగా ఒక సెకనుకు ఒక యూనిట్ గతిభారమును ఎక్కువచేయు శక్తిగల బలమని చెప్ప వచ్చును. అందువలన సెంటీమీటరు, గ్రాము, సెకను యూనిట్ (సి. జి. ఎస్. సిస్టమ్ ఆవ్ యూనిట్స్)లు గల పద్ధతిలో ఒక డైన్ అను యూనిట్ బలము ఒక గ్రాము ద్రవ్యరాశిపై ప్రయోగించినట్లయిన, ఒక సెకనులో దాని వేగమును ఒక సెం.మీ./సెకను ఎక్కువచేయును. స్వేచ్ఛగా క్రిందికి పడుచున్న అన్ని వస్తువులు తమ బరువు, అనగా భూమ్యాకర్షణశక్తివలన (g సెం. మీ./సెకను^{2}) త్వరణమును చెందును. అందువలన ఒక వస్తువు బరువు $F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = mg$ అగును. సి. జి. ఎస్. పద్ధతిలో $g = 981$ సెంటీమీటరు/సెకను^{2} కనుక m గ్రాముల ద్రవ్యరాశి గల వస్తువుయొక్క బరువు $m \times 981$ డైన్‌లు అగును. అడుగు, పౌను, సెకను యూనిట్‌లుగా గల ఎఫ్. పి. ఎస్. పద్ధతిలో యూనిట్ బలమునకు పౌండల్ అని పేరు. ఇచ్చట g విలువ 32 అడుగు/సెకను^{2}, అందువలన ఒక పౌను బరువు 32 పౌండల్ బలము అగును.

బాహ్యబలమును స్ప్రింగ్ త్రాసువంటి ఇతర మార్గముల వలన కొలిచి తెలిసికొనినచో రెండవ గతి నియమము ద్వారా ఒక వస్తువు గతిని నిర్ణయించవచ్చును. ఉదా : ఒక వస్తువును u వేగముతో క్షైతిజదిక్కులో విక్షేపించినచో దాని గతిసమీకరణములు $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg$ అగును. ఇచ్చట విక్షేపించిన దిక్కు x అక్షముగను, అధర దిక్కు y అక్షముగను తీసికొని ఉన్నాము. ఈ సమీకరణముల నుండి $y = gx^2/2u^2$ అను ఆ వస్తుపథము ఒక పరావల అగు చున్నది.

శక్తి - పని : యాంత్రికశాస్త్రములో మరి రెండు ముఖ్యభావములు : 'శక్తి', 'పని'. ఒక బలము F, ఒక బిందువు P యందు ప్రయుక్తమై ఆ బిందువు F దిక్కులో x దూరము జరిగినచో Fx పని జరిగినదని చెప్పెదము. ఉదా: ఒక వస్తువు క్రిందికి y దూరము దిగినట్లయిన, దాని బరువు చేసిన పని mgy అగును. క్షైతిజ దిక్కులో ఎంతదూరము జరిగినను దాని బరువు చేయు 'పని' ఏమియులేదు.

'శక్తి' అనగా పనిచేయు శక్తి అనియే అర్థము. శక్తి రెండు విధములు. అవి: 'గతిశక్తి, స్థానశక్తి'. 'గతి శక్తి' అనునది ఆ వస్తువునకు వేగరూపములో ఉన్నశక్తి. ఒక బిందువుయొక్క ద్రవ్యరాశి m అయి, దాని వేగము v అయిన దాని గతిశక్తి $\frac{1}{2}mv^2$ అని చెప్పెదము. స్థానశక్తి (పొటెన్షియల్ ఎనర్జీ) లేక శక్మశక్తి అనునది ఆ వస్తువు ఉన్నటువంటి స్థితినిబట్టి ఉండును ఉదా : ఒక వస్తువు బరువు mg అనెదము. ఇది భూతలమునకు h ఎత్తులో ఉన్నట్లయిన దాని స్థానశక్తి mgh అనెదము. ఏలన దానిని భూతలమునకు దింపుటవలన mgh పని జరుగును. h ఎత్తులో నుండి క్రింద పడినట్లయిన భూతలము చేరునపుడు దాని వేగము v, $\frac{1}{2}mv^2$. $= mgh$ అను సమీకరణము ద్వారా కనిపెట్టవచ్చును. క్రిందికి రాను రాను దాని స్థానశక్తి తగ్గును; గతిశక్తి ఎక్కువగును. కాని ఈ రెండు శక్తుల మొత్తము స్థిరముగ ఉండును. అనగా y దూరము దిగినపుడు mgy పని చేసినందువలన స్థానశక్తి mgy తగ్గును, గతిశక్తి మొదట శూన్యముగ ఉండి ఇప్పుడు $\frac{1}{2}mv^2$ విలువకు పెరిగి ఉన్నది (v ఇప్పటి వేగము). ఇవి రెండును సమము అనగా $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$.

ఒక వస్తువునకు పరిమాణము, దార్ఢ్యము ఉన్నచో దానిని దృఢవస్తువు అందురు. దీనిని ఒక కణముల సమూహముగను, ఆ కణముల పరస్పరదూరము స్థిరముగ ఉన్నట్లును, ఒక్కొక్క కణమునకు ద్రవ్యరాశి ఉన్నట్లును, ఆ దృఢవస్తువు ద్రవ్యరాశి ఆ కణసమూహముల మొత్తపు ద్రవ్యరాశి అనియు తీసికొనవచ్చును. అట్టి దృఢ

వస్తువు గతిని వర్ణించుటకు దానిని ఏదో ఒక బిందువు యొక్క, (ఉదా : గురుత్వ కేంద్ర బిందువగు G యొక్క) గతిని, ఆ వస్తువు G చుట్టు ఎటుల తిరుగుచున్నదియు వర్ణింపవలెను. గతిశాస్త్రములోని ఒక సిద్ధాంతము ప్రకారము ఒక వస్తువు గురుత్వకేంద్రము అగు G యొక్క గతిని నిర్ణయించుటకు అన్ని కణముల ద్రవ్యరాశియు G యందు కేంద్రీకరించబడి ఉన్నదని అనుకొని అన్ని బాహ్యబలములును G యందే ప్రయోగించబడి ఉన్నవనియు అనుకొని G యొక్క గతిని గణించవచ్చును. ఉదా : ఒక కర్రను ఎటుల పారవేసినను దాని గురుత్వకేంద్రబిందువు G యొక్క పథము ఒక పరావలయగును. అదియుకాక అది G ద్వారా వెళ్లు స్థిర అక్షము నాశ్రయించి ఒకే కోణీయ వేగము (ఏంగులర్ వెలాసిటీ)తో పరిభ్రమించును. మరియు చిక్కైన ప్రశ్నలను పరిశీలించుటకు గతిశాస్త్రమందు విశాలీకృత నిరూపకములు (జనరలైజ్‌డ్ కోఆర్డినేట్స్) పెట్టుకొని పరస్పర బలప్రయోగములకు గురియైన అనేకవస్తువుల గతిని ఎట్లు కనిపెట్టవచ్చునో లాగ్రాంజ్ (1736 - 1813) చూపించియున్నాడు.

ద్రవయాంత్రిక శాస్త్రము

దృఢ వస్తువులకు స్థితి, గతి శాస్త్రములున్నట్లు ద్రవ ద్రవ్యములకు ద్రవస్థితిశాస్త్రము (హైడ్రోస్టాటిక్స్)ను ద్రవగతిశాస్త్రము (హైడ్రోడైనమిక్స్) ఉన్నవి. ద్రవవస్తువులును అవిచ్ఛిన్న రచన గలవిగా తలంచుట సమంజసము. ద్రవవస్తువునందు ఒక్కొక్క స్థలములోను ఒక్కొక్క ప్రేషము ఉండును. ఒక బిందువు వద్ద ఒక చిన్న తలఖండము తీసికొనిన ఎడల ఆ తలమునకు ఒక ప్రక్కనున్న ద్రవము మరియొక ప్రక్కనున్న ద్రవమును (ఆ ద్రవ స్థిరస్థితిలో), ఆ తలమునకు లంబదిక్కులో అదుమును. ఒక చదరపు అడుగు లేదా చదరపు సెంటీమీటరు వైశాల్యముపై ఉన్న ఈ అదుముడు బలమునకే ప్రేషము (ప్రెషర్) అని పేరు. ఒక వస్తువు మొత్తమో ఒక భాగమో స్థిరద్రవమందు మునిగి ఉన్నట్లయిన ఆ మునిగిన భాగముమీద ఆ ద్రవము అదుము మొత్తము బలము, ఎంత ద్రవమును ఆ వస్తువు త్రోసివేసినదో ఆ ద్రవపు బరువే అగును. ఇదియే ఆర్కిమీడీజ్ కనిపెట్టిన సూత్రము.

ఒక ద్రవవస్తువు గతిని వర్ణించుటకు ఒక్కొక్క స్థలము x, y, z లోను t కాలమునందు ఉన్న ద్రవ కణము చలించు వేగముయొక్క x, y, z అంశములగు $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ తెలియవలెను. దీనికి ఆయిలర్ క్రింద సమీకరణములను ఇచ్చి ఉన్నాడు,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X$$

ఇచ్చట X, ఆ ద్రవ్యరాశిపై x దిక్కులో ఒక ద్రవ్యరాశిపై ఉన్న బాహ్యబలము. ఇటులనే మరి రెండు సమీకరణములు ఉన్నవి. ఇవి కాక ద్రవము అవిచ్ఛిన్నముగ ఉండుటవలన మరియొక సమీకరణము :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

లభించును. పై సమీకరణములలో ρ అనునది x, y, z స్థలములో t సమయమందున్న సాంద్రత.

ద్రవద్రవ్యముల గతులలో అతిసులభమైనది శక్మ ప్రవాహము (పొటెన్షియల్ ఫ్లో). ఇట్టి ప్రవాహములో u, v, w అను వేగ అంశములు ఒకే ఫలము $\phi(x, y, z, t)$లో నుండి,

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x},\ v = -\frac{\partial \phi}{\partial y},\ w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

అను సమీకరణముల మూలమున లభించును. దీనికే పరిభ్రమణ రహితగతి (ఇర్రొటేషనల్ మోషన్) అనియు పేరు. ఏలన ఒక చిన్న ద్రవఖండము తాత్కాలికముగ సాగుటవలన కలిగిన రూపాంతరమును పొందును గాని ఆత్మప్రదక్షిణమును చేయదు. ఈ శక్మ 'ϕ' ఫలము $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$ అను లాప్‌లాస్ సమీకరణమును అనుసరించి యుండును. ఒక తలములో ఇట్టి లాప్‌లాస్ సమీకరణ సాధనలు : $z = x + iy$, ఫలితము $f(z)$ లో ఏదైనను తీసికొని దాని వాస్తవ లేదా సంకీర్ణభాగములను కనిపెట్టినచో లభించును. ఉదా : $f(x) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$. ఇచ్చట వాస్తవ భాగమగు $(x^2 - y^2)$ అయినను సంకీర్ణ భాగములో నుండు $2xy$ అయినను శక్మ ϕ గా తీసికొనవచ్చును. $\phi = x^2 - y^2$ ను శక్మగా తీసికొనినట్లయితే, $\psi = 2xy$ ను ప్రవాహఫలము అగును.

ద్రవబిందువుల ప్రవాహరేఖలు $2xy = c$ అగును. ఇచ్చట c ఒక స్థిరసంఖ్య. ఇదియే ఒక గోడను లంబదిశలో తాకి ఇరుప్రక్కలు పరచు ద్రవగతి అగును. విమానశాస్త్రములో $w = z + a^2/z$ వంటి మార్పులను ఉపయోగించి విమానపు రెక్కలకు ఏరూపము ఇచ్చిన ఎడల అది ఎక్కువ బరువును మోసుకొని పైకి ఎక్కునో గణింతురు.

ద్రవద్రవ్యముల గతిశాస్త్రములోని చాల చిక్కైన ప్రశ్న లేమనగా (1) అతివేగముతో ఒక వస్తువు ద్రవములో

వెళ్లుట. అనగా గాలిలో ధ్వనివేగముకన్నను ఎక్కువ వేగముతో ఒక విమానము ప్రయాణించుట. ఈ సంఘటన గాలిలో విమానము సుమారు ఒక గంటకు 1223 కి. మీ వేగము లేదా అంతకన్న ఎక్కువ వేగముతో పోవునపుడు ఏర్పడును. అట్టి సందర్భములలో గతిసమీకరణములు పూర్తిగా మారి ఆఘాతతరంగములు అను క్రొత్త సంఘటనలు గోచరించును. ద్రవ వస్తువులోకూడ కొంచెము సంఘర్షణ ఉన్నది. ఈ బలమును తిరస్కరించక గతిసమీకరణములలో చేర్చుకొనినచో అవి చాల చిక్కైనవగుచున్నవి. ఇది ఆధునిక కాలములో అతి తీవ్రముగా పరిశీలింపబడు విషయములలో ఒకటి.

గణిత భౌతిక శాస్త్రము

భౌతిక, రాసాయనిక, జీవశాస్త్రములందు అవేక్షణకును, ప్రయోగమునకును ముఖ్యస్థానము ఉన్నది. అయితే వీటితో గణిత సంబంధ చర్చలును అత్యావశ్యకములు. భౌతికశాస్త్రమునందు ప్రతి అంశమునందును గణితము అమూల్యమైన సహాయము చేయుచున్నది. 20 వ శతాబ్దమునందు ఉద్భవించిన క్వాంటం సిద్ధాంతము, సాపేక్షతావాదము గణితమునే ముఖ్యాధారముగా గ్రహించినవి. భౌతిక శాస్త్రములోని సాంఖ్యక యాంత్రికశాస్త్రమునందు గణితరీతిని పెంపొందించబడిన సంభావ్యతావాదము ఒక కేంద్రస్థానము వహించును. గణితమునకును భౌతిక శాస్త్రమునకును గల పరస్పర సంబంధములలో ఉద్భవించినదే గణిత భౌతికశాస్త్రము. దానిలోని కొన్ని ముఖ్య అంశములు ఇచ్చట వివరించెదము.

క్షేత్రసిద్ధాంతము

రెండు ద్రవ్యరాశులకు మధ్య పరస్పర ఆకర్షణకలదు. రెండు విద్యుదావేశములకును లేదా రెండు అయస్కాంత ధ్రువములకును ఆకర్షణ లేదా అపకర్షణ ఉన్నది. అవన్నియు గణిత రీతిని సదృశములగుటచే వీటిని అన్నింటిని ఒకే గణితసిద్ధాంతము వలన పరిశీలించవచ్చును. ఇదియే క్షేత్రసిద్ధాంతము.

ఒక క్షేత్రమనగా ఒక్కొక్క స్థలము (x, y, z) లోను ఒక అదిశరాశియో లేదా ఒక సదిశరాశియో ఉన్నదని అర్థము. అప్పుడు ఆ క్షేత్రమునకు అదిశరాశి క్షేత్రము అనియో, సదిశరాశి క్షేత్రము అనియో పేరు. (x, y, z) చలనఫలము $\phi(x, y, z)$ ఇచ్చినచో ఒక అదిశరాశి క్షేత్రము దొరకును. $(x, y, z)=c$ (c స్థిరరాశి) అను సమీకరణమువలన లబ్ధమగు తలములవలన ఈ క్షేత్రమును గుర్తించవచ్చును. సదిశరాశి క్షేత్రమును నిర్ణయించుటకు మూడు ఫలములు $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ కావలయును. సదిశరాశి క్షేత్రము బాహ్యాబల క్షేత్రమయినచో, ఇవియే (x, y, z) లో ఉన్న యూనిట్ ద్రవ్యరాశిమీద ఉండు బలముయొక్క x, y, z అంశములు. కొన్ని సమయములలో ఒక అదిశరాశి క్షేత్రము (x, y, z) నుండి $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ అను ఈ మూటిని $f_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $f_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $f_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$ అను సమీకరణముల మూలమున సృజింపవచ్చును. అటులయినచో $\phi(x, y, z)$ అనునది ఆ బాహ్యాబల క్షేత్రమునకు శక్మ. ఈ శక్మ ఏదో ఒక స్థిరస్థలము (x_0, y_0, z_0) నకు ఒక బిందువును తీసికొని పోవుటవలన చేయబడిన పనిని $\phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0)$ అని శక్మద్వారా సూచించవచ్చును. న్యూటన్ గురుత్వాకర్షణ నియమము ప్రకారము m_1, m_2 ద్రవ్యరాశిగల రెండు బిందువుల ఆకర్షణ $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ అగును. ఇచ్చట r^2 వాటి దూరము, ఒక m ద్రవ్యరాశిగల బిందువు దాని చుట్టును m/r విలువగల శక్మను సృజించును. అటులనే ఒక e_1 విలువగల విద్యుదావేశము మరియొక e_2 విద్యుదావేశమును $\frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$ బలముతో ఆకర్షించును లేదా అపకర్షించును. ఎన్నియో ద్రవ్యరాశులు లేదా విద్యుదావేశములు ఉన్నచో x, y, z స్థలములో వాటి శక్మను కనిపెట్టుటకు ఒక్కొక్క ద్రవ్యరాశి లేదా విద్యుదావేశము శక్మ $\frac{e}{r}$ ను కనిపెట్టి వాటిని సంకలనము చేయవలెను. ఈ శక్మ $\phi(x, y, z)$, ద్రవ్యరాశిలేని స్థలములో $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$ అను సమీకరణమును అనుసరించును. విద్యుదావేశ సాంద్రత ρ ఉన్న స్థలములో $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$ అను సమీకరణమును అనుసరించును.

విద్యుదయస్కాంత సిద్ధాంతములో ఒక్కొక్క స్థలము P లో రెండు సదిశరాశులు ఉన్నవి. వీటిలో ఒకటి విద్యుత్ క్షేత్రబలము E, మరియొకటి అయస్కాంత క్షేత్రబలము H. ఈ రెండు క్షేత్రములును P యొక్క నిరూపకములగు x, y, z లు, కాలపు కొలత అయిన t అను ఈ నాలుగు చలరాశులను నియమించును. ఈ రెండు సదిశరాశులు E, H యొక్క స్థలవినిమయపు రేట్లతో కాలవినిమయపు రేట్లకు కల సంబంధమును వర్ణించు సమీకరణములను

జేమ్స్ క్లార్క్‌మాక్స్‌వెల్ అను బ్రిటిషు విజ్ఞాని కనిపెట్టెను. (చూ. విద్యుదయస్కాంత సిద్ధాంతము - భౌతిక, రాసాయనిక విజ్ఞాన సంపుటము).

భౌతికశాస్త్రములో మరి ఎన్నియో స్థలములలో గణితము ఒక ప్రధానపాత్రను వహించుచున్నది. ఉదా: అణుచలనసిద్ధాంతము, సాంఖ్యిక యాంత్రికశాస్త్రము, శక్తిశాస్త్రము, క్వాంటంసిద్ధాంతము, సాపేక్షతావాదము మొదలగు వాటియందు గణితము ప్రధానస్థానమును ఆక్రమించుకొనినది.

భూగోళపట విక్షేపములు

భూగోళమునకు అన్వయించు మరియొక వినియోగమును వర్ణించెదము. మనభూమి గోళాకారము కలది కదా? ఈ గోళముయొక్క వ్యాసము సుమారు 12,875 మీటరులు. ఉత్తర దక్షిణ ధ్రువమునుచేర్చు రేఖ మాత్రము గోళవ్యాసముకన్న సుమారు 37 మీటరులు తక్కువ. భూమియొక్క పటమును వ్రాయవలెననిన భూమివలెనే మరియొక చిన్నగోళమును తీసికొని దానిపై భూమియందున్న స్థలములను, కొండలను, నదులను చిత్రింపవచ్చును. ఇట్లు భూమికి వాస్తవిక ప్రతిరూపముగ ఒక పటము ఉన్న ఎడల ప్రత్యక్షభూమిలో రెండు స్థలములదూరము, ఒక స్థలములోనుండి మరియొకస్థలము కనుపించు దిక్కు, ఒక దేశపు వైశాల్యము ఇవన్నియు పటములోనుండి స్కేలు తెలుసుకొని కొలచి కనిపెట్టవచ్చును. అయిన గోళాకారమైన పటము అంత సౌకర్యముకాదు. కాగితముమీద వలె ఒక చిపిటతలముమీద భూమిచిత్రమును వ్రాయసాధ్యమా? అనునదే ఒక ప్రశ్న. మనము ఒక గోళాకారముమీద ఒక కాగితమును కప్పప్రయత్నించినచో అది కొన్ని స్థలములలో మడతలుపడును. అందువలన పరిమాణము మాత్రము చిన్నదయి మరి మిగిలిన అంశములలో భూగోళమునకు సరూపముగ ఒక చిపిటతల పటము వ్రాయుట సాధ్యముగాదు. మనకు కావలసినగుణములను మాత్రము మార్చక, ఇతర అంశములను మార్చునట్లు పటములను గణితరీతిని వ్రాయవచ్చును. ఉదా: వైశాల్యములను అన్నిటిని ఒకేరీతిగా తగ్గించుపటములో దిక్కులు, దేశములరూపములు సరిగా ఉండవు. భూతలములో ఒక్క స్థలమునుండి మరియొక స్థలమునకువెళ్లు హ్రస్వతమ మార్గము (మహావర్తులము) పటములో హ్రస్వతమ మార్గములగు ఋజురేఖగా ఉండదు.

ఒక కాగితమును ఒక శంకుతలముమీదనో లేదా ఒక స్తూపతలముమీదనో మడతలు లేక పరచవచ్చును కదా? అందువలన భూమిలోని స్థలములను ఒక శంకుతలమునకో ఒక స్తూపతలమునకో మార్చినచో, దాని నుంచి కాగితమునకు సులభముగ మార్చవచ్చును. ఉదా: భూమధ్యరేఖయందు గోళమును స్పర్శించునట్లు ఒక స్తూపతలమును నిర్మించవచ్చును. ఈ స్తూపమునకు అక్షము ఉత్తర దక్షిణ ధ్రువములను చేర్చు రేఖ అగును. ఇప్పుడు గోళతలము మీద P అను బిందువున్నచో, P నుండి అక్షమును లంబముగా ఛేదించు ఒక ఋజురేఖను తీసికొని, ఇది స్తూపతలమును ఎచ్చట ఛేదించునో ఆ బిందువును P' అనెదము. ఇప్పుడు స్తూపతలమును విప్పి భూమియందున్న P బిందువునకు P' పటములోని అనురూప బిందువుగా తీసికొనినచో ఇట్లు మనకు దొరకు పటమునకు గోళము యొక్క స్తూప విక్షేపకము (సిలెండ్రికల్ ప్రొజెక్షన్) అని పేరు. ఈ విధమైన పటము చిత్రించుట వలన R వ్యాసార్ధము గల గోళమునకు పటము $2\pi R$ పొడవును, $2R$ వెడల్పును గల దీర్ఘచతురస్రము అగును. రేఖాంశము a గను అక్షాంశము d గను గల గోళబిందువు పటములో (x, y) నిరూపకములను కలిగి ఉండినచో $x = Ra$; $y = R \sin d$ అగును. అందువలన రేఖాంశరేఖలు y అక్షమునకు సమానాంతర రేఖలుగను, అక్షాంశ రేఖలు x అక్షమునకు సమానాంతర రేఖలుగను మారును. గోళమునందు అక్షాంశరేఖల పొడవు భూమధ్యరేఖనుండి కొంచెము కొంచెముగా తగ్గి తుదకు ధ్రువబిందువుల దగ్గర క్షీణమై పోవును కదా! మన పటములో అవన్నియు ఒకే పొడవు గల సమానాంతర రేఖలు. అందువలన ధ్రువబిందువు దగ్గరకు పోవునపుడు మన పటము వీటి పొడవును ఎక్కువగ చూపుచున్నది. ఈ పటమునకున్న విశేష గుణము ఏమనగా రెండు క్షేత్రముల వైశాల్యము భూతలమున సమానమైనచో పటములో కూడ వాటి వైశాల్యములు సమానముగనే ఉండును. అందువల్ల దేశముల వైశాల్యముల కొలతలకు ఈ పటము ఉపయోగముగ ఉండును. కాని దూరముల నిర్ణయమునకుగాని, దిక్కుల నిర్ణయమునకుగాని ఉపయోగపడదు.

$x = R \cot d \cos a$; $y = R \cot d \sin a$ అని తీసికొనినచో ఇది గోళతలము నుండి ఒక స్పర్శ తలమునకు గోళకేంద్రమును శిఖరముగ గల విక్షేపమగును. దీనికి కేంద్రవిక్షేపము (సెంట్రల్ ప్రొజెక్షన్) అని పేరు. ఇది గోళముపై ఉన్న అన్ని మహావృత్తములను పటములో ఋజురేఖలుగా మార్చును. అక్షాంశరేఖలు వృత్తములగును. అయిన ఇది రూపములను, దిక్కులను సరిగా చూపదు.

భూమిపైని పెద్ద ప్రదేశముల రూపములను మార్చి నను, చిన్నప్రదేశములనైనను సరూపముగ మార్చునట్టి పట నిర్మాణమున్నదా ? అని అడుగవచ్చును. వీటికే సదృశ రూప పటము అని పేరు. గోళము మీద ఉన్న ఒక చిన్న త్రిభుజమును సమతల త్రిభుజమనియే తలంపవచ్చును. అట్టి త్రిభుజమును దాని సదృశమైన త్రిభుజముగ మార్చు గుణము ఈ పటమునకు ఉన్నది.

భూతలములోని రెండు రేఖల మధ్య ఉన్న కోణము, పటములో వాటికి అనురూపరేఖల మధ్యఉన్న కోణమును, సమానముగ ఉండును.

భూగోళము మీద ఒక స్థలమునందు ఒక చిన్న వృత్తమునకు అనురూపముగ పటమునందును ఒక చిన్న వృత్తమే ఉండును. అయిన భూవృత్తమునుండి పట వృత్తమునకు ఉన్న నిష్పత్తి వేర్వేరు స్థలములలో వేరు వేరుగ ఉండును.

భూమికి స్పర్శతల మొకటి తీసికొని స్పర్శబిందువు P నుండి ఒక అభిలంబరేఖ PQ ను గీచి ఈ రేఖయందున్న ఏదో బిందువు Q ను శిఖరముగ తీసికొని గోళము నుండి స్పర్శతలమునకు విక్షేపించి ఒక పటమును నిర్మించ వచ్చును. Q అతి దూరములో ఉన్నచో ఇది లంబకోణ విక్షేపము (అర్థోగ్రాఫిక్ ప్రొజెక్షన్) అగును. Q గోళ కేంద్రమున ఉన్న పైన వివరించినది కేంద్రవిక్షేపము అగును. Q బిందుగోళము మీద P కి ఎదురు బిందువుగా ఉన్నచో ఈ విక్షేపమునకు ఘన చిత్రీయ విక్షేపము (స్టీరియోగ్రాఫిక్ ప్రొజెక్షన్)అని పేరు. ఇది సదృశరూప విక్షేపము. అనగా చిన్న ప్రదేశముల రూపము మారదు. కోణములు మారవు (చూ. సదృశచిత్రపట లేఖనము).

ఇంజనీరింగ్ ప్రయోగములు

ఇంజనీరింగ్‌నందు ఎల్లెడల గణితప్రయోగములు నిండి యున్నవి. ముఖ్యముగ దూలములు బరువువలన ఎంత వంగుననియు, వంగినతరువాత రూపమెట్లుండుననియు, ఒక నియతమైన బరువును మోయుటకు దూలములు, స్తంభములు ఏ ఆకారము, పరిమాణము కలిగి ఉండ వలెనో నిర్ణయించుటయు ఈ శాస్త్రమందు చర్చనీయాంశములు. మరియొకటి : బరువులు పడినప్పుడు ఒక వంతెనలోనో ఒక కట్టడములోనో ఎంతనొక్కు ఏర్పడుచున్నది ? అది కంపించుటకు ప్రారంభించిన ఆ కంపనమెట్లుండును ? ఆ కంపనవలన అపాయము ఉన్నదా ? దానిని ఎట్లుతగ్గించుట ? అనునవి మరికొన్ని ప్రశ్నలు. చలన యంత్రములలో ఒక్కొక్క భాగమునకు వేగము, త్వరణము ఎంత ? దీనివలన కలిగిన నొక్కులెట్టివి ? అనునవి మరికొన్ని ప్రశ్నలు. యంత్రము అనగా నియమితమైన నడకకలది. అట్టినియమితమైన నడకనుండి అకస్మాత్తుగా కలిగిన మార్పులను తోడనే దిద్దుకొనెడు యంత్రములు ఉన్నవి. తప్పునకును దానిని దిద్దుటకు కావలసిన బలమునకును ఉన్న సంబంధమును గుర్తించుటకును, ఈ బలములను ఉపకల్పించుటకును యంత్రాంశములు ఉన్నవి. ఇట్టి యంత్రములలో గణితమునకు ఒక ముఖ్యస్థానము ఉన్నది. దీనికి ఉదాహరణము ఒక విమానములో ఉండు స్వయంచాలక భాగము; ఇది విమానచుక్కాని సహాయములేకయే నియమిత దిక్కులో నియమిత వేగముతో విమానమును వెళ్లునట్లు చేయును. భూమిచుట్టు తిరుగుచున్న కృత్రిమ ఉపగ్రహముల ప్రయాణములలో తప్పులను ఎప్పటికప్పుడే దిద్దుటకు, కావలసిన బలములను గణించుటకును, అట్టి బలములను ప్రయోగించుటకును యంత్రములను నిర్మించి ఉన్నారు.

అసాధారణమైన గణితప్రయోగములలో ఒకటి ఒక చిత్రమునకో, ఒక విగ్రహమునకో ఒక పద్యమునకో సౌందర్యమును కొలుచుటకు సూత్రములు కల్పించుట. వీటిని జార్జ్ డేవిడ్ బిర్కాఫ్ అను యునైటెడ్ స్టేట్స్ విజ్ఞాని పరిశీలించి ఉన్నాడు. ఇటీవల ఆటలను లేదా యుద్ధములను నడుపు నిపుణత ఎట్లు అర్థశాస్త్రమునకు ప్రయోగింపవచ్చు ననునది గణితముద్వారా చర్చనీయాంశము అగుచున్నది.

గణిత పట్టికలు : ప్రాచీన కాలమునుండియు గణిత శ్రమము తగ్గించుటకు పట్టికలు ఉపయోగించు వాడుక కలదు. ఒక నెలజీతమునుండి ఒక రోజుజీతము, రెండు రోజులజీతము, ఇవన్నియు గణించి అమర్చిఉన్న పట్టికలను ఇప్పటికిని ఉపయోగించుచున్నాము. గుణకార పట్టికలను 12×12 లేదా 16×16 వరకు మనము జ్ఞాపకము ఉంచుకొనెదము. 1000×1000 వరకు పుస్తకములలో అచ్చువేసి వాడుట మనకు పరిచితమే. 16 వ శతాబ్దమునందు లాగరిదమ్‌లు కనిపెట్టినతరువాత, అతిశీఘ్రముగ గుణకారము, భాగహారము, వర్గమూలము, ఘనమూలముల గణనలు సులభీకరించు లాగరిదమ్ పట్టికలు అత్యుపయోగముగ ఉన్నవి. లాగరిదమ్ పట్టికలకు బదులుగా స్లైడ్‌రూల్ అను గురుతు చేయబడిన జారుకొయ్యలను గణించుటకు ఉపయోగించెదము. (చూ. గణిత్రయంత్రములు).

ఫలముల పట్టికలను చాల గణించి ఉన్నారు. వీటిలో అతి ప్రాచీనములు వర్గములు, వర్గమూలములు, ఘనములు, ఘనమూలములు మొదలైనవి. త్రికోణమితి ఫలములగు

sin x, cos x, tan x, మొదలైనవి వీటి విలోమ ఫలములు, ఇవన్నియు ఖగోళశాస్త్రమునకు అత్యావశ్యకమైనందువలన ఇట్టి పట్టికలు అయిదవ శతాబ్దమునందే ఆర్యభటునిచే గణింపబడినవి. వీటి తరువాత లాగరిదమ్ ఫలమునకు విలోమఫలములగు e^x ఫలములు, అతి పరాస ఫలములు, దీర్ఘవృత్తఫలముల పట్టికలు, సాంఖ్యక శాస్త్రమునకు కావలసిన బీటా, గామా ఫలముల పట్టికలు ఇటువంటివి ఎన్నియో వెలుగు చూచినవి.

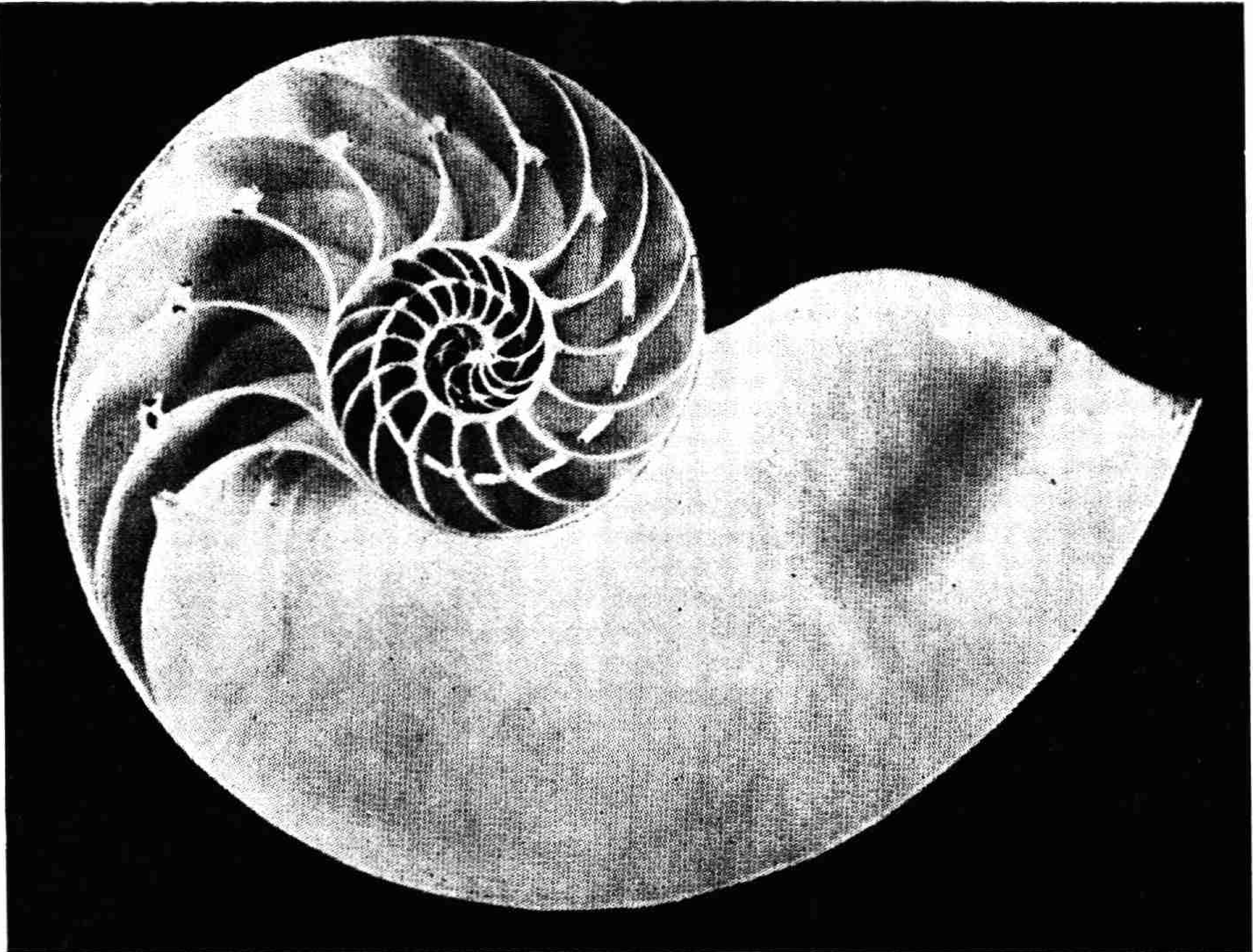
గణిత్ర యంత్రములు

ఇవికాక సంకలనము, వ్యవకలనము గుణకార భాగహారములను చేయు యంత్రములు కూడ ఉన్నవి. అట్టి యంత్రములను ఎటుల సృజించుట అనునది పాస్కల్ 17 వ శతాబ్దమునసే వర్ణించి, నిర్మించుటకు ప్రారంభించెను. అయినను 20 వ శతాబ్దములోనే అటువంటి యంత్రములు వాడుకకు వచ్చినవి. వీటివలన సుమారు 20 స్థానములు కల అంకెల సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార భాగహార వ్యవహారములు అనాయాసముగ నిర్వహింప వచ్చును.

పోయిన 20 సంవత్సరములుగ ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రములు నిర్మించియున్నారు. ఇవి సెకనుకు 5000 సంకలనములు చేయు శక్తి కలవి. ఇదియేకాక మనము ఇచ్చిన సంఖ్యల పట్టికలను జ్ఞాపకములో పెట్టుకుని, మనము చెప్పిన కార్యక్రమము ప్రకారము గణించి, కడపట వచ్చిన ఫలితమును లిఖితరూపమున మన కందించును (చూ. గణిత్ర యంత్రములు).

అ. న.





కొన్ని నత్తగుల్లల ఆకారములు సమకోణీయ సర్పిలములను చాలమట్టుకు పోలి ఉండును. అందులోని జీవి ఏకరూపముగా పెరిగి, ఒక దానితో ఒకటి సరూపముగా ఉండు ఉత్తరోత్తర భాగములను ఆక్రమించుకొనును.

ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష

సూర్యుడు, చంద్రుడు, కుజాదిగ్రహములు, నక్షత్రములు, గాలక్సీలు, ధూమకేతువులు, ఉల్కలు ఇత్యాది నభోమూర్తులను గూర్చి చర్చించు విజ్ఞానశాఖ ఖగోళశాస్త్రము. అనాదిగా ఈ శాఖ మానవాళిపై తన ప్రభావమును నెరపుచునే ఉన్నది. కొన్నివేల సంవత్సరముల క్రిందట మెసపొటేమియాలో గొర్రెల కాపరులు, పట్టణవాసులు కదలుచున్నట్లు కనిపించు చంద్రగోళమును నక్షత్రములను చూచి ఆశ్చర్యచకితులైరి. ఆ కాలపు మతాచార్యులు నభోమూర్తుల గతులను నిశితముగ పరిశీలించిరి. ప్రాచీనకాలమున ఈజిప్టులో మతాచార్యులు సూర్యగోళగతులను పరిశీలించిరి. ఈ పరిశీలనను ఆధారముగ చేసికొని నైలునదికి ఎప్పుడు వరదలు వచ్చునో పూర్వనిర్దేశము చేసి, విత్తనములు చల్లుటగూర్చి, నాట్లను గూర్చి రైతులను హెచ్చరించుచుండెడివారు.

నాటి ఖగోళవిజ్ఞానులు నభోమూర్తుల గతులను పరిశీలించి ఊరకుండలేదు. వాటిద్వారా మానవుని భవిష్యత్తు చెప్పవచ్చునని, అందుకు కొన్ని సిద్ధాంతములను రూపొందించి, ప్రజలకు బోధించుచుండిరి. ప్రాచీనకాలమున ఖగోళశాస్త్రము జోస్యము చెప్పుటయే పరమావధిగా పెంపొందెను. ప్రాచీన భారతదేశమున జోస్యము, ఖగోళశాస్త్రము ఒకే శాఖగా పరిణతిచెందినవి. అయితే నేడు జోస్యము, (జ్యోతిషముయొక్క వికృతి), ఖగోళశాస్త్రము రెండు ప్రత్యేకశాఖలు.

భారతీయ జ్యోతిషము*

'జ్యోతిషము' అను పదము 'జ్యోతి' అను పదము నుండి వచ్చినది. 'జ్యోతి' అనగా వెలుతురు, కాబట్టి మనకు వెలుతురు ఇచ్చు మూర్తుల గురించిన శాస్త్రమునకు 'జ్యోతిషము' అని పేరు. ఈ శాస్త్రము అనాదిగా మానవదృష్టిని ఆకర్షించినది. భారతీయులు జ్యోతిషమును ఒక వేదాంగమందురు. అది ఋషిప్రోక్తము. అందు మూడు భాగములు కలవు (దానిని వర్ణించునపుడు త్రిస్కంథశాస్త్ర మందురు). అవి - సిద్ధాంతభాగము, జ్యోతిష ఫలభాగము, జ్యోతిష ముహూర్త భాగము.

సిద్ధాంతభాగము: ఇందు గణిత మూలమున సూర్యాది గ్రహముల స్థానములను సాధించి, తిథి, వార, నక్షత్ర గ్రహణములను నిర్ణయింతురు. సూర్యసిద్ధాంతము, ఆర్యభటీయము మొదలగు పదునెనిమిది సిద్ధాంతములు దీనికి చెందినవి. భారతీయ గ్రంథములప్రకారము సూర్యసిద్ధాంతము చాల ప్రాచీనమయినది. అది అపౌరుషేయము. సూర్యభగవానుడు మయుని తపస్సునకు మెచ్చి ఈ గ్రంథమును కృతయుగాంతమున అనగా 8 లక్షల 69 వేల సంవత్సరములకు పూర్వము ఉపదేశించినట్లు చెప్పబడినది. కాని పాశ్చాత్య గణితజ్ఞులును, వారి అనుయాయులగు భారతీయ విద్వాంసులును దానిని నమ్మరు; వట్టి పుక్కిటి పురాణమని త్రోసివేయుదురు.

భారతీయ సిద్ధాంతులు కొందరు సూర్యసిద్ధాంతము అతి ఉత్కృష్ట గ్రంథమనియు, దాని సహాయమున తిథిని చాల స్వల్ప ప్రమాదముతో నిర్ణయింపవచ్చుననియు చెప్పుచున్నారు.

ఫలభాగము : భారతదేశములో ఇపుడు జ్యోతిషమనగా ఫలభాగమునే తీసికొందురు. అందు జన్మకాల గ్రహస్థితులనుబట్టి ఒక మనుష్యుని భావికాలస్థితిని మనవారు నిర్ణయింతురు. జన్మకాల గ్రహస్థితిని సూచించు పత్రమునకు జాతకము లేదా జన్మపత్రిక అని పేరు.

ఒక శిశువు పుట్టినవెంటనే జాతకము వ్రాయుట భారతదేశ ఆచారము. అపుడు పీఠికలో

'పదవీ పూర్వపుణ్యానాం లిఖ్యతే జన్మపత్రికా'

అని వ్రాయుదురు. జాతకమునుండి మనము పూర్వజన్మములో చేసిన కర్మముల ఫలితము ఎట్లుండును, మన జీవితములో మనకు కష్టసుఖము లెప్పుడు కలుగును అను విషయములను కనుగొనవచ్చునని మన పెద్దల అభిప్రాయము. నవీనముగా పాశ్చాత్యులు జ్యోతిషమునకు ఎక్కువ గౌరవము చూపించి, అందు విశేష పరిశోధనలను చేయుచున్నారు. విదేశములనుండి జ్యోతిషముపై అనేక గ్రంథములు, పత్రికలు బయలుదేరుచున్నవి. జ్యోతిషము భారతదేశములో జన్మించినదని వారికి ఈ విషయములో భారత దేశముపై ఎక్కువ గౌరవము కలదు. ఋషులలో వసిష్ఠ, అత్రి, పరాశర, జైమిని, గర్గ మొదలగు వారలును,

* "జ్యోతిషము" అను పదము "ఖగోళశాస్త్రము" నకు పర్యాయపదముగా వాడబడినది.

వరాహమిహిరుడు, కల్యాణవర్మ, భట్టోత్పలుడు మొదలగు నవీన పురుషులును ఈ జ్యోతిషమును భారతదేశములో ప్రచారమునకు తెచ్చిరి.

ముహూర్తభాగము : ఒక కార్యమును పూనుకొనినపుడు అది జయవంతముగా సాగునా ? సాగదా ? అని నిశ్చయించుటకు ఇది ఉపయోగపడును. దీనిని పాశ్చాత్యులు 'ఎలక్షన్ ఎస్ట్రాలజీ' అని చెప్పుదురు. ఈ విషయమున భారతదేశములో అనేక గ్రంథములు కలవు. వానిలో 'వసిష్ఠ సంహిత', 'వివాహ బృందావనము', 'కాలామృతము', 'ముహూర్తచింతామణి' అను గ్రంథములు ప్రసిద్ధములు. పాశ్చాత్యులలో పూర్వము గ్రీక్‌లు ముహూర్తఫలభాగములందు నిపుణులై ఉండిరి. వారిలో ముఖ్యుడు టాలెమీ. కాని క్రైస్తవమత విజృంభణానంతరము ఈ శాస్త్రమునకు గౌరవము పాశ్చాత్యులు చూపుటకు జంకిరి. కాని న్యూటన్, టైకోబ్రాహి, కోపర్నికస్, కార్డాన్ మొదలగు విద్వాంసులు జ్యోతిషమునకు గౌరవము చూపించిరి.

పాశ్చాత్య పరిశోధన

ఫలభాగమునందు నమ్మకము ఉంచకూడదను మతాచార్యుల బోధవలన, పాశ్చాత్యులు గణితభాగమునందు ఎక్కువ శ్రద్ధచూపిరి. బైబిల్‌నకు విరోధముగా ఏ విషయమును ప్రచారము చేయకూడదను నిర్బంధమువలన, కోపర్నికస్ మొదలగు విద్వాంసులు మతాచార్యులనుండి నానాబాధలను అనుభవించిరి. తర్వాత మతనిర్బంధము తగ్గినందున, విశేషపరిశోధనచేసి సిద్ధాంతభాగములో అనేక రహస్యవిషయముల వారు కనుగొనిరి.

ఖగోళగతిశాస్త్రము : పాశ్చాత్య సిద్ధాంతభాగములో ఇది ముఖ్యమగుశాఖ. కెప్లర్, న్యూటన్ సూత్రములను అనుసరించి ఇందు గ్రహగతులను విమర్శించి గ్రహస్ఫుటము చేయుదురు. సౌరకుటుంబము యొక్క విషయములు అన్నియు ఇందు వివరింపబడును. మొదట సౌరకుటుంబములో 6 గ్రహములు మాత్రము కలవని పరిగణించిరి. అవి బుధుడు, శుక్రుడు, భూమి, కుజుడు, గురుడు, శని. తర్వాత యురేనస్ (ఇంద్రుడు), నెప్ట్యూన్ (వరుణుడు), ప్లూటో (యముడు) గ్రహములు ఆవిష్కరింపబడినవి. చంద్రుడు భూమియొక్క ఉపగ్రహము. రాహుకేతువులు ఛాయాగ్రహములు-సూర్యచంద్ర కక్ష్యలు ఖండించు బిందువులకు రాహుకేతువులని పేరు.

కక్ష్యలరూపము, గ్రహములభారము, ఉపగ్రహములు, వాని గతి విధానములు ఇందు వివరింపబడును; తర్వాత ఉల్కల లక్షణములు, ఉల్కాపాతములు, ధూమకేతువుల గతి మొదలగునవి చర్చింపబడును.

నాక్షత్ర ఖగోళశాస్త్రము : దూరదర్శనులు ఆవిష్కరింపబడిన తర్వాత ఈ శాఖ వృద్ధిపొందెను. నక్షత్రములన్నియు భూమికి చాల దూరములో ఉండుననియు, అవి అన్నియు అగ్నిగోళములనియు, సూర్యమండలము వానిలో ఒక్కటి అనియు విశదమయినది. సూర్యమండలమున కంటె అనేక రెట్లు పెద్దవిగా ఉండు నక్షత్రములు అనేకములు కలవు. నక్షత్రములలో కొన్ని చాల పెద్దవి ; అవి బృహన్నక్షత్రములు ; కొన్ని చాల చిన్నవి ; అవి వామనములు. నక్షత్రావిర్భావ వివరణ మనకు ఇపుడు పరిశోధనవలన తెలియవచ్చెను.

నక్షత్రములలో అనేక విధములు కలవు. ఏక నక్షత్రములు, ద్వికనక్షత్రములు, త్రికనక్షత్రములు, బృంద నక్షత్రములు అని అనేక విధములు : చిత్తానక్షత్రము ఏక నక్షత్రము ; కృత్తిక ఒక నక్షత్ర బృందము, పుష్యమి ఒక నెబ్యులా. కృత్తికలో కూడ ఒక నెబ్యులా కలదు. నెబ్యులా అనగా ఆవిర్భావము పూర్తికానట్టి నక్షత్రము.

ఆకసమునందు చీకటి రాత్రులలో ఒక ప్రకాశవంతమగు పట్టీ మనకు కనబడును. దానికి మందాకిని (మిల్కీ-వే) అని పేరు. దీనిని ఆకాశగంగ, క్షీరపథము, పాలవెల్లి వియద్గంగ అని కూడా అందురు. అది కొన్నిచోట్ల వెడల్పుగాను, కొన్నిచోట్ల సన్నముగాను ఉండును.

ఆధునిక దూరదర్శనుల సహాయమున, మందాకినిలో అనేక నక్షత్రములు కలవని తెలిసినది. అట్టి మందాకినులు అనేకములు కలవు. కొన్ని కన్యారాశిలో కనబడును.

ఈ రహస్య ఛేదనమునకు మౌంట్ విల్సన్ దూరదర్శని తోడ్పడినది. దాని ముఖవ్యాసము 254 సెం.మీ. (100″) భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు దీనికి చేదోడు.

రేడియో ఖగోళశాస్త్రము : రేడియోలను వినుచుండునపుడు లౌడ్‌స్పీకర్‌లలో ఒక విధమగు ధ్వని శ్రోతలకు వినబడుచుండును. ఆ ధ్వనియొక్క తరంగదైర్ఘ్యము 0.5 సెం.మీ. లేదా 25-30 మీటరులు. దీనికి మూలకారణము చాలకాలమువరకు వైజ్ఞానికులకు తెలియకుండెను. మొట్టమొదట ఆ శబ్దము సౌరమండలజన్యమనియును, మందాకినీ జన్యమనియును వారు తలచిరి. అనవరత పరిశోధన ఫలముగా రేడియో ఖగోళశాస్త్రము పుట్టినది. తగినట్టి దూరదర్శనులను నిర్మించి, కావింపబడిన పరిశోధనలచే, ఒక ప్రత్యేకశాస్త్రము ఏర్పడినది. దూరదర్శనుల ముఖము వరాస ఆకారములో ఉండును.

గ్రహాంతర ప్రయాణము : భారతీయ పురాణములలో ఇతర లోకములకు వైమానికులు వెళ్లినట్లు వర్ణింపబడినది. అవి అన్నియును పుక్కిటి పురాణములని మనము తలచుటకు అవకాశము కలదు. విజ్ఞాన పరిశోధకులు గ్రహాంతరములకు వెళ్లుటకు వీలగుననియు, తగినట్టి విమానములు తయారుచేయవచ్చుననియు చూపినారు. అట్టి ప్రయత్నములను సోవియట్ రష్యా, యునైటెడ్ స్టేట్స్ దేశములలో జయప్రదముగా సాగించిరి. శీఘ్రకాలములో చంద్రమండలమును భూవిమానము చేరవచ్చుననియు, తర్వాత శుక్ర, కుజ, గురు మండలములను చేరుటకు ఏర్పాట్లుచేయుట సులభమనియు వైజ్ఞానికులు చెప్పుచున్నారు. సోవియట్ రష్యా యంత్రమునకు 'స్పూట్నిక్' అని పేరు. ఒక 'స్పూట్నిక్' చంద్రమండలమును పరిభ్రమణముచేసి, మన దృష్టికి అగోచరమగు చంద్రుని అవతలిభాగము యొక్క ఫోటోను ప్రచురించినది.

కొన్ని స్పూట్నిక్‌లును, యునైటెడ్‌స్టేట్స్ రాకెట్ విమానములును, అంతరాళములో చాల దూరము వెళ్లి భూమిని పలుసార్లు చుట్టి మరల సురక్షితముగా భూమిని చేరుకొన్నవి.

సారాంశము : నవీన విజ్ఞాన పరిశోధనవలన, ప్రపంచమును గురించిన మన పూర్వ అభిప్రాయములన్నియు మారవలసి వచ్చును. సౌరకుటుంబము ఒక మందాకినికి చేరినది. విశ్వమునందు అట్టి మందాకినులు లక్షలకొలది కలవు. అవి అన్నియు ఒకటినుండి ఒకటి వీడిపోవుచున్నవి. దీనియొక్క పరిణామమేమి? మందాకినీ అంతరాళములో వాయువు (హైడ్రోజన్) మిక్కిలి పలుచగా ఉన్నది. అందుండి నూతన మందాకినులు ఏర్పడునా? అను సంశయము ఏర్పడుచున్నది.

భారతీయ పురాణములు ఉద్ఘోషించినట్లు, ఈ మందాకినులు విడిపోయి, కాలధర్మముచే పలుచనై, లీనమునై ప్రళయము ఏర్పడునా? అను విషయము చింతనీయము.

ఖగోళశాస్త్రము - చారిత్రక వికాసము

నాగరికత శైశవస్థితియందుండినపుడు మానవుడు తన చుట్టునుండు సృష్టి వైచిత్ర్యమునేకాక ఖగోళమునందు కనబడు దైనిక అద్భుతచర్యలను కూడ గమనించి ఉండును. సూర్యచంద్రుల ఉదయాస్తమయములు, చంద్రకళల వృద్ధి క్షయములు, చంద్రుడు ప్రకాశింపని చీకటి రాత్రులందు మినుకు మినుకుమని మిణుగురు పురుగులవలె వెలుగు చుక్కల చక్కదనము మొదలైన గగన దృశ్యములను గమనించి, జగత్సృష్టిలోని మహిమాతిశయమునందు అతని మనస్సు లీనమై ఉండవలెను. పౌర్ణిమచంద్రునివలన కలుగు ఆనందము, తటాలున గ్రహణముచే చంద్రుని యందు కలుగు మార్పులవలన పుట్టిన భయము ప్రాచీన మానవుని మనస్సును గొప్ప ఆందోళనపాలు చేసినను క్రమముగా ప్రకృతి రహస్య ఛేదనమునకు ఆతనిని పురికొల్పి ఉండవలెను.

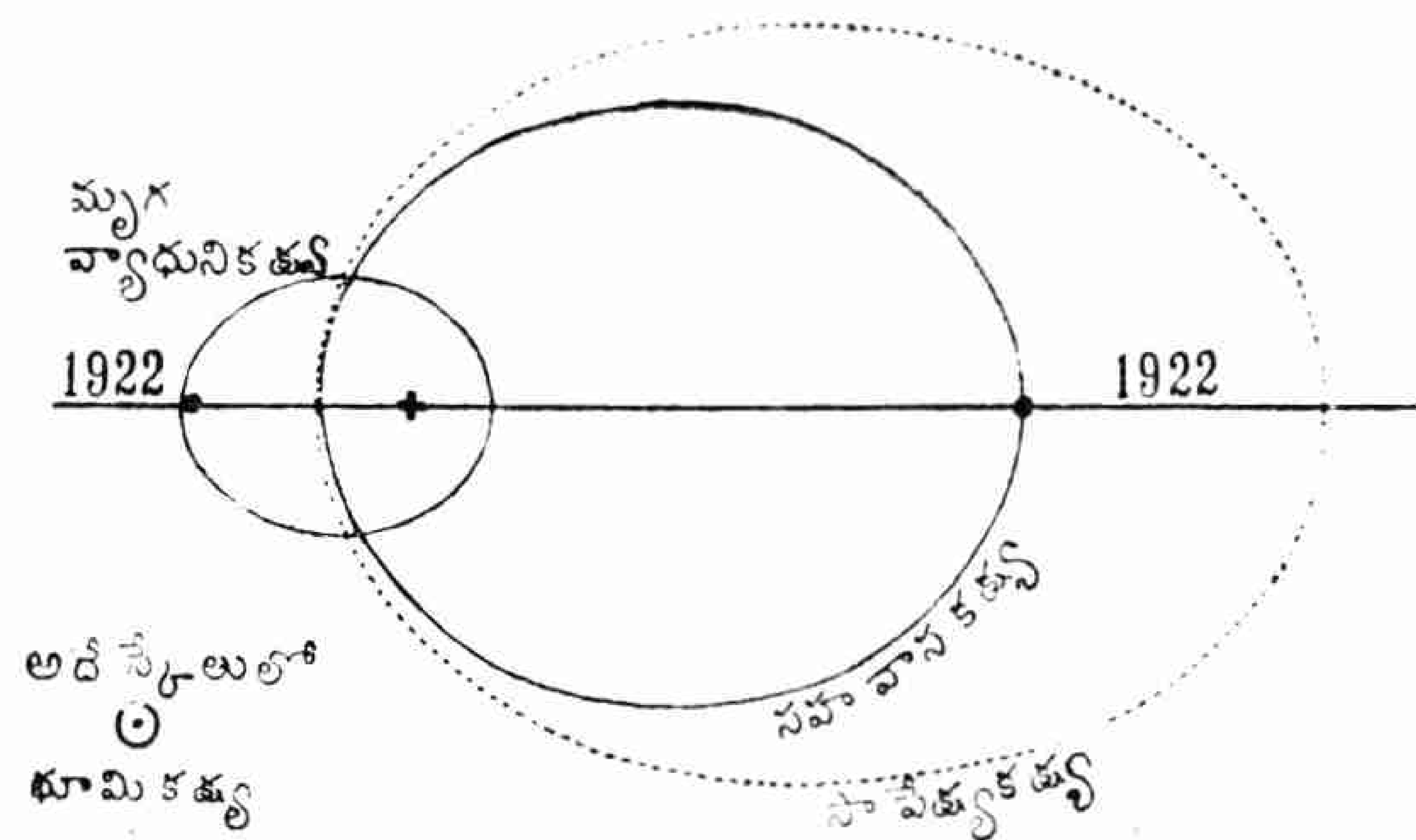
చరిత్ర పూర్వయుగము

ఋతువులలోని మార్పులను అనుసరించి ప్రాచీన మానవుడు తన జీవనోపాయ నిర్వహణమునకు తగిన ఏర్పాట్లు చేసికొనుచుండెను. వర్షాకాలమున వ్యవసాయము, శరత్కాలమున వేటయు అతని వార్షికచర్య. తదనుగుణముగ ఋతువులు, మాసములు, సంవత్సరకాలమును కనుగొనుటకు అతడు ప్రయత్నించి ఉండవలయుననుట నిస్సంశయము. చంద్రుని వృద్ధి క్షయములనుబట్టి అన్ని దేశములును కాలనిర్ణయము చేసికొనుచుండెను. రెండు అమావాస్యల మధ్యకాలము, లేదా రెండు పూర్ణిమల మధ్య కాలము ఒక చాంద్రమాన మాసముగా వాడబడెను. భారత దేశములో పూర్వము పూర్ణిమాంత మాసములు వాడుకలో ఉన్నట్లు తెలియుచున్నను ఇప్పుడు వాడుకలో ఉన్నవి అమావాస్యాంత మాసములే. మహమ్మదీయులకు చంద్రదర్శనముతో నెల ప్రారంభమగును. క్రైస్తవుల మాసారంభమునకు ఏ నియమము లేదు.

మొదటి కాలమానము సూర్యోదయమునుండి సూర్యోదయమువరకు గల అంతరము. ఇదియే దినము. ఇది చాల అల్పకాలమానము. సంవత్సరముల కొలది జీవించు మానవునకు అంతకంటె పెద్దదగు కాలమానము అవశ్యమై, 'చాంద్రమానము' వాడుకలోనికి వచ్చెను. 12 చాంద్రమాన మాసములు ఒక 'సంవత్సరము' అనియు, అందు ఋతువుల ఆవృత్తి ఒకటి పూర్తి అగుననియు పొరపాటుగా ఎంచబడెను. కాలక్రమేణ ఈ పొరపాటు గుర్తింపబడి సూర్యుని చలనముపై ఆధారపడు సాయన సంవత్సరము (ట్రాపికల్ ఇయర్) ప్రచారమునకు వచ్చెను. ఒక సాయన సంవత్సరములో ఋతువుల ఆవృత్తి పూర్తి అగును. ఈ అనుభవము శీతోష్ణమండలములలో ఉండు వారిది. వారి కాలనిర్ణయము ఇట్లు సూర్యచంద్రులపై ఆధారపడిఉండును. కాని ధ్రువప్రాంతములందు ఆరు నెలలు పగలు, ఆరు నెలలు రాత్రి. కాబట్టి అచట సూర్యుని మూల

మునవే కాలనిర్ణయము చేయవలసిఉండును. ఉదా: గ్రీన్‌లాండ్‌వాసులు సూర్యుడు అస్తమించి, నిరంతర రాత్రి ప్రారంభించినపుడు సంవత్సర ప్రారంభము అని గణించిరి. వారు పౌర్ణమి, సప్తర్షులస్థితి, శంకుచ్ఛాయ మొదలైన విషయములను కూడ గమనించిరి.

అమెరికా ఖండములో పూర్వకాలమందు పర్వముల చేతనే కాలనిర్ణయము చేసికొనిరి. ఈజిప్టులో మృగవ్యాధుడు (సిరియస్), భారతదేశములో అగస్త్యుడు (కనోపస్) - ఈ నక్షత్రముల ఉదయము [1] చే సంవత్సరము నిర్ణయింపబడెడిది.



చిత్రము 27 మృగవ్యాధునికక్ష్య

ఋతువుల ఆవృత్తి పూర్తి అగుటకు సాయనసంవత్సరము ఆవశ్యకమని ప్రాచీనకాలమందే గుర్తింపబడెను. సూర్యోదయమునకు ముందు, సూర్యోదయమునకు వెనుక ఏడాది పొడుగున నక్షత్రములు మారుచుండుటచే సూర్యుడు నక్షత్రములందు సంవత్సరమున కొకసారి భ్రమణము చేయునని ప్రాచీనులు కనిపెట్టిరి. ప్రాచీనులకు కొన్ని నక్షత్రమండలములతోకూడ కొంతవరకు పరిచయము ఉండినట్లు తెలియుచున్నది. ఫినిషన్‌లు సప్తర్షులవలన దిక్కులు నిర్ణయించుకొని నౌకాయానము చేసిరి. పాలినీషన్‌లు కూడ నక్షత్రముల సహాయమున పడవలలో దీర్ఘయాత్రలు కావించిరి. గ్రహములలో శుక్రుని గమనింపనివారు ప్రాచీనులలో లేరు. 'ఓరినాకులు' నతార్కునికి [2] దగ్గరగ కనపడుటచే శుక్రుని సూర్యుని భార్యయని భావించిరి.

ప్రాచీనయుగము-విదేశములు

మెసపొటేమియా: ఈ దేశములో ప్రవహించుచున్న టైగ్రిస్, యూఫ్రేటీజ్ అను రెండు గొప్పనదులు ప్రాచీన నాగరికతను పోషించి, దేశమును అత్యున్నత దశకు తెచ్చెను. ఈ దేశచరిత్ర అసిరియన్‌ల, బాబిలోనియన్‌ల చరిత్రలతో మిశితమైనది. వారు తమ విజ్ఞాన విషయములను మన్ను బిళ్లలపై వ్రాసి కాల్చి భద్రపరచిరి. అధిక వ్యయప్రయాసలకోర్చి, వారి భాషాలిపులను రెండింటిని పరిశీలించి, వాటియందుగల రహస్యములను వెల్లడించిన నవీన ప్రజ్ఞావంతులకు మనము కృతజ్ఞులము. క్రీ. పూ. 607 లో అంతమొందిన ప్రాచీన బాబిలోనియా రాజ్య కాలములో బాబిలోనియన్‌లకు జ్యామితియందు, త్రికోణమితియందు ప్రవేశము లేకపోవుటవలన అప్పటివారి ఖగోళవిజ్ఞానము చెప్పుకొనదగినంత ప్రశస్తమయినది కాదు. కాని తరువాత క్రీస్తుశక ప్రారంభమువరకు అందులో వారు సంపాదించిన పాండిత్యము అమోఘము.

బాబిలోనియన్‌ల పురోహితులు గొప్ప ఖగోళశాస్త్రవేత్తలు. మతకర్మలను నిర్ణయించుటకు వారికి ఖగోళవిజ్ఞాన మావశ్యకమై ఉండెను. మతకర్మల కాలనిర్ణయము చేయుటకు వారు మనసిద్ధాంతులవలె సూత్రములను ఉపయోగింపక, తమ పూర్వులు ప్రత్యక్షముగ అవలోకించి మన్నుబిళ్లలపై వ్రాసి, కాల్చి, భద్రపరచిన గ్రహచారములను బట్టి గ్రహభ్రమణ కాలములను కనుగొనుచుండిరి. వారి పంచాంగము అమావాస్య పిదప ప్రథమ చంద్రదర్శనముపై ఆధారపడి ఉండెను. ఇప్పటి మహమ్మదీయులుకూడ ఆ మార్గమునే అవలంబించుచున్నారు. అది చాంద్రమాన గణితము. కాని తరువాత ఋతువుల ప్రారంభము ఒకేనెలయందు జరుగుటకును, నక్షత్రోదయము ఒకేనెలయందు అగుటకును వారు భారతీయులవలె క్రమముగా సౌరచాంద్రమాన మిశితపంచాంగమును ఏర్పాటుచేసికొని, సంవత్సరమునకు 13వ నెలను చేర్చి సవరించుచుండిరి. ఈ విధానము సూమర్, అక్కాడ్ దేశములందుకూడ వాడబడుచుండెను. వారఙ్ఞానము లేకపోయినను, వారికి నెలలో 7, 14, 21, 28 వ దినములు శుభకార్యములకు నిషిద్ధములు. వారిదినము ఔదయికము [3]. దినములోని 12 వ భాగమునకు 'కస్పు' అని పేరు: 'కస్పు' భారతీయ 'హోర'కు సమానము. చాంద్రమానమాసము వారు బాగుగా ఎరిగిఉండినందున వారు ఏమాత్రము పొరపాటులేకుండ పర్వదినములు నిర్ణయింప గలిగిరి. 223 చాంద్రమాన మాసములు 18 సౌరసంవత్సరములకు సమానము అనియు, అదియొక గ్రహణ యుగము అనియు, ప్రతి 18 సౌరసంవత్సరముల కాలములో గ్రహణముల వరుసయొక్క ఆవృత్తి పూర్తి అగుననియు కాల్డియన్‌లు

1. ఉదయము అనగా సూర్యకాంతిచే అంతవరకు అదృశ్యమై, తరువాత సూర్యుడు ఎడమగా పోవుటచే నక్షత్రము దృశ్యమగుట.
2. నతార్కుడు అనగా అస్తమింపనున్న సూర్యుడు.
3. ఉదయమునుండి లెక్కపెట్టబడునది.

సిద్ధాంతము చేసిరి. బాబిలోనియన్‌లు గ్రహముల చారములో ఋజుగతి, వక్రగతి, స్తంభనము మొదలగు విశేష గతులను గమనించిరి. వారు గ్రహావలోకనమునందు చాల శ్రద్ధవహించి, శుద్ధములగు ఫలములను మన్నువిల్లలపై వ్రాసిఉంచుటచే, అవి ప్రస్తుత కాల గణనకు మిక్కిలి అనుకూలములయ్యెను. అట్టి అవలోకనములలో ఒకటి క్రీ. పూ. 19-3-721 లో సంభవించిన గ్రహణము. సూర్యగ్రహణములను నిర్ణయించుటకు చాలినంత గణితజ్ఞానము వారికి లేదు. కావున గ్రీక్‌ల కాలమువరకు ఆ కృషి మందగించి ఉండెను.

మధ్య అమెరికా - మాయానాగరికత : క్రీస్తుశకమునకు అనేక శతాబ్దముల పూర్వముననే మాయా నాగరికతకు చెందిన మధ్య అమెరికావాసులు ఖగోళ విద్యయందు అపార పాండిత్యము సంపాదించి ఉండినట్లు వారి శాసనములు తెలియజేయుచున్నవి. గ్రహణముల కారణము, శంకు ఉపయోగము, విషువుల నిర్ణయము వారికి తెలిసి ఉండెను. సౌరసంవత్సరమే కాక శుక్ర యుగము* కూడ వారు వాడుచుండిరి. 365 దినములుగల వారి సంవత్సరము నెలనెలకు 20 దినములు కల 18 నెలలు, తరువాత 5 దినములుకల ఒక నెలగను విభజింపబడెను. క్రాంతివృత్తము మందాకినిని ఖండించు బిందువులకు వా రెక్కువ ప్రాముఖ్యమును ఒసంగిరి. మందాకిని యందు అనేక సూక్ష్మనక్షత్రములు కలవని వారి అభిప్రాయము.

వారి శాసనముల భాష, లిపి ఇంతవరకు పూర్తిగా అవగాహనము కాకపోవుటచే, వారి ప్రతిభ యొక్క పూర్తి విశిష్టతను కనుగొనలేకున్నాము. ఇట్టి మహోన్నత నాగరికదశయందున్న వారిని వంచించి, మత పిశాచ ప్రేరితులగు స్పెయిన్ దేశీయులు వారి దేవాలయములను, గ్రంథములను నిర్మూలనము ఒనర్చిరి.

ఈజిప్టు-నైలునదీ తీరము : నైలునదీతీరము గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములకు పుట్టినిల్లు. ఈజిప్టువాసులు క్రీ. పూ. 3000 - 4000 సంవత్సరములనాడే మహోన్నత నాగరిక దశయందుండిరి. ఇచ్చటనే గ్రీక్‌లు జ్యామితిని అభ్యసించి తరువాత తమ మేధాశక్తిచే దానిని అభివృద్ధిపరచిరి.

సంవత్సరమున ఒకసారి గడవు తప్పక నైలునది పొంగుచుండును. నదీతీరవాసులకు అత్యంతోపయోగకరమగుటచే అది పొంగు కాలమును ముందే నిర్ణయించుటకు ఖగోళ విజ్ఞానము వారికి ఆవశ్యకమయ్యెను. వారి సంవత్సరమునకు దినములు 365. కాబట్టి సాయన సంవత్సరమునకు, వారి సంవత్సరమునకు 4 సంవత్సరములలో 1 దినమును, 120 సంవత్సరములలో 1 నెలయును భేదము ఉండును. వారు తమ సంవత్సరము చరమై ఉండుట కనుగొని, అది స్థిరప్రమాణముకలదై నైలునది వరదలకు సరియగునట్లుండుటకు, మృగవ్యాధ (సిరియస్) నక్షత్రోదయమును ప్రారంభకాలముగా తీసికొని పంచాంగ నిర్మాణము చేసిరి. సూర్యుడు ముందుకు జరుగుటచే అంతవరకు తత్కాంతిలో మరుగువడి ఉన్న మృగవ్యాధ నక్షత్రము ప్రాతఃకాలమున పూర్వదిశయందు ప్రకాశించుచుండగా నైలునదికి వరదలు ప్రారంభమగును. మృగవ్యాధుని రెండు ఉదయముల మధ్యకాలమునకు మృగవ్యాధ సంవత్సరమని పేరు. అట్టి 1461 చరసంవత్సరములు 1460 మృగవ్యాధ సంవత్సరములకు సమానమగునని కనుగొని ఈ కాలమును వారు దైవసంవత్సరమనియు, మహాసంవత్సరమనియు, సాతికయుగమనియు వ్యవహరించిరి.

బుధ, శుక్రుల చారమును, వారముల క్రమమును వారు కనుగొనినట్లు తోచుచున్నది. భూమినుండి లేచు జ్వాలలు ఆకసమునందు నక్షత్రములయ్యెనని వారి అభిప్రాయము. విషుచలనమును వారు గుర్తించినట్లు తోచదు.

చీనా : చీనావారి నాగరికత చాల ప్రాచీనము. క్రీ. పూ. 4000 సం॥ నుండి వారు ఖగోళవిద్యలో కృషిచేసిరి. గ్రహణ సాధనము వారి ప్రధానోద్దేశమయినట్లు తెలియు చున్నది. హూయాంగుటీ చక్రవర్తి క్రీ. పూ. 2608 లో ఒక వేధశాలను కట్టించెను. అది పంచాంగములోని పొరపాట్లను సవరించుటకు ఉద్దేశింపబడెను. అతని కాలములో ఖగోళవిద్యను అభ్యసించుటకు పండిత సంఘము ఏర్పరుపబడెను; గ్రహణ నిర్ణయములో పొరపడిన జ్యోతిష్కులు మరణదండనకు పాలగుచుండిరి. యో చక్రవర్తికాలములో కూడ ఖగోళవిద్యకు విశేషాదరము ఉండెను. రాశిచక్రము 28 భాగములుగా విభజింపబడెను. ఏడాదికి $365\frac{1}{4}$ దినములైనందున రాశి చక్రము కూడ $365\frac{1}{4}$ సమభాగములు చేయబడెను. వీరు క్రీ. పూ. 1100 లోనే పరమాపక్రాంతిని, మకరాయన బిందువును కనిపెట్టిరి. క్రీ. పూ. 500 తరువాత వారి ఖగోళవిద్య క్షీణదశ నొందెను.

మహాభారత కాలములో భారతీయులకు, చీనావారి సంసర్గము, రాకపోకలు ఉండెను. చీనా భారత దేశమునకు పరిసరప్రాంతమగుటచే చీనావారి విజ్ఞానము భారతదేశమునకు ప్రాకి ఉండవచ్చును. చీనాలోను, భారతీయ వేదమునందును నక్షత్రముల సంఖ్య 28. అందువలన భారతీయుల ఖగోళ విజ్ఞానము ప్రాచీనము

* రెండు గ్రహముల క్రమాగత (అనుయాయినీ) సూర్యుని సంయోగముల మధ్యకాల(సినోడికల్ పీరియడ్) గ్రహయుగము.

కాదనీయు, గ్రీకులనుండి లభ్యమైనదనియు వాదించుట సమంజసము కాదు.

ఫినిషన్‌లు : వీరి కాలము క్రీ. పూ. 1500 నుండి 500 వరకు. వీరు సూర్యచంద్రోపాసకులు, అమావాస్యయందు భక్తిశ్రద్ధలతో పండుగలు, పూజలు జరుపుకొనుచుండెడివారు. సూర్యుడు ప్రాణదాత అనియు, తక్కిన గ్రహములు తక్కువశక్తి కలవారనియు వీరి మతము. వీరొకచోట శుక్రునికి కూడ దేవాలయము నిర్మించిరి. వారి పంచాంగము యూదుల పంచాంగము వంటిది. నౌకాయానమునకు వారు ధ్రువనక్షత్రమును, అల్పసప్తర్షులను ఆధారము చేసికొనిరి. మొత్తము మీద వారి ఖగోళ విజ్ఞానము స్వల్పమని చెప్పవచ్చును.

భారతదేశము

భారతదేశములో ఖగోళశాస్త్రము జ్యోతిషము అని వ్యవహరింపబడును. జ్యోతిషము వేదాంగము. అందలి భాగములను గూర్చి, విషయములను గూర్చి ఇదివరకే ప్రస్తావించితిమి (చూ. పు. 64).

చిత్రము 28 ప్రాచీన చీనా ఖగోళ చిహ్నములు

వేదాంగ జ్యోతిషము : ఋగ్వేదాంగ జ్యోతిష గ్రంథము ఒకటి కలదు. అందు 36 శ్లోకములు మాత్రమే కలవు. గ్రంథము శిథిలావస్థలో దొరకినది. విమర్శకులు తమకు అర్థమగునట్లు కొన్ని శ్లోకములను సవరించిరి. గ్రంథకర్త లగధఋషి ; అతని గురించి వివరములేవియు లేవు. 43 శ్లోకములుకల యజుర్వేదాంగ జ్యోతిషము అను మరియొక గ్రంథము కలదు. దానిని సోమాకరుడు వ్రాసినట్లు కనబడుచున్నది. వైదిక కర్మలకు ప్రధానములైన తిథులను అందాజుగా, సులభముగా తెలిసికొనుటకు ఈ రెండు గ్రంథములు ఏర్పరుపబడినవనియు, అవి సిద్ధాంత గ్రంథములు కానేరవనియు నిష్పక్షపాత విమర్శకులకు విశదమగును. ఇంతేకాక 36, 43 శ్లోకములలో జ్యోతిష గ్రంథమంతయు వివరించుట అసాధ్యమనివేరే చెప్పనక్కరలేదు. జ్యోతిషమంతయును వేదములో ఇమిడిఉండుటయు అసంభవము. కాని అందు జ్యోతిశ్శాస్త్ర విషయములు అక్కడక్కడ గోచరించుచున్నవి. అందు కొన్ని దిగువ ఉదాహరింపబడును.

1. మూ. ద్వాదశారం నహితజ్జరాయ వర్వర్తి
చక్రం పరిద్యామృతస్య
ఆపుత్రా అగ్నే మిథునాసో అత్ర సప్తశతాని
వింశతిశ్చ తస్థుః
(ఋగ్వేదము 1-164-11)

అర్థము : "ద్వాదశారమగు కాలచక్రము గగనమునందు తిరుగుచున్నది. అది అరిగిపోదు. ఓ అగ్నీ! 720 మిథునములు ఆ చక్రమును అధిరోహించిఉన్నవి."

దీనివలన సంవత్సరమునకు 12 నెలలనియు, 720 అహోరాత్రము లనియు తెలియుచున్నది.

2. మూ. ద్వాదశ ప్రధయః చక్రమేకం త్రీణి నాభ్యానిక ఉ తచ్చికేత
తస్మిన్ సాకం త్రిశతి తాన శంకవః అర్పితాః షష్టిః నచలా చలాసః
(ఋగ్వేదము 1-164-48)

అర్థము: "పంద్రెండు కమ్ములు, మూడు నాభులు గల చక్రమిది. దీనికి 360 శంకువులు కలవు. అవి స్థిరముగా అమర్చబడినవి. దీనిని ఎవరు తెలిసికొనగలరు." దీనివలన సంవత్సరమునకు మాసములు 12 అని, దినములు 360 అని తెలియుచున్నది. ఇక త్రినాభి అను పదమునకు మూడు ఋతువులు అని కొందరు వ్యాఖ్యానము చేసిరి. కొందరు త్రినాభి అనుపదము దీర్ఘవృత్త రూపమున ఉండు క్రాంతివృత్తమును సూచించునని చెప్పిరి. ఇది సమంజసము. దీర్ఘవృత్తమునకు మూడు నాభులు - రెండు నాభులు, ఒక కేంద్రబిందువు-కలవుకదా.

3. మూ. వేదమాసో ధృతవ్రతో ద్వాదశ ప్రజావతః వేదోయ ఉపజాయతే
(ఋగ్వేదము 1-25-8).

అర్థము; "ధృతవ్రతు (వరుణు) నికి 12 నెలలు. అందు సృజింపబడిన జంతువులన్నియు తెలుసును. వానికి దగ్గర సృజింపబడిన అధిమాసము కూడ అతనికి తెలుసును".

4. మూ. ద్వాదశద్యూన్ యత్ అగోహ్యస్య అతిథ్యైరణన్ ఋభవః ససంతః
సుక్షేత్రా అకృణ్వన్ అనయంత సింధూన్ ధన్వ ఆ అతిష్ఠన్ ఓషధీ నిమ్నం ఆపః
(4-33-7)

ఈ మంత్రము సౌరమాన, చాంద్రమాన సంవత్సరములకు వ్యత్యాసము 12 దినములు అని సూచించుచున్నదని బాలగంగాధర తిలక్ పండితుని అభిప్రాయము.

5. విషువచలనము వలన ఆకాలమున తిష్య (పుష్య) నక్షత్రముతో విషువు చేరి ఉండినట్లు ఋగ్వేదము (5-54-13) లో చెప్పబడినది. యజుర్వేదములో కూడ జ్యోతిషవిషయములు కొన్ని కలవు.

1. "అనేక నక్షత్రములతో కూడిన కృత్తిక తూర్పు నుండి జరుగుటలేదు" అని శతపథబ్రాహ్మణము (2-1-2)లో చెప్పబడినది. ఇందువలన ఆకాలములో విషుబిందువు కృత్తిక యందుండెనని తెలియుచున్నది.

2. తైత్తిరీయసంహిత (4-4-11) లో షడృతువులు వర్ణింపబడినవి. మధు, మాధవమాసములు వసంతఋతువు; శుక్ర, శుచిమాసములు గ్రీష్మఋతువు; నభ, నభస్యమాసములు వర్షఋతువు; ఇష, ఊర్జమాసములు శరదృతువు; సహస్, సహస్యమాసములు హేమంతఋతువు; తపస్, తపస్యమాసములు శిశిరఋతువు అని చెప్పబడెను. ఋతువు క్రింద ఈయబడిన మాసములు ఋతువులను వర్ణించునట్లు భావింపవలయునని తోచుచున్నది. వసంతఋతువులో పుష్పములు మెండుగా ఉండును, తేనె విశేషముగా లభించును. కావున ఆ ఋతుమాసములకు మధు, మాధవ మాసములని పేరిడిరని తోచుచున్నది. ఇట్లే అన్ని నెలలకు కారణ నామములను నిరూపింపవచ్చును. అవి జ్యోతిషవిషయములపై ఆధారపడలేదు.

3. తైత్తిరీయ సంహిత (7-4-8) లో 'చిత్రా పౌర్ణమి' సంవత్సరముయొక్క ముఖమని చెప్పబడెను. ఒక మాసములో పౌర్ణమి ఏనక్షత్రములో వచ్చునో ఆమాసమునకు ఆ నక్షత్రముపేరు పెట్టబడును. చైత్రమాసమునందు పౌర్ణమి చిత్తానక్షత్రముతోను వైశాఖ మాసములో విశాఖానక్షత్రముతోను కూడి ఉండును. ఇట్లే ఇతర మాసములకు కూడ పేర్లు నిర్ణయింపబడెను.

సూర్యసిద్ధాంతము: ఇది సర్వజనాదరణీయమయ్యెను. సిద్ధాంతులెల్లరు దీనినే వాడుటచే వరాహమిహిరుని పంచసిద్ధాంతికతోసహా ఇతర సిద్ధాంతములు ప్రచారములోనికి రాలేకపోయినవి. సూర్యసిద్ధాంతము సమగ్రముగా లభింపలేదు. శిథిలమైన వ్రాతప్రతులే దొరకినవి. వాటినుండి ఆర్యుల జ్యోతిషశాస్త్రముయొక్క ప్రాచీనతను, గొప్పదనమును నిర్ణయించుట యుక్తియుక్తము కాదు.

ఆర్యభటుడు I: పైన పేర్కొన్న సూర్యసిద్ధాంతమునకు తరువాత ఆర్యభటుడు I 'ఆర్యభటీయము'అను గొప్ప జ్యోతిషగ్రంథమును వ్రాసెను. అతడు తన గ్రంథములో ఇతర శకములను చెప్పక కలియుగమే ఆధారముగా తీసికొని తన వయస్సును చెప్పుకొనెను. అతని కాలమునాటికి కలియుగములో 60 × 6, లేదా 60 × 60 సంవత్సరములు గడచెనా అనునది వివాదాంశము. అతడు "షష్ట్యబ్దానాం షడ్భిః" అని చెప్పెనని కొందరును, "షష్ట్యబ్దానాంషష్టిః" అని చెప్పి ఉండునని మరికొందరును వివాదపడుచున్నారు. అతడు కలి 360లో ఉండెను అనిన అతనికాలము క్రీ. పూ. 2642 అగుచున్నది. అతనికాల మెట్లున్నను ఆర్యభటుడు I భారతీయజ్యోతిర్గణితశాస్త్ర పితామహుడు అగుట నిస్సంశయము. అతడు చూపిన గణితవిద్యాపారంగత ఉన్నట్లుండి సముపార్జించుట సాధ్యము కాదుకదా. అతడు తన పూర్వులను పేర్కొనలేదు. అట్లు పేర్కొనిన గ్రంథములు భారతదేశ విప్లవములలో నశించి ఉండవచ్చును. ఆర్య

భటుడు I ఔదయికపద్ధతి [1], అర్ధరాత్రిపద్ధతి [2] అను రెండు విధములైన సిద్ధాంతములను ప్రచారములోనికి తెచ్చెను. అతనిని అనుసరించియే తరువాతివారు మందపరిధి [3] విధానమును వాడజొచ్చిరి. సూర్యసిద్ధాంతమునందుగల సంఖ్యలు ఆర్యభటుని అనుసరించి వరాహమిహిరునిచే పంచ సిద్ధాంతికలో సవరింపబడినవని కొందరి అభిప్రాయము. 'మహాభాస్కరీయము', 'లఘుభాస్కరీయము' అను రెండు గ్రంథములకు గ్రంథకర్తయైన భాస్కరాచార్య - I ఆర్యభటీయమునకు వ్యాఖ్యానము వ్రాసెను. అందలి ఒక శ్లోకమునుబట్టి పాండురంగస్వామి, లాటదేవుడు, నిశ్శంకుడు మొదలగువారు ఆచార్యుని ప్రథమ శిష్యగణములో చేరినవారని తెలియుచున్నది. లాటదేవుడు రోమక, పౌలిశ సిద్ధాంతములకు గ్రంథకర్తయని వరాహమిహిరుడు తన పంచసిద్ధాంతికలో పేర్కొనెను.

వరాహమిహిరుడు : ఆర్యభటుడు-I తరువాతి వాడయిన వరాహమిహిరుడు - ఆదిత్యదాసు పుత్రుడు; గణితవిద్యా విశారదుడు; స్కంధత్రయ (సిద్ధాంత, ఫల, ముహూర్త భాగములు) కోవిదుడు; పంచసిద్ధాంతిక కర్త; విక్రమార్క సభాలంకార భూతములగు నవరత్నములలో ఒకరత్నము. అతనికాలము (క్రీ. శ. 550) వివాదాస్పదము.

బ్రహ్మగుప్తుడు : ఇతడు అనేక సిద్ధాంతగ్రంథములను రచించెను. వాటిలో ప్రధానమైనది ఖండఖాద్యకము. అది అరబ్బుల ఖగోళవిద్యాప్రావీణ్యమునకు చేయూత నొసంగెనని ఆల్బరూనీ పండితుడు వ్రాసినాడు. ఆర్యభటీయము కొంత ప్రౌఢగ్రంథము. కాబట్టి సాధారణ గణితజ్ఞులకు సులభవేద్యముగా రచింపబడిన ఖండఖాద్యకము వలన బ్రహ్మగుప్తుని మేధాసంపత్తి వెల్లడి అగును. అతడు త్రిభుజముల యొక్క భుజములకును, వాటి ఎదుటి కోణ జీవలకు గల సంబంధమును కనుగొనెను; సూర్యచంద్రుల మందఫలములు [4] 15° అంతరముగల కోణముల జీవల పట్టికను ఇచ్చి, మధ్య విలువలు కనుగొనుటకు ద్వితీయ అంతర విధానమును కల్పించెను. ఇతడు శకసంవత్సరము 587 లో ఖండఖాద్యకము వ్రాసినట్లు తెలియుచున్నది. ఇచ్ఛాకాలము 587 శకము, చైత్రశుక్ల ప్రతిపత్తు, భానువారము. శకమనగా శాలివాహన శకమని తలచి, ఇతడు క్రీ. శ. 665 లో ఉండినట్లు కొందరు రూఢిపరచిరి. కాని ఈ నిర్ణయము చేసినవా రెవ్వరును క్రీ. శ. 665లో చైత్రశుక్ల పాడ్యమి ఆదివారము అగునో కాదో చూడలేదు, క్రీ. శ. 665 లో చైత్రశుక్ల పాడ్యమి మంగళవారము. 666లో సోమవారము. కాని శకమనగా వరాహమిహిరుని శకకాలము అని తీసికొనినచో క్రీ.శ. 15-3-36 శనివారము (అమావాస్య 33 గడియలు. మేషసంక్రాంతి 2 గ. 24 వి.గ.), క్రీ.శ. 16-3-36 చైత్ర శుక్ల ప్రతిపత్తు భానువారము. ఇందువలన బ్రహ్మగుప్తుని కాలము క్రీస్తుశకము మొదటిశతాబ్దము అనియు, ఏడవశతాబ్దము కాదనియు కొందరి అభిప్రాయము. కాలమెప్పుడైననేమి ? ఇతని గ్రంథము లన్ని దేశములలోను ప్రచారమునకు వచ్చి భారతీయ గణిత ప్రావీణ్యమును నెలకొల్పెను. కావున ఇతడు భారతీయులకు చిరస్మరణీయుడు, వారి నిరంతర కృతజ్ఞతకు పాత్రుడు. ఇతని గ్రంథమునకు వ్యాఖ్యాత లనేకులు. వారు లల్లాచార్యుడు (శకము 690), భట్టోత్పలుడు (శకము 888), పృథూకస్వామి (శకము 786), సోమేశ్వరుడు, వరుణుడు, ఆమరాజు (శకము 1102) మున్నగువారు. ఇచటకూడ శకము 'శాలివాహన శకమా ?', 'వరాహమిహిరుని శకమా ?' అను వివాదముకలదు. గణితమూలముగ ఇందలి శకము శాలివాహనశకము కాదనియు, క్రీ. పూ. 551 లో ప్రారంభమైనదని చెప్పబడుచున్న వరాహమిహిరునిశకమే అనియు కొందరి మతము. బ్రహ్మగుప్తుడు బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతము అను మరియొక గ్రంథము కూడ రచించెను.

భాస్కరాచార్య - II : గోళాధ్యాయము, సిద్ధాంతశిరోమణి అను రెండు జ్యోతిషగ్రంథములను రచించిన అసమాన మేధాసంపన్నుడు భాస్కరాచార్య-II తరువాతి జ్యోతిష్కులలో అగ్రగణ్యుడు. ఇతడు తన జన్మకాలమును గోళాధ్యాయమునందు చెప్పినాడు.

శ్లో॥ "రసగుణపూర్ణ మహీసమ శకనృపసమయ్యేఽభవన్మమోత్పత్తిః
రసగుణ (36) వర్షేణమయా సిద్ధాంతశిరోమణీ రచితా".

ఇతడు పేర్కొనిన శకము శాలివాహనశకము. కావున ఇతడు శాలివాహనశకము 1072 లో సిద్ధాంతశిరోమణి రచించెను. ఇతనిది శాండిల్యగోత్రము; సహ్యాద్రి చేరువనున్న విజ్జలవిడనగరము జన్మస్థలము. ఇతడు తన తండ్రి మహేశ్వరాచార్యులయొద్ద విద్య నభ్యసించినట్లు చెప్పుకొనినాడు. సిద్ధాంతశిరోమణిలో మొదటి భాగము లీలావతి; రెండవది బీజగణితము; మూడవది సిద్ధాంత శిరోమణి అను జ్యోతిర్గణితము. ఈ గ్రంథమునకు అనేక వ్యాఖ్యలు కలవు. అవి గంగాధిరవ్యాఖ్య (క్రీ శ. 1420),

1. సూర్యోదయమునుండి గ్రహముల ప్రథమ చలనమును గణించు పద్ధతి.

2. అర్ధరాత్రినుండి గ్రహముల చలనారంభముల గణించు పద్ధతి.

3. గ్రహముయొక్క ఉత్కేంద్రచలనమును లెక్కించుటకు ప్రాక్పత్రములను వినియోగించు పద్ధతి.

4. గ్రహముల వికారచలనము.

సూర్యదాసుని గణితామృతము (1538). గణేశ దైవజ్ఞుని బుద్ధివిలాసిని (1575), భాస్కరాచార్యుని వాసనా భాష్యము. రంగనాథదైవజ్ఞుడు, రామకృష్ణుడు, సూర్య మునీశ్వరుడు, కృపానాథుడు, మహీధరాచార్యులు మున్నగువారు కూడ వ్యాఖ్యలు వ్రాసిరి. ఆంధ్రానువాద ములుకూడ కలవు. అనువాదకులు వల్లభరాయుడు (15వ శతాబ్దము), తడకమళ్ళ వేంకటకృష్ణకవి (19వ శతాబ్దము). పావులూరి మల్లన (11వ శతాబ్దము) లీలావతిని ఆంధ్రీక రించెను. భాస్కరాచార్యునితో భారతీయగణిత పారంగతత అంతరించెను. విదేశీయుల విజృంభణముతో భారతదేశము స్వాతంత్ర్యము కోలుపోయి గతశతాబ్దమువరకు హీనస్థితి యందుండెను.

జయసింహుడు : ఇతడు 18వ శతాబ్దమున మొగల్ చక్రవర్తుల ఆదరణకు పాత్రుడై భారతీయ జ్యోతిష శాస్త్రమును పునరుజ్జీవింపజేసెను ; జయపుర వేధశాలను పునర్నిర్మాణము చేసెను ; కాశీ వేధశాలకు అనేక నూతన యంత్రములను సమకూర్చెను ; ఢిల్లీ, మధురా* నగర ములలో వేధశాలలు నిర్మించెను. అతడు చేసిన ఘనకార్య ములు మూడు : 1. నక్షత్రముల పట్టికలలో సవరణలు, పంచాంగములో అత్యావశ్యకములైన మార్పులు చేయుట; 2. పండిత జగన్నాథ సమ్రాట్టువంటి పెక్కుశాస్త్రజ్ఞులను ఆదరించుట ; 3. గణితమునందు జనులకు అభిరుచి పుట్టు నట్లు ప్రబోధము కావించుట.

గ్రీక్‌లు

గ్రీక్‌ల ఖగోళ పరిజ్ఞానము నైలునదీతీరవాసులైన ఈజిప్షన్‌లు పెట్టిన భిక్ష.

తేలీజ్ : ఇతడు క్రీ. పూ. 640 లో మైలీటస్ నగర ములో జన్మించెను. ఈజిప్టులో విద్యాభ్యాసముచేసి, గ్రీక్ విద్వాంసులలో అగ్రగణ్యుడై, ఇతడు జ్యామితియందు, ఖగోళ విద్యయందు అధ్యాపకుడు అయ్యెను. నక్షత్ర ములు అగ్నిగోళములనియు, చంద్రునికాంతి సూర్యజన్య మనియు, ప్రపంచమునకు కేంద్రస్థానము వహించు భూమి గోళమనియు ఇతడు బోధించెను. ఇతనికి క్రాంతి, విషు వృత్తముల లక్షణములు తెలిసియుండెను ; గ్రహణ సాధన సామర్థ్యము ఉండెను. అల్పసప్తర్షి మండలములోని నక్షత్ర ముల స్ఫుటస్థితిని ఇతడు కనుగొనగలుగుట ప్రశంస నీయము.

పితాగొరస్-అతని అనుచరులు : తేలీజ్ తరువాత ప్రసిద్ధి కెక్కినవాడు పితాగొరస్ (క్రీ. పూ. 550). ఇతడు భూమి తనలో తాను తిరుగుచు సూర్యునిచుట్టు తిరుగుచున్నదని ప్రతిపాదించెను. చివర నక్షత్రమండలము, తరువాత 5 గ్రహములు, సూర్యచంద్రులు, భూమి, ప్రతిభూమి - ఇవి అన్నియు 10 కక్ష్యలలో తిరుగుచున్నవని అతని అనుచరుల సిద్ధాంతము. నక్షత్ర మండలమునకు వెలుపల 'ఒలింపస్' ప్రతిభూమికి దగ్గర అగ్నిగోళము కలదని వారు తలచిరి.

యుడాక్సస్ (క్రీ. పూ. 429 - 348) : 'ప్లేటో' శిష్యుడైన ఇతడు శైశవావస్థలో ఉన్న గ్రీక్‌ల ఖగోళ విజ్ఞాన మును బాలారిష్టములు లేకుండ రక్షించిన ప్రతిభాశాలి. అతని సిద్ధాంతము : 1. ప్రతిగ్రహము తన్నుతాను చుట్టు కొనుచున్న గోళముపై గగనమున తిరుగుచున్నది. 2. గ్రహభ్రమణతలము గోళాక్షమునకు లంబముగా ఉండును. 3. గోళముయొక్క ధ్రువములు వేరుగతితో భ్రమణము చేయుచున్న మరియొక గొప్ప సకేంద్ర గోళముపై తిరుగును. ఈ రెండు గోళముల ధ్రువములు వేరు. 4. గ్రహగతిని వివరించుటకు ఇట్టి గోళములు మూడు, నాలుగు ఆవశ్యకములు. ఈ సిద్ధాంతము కెప్లర్ నాటి వరకు ప్రచారములో ఉండి, గ్రహగతుల వివరించు టకును, వాటి స్థితిని కనుగొనుటకును అనుకూలమై ఉండెను. దీని ప్రకారము సూర్యచంద్రులకు మూడు చల గోళములును, తక్కిన గ్రహములకు నాలుగు చలగోళ ములును ఆవశ్యకము.

అరిస్టాటిల్ (క్రీ. పూ. 4 వ శతాబ్దము) శిష్యులలో ఒక ప్రముఖుడు, యుడాక్సస్ సిద్ధాంతములోని లోపములను సవరించుటకు మరియొక గోళమును చేర్చెను. సూర్యగతి లోని మాంద్యతకుగాను రెండు గోళములను వాడెను. విషుచలనమునకును, విషువులకును గల మధ్యకాలములు అసమానములైనందున ఈ మాంద్యత చాలకాలముక్రింద నే కనుగొనబడెను. పై సవరణవలనసూర్యగతిసాధన ప్రాక్చక్ర ములు వాడుటవలన వచ్చు ఫలితమునకు సమానమయ్యెను. 27, 759 దినములలో 940 అమావాస్యలు వచ్చునని ఈ కాలమునందే గుర్తింపబడెను. ఇందువలన ఒక చాంద్ర మాన మాసములో పొరపాటు పదిసెకనులకంటె ఎక్కువ లేదని తేలును. భూమి తన అక్షముపై పరిభ్రమణము చేయు చుండుటవలన రాత్రింబవళ్లు ఏర్పడుచున్నవనికూడ ఆ కాలపువారు తెలిసికొనిరి.

అలిగ్జాండ్రియా పరిషత్తు : అలిగ్జాండర్ చక్రవర్తి ఈజిప్టులో తన పేరిట అలిగ్జాండ్రియాపురమును నిర్మించి, అచట ఒక యూనివర్సిటీని గొప్ప గ్రంథాలయమును స్థాపించి, ఆపట్టణమును సర్వకళలకు కేంద్రముగా చేసెను. అచటగణితము, ఖగోళశాస్త్రము, లలితకళలు

* ఉత్తర మధుర.

పురోగమించెను. వాటిని అభివృద్ధిపరచి, పోషించిన వారిలో చాలమంది గ్రీకులు.

అరిస్టార్కస్ (క్రీ. పూ. 275): అలిగ్జాండ్రియా పరిషత్తులో ప్రథముడు, గణిత ఖగోళ విద్యాపారంగతుడు అయిన ఇతడు భూమి పరిభ్రమించుచున్నదనియు, సూర్యునికి చలనములేదనియు, భూమి సూర్యునిచుట్టు క్రాంతివృత్తములో తిరుగుచున్నదనియు, భూమియొక్క అక్షము క్రాంతివృత్తమునకు ఏటవాలుగా ఉండుటవలన ఋతువులు ఏర్పడుచున్నవనియు, సూర్యుడు భూమికంటె చాల పెద్ద అనియు, సూర్యుని ఘనపరిమాణము భూమి కంటె 300 రెట్లు పెద్ద అనియును కనుగొనెను. ఇతని అనుచరులలో ఒకడు సముద్రములోని పోటు చంద్రుని వలన ఏర్పడుచున్నదనియు, చంద్రుని వృద్ధిక్షయములపై అది ఆధారపడి ఉన్నదనియు బోధించెను; నక్షత్రములను జాగ్రత్తగా అవలోకించి, వాటి నిరూపకముల జాబితా ఒకదానిని తయారుచేసెను.

ఎరాటోస్తెనీజ్ (క్రీ. పూ. 230): ఇతడు కటకాయన దినమున ఒకే రేఖాంశమునగల అలిగ్జాండ్రియా, సైను నగరములలో మధ్యాహ్నమున సూర్యుని నతాంశ (జెనిత్ డిస్టెన్స్)ను అవలోకించి, భూపరిధిని కనుగొనెను (చూ. ఎరాటోస్తెనీజ్ - అకారాది).

అపలోనియస్ (క్రీ. పూ. 200): ఇతని కాలమున యూక్లిడ్ జ్యామితి ప్రౌఢదశను చెంది ఖగోళశాస్త్రము నందు వినియుక్తమగుటకు వీలుగా ఉండెను. అంతవరకు ప్రచారములో ఉండిన సకేంద్రగోళ సిద్ధాంతము సిద్ధాంతుల ఆదరణ కోల్పోయెను. ప్రాక్చక్రము వాడుకలోనికి వచ్చెను. ఈ నూతన సిద్ధాంతముయొక్క ప్రధానవిషయములు: 1. భూమి ప్రపంచమునందు కేంద్రస్థితిని చెంది యున్నది; 2. దానిచుట్టు ప్రధాన కక్ష్యావృత్తములు కలవు; 3. ప్రాక్చక్రములో పోవుచున్న ప్రతిగ్రహము యొక్క కేంద్రము ప్రధానవృత్తముపై తిరుగుచున్నది; 4. బుధ శుక్రులకు ప్రధానవృత్తము సూర్యపథమైన క్రాంతివృత్తము; 5. వేరువేరు వ్యాసములుకల ప్రధాన వృత్తములు, ప్రాక్చక్రకక్ష్యావృత్తములు తీసికొని అన్ని గ్రహముల చారములను వివరింప వీలగును.

ఆనాడు సిద్ధాంతులకు రెండు ప్రధాన సమస్యలుండెను. 1. గ్రహముల చలనములలో భేదము సూర్యచంద్రుల విషయములలో ఉత్కేంద్రతల మూలమున వివరింపబడెను. అనగా సూర్యపథకేంద్రమునందు భూమిని పెట్టక కొంత జరిపి ఉంచబడెను. 2. ప్రతిగ్రహము ఏకరూపవేగముతో ప్రాక్చక్రములో తిరుగును. ప్రాక్చక్ర వృత్తకేంద్రము ఉత్కేంద్రవృత్తపరిధిపై తిరుగుటచే గ్రహగతిలో వక్రము, స్తంభనము మొదలగు గతిచేష్టలు కలుగునని సిద్ధాంతము చేయబడెను. ఇందుచే గ్రహస్తంభనమునకు కారణమిచ్చి రెండవసమస్య సాధింపబడెను. ప్రతిగ్రహమునకును ఈ రెండు వృత్తముల వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొనుటకు ప్రథమవృత్తమునందు ఆవృత్తికాలము గ్రహము యొక్క నాక్షత్ర భ్రమణకాలమునకు సమానమనియు, ప్రాక్చక్రమునందు ఆవృత్తికాలము గ్రహయుతి (సినాడిక్ పిరియడ్)కి సమానమనియు అపలోనియస్ వివరించెను. మున్ముందు హిపార్కస్ సిద్ధాంతమునకు ఇవి అన్నియు మూలతత్త్వము లయ్యెను.

హిపార్కస్ (క్రీ. పూ. 150): ఇతడు అలిగ్జాండ్రియాలో జన్మింపకపోయినను, ఆ పట్టణమును నివాసస్థానముగా చేసికొని గణిత, ఖగోళవిద్యలను బోధించెను; ఉత్కేంద్ర ప్రాక్చక్ర వాదములను దృఢపరచి, సూర్యచంద్రుల చారములను వివరించెను. ఇంతేకాక ఇతడు:

1. సూర్యపథమును క్రాంతివృత్తమని నిర్ణయించి, దాని ఉత్కేంద్రతయొక్క విలువను సాధించుమార్గమును చూపి, దానిచే సూర్యుని సాంవత్సరికపథమును వివరించెను.

2. అయన సంక్రాంతుల మధ్యకాలమును, సూర్యమంద ఫలమును కనుగొని, వీటిసహాయమున దైనిక సూర్యస్ఫుటమును కనుగొనుటకు మార్గముచూపెను.

3. పర్వముల ఆవృత్తికాలము, నాక్షత్రభగణకాలము, పాతసంక్రమణముల కాలము కనుగొని చంద్రచారమునకు సూత్రములేర్పరిచెను. చంద్రకక్ష్యకు, క్రాంతివృత్తమునకు మధ్యకోణము 5° అనియు, పాతము*ల ఆవృత్తి కాలము 19 సంవత్సరము లనియు కనుగొని చంద్రస్ఫుట సాధనము సులభము చేసెను.

4. సాయన సంవత్సరమానము, నాక్షత్ర సంవత్సర మానము శుద్ధముగాకనుగొని, తనపూర్వగు లిచ్చిన నక్షత్ర స్ఫుటమునకును తనకాలపు నక్షత్ర స్ఫుటమునకును వ్యత్యాసముండుట గ్రహించి, విషుచలనము కలదని కనుగొనెను.

5. వేయినక్షత్రముల జాబితా తయారుచేసి, వాటిని ఆరు తరములుగా విభజించెను.

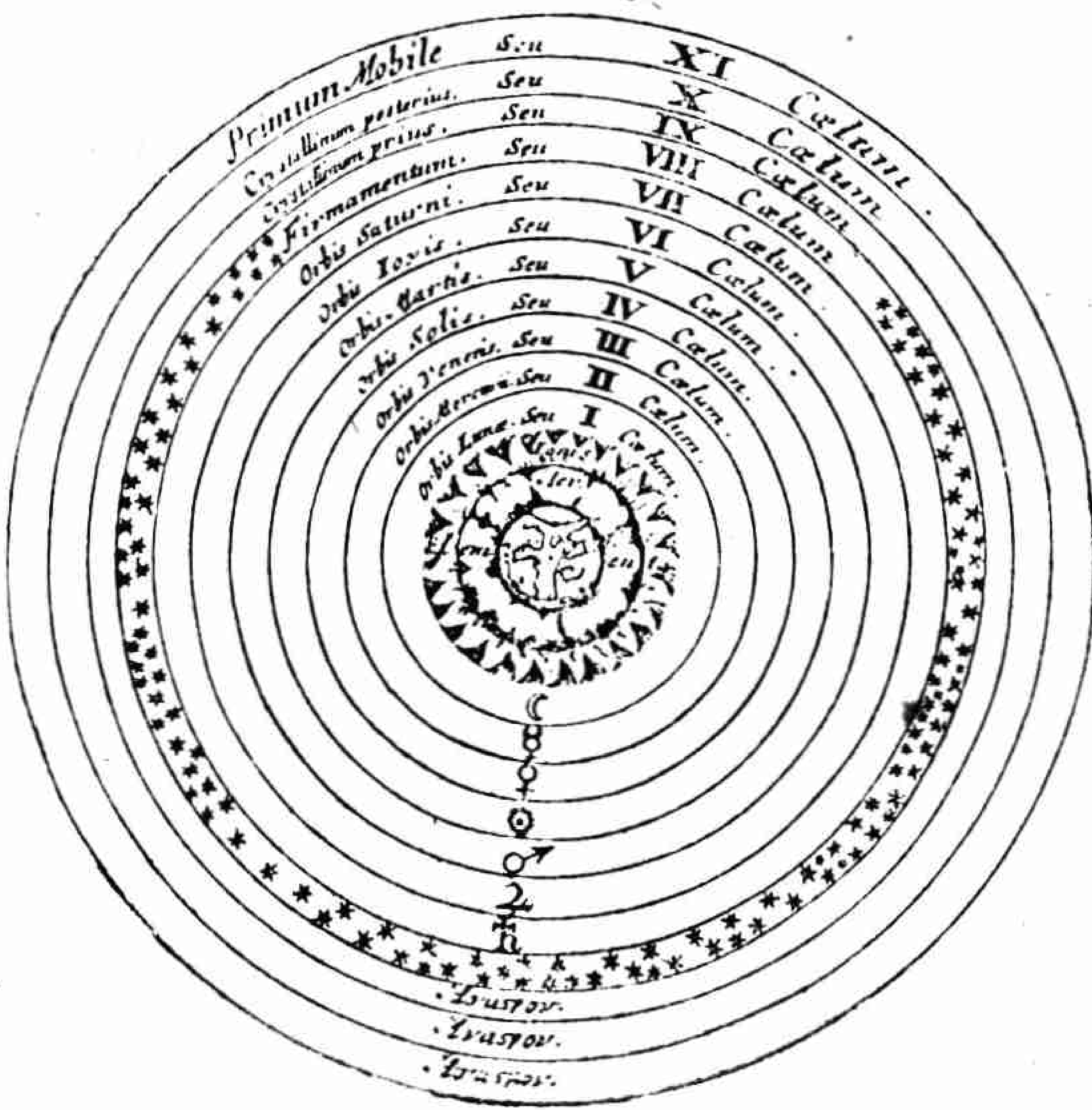
6. చంద్రునిదూరము నిర్ణయించెను, కాని సూర్యుని దూరము లెక్కించుటలో చాలపొరపడెను.

టాలెమీ (క్రీ. శ. 150): హిపార్కస్ తర్వాత ఇతడు తనకాలపు గణితఖగోళ విద్యావేత్తలలో ప్రథమగణ్యుడు.

* చంద్రుని కక్ష్య క్రాంతివృత్తమును ఛేదించుచోటు పాతము. అట్టిపాతములు ఉత్తరాభిముఖముగా, దక్షిణాభిముఖముగా క్రాంతి వృత్తమును ఖండించునపుడు ఏర్పడునవి రెండు గలవు.

అప్పటికి ప్రచారములో ఉన్న ఖగోళవిజ్ఞానమునంతయు ఇతడు క్రోడీకరించి 'అల్మజెస్ట్' అను గ్రంథమును రచించి, ఖగోళశాస్త్రవేత్తల కృతజ్ఞతకు పాత్రుడయ్యెను.

టాలెమీ గ్రంథములో మొదటి రెండు అధ్యాయములలో నిర్వచనములు, సూత్రములు కలవు. మూడవ అధ్యాయములో సూర్యునిగతి, సంవత్సరమానము, మంద ఫలములు వివరింపబడెను. 4వ అధ్యాయములో చంద్రస్ఫుటమునకు వలయు సూత్రములు కలవు. 5వ అధ్యాయములో సూర్యచంద్రుల లంబనము[1] ను కనుగొనువిధానము చెప్పబడెను. 6వ అధ్యాయములో గ్రహణసాధనము, మందాకిని



చిత్రము 29 టాలెమీ ఊహించిన విశ్వము

ఇందు భూమి, నీరు, గాలి, అగ్ని కేంద్రమున ఉన్నవి.

చర్చింపబడినవి ; 1022 నక్షత్రముల పట్టిక ఒసంగబడెను. మిగిలిన గ్రంథములో గ్రహస్ఫుట[2] సాధనకు మార్గములు వివరింపబడెను.

భూమి గుండ్రమనియు, గురుత్వాకర్షణము భూకేంద్రమువైపు ప్రవర్తించుననియు చెప్పి, అతడు తన గ్రంథములో క్రాంతివృత్తస్థితి, పరమాపక్రాంతి, ధ్రువముయొక్క ఉచ్ఛ్రత్వము, వివిధప్రదేశములందలి దినపరిమాణము మొదలగు విషయములను వివరించెను. చంద్రమందఫలములను పర్వదినములలో సవరించు విధానములను హిపార్కస్ ప్రతిపాదింపగా, టాలెమీ అష్టమినాటికి సవరణకు తగిన సూత్రములను కనుగొని చంద్రస్ఫుటములో ఒక డిగ్రీకంటె ఎక్కువ పొరపాటు లేకుండ చేసెను. గ్రహములు నక్షత్రములకంటె సమీపముగను, చంద్రునికంటె దూరముగను ఉన్నవని అతడు బోధించెను.

యూదులు

యూదుల ఖగోళ విజ్ఞానము ప్రశంసనీయము కాదు. కాని 3వ శతాబ్దిలో వారు ఖగోళశాస్త్రమునందు ఎక్కువ శ్రద్ధచూపిరి. యూదుల దినము సాయంకాల మారంభించును. మొట్టమొదట దినవిభజనమే ఉండినట్లుతోచదు. క్రీస్తుశకారంభకాలమున వీరు గ్రీకులవలె పగటిని 12 భాగములుగను, రాత్రిని 4 జాములుగాను విభజించిరి. వారినెలలు, పండుగలు చంద్రునిపై ఆధారపడి ఉండెను. వారు తొలిని ప్రాపంచిక వ్యవహారములలోను, తరువాత మతకార్యములందును బాబిలోనియా నెలలను వాడుకొనుచు వాటిని తమ పంచాంగములందు ఇమిడ్చిరి. ఆ పంచాంగము యూదు సంఘములలో 15 శతాబ్దముల కాలము ప్రచారమునం దుండెను. వారి సంవత్సరము శరత్కాల అమావాస్యనాడు ప్రారంభమగును. సాయనసంవత్సరమునకు సరిపుచ్చుకొనుటకు వారు తమ సంవత్సరమునకు అధికమాసము చేర్చి, ఋతువుల ఆవృత్తి కృషికర్మలకు అనుకూలముగ ఉండునట్లు చేసికొనిరి. సూర్యచంద్రులచారములు, విషుసంక్రమణ కాలములు గణించుటలో వారు ఆరితేరిరి. సప్తదినవారములను ఆచరణకు తెచ్చినవారు యూదులు. ఇతర దేశీయులు వారిని అనుసరించి వారవిభజన చేసిరని పాశ్చాత్యుల అభిప్రాయము.

ఖగోళశాస్త్రములో ఇంతటి విజ్ఞానము లభించుటకు పాశ్చాత్యదేశములలో సుమారు 800 సంవత్సరముల కాలము పట్టెను. కాని ఆర్యభటుని గ్రంథమును, బ్రహ్మగుప్తుని ఖండఖాద్యకమును విమర్శించునపుడు అంతటి నిపుణతకు ఎంతకాలము పరిశ్రమచేసి ఉండవలయుననుసంగతి కొంచెముకూడ యోచింపక, భారతీయ సిద్ధాంతములలో తప్పులు కలవనియు, భారతీయులు చక్కని సిద్ధాంతములను గ్రీకులనుండి గ్రహించిరనియు పాశ్చాత్యులు వ్రాసి ఉన్నారు.

మధ్యయుగము - అరబ్బులు

మధ్యయుగము (క్రీ. శ. 476 - 1500) నందు రోమనులు ఖగోళవిద్యయందు శ్రద్ధ చూపలేదు. గ్రీకులవంటి ఇతర పాశ్చాత్యులు కూడ ఎక్కువ కృషిచేసి ఉండక పోవుటవలన ఖగోళశాస్త్రరంగమునందు పురోగతి కొరవడి

1. రెండు భిన్నప్రాంతములనుండి కాని, ఒక ఆధారరేఖయొక్క రెండు చివరలనుండి కాని ఒక వస్తువును చూచినప్పుడు దాని దిశలోని భేదమునకు లంబనము అని పేరు.

2. ఒక నభోమూర్తియొక్క కక్ష్యలో దాని స్థానమును కచ్చితముగా గణించుటకు స్ఫుటము అని పేరు.

యేను.* తరువాత మహమ్మదీయ మత విజృంభణకాలములో నానాదేశములలోని విద్యలను సేకరించి, బాగ్దాద్ నగరములో భద్రపరచి మనకు అందించిన అరబ్బులకు మనము ఋణపడిఉన్నాము. క్రీ. శ. 8, 9 శతాబ్దములలో భారతీయ విద్వాంసులు అనేకులు బాగ్దాద్ నగరములో నివసించిరి.

అల్‌బట్టాని : అరబ్బులలో ప్రఖ్యాత ఖగోళశాస్త్రవేత్త అల్‌బట్టాని మెసపొటేమియాలో 'బట్టాన్' నగరమున జన్మించెను. ఇతని తండ్రి యొక ప్రసిద్ధ యాంత్రికుడు, ఖగోళశాస్త్రపరికరనిర్మాత. క్రీ. శ. 877 నుండి 918 వరకు ఖగోళశాస్త్రకృషిలో నిమగ్నుడై అల్‌బట్టాని నభోమూర్తులను అవేక్షించుచు కాలము గడపెను. అతడు 57 అధ్యాయములుకల గ్రంథ మొకటి వ్రాసెను. అందు గోళీయ త్రిభుజములను గురించిన సిద్ధాంతములు పెక్కు కలవు; త్రికోణమితి విపులముగా వాడబడెను; గోళీయ త్రిభుజసమస్యలు లంబవిక్షేపము మూలమున సాధింపబడెను; రెండు భుజముల మధ్యకోణము ఇచ్చినపుడు గోళీయత్రిభుజ సాధనమార్గము మొట్టమొదటిసారిగ చూపబడినది. పగటియందు శంకుచ్ఛాయతోను, రాత్రులందు నక్షత్రావలోకనము చేతను కాలమును కనుగొను విధానము అల్‌బట్టాని గ్రంథమున కలదు. పరమాప క్రాంతి యొక్క విలువ ఒక 'కల'కు సమానమని అతడు నిరూపించెను; ఒకటి, రెండు గంటల వ్యత్యాసముతో విషుప్రవేశ కాలమును నిర్ణయించెను. గ్రీకులకంటె శుద్ధముగ క్రాంతి వృత్తమును ఇతడు కనుగొనెను. సూర్యునిపరిజ్యాలోనిచలన గతిని కనుగొన్నవారిలో ఇతడే ప్రథముడు. చంద్రుని లంబనము, సూర్యచంద్రగ్రహణ నిర్ణయము, అన్నిప్రాంతములకు గ్రహస్ఫుటము, నక్షత్ర నిరూపకములు-ఇవి అతని గ్రంథము కడపటి అధ్యాయములో ప్రస్తావింపబడిన విషయములు.

అబుల్‌వాఫా : ఇతడు బాగ్దాద్‌లోని కడపటి ఖగోళశాస్త్రవేత్త. ఇతడు గొప్ప సిద్ధాంత గ్రంథమును రచించెను. క్రీ. శ. 998లో మరణించెను.

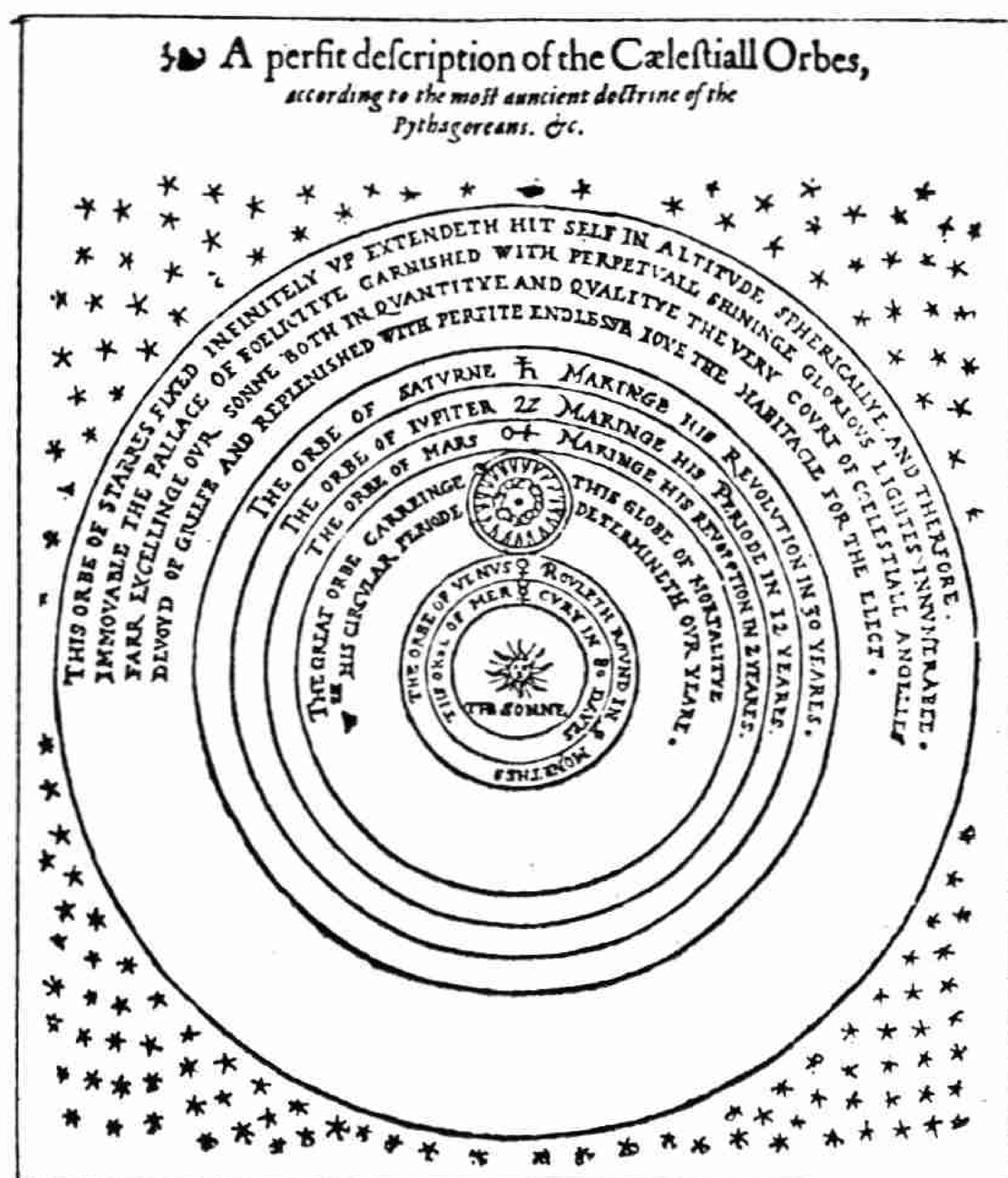
నాజరుద్దీన్ (క్రీ. శ. 1201 - 74) : ఇతడొక గొప్ప వేధశాలను నెలకొల్పి, అందు సాటిలేని శుద్ధతగల యంత్రములను అమర్చి, తత్సహాయమున సంపాదించిన నక్షత్ర గ్రహావలోకనముల ఫలితములను గ్రంథస్థము చేసెను. గ్రహచారము చక్కగను, నిర్దుష్టముగను కనుగొనుటకు తగినట్లు పట్టికలను రచించెను.

ఉలూగ్‌బేగ్ (క్రీ. శ. 1430) : ఈ ఖగోళశాస్త్ర విద్వాంసుడు సమర్‌ఖండములో జన్మించెను. నక్షత్రముల, గ్రహముల భోగములు, శరములు, అంశలలోను, కలలలోను కనుగొనుటకు ఇతడే మొదటిసారిగ ఏర్పాటుచేసెను.

అరబ్బుల ఖగోళవిజ్ఞానము ఉలూగ్‌బేగ్‌తో అంతరించెను. తరువాత కోపర్నికస్ జననమువరకు విద్యలు, కళలు కాలచక్రమహిమచే గౌరవహీనములై, తగిన పోషణలేక కృశించుటచే జగము నిబిడీకృత అజ్ఞానాంధకారావృతమై ఉండెను. ధూమకేతువుల గురించిన కృషి అందులోను 70 ఏండ్ల ఆవృత్తికాలముగల హేలీ ధూమకేతువు అవలోకనము - ఒకటియే ఈకాలములోని ప్రధాన విషయము.

నవీనయుగము - పూర్వభాగము

విజ్ఞానపునరుద్ధరణ యుగము (క్రీ. శ. 15వ శతాబ్దము) నందు ఆవిర్భవించిన విజ్ఞానభానుని తొలికిరణములను అందుకొని పెంపుగన్న శాస్త్రములలోకెల్ల మొట్టమొదటిది ఖగోళశాస్త్రము. ఈ పెంపు అదివరకు 11 శతాబ్దముల నుండి ప్రచారములోఉన్న టాలెమీ భూకేంద్ర సిద్ధాంతములోని లోపములను పరిశీలించి, నభోమూర్తుల స్థానప్రకాశ



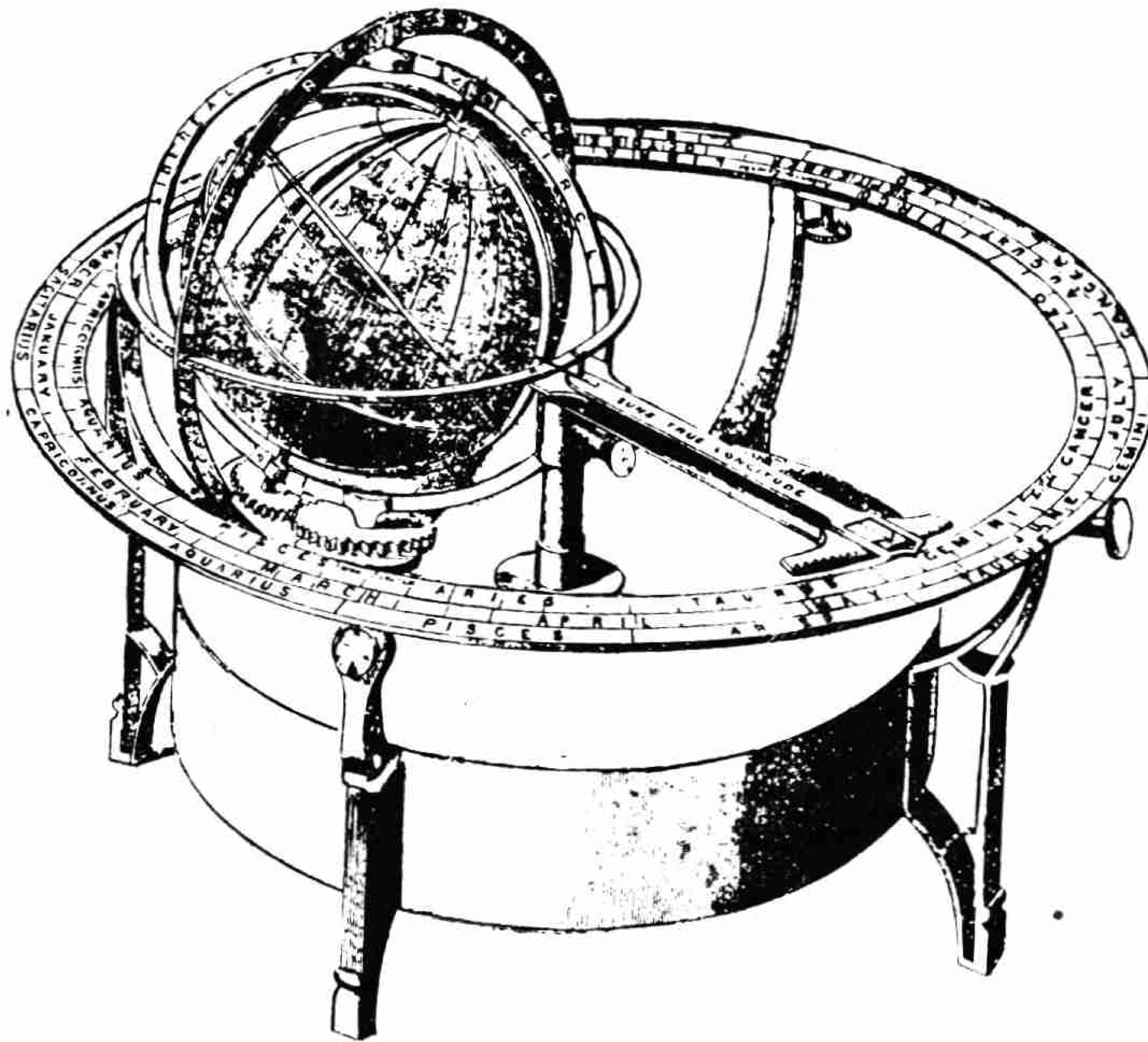
చిత్రము 30 కోపర్నికస్ ఊహించిన విశ్వము

పర్యవేక్షణలను ఆధారముగాగొని, సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించిన కోపర్నికస్ నిర్వాహముతో ప్రారంభమయ్యెను.

---

* 5వ శతాబ్దమున కెపెల్లా అను ఖగోళశాస్త్రవేత్త భూమి ఖగోళమునకు కేంద్రములో లేదనియు, బుధశుక్రులు సూర్యుని చుట్టు భ్రమణము చేయుదురనియు తెలిసికొనెను.

కోపర్నికస్ : ఇతడు 19-2-1473 లో పోలండ్ దేశములో విశ్చ్యులానదీ తీరమునందున్న ఒక గ్రామములో జన్మించెను. స్వదేశములోఉన్న క్రాకో యూనివర్సిటీలో విద్యాభ్యాసముచేసి, తరువాత ఇటలీ యూనివర్సిటీలో గల ప్రముఖులవద్ద ఉన్నత విద్యను అభ్యసించి, ఇతడు మేటిశాస్త్రాధికారి అయ్యెను. మతదీక్ష స్వీకరింప వలయునన్న తన మొదటి తలంపును విరమించుకొని, కోపర్నికస్ కొంతకాలము న్యాయశాస్త్రమును అభ్యసించి, తరువాత కొందరు గణితాచార్యుల ప్రోత్సాహమున గణితము నేర్చి అందు ఉత్తీర్ణుడయ్యెను. 17 శతాబ్దుల కాలము విశ్వగోళములో కేంద్రస్థానమును అధిష్ఠించిన భూమిని దించి ఇతడా గౌరవస్థానమున సూర్యుని ప్రతిష్ఠించెను. తన కాలములో ప్రచారములో ఉన్న టాలెమీ సిద్ధాంతములోని ప్రాక్చక్రములు, ఉత్కేంద్రతలు అధిక సంఖ్యలో అనవసరములనియు, వాటిని ఉపయోగించి గ్రహస్ఫుటము చేయుట అధిక ప్రయాసతో కూడిన పనియనియు గ్రహించి, కోపర్నికస్ గణితశాస్త్ర విమర్శనతో సులభమార్గములు కనుగొనుటకు అవిరళకృషి కావించెను. తత్ఫలితమే భూకేంద్ర సిద్ధాంతమునకు బదులు శాస్త్రసమ్మతమగు సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతస్థాపనము. ఈ సిద్ధాంతము గొప్ప ఆందోళనమును లేవనెత్తెను. అది క్రైస్తవ మతవిరుద్ధమని మతాచార్యులు తీవ్రముగ ప్రతిఘటించిరి. క్రైస్తవ మతగురువగు పోప్ అనుమతిలేనిదే తన సిద్ధాంతమును ప్రచురింపగూడదనియు, ప్రచురించినచో మతాచార్యులశిక్షకు పాత్రుడు కావలసియుండుననియు శాసింపబడుటచే, కోపర్నికస్ గ్రంథస్థముచేసిన తన సిద్ధాంతమును రహస్యముగ కొంచెము కొంచెముగా ప్రచురింపవలసినవాడయ్యెను. అతని మరణానంతరమే ఆ గ్రంథము ప్రకటితమయ్యెను. కోపర్నికస్ వాదము యుక్తమని సమర్థించిన చాలమంది కష్టములు అనుభవించుటయేగాక ప్రాణములు సైతము కోలుపోయిరి. అట్టివారలలో కాష్ఠమునకు కట్టబడి సజీవదహనమునకు గురియైన బ్రూనా ఒకడు.



చిత్రము 31 భూమియొక్క చలనమును వివరించుటకు నిర్మించిన గోళము

కోపర్నికస్ గ్రంథమునకు 'నభోమూర్తుల భ్రమణములు' అని పేరు. ఇందు భూకేంద్ర సిద్ధాంతము ఖండింపబడి, భూమి స్థిరముగా ఉండక చలించుచున్నదనియు, గ్రహములకు సూర్యుడు కేంద్రస్థితియందున్నాడనియు ప్రతిపాదింపబడెను. ఆ గ్రంథములోని విషయములు : మొదటి అధ్యాయములో భూమి గోళమనియు, భూమికి త్రివిధ గతులు కలవనియు ప్రతిపాదింపబడెను. గోళీయ త్రిభుజములను గూర్చిన సిద్ధాంతములు వివరింపబడెను; విషుచలనమునకు సవరణయు, నక్షత్రముల నిరూపకములును ఒసంగబడెను. రెండవ అధ్యాయములో పరమాపక్రాంతి విలువ చర్చింపబడెను. మూడవ అధ్యాయములో విషుచలనము వివరింపబడెను. విషుభ్రమణకాలము 26,000 సంవత్సరములని చెప్పబడెను. సత్యమగు భూచలనమువలన సూర్యుడు చలించుచున్నాడను భ్రమకలుగుచున్నదను సాపేక్షతా వాదమును దృఢపరిచెను. ఆల్ బట్టాని చెప్పినట్లు మందోచ్చ[1] శీఘ్రోచ్చ[2]లకు చలనముకలదని నిరూపించెను. 4 వ అధ్యాయమునందు చంద్రచారములోని పొరపాటులు సవరించుటకు సూత్రములుకలవు. 5 వ, 6 వ అధ్యాయములలో బుధశుక్రులచారములు వివరింపబడినవి. గ్రహముల నాక్షత్రభ్రమణ కాలములు, యుతిభ్రమణ కాలములు, వాటి పథముల సాపేక్షవిలువలు చెప్పబడెను. అవి అన్నియు ఇప్పటివిలువలకు సరిపోవుచున్నవి. సూర్యకేంద్ర

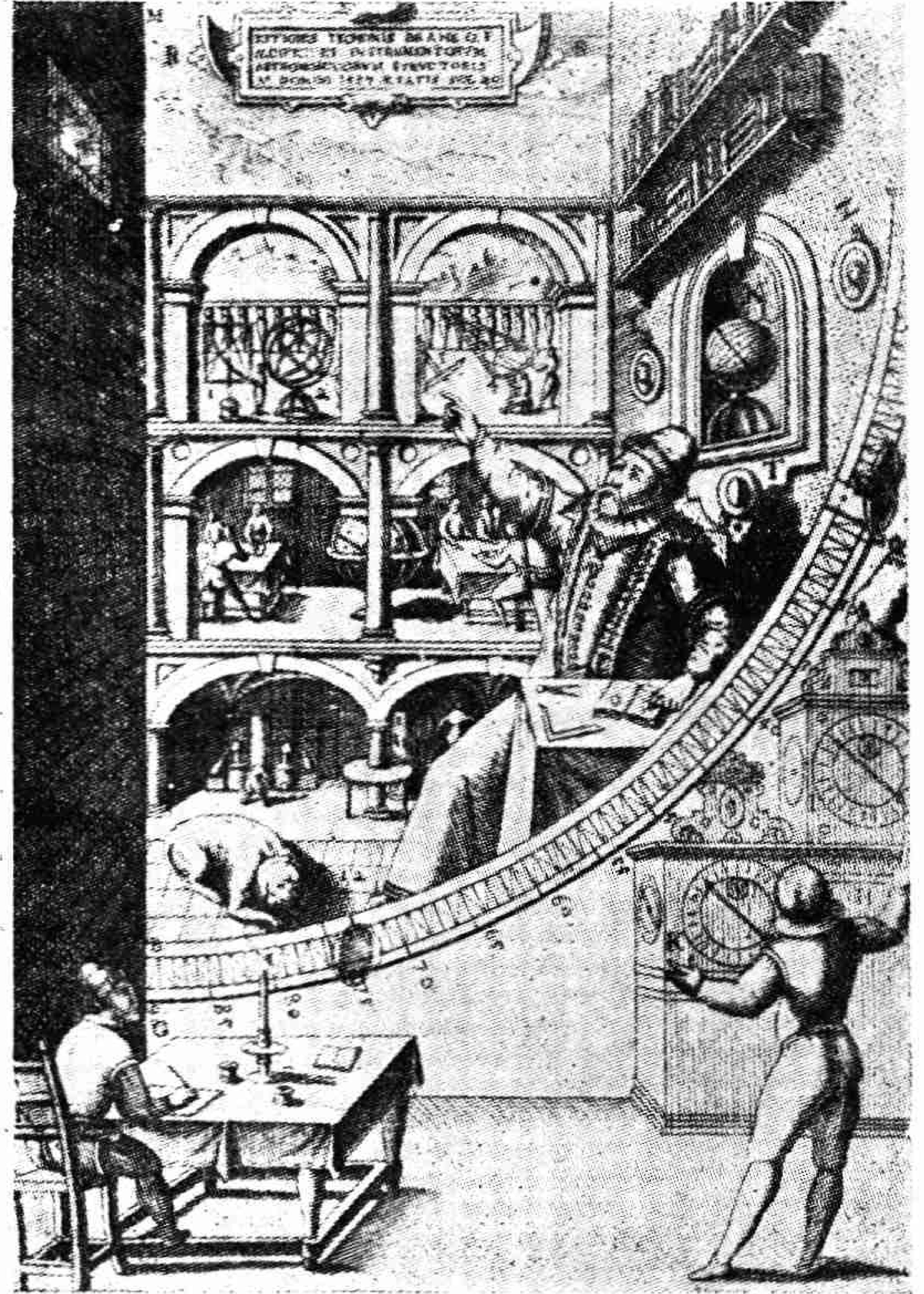
1. మందోచ్చ = గ్రహకక్ష్యయొక్క ఉచ్చనీచబిందువు.
2. శీఘ్రోచ్చ = రెండుగ్రహముల యోగము (యుతి).

సిద్ధాంతమువలన కోపర్నికస్ గ్రహముల వక్రగతులను విశదీకరించుటకు ప్రాక్చక్రముల ఉపయోగము కొంత వరకు తగ్గింపగలిగెను కాని వాటిఉపయోగము పూర్తిగా వదలుకొనలేక పోయెను. అతని సిద్ధాంతములో వాటి సంఖ్య 34. (చంద్రునికి 4, భూమికి 3, బుధునికి 7, ఇతర గ్రహములకు చెరి 5),[1] సూర్యునిచుట్టు భూమితోపాటు తిరుగుచున్న శుక్రాదిగ్రహముల కక్ష్యలు వృత్తములే అని కోపర్నికస్‌కూడ తలంచెను గాని అవి దీర్ఘవృత్తములని గ్రహింపలేకపోయెను. కాబట్టి అతడు దృక్సిద్ధకక్ష్యలను అనుసరించుటకు ప్రాక్చక్రములను పరిమితముగా వాడ వలసి వచ్చెను. ఇట్లు క్లిష్టమైయున్న టాలెమీ సిద్ధాంత మును అతడు సవరించి, తన సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతమును తక్కువ క్లిష్టము కావించెను. కోపర్నికస్ నక్షత్రములు అన్నియు సమానదూరములో ఉండునని అభిప్రాయ పడెను. కాని ఇటీవల కనుగొనబడిన వాటి వార్షికలంబన ముల వలన ఆ అభిప్రాయము తప్పని నిరూపింపబడెను.

టైకోబ్రాహి: దృగ్గణిత విశారదుడైన ఇతడు 1546 లో డెన్మార్కులో ఒక సంపన్న కుటుంబములో జన్మించెను. ఇతని పూర్వులు స్వీడెన్ దేశీయులు. రాజానుగ్రహమును పొందినవాడై ఇతడొక గొప్ప వేధశాలను కట్టించెను.

ఇతడు నక్షత్రావలోకనమునందు, గ్రహావలోకము నందు మిక్కిలి నిపుణుడు. 21 సంవత్సరములు గగనావ లోకనము చేసి నక్షత్రముల, గ్రహముల విశుద్ధస్థానములను జాబితాలయందు వ్రాసియుంచెను. ఇందుగల పొరపాటు ఒకటి రెండు కళలకంటె ఎక్కువ ఉండదు. 1563 లో సంభవించిన గురు శని గ్రహముల సంయోగమును ఇతడు అవేక్షించి ఆనాటి పథకములో చాలదినములవరకు పొర పాటు కలదని గమనించెను. 1577 లో ఇతడొక గొప్ప ధూమకేతువును అవలోకించి, అది శుక్రమండల బాహ్య వర్తియనియు, భూవాయుమండల జన్యము కాదనియు నిరూపించి, ధూమకేతువులు భూవాతావరణమునుండి పైకి నిర్గమించిన వాయువిశేషములని అదివరకు ప్రచార ములో ఉన్న భ్రమను పోగొట్టెను. ధూమకేతువులు ఉల్కలు కావనియు, అవి సూర్యుడు కేంద్రముగా భ్రమ ణముచేయు నభోమూర్తులే అనియు ఇతడు ప్రతిపాదించెను.

ఇతడు సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతమును అంగీకరింపలేదు; నక్షత్రములకు చలనము కలదను కోపర్నికస్ వాదమును ఖండించెను.[2] టాలెమీ వాదమును అనుసరించి, సూర్య చంద్రులు అచలమైన భూమిని చుట్టి తిరుగునట్లును తక్కిన గ్రహములు సూర్యుని చుట్టి తిరుగునట్లును సిద్ధాంతముచేసి గ్రహగణితమునకు మూలతత్త్వములను బోధించెను. వక్రీభవనజనిత గణిత దోషములను సవరించు విధానము ఇతడే వాడుకలోనికి తెచ్చెను. సిద్ధాంతమునందు ఇది ఘనకార్యము.



చిత్రము 32 టైకోబ్రాహి
ఖగోళ పరిశోధనలను వివరించు కుడ్య చిత్రము

ఇతడొక పెద్ద గోళమును నిర్మించి, అందు 777 నక్షత్ర ములను నిర్దేశించెను. సూర్యస్థితిని ప్రతిదినము అనేక సంవ త్సరములవరకు గమనించి, జాబితాలు వ్రాసి ఉంచెను. ఖగోళశాస్త్రమునందు ఇతడు చేసిన కృషి కోపర్నికస్ సిద్ధాంతమునకు పునాదులు దృఢపరచెను; కెప్లర్ గ్రహగతి సూత్రములను, న్యూటన్ గతిసూత్రములను ప్రతిపా దించుటకు సహాయకారి అయ్యెను.

---

1. భారతీయుల సిద్ధాంత గ్రంథములలో గ్రహస్ఫుటసాధ నము ఇంతకఠినముగ లేదని నిశ్చయముగ చెప్పవచ్చును.

2. భూమినుంచి చూచినపుడు ఒక సంవత్సరములో ఆకస మందు నక్షత్రములయొక్క స్థానములలో మార్పు కాన రామిచే ఇతడు భూమి అచలమని చెప్పినాడు. నక్షత్రములు అపారదూరములలో ఉండుటచే వాటి స్థాన విచలనము లను అతని ఉపకరణములు నిరూపింపలేకపోయి ఉండ వచ్చును.

గెలీలియో: ఖగోళశాస్త్ర పరిశీలనమున దూరదర్శనిని ప్రవేశపెట్టి, అపూర్వ విషయములను వెల్లడించిన ఇతడు 1564 లో ఇటలీదేశములోని పీసానగరమున జన్మించెను. పీసా, పాడువా యూనివర్సిటీలందు ఖగోళశాస్త్రము బోధించెను.

1604 లో ఒక వింతదృశ్యము ఆకాశములో కనబడెను. దానిని ఈకాలములో సూపర్ నోవా అని వ్యవహరింతురు. ఆ నభోమూర్తి యొక్క ప్రకాశము మొదట గంటగంటకు అధికమై, తరువాత క్రమేణ తగ్గి, తుదకు అది అదృశ్యమయ్యెను. పామరజనులకు ఆ దృశ్యము, ఆశ్చర్యభయోత్పాతములు కలిగించెను. యూనివర్సిటీ ఖగోళశాస్త్రాచార్యుడు కావున గెలీలియో దానిని మిక్కిలి శ్రద్ధతో విమర్శించి, ఆ వింతదృశ్యము భూమిలోనుండి ప్రసరించు కాంతికిరణములచే ఏర్పడినది అనియు, అది చంద్రమండలమునకు ఆవలనున్నది అనియు తెలియజెప్పెను.

ఖగోళశాస్త్ర చరిత్రలో 25-8-1609 ఒక మహత్తర దినము. ఆనాడు గెలీలియో ఒక దూరదర్శనిని నిర్మించి దాని సహాయమున దూరమున ఉన్న వస్తువు చాలదగ్గరగను పెద్దదిగను కనుపడునట్లు చేసెను. ఆ దూరదర్శనితో ఆకసమును పరిశీలించగ ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు కలలోనైన ఊహింపని చంద్రమండలములోని పర్వతపంక్తులు, గురుగ్రహముచుట్టు తిరుగు ఉపగ్రహములు, శనికంకణములు గోచరించెను. నాడు వాటిని చూచి జనులు విస్మయచకితులైరి.

చంద్రమండలములోని పర్వతశిఖరములు చాల ఎత్తయినవి. అందులో ఒకటి దాదాపు ఎవరెస్ట్ శిఖరమంత ఎత్తు ఉండును. సూర్యునికి ఎదురుగాఉన్న పర్వతసానువులు ప్రకాశించును, ఆవలవైపువి చీకటితో నిండియుండును. చంద్రమండలముపై ఉండు వెలుగు చీకటిరేఖకు కొంచెమావలనున్న పర్వతశిఖరములు కొన్ని సమయములందు సూర్యకాంతిచే ప్రకాశితములై నక్షత్రములవలె కన్పట్టును. ఇవి అన్నియు అతడు ప్రకటించిన విషయములు.

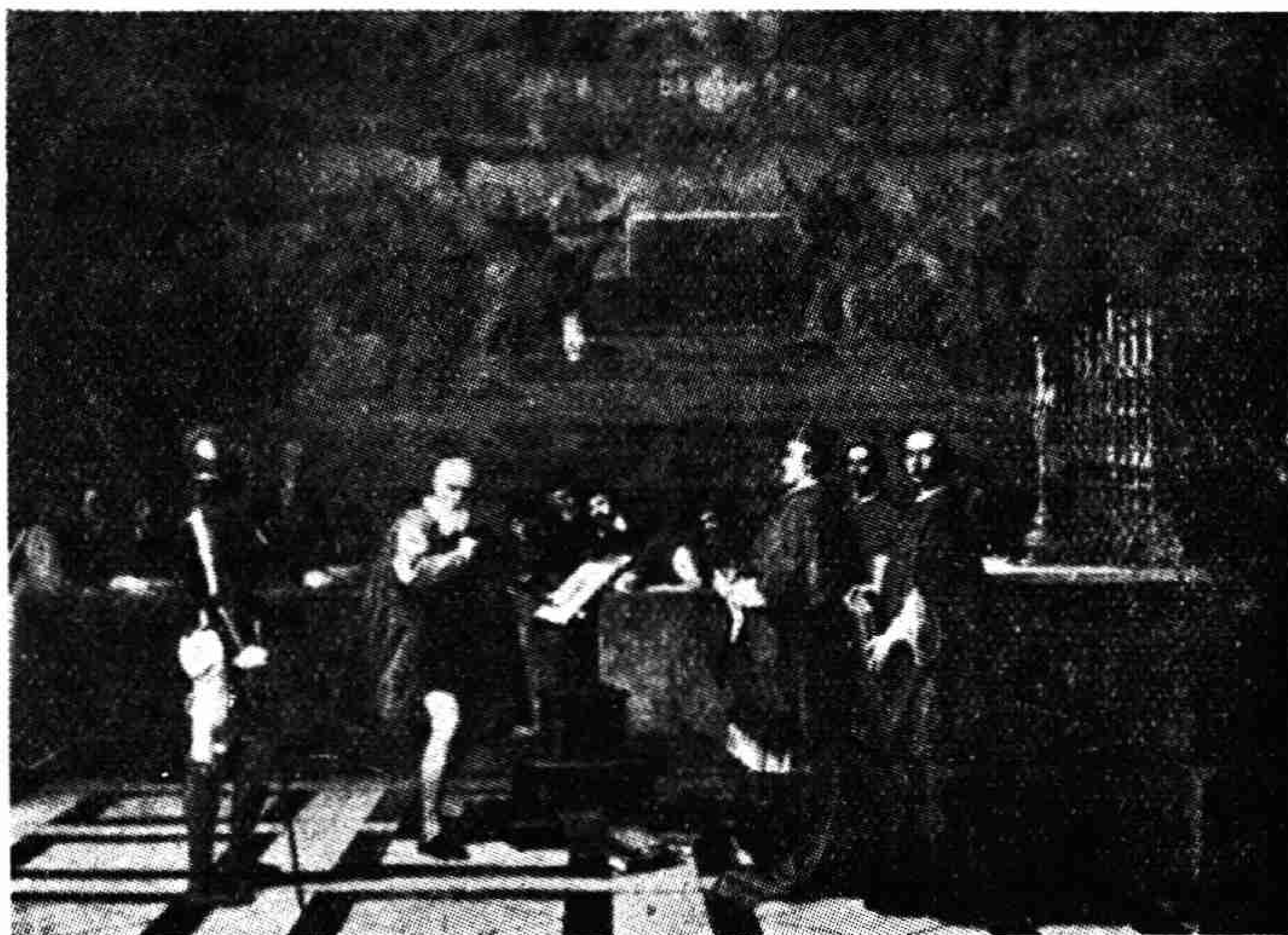
7-1-1610 నాడు గెలీలియో తన దూరదర్శనితో గురుగ్రహమును అవేక్షింపగా అతనికి ఒక అత్యద్భుతదృశ్యము గోచరించెను. గురుని చుట్టు తిరుగుచున్న ఉపగ్రహములు మూడు అతనికి కనిపించెను. మరునాడు 4 వ ఉపగ్రహము కన్పడెను.[1] గెలీలియో మొదట వాటిని నక్షత్రములని తలంచెను; కాని తరువాత వాని త్వరితగమనమును, స్థితులలో మార్పులను గుర్తించి అవి నక్షత్రములు కావనీయు బుధుడు, శుక్రుడు సూర్యుని చుట్టు తిరుగునట్లు అవి గురుని చుట్టుతిరుగు ఉపగ్రహములనియు తీర్మానించెను. టాలెమీ సిద్ధాంతము దృక్సిద్ధముగా సరిపడకపోవుటచే, అతనికి కోపర్నికస్ సిద్ధాంతములో గట్టి నమ్మకము కలిగెను. తన చుట్టు తిరుగు చంద్రునితో భూమి సూర్యునిచుట్టు తిరుగుట ఎట్లు పొసగునని సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతమునకు ప్రాతికూల్యము చూపినవారికెల్ల ఈ ఆవిష్కరణము గొప్ప ఆందోళనమును కలిగించెను. తన చుట్టును 4 ఉపగ్రహములు తిరుగుచుండగా గురుగ్రహము సూర్యునిచుట్టు తిరుగుచున్నదను విషయము ప్రత్యక్షముగా చూచిన తరువాత వారి ఆక్షేపణలకు బలము లేకపోయెను.

23-7-1610 నాడు గెలీలియో తన దూరదర్శనిని శనివైపు త్రిప్పెను. చాల చోద్యమయిన దృశ్యమాతని కంటబడెను. అతని దూరదర్శనియొక్క అధికీకరణ సామర్థ్యము ఎక్కువగా లేకపోవుటవలన ఆ అద్భుత దృశ్యములోని రహస్యములు అతనికి విశదముగ కనబడకుండెను. గురుగ్రహమునకువలె చాలవేగముగ భ్రమించుచున్న ఉపగ్రహములు రెండు శనికి కూడ కలవని అతడు ఊహించెను. శని వృద్ధుడని అప్పటి ఖగోళశాస్త్రజ్ఞుల అభిప్రాయమైనందున శనిగ్రహము గురించి ఒక స్నేహితునికి 'గురునకు ఒక సభకలదని కనుగొంటిమి, సూర్యునికి ప్రదక్షిణము చేయునప్పుడు ఈ వృద్ధునకు ఇద్దరు సేవకులు సహాయపడుచున్నారు' అని అతడు వ్రాసెను. అనుదినము అతడు శనిగ్రహమును పరీక్షించుచుండగా 1612 లో ఒకనాడు శని సేవకులు కనిపింపకపోవుటచే అతని చోద్య మధికమయ్యెను. "శని తన పుత్రులను తానే మ్రింగివేసె" నని ఆ విషయమును అతడు తన స్నేహితునకు వ్రాసెను. అట్లు శని అనుచరులు కనబడకపోవుటకు కారణము అతనికి తెలియలేదు, కాని వారు మరల తప్పక కనబడుదురని మాత్రము అతడు విశ్వసించెను. శని చుట్టునుండు కంకణములను అనుచరులని, లేదా ఉపగ్రహములని గెలీలియో భావించెను. 15 సంవత్సరముల కొకసారి శని క్రాంతివృత్తమును దాటును. అప్పుడు భూమికి సాపేక్షముగ శనిగ్రహ సన్నివేశమందు మార్పుకలుగుటచే ఆ కంకణముల అంచులే మనకు సన్నని రేఖలవలె గోచరించును. చిన్న దూరదర్శనిలో ఆ రేఖలు కూడ కనిపించవు. క్రమేణ శని క్రాంతివృత్తమునుండి వెలుపలికి వెళ్లగా ఆ కంకణములు మరల మనకు అందముగా గోచరించును. 1612 లో కనపడని శని అనుచరులు 1616 లో మరల గెలీలియోకు కనిపించిరి.

1. ఆ మరునాడు మారియస్ అను జర్మనీ ఖగోళశాస్త్రజ్ఞుడు వాటిని స్వతంత్రముగా కనుగొనెను. వాటి ప్రస్తుత నామములు అతడు పెట్టినవే.

చంద్రునికివలె శుక్రునికిగూడ కళలు కలవని గెలీలియో తన దూరదర్శని సహాయమున కనిపెట్టెను. చంద్రునికి అమావాస్య ఎట్లో శుక్రునికిగూడ అట్లే అస్తంగత సమయము కలదు. అపుడు శుక్రుడు సూర్యకాంతిచే తిరోహితుడై మనకు కానరాడు. సూర్యునికి కొంతదూరము పోయినపిదప చంద్రరేఖవలె శుక్రరేఖ దూరదర్శనిలో కన్పడును. కళలు వృద్ధియై, పూర్ణమండలము దృక్పథములో పడు సమయమున శుక్రుడు మరల సూర్యకిరణజాలములో అదృశ్యుడగును. శుక్రుని పూర్ణబింబకాంతి మనకు లభింపకపోవుటచే, మన పూర్వులు అతనికి ఏకాక్షుడనియు, ఒంటికంటిదేవర యనియు పర్యాయపదములు వాడియుండిరనవచ్చును. చంద్రశృంగములవలె శుక్రునికి గూడ శృంగములు కలవని గెలీలియో కనుగొనెను.

కృత్తిక మృగశిరా నక్షత్రరాశులలో అనేకనూతన నక్షత్రములు కలవని గెలీలియో దూరదర్శని సహాయమున చూపించెను; మందాకినిలో మేఘమువలె ఉన్నదంతయు సన్నని నక్షత్రబృందమని తెలియజేసెను.



చిత్రము 33 సంప్రదాయవాదమును ధిక్కరించి సత్యవాదమును ప్రతిపాదించినందులకు గెలీలియో పోపు సభలో తీవ్రమైన విచారణకు గురి అయ్యెను.

దూరదర్శనితో అవేక్షించి, సూర్యబింబములో కళంకములు కలవని గెలీలియో ప్రకటించిన నాటియుండియే సూర్యునిగూర్చిన నిజమైన పరిశోధన ప్రారంభమయ్యెనని చెప్పవచ్చును. సూర్యబింబములో మచ్చలుండుట వట్టి కంటితో కనిపెట్టలేము. నేత్రకటకమునకు కొంతదూరమున తెరగట్టి, దానిపై సూర్యుని ప్రతిబింబమును పడనిచ్చి. ఏడాది పొడుగున పరీక్షించి, సూర్యబింబమునకు అవేక్షకునకు మధ్య చలించు లంబనము లేనందున ఆ కళంకములు నక్షత్రములు కావనియు, బుధాదిగ్రహములు సూర్యుని దాటుటచే ఏర్పడినవి కావనియు, మేఘములుకూడ కావనియు అతడు తీర్మానించెను. సూర్యబింబనిరక్షరేఖకు ఇరుప్రక్కల 30° వరకు గల మండలములందు ఆ మచ్చలు కనబడును. ఈ కళంకముల చలనమునుండి సూర్యబింబము తన అక్షము చుట్టు భ్రమించుచున్నదని శాస్త్రవేత్తలు ఊహించిరి. కళంకముల పరిసరప్రాంతములు ఎక్కువ తేజోవంతములు అగుటచే, అవి నల్లగా కనపడి, తమ పేరు సార్థక్యము చేసికొనును.

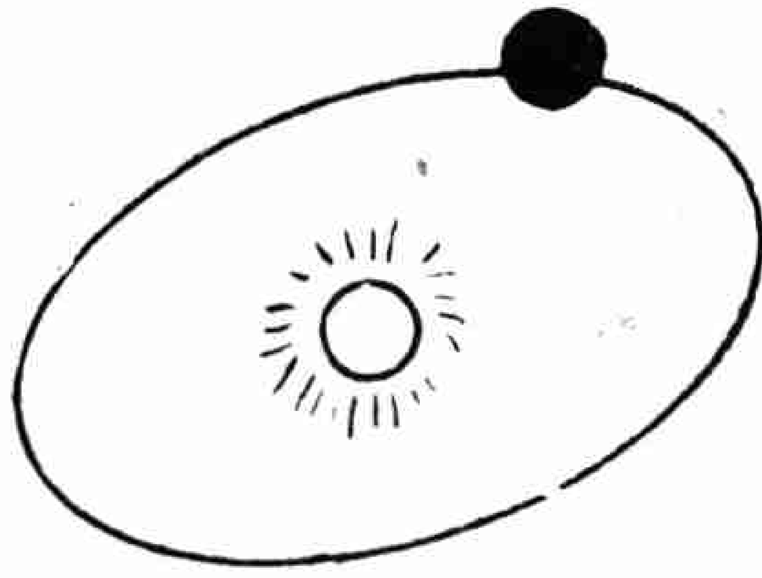
గెలీలియో, కెప్లర్ ఇద్దరు సమకాలీనులు. వారిద్దరి మధ్య ఉత్తరప్రత్యుత్తరములు నడచుచుండెను. కాని వారు తాము కనిపెట్టిన విషయములను ఒకరికొకరు తెలియజేసికొనినట్లు కనిపించదు. కెప్లర్ గ్రహపథములు దీర్ఘవృత్తములని నిరూపించినను, గెలీలియో ఆ సిద్ధాంతమును ప్రస్తావించలేదు; ప్రస్తావించినచో సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతమును అసందిగ్ధముగ నిరూపించియుండెడివాడు. కాని దూరదర్శనిచే ఆవిష్కృతములైన విషయములన్నియు సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతము సత్యమే అను అభిప్రాయమును అతనికి కల్గించెను. అది టాలెమీ సిద్ధాంతమునకు విరుద్ధము కావున అతడు మతాచార్యుల ఆగ్రహమునకు గురియై, స్వగృహమునందు నిర్బంధింపబడి, ఖగోళశాస్త్ర కృషి చేయరాదను ఆంక్షకుకూడ పాత్రుడు కావలసివచ్చెను. ఖగోళవిజ్ఞానవికాసమును నూతనమార్గమును త్రొక్కించి, ఇతరశాస్త్రవేత్తలకు మార్గదర్శియైన ఈ మేధాశాలి వార్ధక్యమున అట్టినిర్బంధములకులోనై, నేత్రహీనుడై జీవితయాత్ర చాలించెను.

కెప్లర్-గ్రహపథ నిర్ణేత: ఇతడు 1571 లో జర్మనీలో జన్మించెను. బాల్యమునందే ప్రతిభావంతుడని తెలిసికొని తండ్రి అతనిని మతాచార్యునిగా చేయగోరి యూనివర్సిటీలో ఉన్నతవిద్య చెప్పించెను. కెప్లర్ సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతము, ఖగోళశాస్త్రమును అభ్యసించి, తరువాత టైకోబ్రాహికి శిష్యుడై, అతని అవలోకనములను అన్నిటిని శ్రద్ధతో పరిశీలించి గ్రహగతి నియమములు నిర్వచించెను.

(ఏ) గ్రహపథములు దీర్ఘవృత్తములు.

(బి) సూర్యునితో గ్రహమును చేర్చు సదిశరాశి సమాన కాలములో సమాన వైశాల్యములను క్రమించును.

(సి) గ్రహముల యొక్క కక్ష్య భ్రమణ కాలముల వర్గములు సూర్యునినుండి వాటి మాధ్యమదూరముల ఘనముల నిష్పత్తిలో ఉండును. భూ సూర్యుల మధ్య దూరము ఒక యూనిట్ అనియు, భూ భ్రమణ కాలము ఒక యూనిట్ అనియు తీసికొని



చిత్రము 34 కెప్లర్ గ్రహకక్ష్యలు దీర్ఘవృత్తములని నిర్వచించెను.

కెప్లర్ క్రింది పథకములను ఏర్పరచెను.

గ్రహము	బుధుడు	శుక్రుడు	భూమి	కుజుడు	గురుడు	శని
కాలము	0.241	0.615	1.0	1.881	11.862	29.458
దూరము	0.387	0.723	1.0	1.524	5.203	9.539

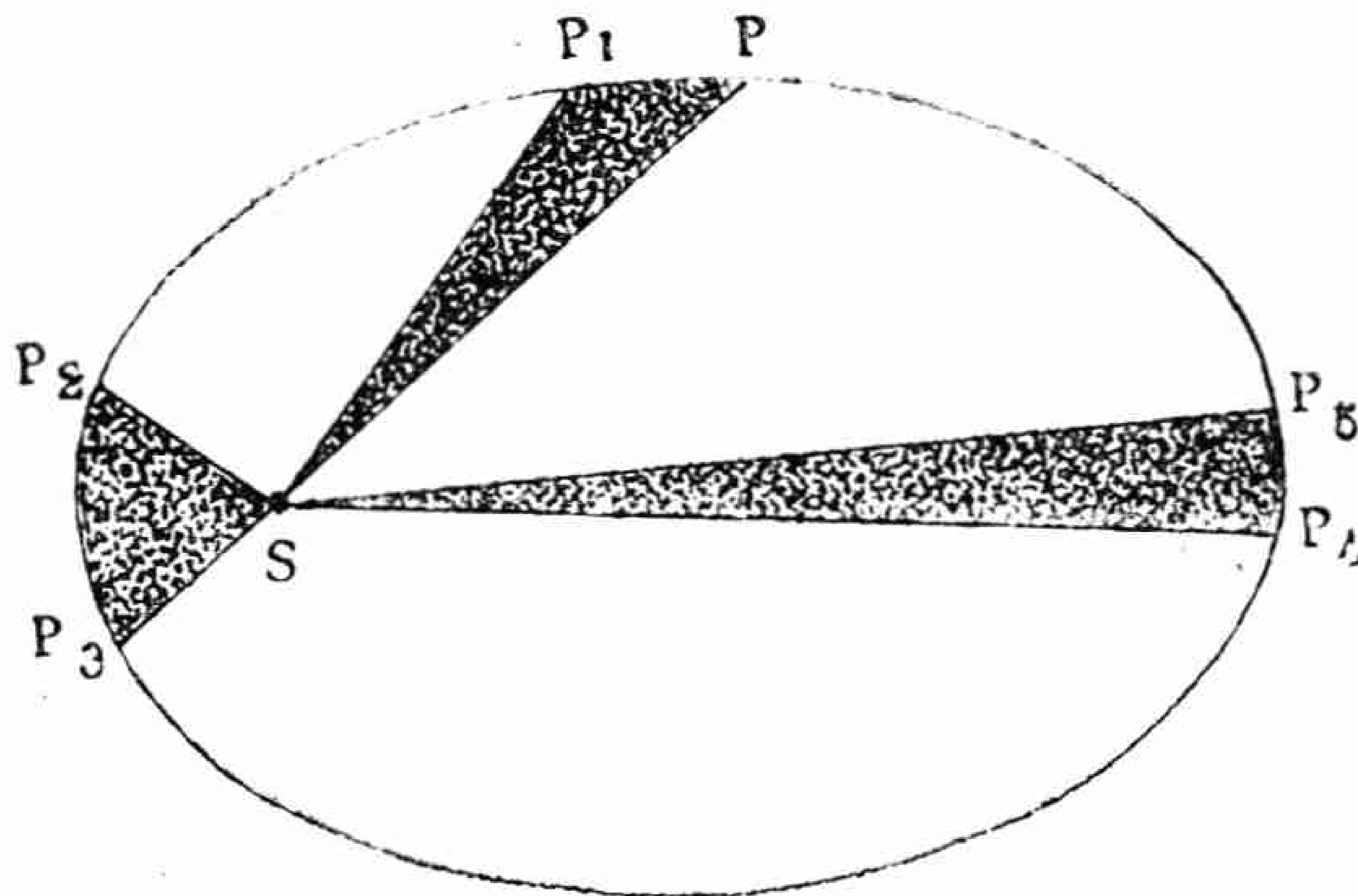
ఈ మూడవనియమము న్యూటన్ గురుత్వాకర్షణ నియమమునుండి నేడు ఉత్పాదితమగుటవలన కాలవర్గముల, దూరఘనముల సంబంధమందు సూర్యునియొక్క, గ్రహములయొక్క ద్రవ్యరాశులు కూడ గణనలోనికి తీసికొనబడినవి. ఉదా: భూ (E) కుజ (M) గ్రహములు రెండింటిని తీసికొందము. m గ్రహముయొక్క ద్రవ్యరాశి, P దాని భ్రమణకాలము, d సూర్యుని (S) నుండి దాని మాధ్యమదూరము అని మనము తీసికొన్నచో సంస్కరింపబడిన కెప్లర్ 3వ గ్రహగతి నియమమును క్రింది సమీకరణముచే తెలుపవచ్చును.

$$\frac{(m_S + m_M)\, P^2_{MS}}{(m_S + m_E)\, P^2_{ES}} = \frac{d^3_{MS}}{d^3_{ES}}$$

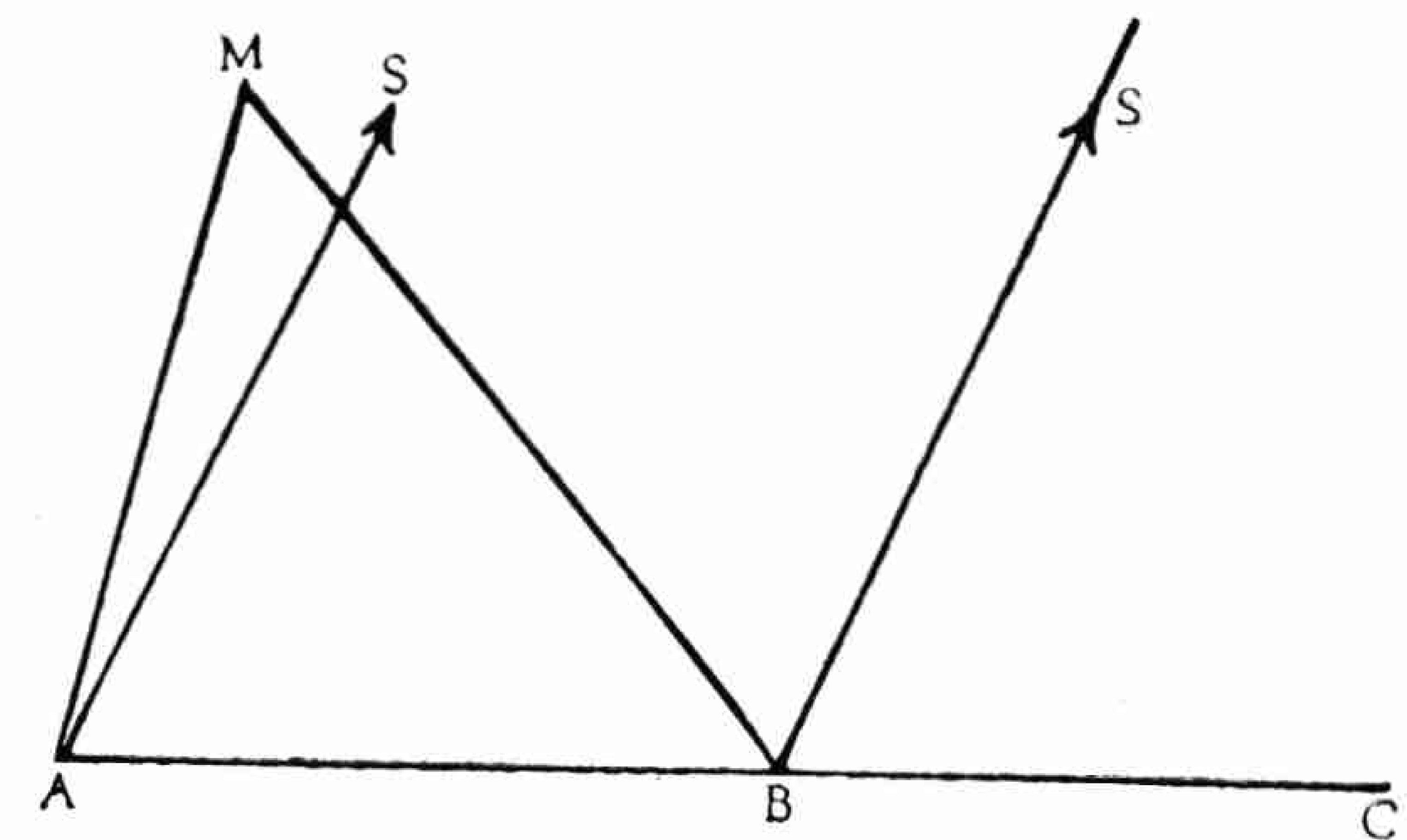
కెప్లర్ ఇచ్చిన రూపములో ఈ నియమము యాథార్థ్యమునకు దూరముకాదు. ఏలన, సూర్యుని ద్రవ్యరాశితో సరిపోల్చిచూచినప్పుడు గ్రహముల ద్రవ్యరాశులన్నియు అత్యల్పములగుటచే ద్రవ్యరాశుల మొత్తముల నిష్పత్తి ఇంచుమించు ఒకటికి సమానము కాగలదు. పైవిధమున సంస్కరింపబడిన ఈ నియమము గ్రహముల, ఉపగ్రహముల, ద్వికతారల ద్రవ్యరాశులు లెక్కించుటకు ఉపయుక్తమగును.

దూరదర్శని నిర్మాణములో గమనింపవలసిన నియమములు, కటకముల ఉపయోగము, వాటి సంయోజనము, అవి అమర్చబడవలసిన గొట్టముల పొడవులు—వీటినన్నిటిని గురించి 1611 లో కెప్లర్ ఒక గ్రంథము ప్రచురించెను.

కాసినే (1625 - 1712): ఇటలీ ఖగోళశాస్త్రవేత్త. ఇతడు దూరదర్శనిలో మంచి మార్పులు చేసి, గురు, కుజ, శుక్రుల మండలములు పరిశీలించి అనేక నూతనాంశములు ఆవిష్కరించెను; గురుగ్రహములో గల పెద్ద ఎర్రని మచ్చ, పట్టీలు, కుజగ్రహమునందుగల రేఖలు, కుజమండలతలముపై ఋతువులను అనుసరించి కలుగు మార్పులు కనుగొనెను; గ్రహముల దూరములు, కక్ష్యలు కనుగొనుటకు పద్ధతులు ఏర్పరిచెను. కుజగ్రహము యొక్క దూరమును నిర్ణయించుటకు కాసినే క్రింది విధానమును అవలంబించెను.



చిత్రము 35 కెప్లర్ 2వ గ్రహగతి నియమము
S = సూర్యుడు; $P \ldots P_6$ = గ్రహస్థానములు



చిత్రము 36 గ్రహముల దూర నిర్ణయము: కాసినే వివరించిన విధానము

భూమిపై దాదాపు 9656 కిలోమీటరులు దూరముగల A, B పట్టణములనుండి కుజగ్రహము (M) ను అవలోకించి, వానికి ప్రక్కనగల నక్షత్రము (S) నకు గల దూరములను

కనుగొనెను. S నక్షత్రము చాల దూరములో ఉండుట వలన AS, BS రేఖలు సమాంతరములు. కాబట్టి $\angle SAC = SBC$. కాని ఇవి నక్షత్రము S యొక్క ఉన్నత కోణములు. నక్షత్రము మధ్యాహ్న రేఖను దాటునపుడు దాని నతాంశను కనుగొని, 90° − నతాంశ = ఉన్నత కోణము అను సూత్రమునుండి ఉన్నత కోణములు కనుగొనవచ్చును.

$$\angle MAB = \angle MAS + \angle SAB$$

$$\angle MAB = 180 - \angle MBS - \angle SBC$$

కాబట్టి త్రిభుజము MAB నిర్మించుటకు దత్తాంశములు కలవు. MA లేదా MB యొక్క పొడవు భూ కుజ గ్రహముల మధ్యదూరమునకు సమానము. ఇట్లు అయిదారు సారులు కుజగ్రహదూరము కనుగొని, పొరపాట్లు సవరించి, కచ్చితమగు విలువను అతడు తేల్చెను; అనేక మిత్రుల సహాయముతో పారిస్ మధ్యాహ్న రేఖ పొడవును కనుగొనెను.

కాసినే శనిగ్రహము యొక్క నాలుగు ఉపగ్రహములను కూడ కనిపెట్టెను. గ్రహకక్ష్యలు, దూరములు - వీటిలో అదివరకుగల సంశయములను పోగొట్టి వాటి విలువలలో పొరపాట్లు లేకుండ చేసి, ఇతడు ఖగోళవిద్యకు చేసిన నిర్వాహము అపారము.

హైగెన్జ్ (1629-95): డచ్ శాస్త్రజ్ఞుడు. కాంతితరంగ వాదమును ప్రతిపాదించిన ఇతడు కటకములను చక్కజేసి, గెలీలియో దూరదర్శనికంటె ఎక్కువ అధికీకరణ సామర్థ్యముకల ఉత్తమ దూరదర్శనిని రూపొందించి, శని ఉపగ్రహము నొకదానిని కనుగొనెను (1655); శని కంకణముల లక్షణములను తెలుసుకొనెను; లోలకములను వాడి గడియారముల శుద్ధతను మెరుగుపరచెను.

రమ్మర్ (1644 - 1710): గురుడు భూమికి దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు దాని (గురుని యొక్క) ఉపగ్రహగ్రహణము గణితాగతకాలమునకు ముందుగా సంభవించుననియు, గురుడు భూమికి దూరముగా ఉన్నచో ఆగ్రహణము గణితాగతకాలమునకు ఆలస్యముగా కలుగుననియు రమ్మర్ కనిపెట్టెను. అందువలన అతడు వెలుతురునకు వేగముకలదనియు, దానివేగము సెకనుకు 299337·24 కిలోమీటరులు అనియు కనుగొనెను. ఇతడు క్రాంతి యంత్రము గూడ తయారుచేసెను.

ఐజక్ న్యూటన్ (1642-1727): గురుత్వాకర్షణసూత్ర ప్రతిపాదకుడు. గెలీలియో మరణించిన 1642 వ సంవత్సరములో క్రిస్టమస్ పండుగనాడు ఇంగ్లండులో న్యూటన్ జన్మించెను. ఇతనికి ముందువారు పరిశ్రమ చేసి, సేకరించిన శాస్త్రవిజ్ఞానము నవీన సిద్ధాంత ప్రతిపాదనకు పరిపక్వమై ఉండెను. ఆ నవీన సిద్ధాంతము ద్రవ్యరాశికిని, దూరమునకు సంబంధమును కల్పించినది. గెలీలియోను అనుసరించి న్యూటన్ మూడు గతినియమములను ప్రతిపాదించెను:

1. బాహ్యబల ప్రేరణ యున్ననే తప్ప ప్రతివస్తువు తన విశ్రాంత స్థితినిగాని, గమనములో ఉన్నప్పుడు తన ఋజురేఖాత్మక సమవేగస్థితినిగాని వీడదు.
2. ఒక వస్తువు యొక్క గతిభారములోని మార్పు రేటు ప్రయుక్తమైన బలమునకు యథానుపాతములో ఉండుటయేకాక, ఆ బలము ప్రవర్తించు దిక్కుననే జరుగును.
3. ఏ క్రియకైనను సమానము, విరుద్ధము నగు ప్రతిక్రియ ఉండును.

గ్రహములు సూర్యుడు కేంద్రముగా భ్రమణము చేయుచుండుట వలన సూర్యుడు తన ద్రవ్యరాశిఫలముగా లభ్యమైన గురుత్వాకర్షణబలమువలన గ్రహముల నన్నింటిని తన చుట్టును త్రిప్పుకొనుచున్నాడని న్యూటన్ ఊహించెను. ఈఆకర్షణబలపరిమాణమెంత? ఈ పరిమాణమును నిర్ణయించుటకు కెప్లర్ మూడవ గ్రహగతి సూత్రమును న్యూటన్ ఉపయోగించుకొనెను; రెండు నభోమూర్తుల ద్రవ్యరాశులు m_1, m_2 అయి, వాటి మధ్యదూరము 'r' అయినచో. వాటి పరస్పరాకర్షణ బలము (F) వాటి ద్రవ్యరాశుల గుణనఫలమునకు అనులోమ అనుపాతములోను, వాటి మధ్యదూరవర్గమునకు విలోమఅనుపాతములోను ఉండును. దీనినే గణితభాషలో $F = G \dfrac{m_1 \times m_2}{r^2}$ అని వ్రాయుదురు. పై సమీకరణములో G అనునది గురుత్వాకర్షణ స్థిరాంకము. ఈ సూత్రమునకు గురుత్వాకర్షణ సూత్రమని పేరు (చూ. విజ్ఞాన సర్వస్వము - భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు - పు. 324).

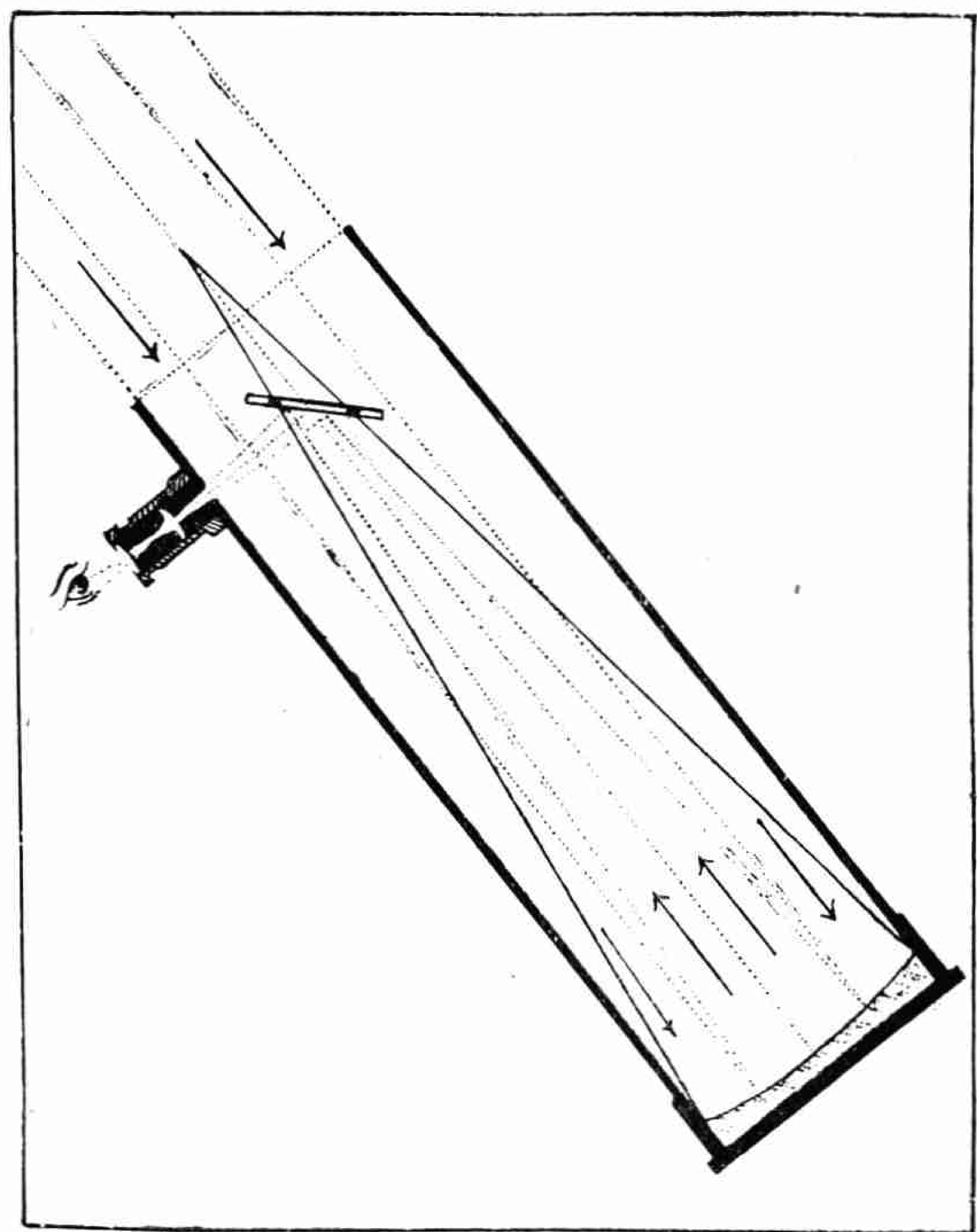
కెప్లర్ ప్రతిపాదించిన నియమములు సూర్యునికి నోదన సామర్థ్యమును నిరూపించినవి. అట్లే భూమికూడ చంద్రునిపై నోదన సామర్థ్యము కలిగియున్నదా అను సంశయము న్యూటన్‌కు కలిగెను. భూమికి చంద్రునికి మధ్యనుండు బలము విలోమవర్గ న్యాయమును అనుసరించి ఉండవలయుననియు, ఆ బలముచేతనే చంద్రుడు భూమిచుట్టు నెలకొకసారి భ్రమణము చేయుచుండుననియును అతడు తీర్మానించుకొని దానిని గణితమూలముగ నిరూపింపగల్గెను. ఇందు భూమి యొక్క ఆకర్షణబలమంతయు కేంద్రమువద్ద కేంద్రీకరింపబడినట్లు తీసికొనవలసి వచ్చినది. ఈ సిద్ధాంతమును తరువాత 1685 లో అతడే గణితమూలమున రుజువుచేయగల్గెను.

గురుత్వాకర్షణబలము మారుచుండునపుడు ఒక నభోమూర్తి యొక్క కక్ష్య ఎట్లుండును ? అను సమస్య ఆకాలపు శాస్త్రజ్ఞులకు దుస్సాధ్యముగ ఉండెను. ఆ కక్ష్య దీర్ఘవృత్తము అని న్యూటన్ గణితమూలముగా ప్రతిపాదించెను. అప్పటి ప్రముఖులలో ఒకడగు హైగెన్జ్ 'గురుత్వాకర్షణసిద్ధాంతము'ను నిరాకరించినను, న్యూటన్ తన కలనశాస్త్రమును ఉపయోగించి ఆ గ్రహముల గమనకక్ష్యలు శాంకవముల రూపములను అనుసరించునని నిరూపించెను.

న్యూటన్‌చే ప్రతిపాదింపబడిన నియమములు నభోమూర్తుల ద్రవ్యరాశులను కనుగొనుటకు అవకాశమిచ్చినవి. ఇతర నభోమూర్తులపై ఒక నభోమూర్తి యొక్క ఆకర్షణను చంద్రునిపై భూమికిగల ఆకర్షణతో సరిపోల్చి దాని ద్రవ్యరాశిని కనుగొనవచ్చును. బాహ్యతమమగు ఉపగ్రహముపై గురునిచే ప్రయోగింపబడు ఆకర్షణను నుండి గురునియొక్క ద్రవ్యరాశి నిర్ణయింపబడెను. ఇట్లే శనియొక్క ద్రవ్యరాశికూడ కనుగొనబడెను. కాని అవి అన్నియు భూమియొక్క ద్రవ్యరాశికి ఇన్నిరెట్లని మాత్రమే నిర్ణయింపబడెను. భూమియొక్క అక్షవ్యాసార్థము కురుచగా ఉండుటకు గల కారణమును, దాని విలువను న్యూటన్ గణితమూలముగా కనుగొనెను. గురుగ్రహమునకు అతడు కనుగొనిన అట్టి విలువను తరువాత కాసినీ ధ్రువీకరించెను.

భూమి ధ్రువములవద్ద సమతలమైనందున సూర్యచంద్రుల ఆకర్షణచే భూమియొక్క అక్షరేఖ చలించి, విషువచ్చలనము ఏర్పడుచున్నదని న్యూటన్ ప్రతిపాదించెను. భూతలముపై ఉండు ద్రవములపై సూర్యచంద్రుల ఆకర్షణవలన సముద్రపుపాటుపోట్లు (స్రోతస్సులు)ఏర్పడునని, వాని బలములు ఏకమైనపుడు స్రోతస్సు లెక్కువగుననియు, చంద్రుడు భూమికి దగ్గరగ ఉండుటవలన చంద్రుని ఆకర్షణబలము సూర్యుని ఆకర్షణబలముకంటె ఎక్కువ అనియు న్యూటన్ నిరూపించెను. చంద్రుడు భూమిచుట్టు తిరుగుచుండుటచే స్రోతస్సులు ప్రతిదినము 50 నిమిషములు ఆలస్యముగ గోచరించుట గణితమూలముగ అతడు సాధించెను. అది అనుభవమునకు సరిపోవుచున్నది.

గతిశాస్త్రమునకు సూత్రములు, గురుత్వాకర్షణ సిద్ధాంతము యొక్క సర్వవ్యాపకత్వము, గతి నియమములు-వీటికి అన్నిటికి గణితమూలమున ఉపపత్తులను ప్రతిపాదించి, ద్రవ్యమును నిర్వచించి, సూర్యుని చుట్టు తిరుగు గ్రహముల గతినియమములు వివరించి, గ్రహముల పరస్పర పరిక్షోభముల కారణములను చూపించి, న్యూటన్ ధూమకేతువులు గ్రహములవలె సూర్యునిచుట్టు దీర్ఘవృత్త కక్ష్యలలో తిరుగుచున్నవని ప్రతిపాదించెను. అతని పూర్వగులకు టైకో బ్రాహి, కెప్లర్, గెలీలియో మున్నగువారికి



చిత్రము 37 న్యూటన్ పరావర్తన దూరదర్శిని సూత్రము

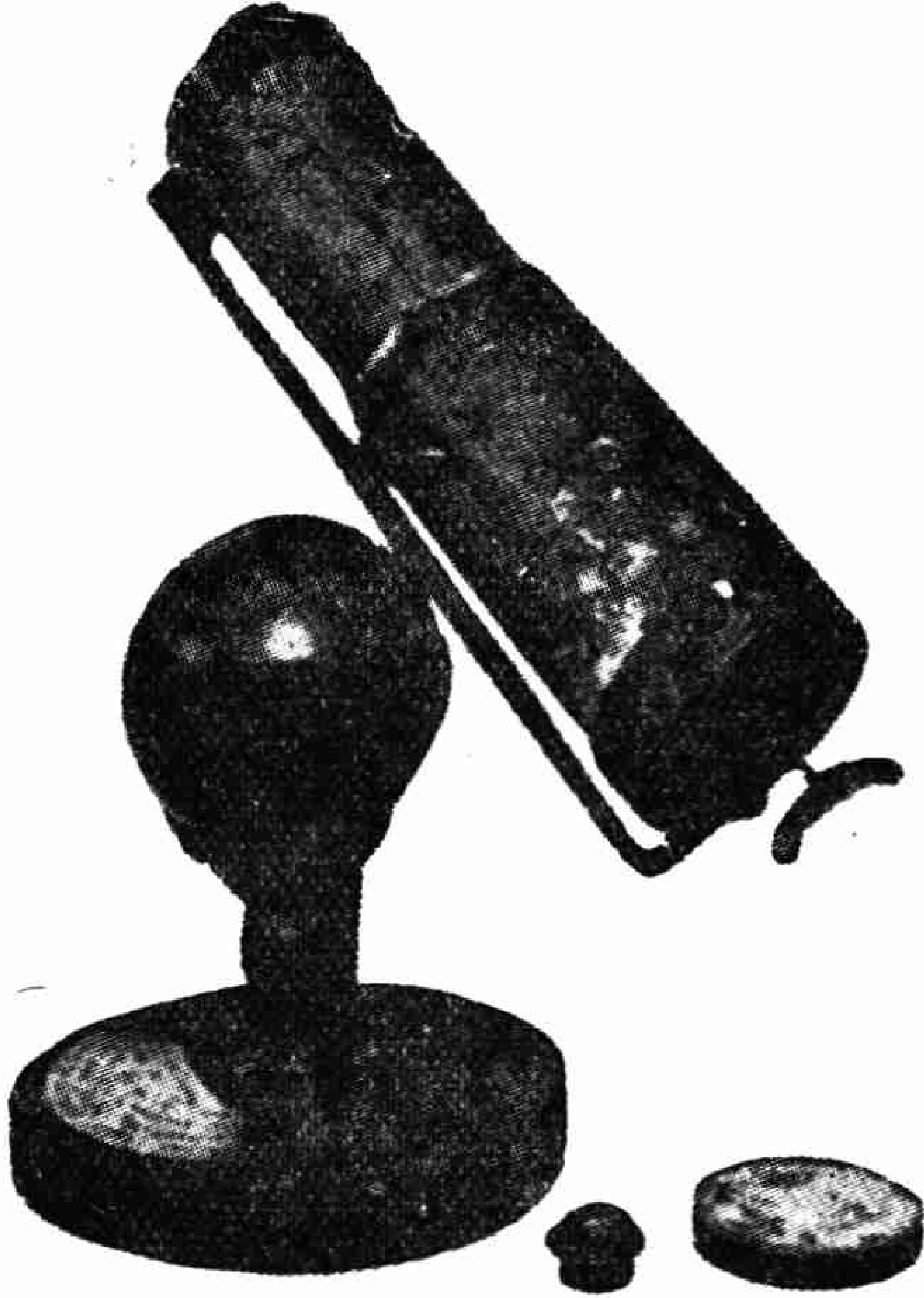
ఇది స్ఫురింపలేదు. సూర్యుని కాంతియొక్క అపకర్షణ బలముచే ధూమకేతువు శీర్షమునుండి కణములు వెలుపలికి త్రోయబడి, కేతువు లేదా తోక ఏర్పడును అను అతని అభిప్రాయము నవీన సిద్ధాంతములను అనుసరించియున్నది.

సాపేక్షతావాదముచే న్యూటన్ వాదము రద్దుచేయబడెననుట పొరపాటు. సాపేక్షతావాదమునకు న్యూటన్ వాదముకన్న ఎక్కువ సర్వవ్యాపకత కలిగినది. న్యూటన్ వాదము సావధిక విషయములకే అన్వయించును అనియు, అది సాపేక్షతావాదము యొక్క ఒక విశేషపక్షము అనియు గ్రహింపవలెను.

గెలీలియో నిర్మించిన దూరదర్శిని వక్రీభవన దూరదర్శిని. ప్రతిబింబములు చక్కగ కనబడునని అతని శిష్యులు దూరదర్శినియొక్క వస్తుకటకమును పెద్దది చేయసాగిరి. అందువలన వర్ణవిపథనము సంభవించి ఆశించిన ప్రయోజనమునకు విరుద్ధముగ ప్రతిబింబము స్వచ్ఛముగా గోచరింపకుండెను. ఈ లోపమును సవరించుటకు న్యూటన్ 1672 లో పరావర్తన దూరదర్శినిని రూపొందించి ఖగోళశాస్త్రమునకు మహోనిర్వాహము చేసెను. క్రొత్త దూర

దర్శనిలో అద్దపుకటకము పరావర్తన రూపముసఉండి ప్రతి బింబము అక్షరేఖలో చక్కగా కన్పట్టును. దానిసహాయమున గురునియొక్క ఉపగ్రహములు, శుక్రునికళలు స్ఫుటముగా కనబడెను.

తన పరిశోధనలను, సిద్ధాంతములను క్రోడీకరించి లాటిన్ భాషలో 'ప్రిన్సిపియా' అను ఉద్గ్రంథమును



చిత్రము 38 న్యూటన్ నిర్మించిన చరిత్రాత్మకమైన దూరదర్శని (టెలిస్కోప్)

న్యూటన్ రచించెను. అతని గురుత్వాకర్షణసిద్ధాంతము అతివిస్తృతము; గణనీయమైన పరిశోధనలు పెక్కింటికి అది దారితీసినది. అపరిష్కృతములైన అనేక సమస్యలకు అది సంతృప్తికరములైన సమాధానములు ఇచ్చినదని చెప్పుట అత్యుక్తి కాదు. తన ప్రతిభాసంపన్నతకు ముగ్ధులైన ప్రజలచేతను, సంస్థలచేతను బహువిధముల సమ్మానితుడై, న్యూటన్ 1727 లో 85 వ ఏట కీర్తిశేషుడయ్యెను.

ఫ్లేమ్‌స్టీడ్ (1646-1719): ఇతడు న్యూటన్ సమకాలికుడు, ఛార్లెస్ II సంస్థాపించిన వేధశాలకు ప్రథమ సర్వాధికారి.

రేఖాంశల సమస్య ఆకాలమున క్లిష్టముగా ఉండెను. దానిని సాధించుటకు చేయబడిన ప్రయత్నములు అన్నియు విఫలములాయెను. సమస్యాసాధనము నావికులకు అత్యావశ్యకమగుటచే ఇతడు ఆభారమును వహించి, అందు కృతకృత్యుడగుటకు శుద్ధమగు నక్షత్రముల పట్టిక, చంద్రచారమును అవసరమగునని నిశ్చయించి, 33 సంవత్సరములు నక్షత్రావలోకనమున గడపి, 1712లో నక్షత్రముల జాబితా ఒకటి ప్రచురించెను. విషువిందు నిర్ణయము మొదలైన అనేక విషయములలో ఇతడు నవీనమార్గములను త్రొక్కెను; అతని ఖగోళ అవలోకనములు పూర్వులవాటికంటె ఎక్కువ శుద్ధములు; నక్షత్రములు, గ్రహములు, ధూమకేతువులు, సూర్యకళంకములు, గురునియొక్క ఉపగ్రహములు వీటినిగురించి ఇతని విపులావలోకనములు సాగెను. ఇతడు 2884 నక్షత్రముల జాబితా తయారుచేసెను; చంద్రచారములో వార్షికసమీకరణమును ఉపయోగించి, చంద్రస్ఫుటమును నిర్దుష్టము చేయుటకు మార్గమేర్పరిచెను; కాలసమీకరణముయొక్క ఆవశ్యకతను విశదీకరించెను. ఇతని గ్రహస్ఫుటములో పొరపాటు 10 సెకనులకంటె ఎక్కువ ఉండదు.

ఎడ్మండ్ హేలీ (1656-1742): ఇతడు తన 20వ ఏట సెయింట్ హెలీనా ద్వీపమునకు పోయి, దక్షిణ గోళములోని నక్షత్రములను అవలోకించి, 300 నక్షత్రముల జాబితా తయారుచేసెను; బుధగ్రహముచే సూర్యబింబ క్రాంతిని చూచి, సూర్యునిదూరము కనుగొనుటకు ఒక పద్ధతి రూపొందించెను.

ఇతడు న్యూటన్ సిద్ధాంతముల ప్రతిపాదనయందు సహాయకారియై, ధూమకేతువుల చారములందు విశేష కృషి కావించెను. ధూమకేతువులు సౌరకుటుంబమునకు చెందినవనియు, అవి ఉత్కేంద్రకక్ష్యలలో తిరుగుచుండుననియు, సూర్యునికి దగ్గరగ వచ్చినపుడే అవి దృశ్యమానములగుననియు హేలీ నిరూపించెను. ప్రాచీనకాలము నుండి కనబడిన ధూమకేతువులను గమనించి క్రీ. శ. 1456, 1531, 1607, 1682 సంవత్సరములలో కనుపించినవి వేరువేరు ధూమకేతువులు కావనియు, ఒకటే అనియు, అది మరల 1758లో కనబడుననియు, దాని ఆవృత్తికాలము $75\frac{1}{2}$ సంవత్సరములు అనియు ఇతడు నిరూపించెను. దీనికే హేలీధూమకేతువు అని పేరు.

సూర్యబింబముపై శుక్రతరణమును ఉపయోగించి, సూర్యుని దూరమును నిర్ణయింపవచ్చునని హేలీ చూపించెను. ఆనాటివరకు నక్షత్రములు స్థిరములని అందరు నమ్మిరి. గ్రీకుల కాలమునకు, అప్పటికి కొన్ని నక్షత్రముల స్థానము మారినది. ఆ మార్పు విషుచలనము వలన ఏర్పడలేదనియు, నక్షత్రములకు 'సహజచలనము' ఉండుటయే దానికి కారణమనియు అతడు నిర్ధరించెను. 1715 లో సంభవించిన సంపూర్ణ సూర్యగ్రహణమును అవలోకించి, అతడు సూర్యుని మకుటమును, వర్ణమండలమును పరిశీలించెను.

గ్రీనిచ్ వేధశాలకు ఇతడు ద్వితీయ సర్వాధికారిగ నియమింపబడెను.

బ్రాడ్లీ (1692 - 1762): ఇతడు బాల్యమునుండి ఖగోళ విద్యయందు చాల అభిరుచి చూపి, 29 వ ఏటనే అందు అధ్యాపకుడయ్యెను. ఇతడు నక్షత్రలంబనము గూర్చి విశేషకృషి యొనర్చెను. మితవేగముకల వెలుతురు, భూమి యొక్క భ్రమణము చేరి అట్టి దృశ్యము కల్గించును. దీనికి కాంతి విపథనము అని వ్యవహారము. విపథనము యొక్క గరిష్ఠ విలువ 50.8 సెం.మీ.కు 52.07 సెం.మీ.కు మధ్య ఉండవలయునని బ్రాడ్లీ నిశ్చయించెను. ఇప్పుడు దీని విలువ 51.75 సెం.మీ. దీనికి విపథన స్థిరాంకమని పేరు. నక్షత్రావలోకనము చేసి, కాంతి విపథనము యొక్క విలువలలో దురూహ్యములైన అంశములు కొన్ని ఉండుట బ్రాడ్లీ గమనించి, ఆ విలువ 9 సంవత్సరముల పాటు వృద్ధిపొంది, తరువాత 9 సంవత్సరముల వరకు తగ్గుచుండునని కనుగొనెను. ఇది రాహుకేతువుల భ్రమణ కాలమునకు సరిపోవుటచేత, విషుగతి కొన్ని సమయములందు 127 సెం.మీ. కంటె ఎక్కువగను, కొన్ని సమయములందు తక్కువగను ఉండుననియు, ఈ ఎక్కువ తక్కువలు క్రాంతివృత్తములో రాహుకేతువుల స్థితిపై ఆధారపడి ఉండుననియు అతడు ప్రతిపాదించెను.

బ్రాడ్లీ 'డ్రాకోనిస్' అను నక్షత్రమును అవలోకించి, దాని వార్షిక చలనము యొక్క కక్ష్య దీర్ఘవృత్తముగా ఉండుట గుర్తించెను; రమ్మర్ కనుగొన్న కాంతివేగము విలువను ధ్రువీకరించి, కాంతి సూర్యుని నుండి భూమిని చేరుటకు 8 నిమిషములు పట్టునని నిరూపించెను. భూమి ధ్రువపరిసర ప్రాంతములలో తగ్గియుండి, నిరక్షప్రాంతమున ఉబ్బి ఉండుటచే చంద్రగ్రహాకర్షణశక్తి మూలమున భూమియొక్క అక్షదండమునకు 18 సంవత్సరముల భ్రమణకాలములో అక్షస్పందనము కలదని విశదము చేసినది ఇతడే. చలనకక్ష్య ఒక దీర్ఘవృత్తము; దాని అక్షములు 45.72 సెం. మీ. × 40.64 సెం; మీ. విలువ కలవి.

ఇతర పరిశోధకులు: ఈ కాలములో యూరప్ దేశములలోని ఇతర ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు కూడ తమ కృషిని కొనసాగించి, విజ్ఞానమును పెంపొందించుచునే ఉండిరి. వారి పరిశ్రమవలన 10,000 నక్షత్రములు అవలోకింపబడి, 2000 నక్షత్రముల యొక్క నిరూపకములు 1763 లో ప్రచురింపబడెను. భూమియొక్క ఆకారమును గూర్చి కృషిసాగుచుండెను. రేఖాంశములో ఒక డిగ్రీ యొక్క పొడవు నిరక్షప్రాంతములో తక్కువయై, ఉత్తరమునకు పోయిన కొలది ఎక్కువయగుచుండుట గమనించి, అందువలన భూమి నిరక్షప్రాంతమున ఉబ్బియుండి, ధ్రువప్రాంతములందు క్రుంగి ఉండునని నిశ్చయింపబడెను. భూసూర్యుల మధ్యగల దూరము ఖగోళశాస్త్రీయ యూనిట్ అని తీసికొని, దాని విలువను లంబన విధానమున నిర్ణయించుటకు 1763 ప్రాంతములో ప్రయత్నములు జరిగినవి; సూర్యునియొక్క లంబనము 8".57 అని తీర్మానింపబడెను. దేశాంతరము* కనుగొను సమస్య చాల తీవ్రముగ ఆలోచించబడెను. 30 సంవత్సరములు శ్రమించి హారిసన్ అను ఇంగ్లండు దేశీయుడు 1763 లో ఒక గడియారమును తయారుచేసెను. దాని సహాయమున 'బార్బడాస్' యొక్క దేశాంతరము ఒక 'కల' వ్యత్యాసముతో కనుగొనబడెను.

నవీనయుగము - ఉత్తరభాగము

న్యూటన్ యొక్క సర్వవ్యాపక గురుత్వాకర్షణ సిద్ధాంతము క్రమముగ సర్వజనసమ్మతమయి యూరప్ గణితజ్ఞుల శాస్త్రపరిశోధనకు చేయూత ఇచ్చెను. అందు పాల్గొనిన వారు ఆయిలర్, క్లైరో, డెలాంబేర్, లాగ్రాంజ్, లాప్లాస్ మొదలగు విఖ్యాత గణితజ్ఞులు.

చంద్రచారమును చర్చించు సందర్భములో కఠిన సమస్య అగు మూడు వస్తువుల చలనమును విమర్శన చేసిన వారిలో ఆయిలర్ ప్రథముడు. 1753 లో ఈ విషయములను అతడు ప్రచురించెను. ఈ నూతన విధానమును 1680, 1744 సంవత్సరములలో కనబడిన ధూమకేతువులకు అన్వయింపచేసి, ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనమునందు అతడు క్రొత్త త్రోవ త్రొక్కెను.

క్లైరో భూమియొక్క ఆకారమును విమర్శించెను.

గ్రహముల దృక్సిద్ధ స్థితికిని, గణితాగత స్థితికిని గల వ్యత్యాసమునకు కారణము ఇతర గ్రహముల పరిక్షోభమే అని తెలియవచ్చెను. కాబట్టి గ్రహకక్ష్యలు సూర్యుడు నాభిగాగల దీర్ఘవృత్తములు కావనియు, కాలమును అనుసరించి మారుచుండు అక్షములు గల వేరు వేరు దీర్ఘవృత్తములు అనియు విశదమయ్యెను.

18వ శతాబ్దములో డెలాంబేర్, లాగ్రాంజ్, లాప్లాస్ కృషిచే చంద్రునియొక్కయు, గ్రహములయొక్కయు విపథనవాదము విమర్శింపబడి, వాని చారములు నిష్కర్షతో నిర్ణయించుటకు పథకములు తయారు చేయబడెను.

* దేశాంతరము అనగా అక్షాంశరేఖ, అనగా ప్రధాన యామ్యోత్తర రేఖనుండి డిగ్రీలలో దూరము.

గురుని యొక్క ఉపగ్రహములలో ఒక దానియొక్క విపథనమును విమర్శించునపుడు లాగ్రాన్జ్ గురుసూర్యుల, ఇతర గ్రహముల ఆకర్షణశక్తిని పరిశీలించి షడ్వస్తు సమస్యను సాధించెను.

సూర్యునకు ఇతర గ్రహములకు గల దూరము యొక్క మధ్యమమానములో మార్పులేదనియు, స్థిరమనియు నిరూపింపబడెను. ఇదంతయు 18 వ శతాబ్దాంతమున జరిగెను. లాప్‌లాస్ 1749 లో జన్మించెను; గొప్ప మేధావి. చంద్రచారములో శతాబ్దమునకు 10′ వంతున త్వరణము ఏర్పడుచుండెను. దీని కారణము అదివరలో ఎవరికి తెలియకుండెను. క్రాంతివృత్తముయొక్క ఉత్కేంద్రత లోని కాలాంతర చలనము వలన ఈ మార్పు కలుగుచున్నదని ఇతడు చూపెను. ఖగోళ యాంత్రికశాస్త్రము ఇతనిచే రచింపబడెను. ఇది ఒక ప్రధాన గ్రంథము. ఇందు గ్రహముల చారగణితము స్పష్టముగా ఈయబడినది. ఇతడు సౌరకుటుంబము యొక్క ఉత్పత్తి విధానమును విమర్శించుచు నీహారికావాదమును ప్రతిపాదించెను.

గురుత్వాకర్షణ మూలకారణముచే గ్రహములు తమతమ నిర్ణీతకక్ష్యలందు చరించుచు క్రింది నియమములకు కట్టుబడి ఉండును :

1. గ్రహములు ఆకసములో పడమట దిశనుండి తూర్పు దిశవైపు చలించును.
2. వాటి కక్ష్యల ఉత్కేంద్రతలు స్వల్పములు.
3. క్రాంతివృత్తమునకు, గ్రహ కక్ష్యలకు నడుమ గల కోణము స్వల్పము.
4. సౌర కుటుంబము వ్యాపించి ఉండు ప్రాంతమంతయు అది కాలములో నీహారికా రూప మూలవస్తువుతో నిండి ఉండవలయును. అది చల్లబడి సంకోచమును పొంది భ్రమింపసాగెను. కాలక్రమేణ పరిధి ప్రాంతీయ వస్తువు విడిపోయి చల్లబడి సంకోచమును పొంది భ్రమణము చేయసాగెను. ఇది ఒక గ్రహరూపమును పొందెను,

ఇట్లు సౌరకుటుంబము, ఉపగ్రహములు ఏర్పడినవని లాప్‌లాస్ వాదము. కాని ఈ వాదమునకు గణిత శాస్త్ర రీత్యా కొన్ని ప్రతిబంధకము లుండుట ఆతడే గుర్తించెను.

అవలోకనాత్మక ఖగోళ శాస్త్రము

గణిత ఖగోళ విద్యతోపాటు అవలోకనాత్మక ఖగోళ విద్యకూడ అభివృద్ధిచెందుచుండెను. గెలిలియో నిర్మించిన దూరదర్శనిలో అనేక మార్పులు జరిగెను. న్యూటన్‌కు తర్వాత హర్షల్ ముకుర దూరదర్శని, లేదా పరావర్తన దూరదర్శని నిర్మాణములో గొప్ప మార్పులు చేసి, అవలోకనాత్మక ఖగోళ శాస్త్రమును అత్యున్నత స్థితికి తెచ్చెను.

హర్షల్ జర్మనీలో (1738) పుట్టి ఇంగ్లండులో పెరిగెను. ఇతనికి సంగీతమన్న అభిరుచి ఎక్కువ. తీరిక వేళలో ఖగోళ శాస్త్రము చదివెను. అందులో జగద్విదితఖ్యాతి గాంచెను. సౌరకుటుంబములో అదివరకు గుర్తింపబడిన గ్రహములలో శని కడపటి గ్రహము. శని గ్రహమును దాటి వేరు గ్రహములు లేవనియు, తర్వాత నక్షత్రములుండుననియు ప్రాచీనుల అభిప్రాయము. వివిధ పరిమాణములు గల పరావర్తన దూరదర్శనులు అనేకములు ఇతడు నిర్మించెను. అందులో ఒక్కటి 2.134 మీటరులు పొడవు 16.51 సెం.మీ. ముఖము కలది. శని కక్ష్యకు బయట నుండు యురేనస్ (ఇంద్ర) గ్రహమును ఇతడు 1781 లో కనిపెట్టెను. ఇది శాస్త్రజ్ఞుల మండలిలో గొప్ప ఆశ్చర్యమును కలిగించెను. 6.096 మీటరులు నాభ్యంతరముగల దూరదర్శనితో ఆక్రొత్త గ్రహమును ఇతడు పరిశీలించెను. ఇతని యశస్సు నలుదిశల ప్రాకెను. సమ్మానమునకు పాత్రుడయ్యెను. 1785 లో 12.192 మీటరులు నాభ్యంతరమును 1.219 మీటరులు ముఖముగల పెద్ద పరావర్తన దూరదర్శనిని ఇతడు నిర్మించెను. ఇది 15.24 మీటరులు ఎత్తుగల తిన్నెపై స్థాపింపబడెను.

సూర్యకళంకములు కొన్ని సమయములందు కనబడును; కొన్ని సమయములందు కనబడవు. ఈ సంభవముయొక్క ఆవృత్తికాలము సుమారు 11 సంవత్సరములు. భౌమ్య సంభవములగు వర్షపాత క్షామముల ఆవృత్తి మొదలగునవి సూర్య కళంకముల ఆవృత్తికాలముతో సంబంధించి యుండునా అను సమస్య ఏర్పడి మన భూమిలో కలుగు మార్పులు సూర్యునితో సంబంధించి యున్నవని నాడు ప్రతిపాదింపబడిన వాదము ఇప్పటికిని విమర్శింపబడుచున్నది.

భూమి యొక్క అక్షము, కుజగ్రహము యొక్క అక్షము రెండును క్రాంతి ఫలకమునకు సమాన కోణములో వాలి ఉండుటచే కుజుని ధ్రువప్రాంతములందు కలుగు మార్పులకు భూమిలో వలెనే ఋతువులు కారణము అను వాదము బయలుదేరెను.

నక్షత్రముల వార్షిక లంబనములను కనుగొను ప్రయత్నములు ఇదివరకు విఫలములైనవి. ద్వికతారలను పరిశీలించి అవి న్యూటన్, కెప్లర్ నియమములను అనుసరించి భ్రమణము చేయుచున్నవను రహస్యమును గ్రహించిన తర్వాత గురుత్వాకర్షణము సర్వవ్యాపకమను సిద్ధాంతమును హర్షల్ ప్రతిపాదించెను. దగ్గరగ కనబడు ద్వికతారలు

పరస్పర ఆకర్షణము వలన దగ్గరగ ఉన్నవనియు స్వతంత్రముగా లేవనియును ఇతడు గ్రహించెను.

పునర్వసులో ఉండు నక్షత్రద్వికముయొక్క రెండు తారల ప్రత్యేక దీప్తి పరిమాణములు 2.0, 2.9 అనియు, అవి 2 సెకనుల దూరములో ఉన్నవనియు, వాటి పరస్పర భ్రమణకాలము 342 సంవత్సరములు అనియు ఇతడు కనిపెట్టి, నక్షత్ర పరిశీలనమునకు పునాదివేసెను ; 1789లో శనియొక్క ఆరవ, ఏడవ ఉపగ్రహములు కనుగొనబడెను. అందులో ఒకటి 'మిమాసు' అనునది శనికి దగ్గర ఉన్నది.

ఉత్తరగోళములో కనబడు నక్షత్రముల లెక్కపెట్టునపుడు హర్షల్ దృష్టి మందాకినిపై ప్రసరించెను. మందాకినియొక్క నిరక్ష ప్రదేశమునందు నక్షత్రములు దట్టముగాను, ధ్రువప్రాంతములందు చాల తక్కువగాను కలవు. మనకు దగ్గరగ కనపడు నక్షత్ర సమూహము ఒక తిరుగలి రూపముతో ఉన్నట్లును, దాని వ్యాసము వెడల్పునకు అయిదురెట్లుండునట్లును హర్షల్ ఊహించెను.

మందాకినియందు దట్టముగా నక్షత్రములుండు చోట్ల కొన్ని చీకటి ప్రదేశములు కనబడినవి. అచట నక్షత్రములు లేవు. అది యంతయు అనంతదూరములో ఉండు అంతరాళమని తెలిసినది. నక్షత్రములు దట్టముగా ఉండుచోట అవతలి అంతరాళమును అవి మరుగుపరచు చున్నవి. నల్లటి ప్రదేశములన్నియు ఆకాశమునందుండు 'బొరియ' లని హర్షల్ తలచెను. తరువాత పరిశోధకులకు నల్లటి ప్రదేశములన్నియు దట్టమగు నల్లని వస్తువుతో నిండి ఉండునట్లు తెలియవచ్చెను.

నక్షత్ర బృందముల యొక్కయు, నీహారికల యొక్కయు పరిశీలన జరుగుచుండెను. నీహారికలన్నియు వాటి లక్షణములను అనుసరించి పట్టికల క్రింద సర్దబడెను. అవి మన మందాకినివలె ఉండు నక్షత్రబృందములని తెలియవచ్చెను. ప్రతిదానికి మందాకిని అని పేరు. విశ్వమునందు ఒక్కొక్క మందాకిని ఒక ద్వీపమువలె ఉండును.

విశ్వము ఒక బ్రహ్మాండము. అందు అనేక అండములు, (నీహారికలు. లేదా మందాకినులు) కలవు. అట్టి అండములలో మన ముండునది ఒక అండము.

నక్షత్ర బృందములు మన మందాకినియొక్క ధ్రువప్రాంతములందును, నీహారికలు నిరక్షభాగమునందును విరివిగా కలవు. నీహారికలు మనకు మందాకినికంటె చాల దూరములో ఉన్నవని హర్షల్‌కు విశదమయ్యెను.

సౌరకుటుంబ గమనము : ఆకాశములో కనబడు నక్షత్రముల పరిశీలించునపుడు ఒకవైపున ఉండు నక్షత్రములు (అభిజిత్తు = వేగా) ఎడముగా పోవుటయు, వాటికి ఎదుటివైపున ఉండు నక్షత్రములు దగ్గరగచేరుటయు చూచి సౌరకుటుంబమంతయు అభిజిత్తువైపు వేగముతో పోవుచున్నట్లు హర్షల్ ప్రతిపాదించెను. నక్షత్రస్థానములు మరల అతనిచే పరిశీలింపబడి, ఈ ప్రతిపాదన 1805 లో స్థిరీకరించబడెను. ఇది ఖగోళశాస్త్రవేత్తల విస్మయమునకు కారణమయ్యెను.

నక్షత్రావలోకనము చేసి ఖగోళ రహస్యముల భేదించినందుకు హర్షల్ చిరస్మరణీయుడు.

లఘుగ్రహముల ఆవిష్కరణము: 18వ శతాబ్దము వరకు కుజ గురుల కక్ష్యలమధ్య ఉన్నది ఖాళీ ప్రదేశమని అందరు తలచిరి. 'పియాజీ' అను ఇటలీ ఖగోళశాస్త్రవేత్త ఆకాశములోని నక్షత్రముల పరిశీలించుచు మధ్యాహ్నరేఖను తరణము చేయువానిని గమనించునపుడు 7వ మహత్త్వముగల ఒక నక్షత్రము అతని కంటబడెను. ఇతర నక్షత్రములవలె దాని స్థానము స్థిరముగా ఉండకపోవుటచే అది ఇతనికి ఆశ్చర్యమును కలిగించెను. 1-1-1801లో ఈ నభోమూర్తి ఇతనికి కనబడెను. ఇది నక్షత్రములకు సాపేక్షముగ చలించుచుండుటచే నక్షత్రము కాదనియు, గ్రహములకు సంబంధించిన దనియు ఇతడు చిరకాలావలోకనము చేసి నిశ్చయించెను. దీనికి 'సిరిస్' అను నామకరణము చేయబడెను. 1809 లోగా అట్టివి మరికొన్ని నభోమూర్తులను ఇతరులు కనిపెట్టిరి. గురు కుజ కక్ష్యల మధ్యలో ఇట్టివి అనేకములు కలవని తెలియవచ్చెను. వీటికి లఘుగ్రహములు అని పేరు. అవి అన్నియు గ్రహములవలె ఉండును, కాని పరిమాణములలో చాల చిన్నవి. వ్యాసార్థములు కొన్నివందల కిలోమీటరులు. తరువాతి ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు ఛాయాపటముల మూలముగా వాటిని ఆవిష్కరించిరి.

పరికరముల జట్టు : 18వ శతాబ్దములో వేధశాలల సంఖ్య తక్కువ. అవి జనసమ్మర్దమగు పట్టణములలో స్థాపింపబడి ఉండెను. అందుచే దుమ్ముచేతను, రాత్రి పూటలందు ఇండ్లలో వెలుగు దీపముల వలనను నభోమూర్తుల ప్రతిబింబములు దూరదర్శనిలో స్పష్టముగ కనబడకుండెను.

వేధశాలలు క్రమేణ ఎక్కువగ పట్టణములకు దూరముగాను, ఎత్తుప్రదేశములయందును, దుమ్ములేని ప్రదేశముల లోను స్థాపింపబడెను.

పరికరములు ఎక్కువ సునిశితములుగను చేయబడెను. దూరదర్శని కర్రలతోను, అట్టలతోను కాక ధాతువులతో నిర్మింపబడెను. విషుదర్శని లేదా విషువృత్తయంత్రము అంకితవృత్తముతోను సూక్ష్మమాపకముతోను అమర్చ

బడెను. గణితమునందు లాగరిదమ్‌లు వాడుటవలన ఫలితములు సులభముగాను, శీఘ్రముగాను లభించు చుండెను.

కక్ష్యల నిర్ణయములో 'కనిష్ఠవర్గవిధానము' వాడ బడెను. ఈ విధానము గాస్, లాగ్రాంజ్ చేతులలో చక్కబడి అనేక సమస్యల సాధించుటకు అనుకూలముగా ఉండెను. ఈ విధానమునందు ఎన్ని నిరూపకముల తీసికొనినను, వాటికిని, వాని మాధ్యమ మూల్యముల యొక్క అంతరముల వర్గముల మొత్తము కనిష్ఠపు విలువ గలదిగా ఉండవలయును.

సిరిస్ లఘుగ్రహము యొక్క కక్ష్య ఉత్కేంద్రత ఎక్కువ. కక్ష్యనిమ్నత కూడ అధికము. కక్ష్య వృత్తముగా ఉండిన దాని నిర్ణయము సులభము. కక్ష్య యొక్క ఉత్కేంద్రత అధికమయినందున సిరిస్ యొక్క కక్ష్య నిర్ణయించుటకు 'కనిష్ఠవర్గ విధానము' ఉపయోగింపబడినది.

పియాజీ నక్షత్రములకు ప్రత్యేక చలనము కలదని ప్రతిపాదించెను. అతడు హంస 61 (సైగ్నస్ 61) నక్షత్రమున కట్టి చలనము కలదని ప్రచురించెను. ఇది ఖగోళశాస్త్రవేత్తల విస్మయమునకు కారణమయ్యెను. ఈ ప్రతిపాదనమును నిర్ణయించుటకు బెసల్ ఒక సాధనమును నిర్మించెను. దానికి 'హేళిమాపకము' అని పేరు. విషువృత్త యంత్రములోని ముఖ్యకటకము అడ్డముగా కోయబడి ఒకటిపై ఒకటి జరుగుటకు అవకాశము ఉండును. ప్రతి భాగము యొక్క నాభివద్ద ప్రతిబింబము ఏర్పడును. రెండు భాగములు ఒకటిపై ఒకటి సరిచేరినపుడు ప్రతిబింబము ఒక్కటి అగును. లేనిచో రెండుగా కనబడును. సూక్ష్మమాపనభ్రమి (మైక్రోమీటర్ స్క్రూ) చే రెండు భాగములు ఒకటిపై ఒకటి జరుగు దూరము కనుగొనుటకు అమర్చబడెను.

ఈ సాధనమును ఉపయోగించి, హంస 61 యొక్క వార్షికలంబనమును బెసల్ కనుగొనెను.

ఎక్కువ ప్రత్యేక చలనము గల నక్షత్రములు దగ్గరగ ఉండును. తక్కువ ప్రత్యేక చలనము గలవి ఎక్కువ దూరములో ఉండును. ఈ నియమమును అనుసరించి హంస 61 యొక్క దూరమును 1838 లో బెసల్ కనుగొనెను.

1839 లో గుడ్‌హోప్ వేధశాలలో జరిగిన పరిశీలన వలన సెంటారీ యొక్క లంబనము 2.54 సెం.మీ. అని తెలిసెను. అదియే త్రిశంకునక్షత్రము, మనకు చాల దగ్గర ఉండునది. దీనికి ప్రక్కన దక్షిణక్రాసు (విశ్వామిత్రుడు) కలదు.

ఖగోళ భౌతికశాస్త్రము

గెలిలియో నిర్మించిన దూరదర్శని సహాయమున 16 వ శతాబ్దము చివర, 17 వ శతాబ్దము ప్రారంభమునను అనేక ఖగోళ రహస్యములతోపాటు సూర్యమండలము యొక్కయు, గ్రహముల యొక్కయు భౌతికస్థితి కొంత వరకు తెలియవచ్చెను. సుమారు రెండు శతాబ్దములకు తర్వాత వర్ణమాలాదర్శనిని, వర్ణమాలా విశ్లేషణమును పరిశోధకులు విపులముగా వాడ నారంభించిరి. ఇందు మార్గదర్శి సెచ్చీ. ఖగోళ భౌతికశాస్త్రమునందు నక్షత్రముల యొక్క, గ్రహముల యొక్క తాపక్రమము, వికిరణము, వాతావరణస్థితి, ఉపరితలము, అంతర రచన మొదలైన విషయములు పరిశోధింపబడును.

సౌరమండలక్షేత్రము : సూర్యకళంకములు ఇదివరకే గెలిలియోచే గుర్తింపబడినవి. వాటి గురించి పరిశోధన అనవరతము జరుగుచుండెను. తర్వాత సూర్యగ్రహణకాలములందు సూర్యబింబము చుట్టునుండు మకుటమును, అగ్నిజ్వాలలువలె పైకి లేచు శిఖలును అనాది కాలముగ కనబడుచుండెను. కాని 19 వ శతాబ్దమున వాని వివరములు తెలిసినవి.

సూర్యకళంకములు కనబడుటకు, మరుగు పడుటకు ఏ నియమమును లేదని కాసినే మొదలగువారు తలచిరి. ష్వాబ్ (1843) 33 సంవత్సరములకాలము సూర్యమండలమును పరిశీలించి, సూర్యకళంకముల ఆవృత్తి కాలము 10 సంవత్సరములని నిశ్చయించెను.

ఇంతలో జర్మనీలో భూమి యొక్క అయస్కాంత స్థితి పరిశోధన ప్రారంభమై, సూర్య కళంకముల అయస్కాంత బలముతోపాటు వాటి చలనములోకూడ ఆవృత్తి కనబడుట శాస్త్రజ్ఞులు గమనించిరి. ఆవృత్తి కాలము 11.11 సంవత్సరములని నిశ్చయింపబడెను. అయస్కాంతక్షోభములు సూర్య కళంక ఆవృత్తిని అనుసరించి ఉండును. కాని భూలోకములోని వాతావరణములోని మార్పులు, వర్షపాతము, క్షామము, పంటలు మొదలగునవి సూర్య కళంక ఆవృత్తి కాలమును అనుసరించునని తెలిసినది. సూర్యమండల భ్రమణము అన్ని భాగములందు సమానము కాదనియు, ఆ భాగముల కోణీయవేగము నిరక్షభాగమునందు తక్కువగను, ధ్రువప్రాంతములందు ఎక్కువగను ఉండును అనియు తెలియవచ్చెను.

1860 లో సౌర భౌతిక లక్షణములు విస్తారముగ పరిశీలింపబడినవి. సౌర నిరక్షరేఖకు క్రాంతివృత్తమునకు మధ్యగల కోణము కనుగొనబడెను.

సౌర కుటుంబములో ఉండు గ్రహముల కన్నిటికి ఇట్టి పరిశీలన జరుగుచుండెను. శనియొక్క కంకణములను చక్కగ గమనించి, పరిశోధకులు వాని లక్షణములను ప్రచురించిరి. అవి అన్నియు దృఢమగు కంకణములు కావని, కణములు కణములై ఉండి ప్రతి కణమును తన కక్ష్యలో మాత్రుగ్రహమగు శని చుట్టు తిరుగుచుండునని క్లార్క్ మాక్స్‌వెల్ 1857లో కనుగొనెను. ఈ కణములు దట్టముగ ఉండుటచే అవి మందమగు పలకవలె కనబడుచు సూర్య కిరణముల పరావర్తనచే ప్రకాశవంతముగ ఉండును.

1845 లో విలియమ్ పార్సన్ ఇంగ్లండులో గొప్ప దూరదర్శిని నిర్మించెను. దాని ముఖవ్యాసము 1·829 మీటరులు, పొడవు 15·8496 మీటరులు. అట్టి దూరదర్శిని అదివరలో ఎచ్చటను నిర్మింపబడలేదు. దానితో నీహారికలు, నక్షత్ర బృందములు పరిశీలించుట అనుకూలమయ్యెను. నీహారికలు నక్షత్ర కూటములు కావనియు, సర్పిలాకారములగు దట్టమగు వస్తువులనియు తెలియవచ్చినందున శాస్త్రపరిశోధనలో మరియొక క్రొత్త శాఖ ఏర్పడి నక్షత్రముల ఆవిర్భావమును గురించి పరిశోధన ప్రారంభమయ్యెను.

వర్ణమాలలోని నల్లని రేఖలు : న్యూటన్ సూర్యకాంతి యొక్క వర్ణమాలను సన్నని రంధ్రముద్వారా పరిశీలించగా, 1815 లో ఫ్రాన్‌హోఫర్ సన్నని చీలికనుండి వెలువడు కాంతిని దూరదర్శనితో పరీక్షించి. సూర్య వర్ణమాలలో నల్లని రేఖ లనేకములు కలవని కనిపెట్టెను. అందు కొన్ని వందల నలుపు రేఖలను అతడు గుర్తించి, వాటిలో ముఖ్యమైన వాటికి ఇంగ్లీషు అక్షరములతో నామనిర్దేశము చేసెను, ఇవి నేడు అతని పేరిట పిలువబడుచున్నవి.

మృగవ్యాధుడు (సిరియస్), పునర్వసు నక్షత్రముల వర్ణమాలలో మూడు నలుపు రేఖలు, రెండు నీల ప్రదేశములోను ఒకటి పచ్చని భాగమునందును కనబడెను. చంద్ర కిరణ వర్ణమాల సూర్యకిరణవర్ణమాలవలె ఉండెను. ప్రకాశవంతమగు కొన్ని నక్షత్రముల వర్ణమాలలు వేరు విధముగా ఉండెను.

సోడియమ్ యొక్క ఆవిరి జ్వలించునపుడు ఏర్పడు కిరణముల కాంతియొక్క వర్ణమాలా రేఖ ఫ్రాన్‌హోఫర్ గుర్తించిన D రేఖతో సరియగునట్లు తెలిసెను. దీని రహస్యము తర్వాత నలుబది సంవత్సరములకుగాని తెలియలేదు.

వర్ణమాలదర్శని ద్వారా సూర్యకాంతి పోయి, బయట తెరపై పడినపుడు వర్ణమాలా రేఖలన్నియు కనబడును. కాని వర్ణమాలా దర్శకమును ప్రవేశించుటకుముందు సోడియమ్ గుండ సూర్యునికాంతి వెళ్లినచో వర్ణమాలలో D రేఖమాత్రమే కనబడును. తక్కిన రేఖ లుండవు.

కిర్కాఫ్ పరిశోధనవలన భూమియందుండు ప్రతి మూలద్రవ్యమునకు గల ప్రత్యేక తిమిర రేఖలు నభో మూర్తుల వర్ణమాలలలో కలవని మనకు తెలియవచ్చినది. ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి ప్రతి నక్షత్రమునందును ఉండు మూలద్రవ్యములను కనుగొనుటకు వీలయినది.

1851లో సెచ్చీ సూర్యవికిరణమును తెర్మోపైల్ (చూ. భౌతిక, రాసాయనికశాస్త్రములు-పు. 632)తో పరిశీలించి, సూర్యకళంకముల తాపక్రమము కాంతిమండల తాపక్రమము కంటె తక్కువ అని తెలిసికొనెను, సూర్యబింబ కేంద్రముయొక్క వికిరణము పరిధి వికిరణమునకు రెండు రెట్లు అని గ్రహించెను; గురుగ్రహ పరిశీలనమువలన ఆ గ్రహవాతావరణములో తుపానులు చెలరేగుచుండునని ఎరిం గెను.

1846 లో కనబడిన బీలా ధూమకేతువు 1852 లో కనబడినపుడు రెండుగా చీలి ఉండిన, ఒక చీలికయొక్క గర్భమును దూరదర్శనితో చూచినపుడు అందు ఒక నక్షత్రము కనబడుట వలన గర్భము చాల పలుచగా ఉన్నదను విషయము సెచ్చీకి విశదమయ్యెను.

అతని దూరదర్శనిలోని కటకము ఉత్తమమయినందున గురునియొక్క ఉపగ్రహముల బింబముల పరిమాణములు, వాటి పరిభ్రమణ కాలములు కనుగొనుట వీలయ్యెను.

1859 లో కుజగ్రహమును పరిశీలించి దాని ధ్రువ ప్రాంతములందు మకుటములు కలవని అతడు కనుగొనెను. తరువాతి పరిశోధకులు ఈ మకుటములు మంచు గడ్డలని తెలిసికొనిరి. ధ్రువప్రాంతములనుండి కాలువలు నిరక్ష ప్రదేశమునకు పోవుటవలన కుజగ్రహములో ప్రాణులు కలరు, వారు యాంత్రికశాస్త్రమునందు నిపుణులై ధ్రువ ప్రాంతములలోని మంచు గడ్డలు కరిగినపుడు ఆ నీటిని ఇతర ప్రాంతములకు కాలువల మూలముగా తీసికొని పోవుదురు అనువాదమునకు అవకాశము కలిగెను.

ఫ్రాన్‌హోఫర్ ప్రారంభించిన వర్ణమాలా పరిశోధనమును చేయూతగా చేసికొని సెచ్చీ అనేక క్రొత్త విషయములను కనుగొనెను. నక్షత్రములు అనేకము లనియు, కాని వాని వర్ణమాలలను కొన్ని ముఖ్య తరగతులుగ విభజింపవచ్చుననియు తెలియవచ్చినది. సుమారు 4000 నక్షత్రములు ఇట్లు పరిశీలింపబడి 5 వర్ణమాలాజాతులుగ విభజింపబడినవి. 1 వ జాతివి శ్వేతనీలములు, 2 వ జాతివి

పీతములు (పసుపు), 3 వ జాతివి అరుణములు (ఎరుపు); 4 వ జాతివి మిశ్రములు, 5 వ జాతియందు విచూషణ ఉద్గమన రేఖలు గలవు. ఖగోళ పరిశీలనమందు క్రమేణ ఛాయాచిత్ర విధానము వాడబడుచు వచ్చెను.

సర్ విలియమ్ హైగెన్జ్ భౌతిక శాస్త్రజ్ఞుడు. ఇతనికి ఖగోళశాస్త్రమునందు అభిరుచి కలిగి నక్షత్రముల వర్ణ మాలలను భౌమ్యమూలద్రవ్యముల వర్ణమాలలతో సరి పోల్చి, నక్షత్రములకు పరస్పర భేదములు ఉండినను నిర్మాణ విధానములలో సౌరకుటుంబమువలె ఉండుననియు మూల ద్రవ్యములు అన్నిటిలో ఒకే విధమున ఉండుననియు (1863) చూపించెను.

నీహారికలలో కొన్ని క్రిక్కిరిసిన నక్షత్ర బృందము లనియు, తక్కినవి కాంతిమంతములగు వాయువులనియు ఇతడు కనుగొనెను. కొన్ని నీహారికల వర్ణమాలలలో కొన్ని కాంతిమంతములగు ఉద్గమనరేఖలు మాత్రమే కాన వచ్చెను. నైట్రోజన్ రేఖలు వాటిలో కన బడలేదు.

1880 లో ఒక నక్షత్రముయొక్క వర్ణమాలను, భౌమ్య ద్రవ్యముల వర్ణమాలను, ప్రక్క ప్రక్కన ఛాయాపటము తీసి సరిపోల్చి డప్లర్ సిద్ధాంతము వాటికి అన్వయించునని చూపెను. దృక్పథరేఖలో ఒక తారయొక్క గమన వేగమును దాని వర్ణమాలరేఖలు భౌమ్యద్రవ్యరేఖలతో సరిపోల్చి చూచినపుడు నక్షత్రరేఖలు వర్ణమాలయొక్క ఎరుపు చివరవైపు జరుగును అను భూతార్థమును ఉపయోగించి దృక్పథరేఖలో నక్షత్రముల గమనవేగమును కనుగొనెను. సూర్యునివైపు 19 నక్షత్రములు, సూర్యుని నుండి దూరముగా 11 నక్షత్రములు గమించుచున్నవని కనుగొనెను. తర్వాత ఛాయాచిత్ర విధానము ఖగోళ పరిశీలనయందు ధారాళముగా వాడబడెను.

సూర్యమండల పరిశోధనము

సూర్యమండల పరిశోధనమునంతటిని రెండు సంపుట ములలో (1875 - 1877) సెచ్చీ ప్రచురించెను. వీనిలో సౌరమండల సంభవములు, మండలతలము, వాతావరణ స్థితి, గ్రహణములు, జ్వాలలు, తాపక్రమము, వికిరణము మొదలగునవి వివరింపబడినవి. ధూమకేతువులు, ఉల్కా పాతములు కూడ వివరింపబడినవి. అన్ని విషయములను వివరించుచు మన సూర్యునికి నక్షత్రములకును భేదము లేదనియు, ప్రతి నక్షత్రము ఒక్కొక్క సూర్యుడనియు అతడు నిశ్చయించెను. సూర్యుని గురించి అతడు ఈ విధ మున వివరించెను :

'మన పూర్వులెందరో సూర్యుని పూజించిరి. సృష్టిలో పరిపూర్ణమగు భగవంతుని ప్రతిబింబము సూర్యమండల మొక్కటియే. సూర్యుని సాధనముగ ఉపయోగించి, భగవంతుడు ప్రజలకు సౌకర్యములను కలిగించుచుండుటచే సూర్యుని పూజించుట అనుచితము కాదు. మన కంటికి సూర్యుడు సాధారణముగ కనపడినను సూర్యమండల పరిశోధనవంటి మహాకార్యము వేరొకటి లేదను విషయము సర్వజన సమ్మతము'.

భారతీయులు అనాదిగ సూర్యోపాసకులై ఉండుట యందాశ్చర్యము ఏమియు లేదు. సూర్యమండలము అంతయు సంక్షోభముతో ఉన్న వాయువులతో కూడి ఉండుటచే కొన్నిచోట్ల వాయువులలో కొంత భాగము ఉన్నట్లుండి పైకిలేచి వ్యాకోచము చెందును. అపుడది చల్లబడి సూర్యమండలముపై పడును. పరిసరములకంటె ఇది చల్లగ ఉండుటచే తక్కువ కాంతిమంతముగ ఉండును. కాబట్టి నల్లగ ఉండును; దీనినే సూర్యకళంక మందురు. ఈ సిద్ధాంతము సెచ్చీచే ప్రతిపాదింపబడి, తర్వాత శాస్త్రజ్ఞులచే ఆమోదింపబడెను.

1898 లో కనబడిన సూర్యగ్రహణమును పరిశీలించి, సూర్యబింబముయొక్క కాంతి మండలముపై కొన్ని వందల కిలోమీటరులు లోతుగల పొరచే విచూషణము వలన ఫ్రౌన్‌హోఫర్ రేఖలు పర్వడునని యంగ్ ప్రతిపా దించెను. ఈ పొరకే ప్రత్యావర్తన స్తరము అని పేరు.

1879 లో ఝూన్‌సెన్ 0.001 మొదలు 0.003 సెకనుల కాల వ్యవధిలో సూర్యబింబము యొక్క ఛాయాపటములు తీసి, అందు గల విశేషములను కనుగొనెను. సూర్యమండల తలమునందు కాంతిమంతములగు అనేకస్థలములు కన బడును. వానికి నానావిధ ఆకారములుండును. అయినను అండాకారములు గలవి ఎక్కువ. అవి సూర్యమండలము లోపలినుండి పైకి లేచు ఉష్ణవాయుస్తంభముల అగ్రము లని ఈ పరిశోధన వలన తెలిసినది. దూరదర్శనిలో చూచి నపుడు సూర్యునికాంతిమండల తలము మచ్చలు మచ్చలుగా ఉన్నట్లు కనిపించును. కొన్ని విశదపరిస్థితులలో ఈ మచ్చలు చిన్న చిన్నకణముల కూడికలవలె గోచరించును. ఇవి కాంతిమండల తలముయొక్క తక్కువ ప్రకాశవంత మయిన పృష్ఠభాగములపై వికీర్ణములై ఉండును. ఈ కణముల వ్యాసార్ధము 241 - 1448 కిలోమీటరులు తరగతిలో ఉండును. వీటిమధ్య చీకటి చోట్లుండును. ఇవన్నియు మిక్కిలి వేడిగల ప్రదేశములు. ఇందులో ఒకటియు కొద్ది నిముషములకన్న ఎక్కువ కాలము స్థిరముగా ఉండదు. దీనికి కారణము సూర్యగోళములోపల

నుండి తలముకన్న ఎక్కువ వేడిమికల వాయుసమూహములు పైకివచ్చి వేగముగా చల్లబడుట.

1857 లో ఖగోళ అవలోకనములకు మొట్టమొదట ఛాయాచిత్ర విధానము వాడుకలోనికి వచ్చెను.

సూర్యగ్రహణములు : 1860 లో సంభవించిన పూర్ణ సూర్యగ్రహణమును పరిశీలించి సెచ్చీ క్రింద విషయములను నిరూపించెను :

(అ) సూర్యమండలమునుండి వెలువడు జ్వాలలు వాస్తవికములు, వెలుతురునుండి ఏర్పడు భ్రమ కాదు.

(ఆ) అవి సూర్యమండలమునకు చేరినవి.

(ఇ) మకుటము కూడ వాస్తవికము. అది సూర్యమండల నిరక్ష ప్రదేశమున ఎక్కువగా నుండును. 45° అక్షాంశ ప్రదేశములో చాల ఎక్కువ.

18-8-1863 నాడు ఇండియాలో కనపడిన పూర్ణ సూర్యగ్రహణము చాల ముఖ్యమయినది. అప్పుడు జ్వాలల లక్షణములను, మకుటముల రహస్యములను సంశయము లేక శాస్త్రజ్ఞులు తెలిసికొనిరి.

యునైటెడ్ స్టేట్స్ దేశస్థుడగు 'యంగ్' 1869లో సంభవించిన గ్రహణ సమయమున సూర్యమండలమును జాగ్రత్తగా పరిశీలించెను. వర్ణదర్శనితో చూడగా ఒక వింత దృశ్యము కనబడెను. గ్రహణమునకు పూర్వము వర్ణమాలలో కృష్ణవర్ణ రేఖ లుండినవి. చంద్రబింబము క్రమేణ సూర్యబింబమును ఆచ్ఛాదించినపుడు ఈ రేఖలు క్రమేణ అదృశ్యము అయ్యెను. చంద్రబింబముచే సూర్యబింబము పూర్తిగా ఆవరింపబడినపుడు ఉన్నట్లుండి ప్రకాశవంతము లగు రేఖలు కనబడి ఆశ్చర్యమును కలిగించెను. తర్వాత 2, 3 సెకనులలో ఈ దృశ్యము మారి మొదటి కృష్ణవర్ణ రేఖలు కనబడినవి. సూర్యమండలమును పరివేష్టించి యుండు పర్యావర్తన స్తరముచే ఇట్లు జరిగినదని విశదమయినది. 'పర్యావర్తన స్తరము' అను పేరు కూడ సార్థకమైనది.

లాక్‌యర్ భౌతిక శాస్త్రజ్ఞుడు. తన పరిశోధనలను 1881 లో ప్రచురించెను. సూర్యమండలమును పరివేష్టించి యుండు కాంతిమండలమునుండి జ్వాలలు బయలువెడలుననియు, అత్యుష్ణతవలన మూలద్రవ్యములు అయనీకరణము పొందుననియు అందు ప్రతిపాదింప బడినది. జ్వాలల వర్ణమాలలో ఒక పీతరేఖను అతడు గుర్తించి అది భౌమ్య మూలద్రవ్యముల రేఖలకు వేరుగానుండుటచే అది క్రొత్తద్రవ్యమును సూచించవలయునని తలచి, దానికి 'హీలియమ్' అని పేరిడెను. అది భూలోకములో కూడ రేడియోధార్మిక మూలద్రవ్యములలో ఉండునని 1895 లో సర్ విలియమ్ రామ్జీ కనుగొనెను.

ఇటలీ దేశమునందు సూర్యకళంకములకును, భౌమ్య అయస్కాంత సంక్షోభములకును గల సంబంధమునుగురించి పరిశోధన సాగెను. రిక్కూ సూర్యమండల దృశ్యములు 11 సంవత్సరముల ఆవృత్తులు కలవని, అవి భూలోక అయస్కాంత సంక్షోభముల ఆవృత్తికాలములకు సరిపోవునని కనుగొనెను.

కళంకములు సూర్యబింబ మధ్యరేఖను దాటిన 45 గంటల తర్వాత భూలోకములో అయస్కాంత సంక్షోభము కలుగునని ఇతని పరిశోధనలచే తెలియవచ్చెను.

ఖగోళ యాంత్రికశాస్త్ర ప్రారంభము : బ్రాడ్లీ, బెసల్ అవలోకనములు పూర్తి అయిన తర్వాత నక్షత్రముల స్థితిని యథార్థముగ కనుగొనుట ఆవశ్యకమని తెలియవచ్చినది. నక్షత్రముల జాబితాలు తయారుచేసిన తర్వాత వాని ప్రత్యేక గమనములను, విభాగములను, గ్రహముల ఉనికిని నిశ్చయించుటకు వీలగును.

ఇందు కార్యదీక్ష వహించిన వారిలో ప్రథముడు ఆర్జిలాండర్, ఇతడు 9 వ తరగతి నక్షత్రములవరకు నక్షత్రముల పట్టికను తయారుచేసెను. ఆ పట్టికయందు ఉత్తర ధ్రువమునుండి దక్షిణ క్రాంతి రెండు డిగ్రీలు వరకు కల నక్షత్రములు కలవు. వాని సంఖ్య 324, 198. సర్ డేవిడ్ గిల్ గుడ్‌హోప్ అగ్ర వేధశాలనుండి అవలోకనము చేయుచు ఛాయాచిత్రముల మూలముగా దక్షిణగోళనక్షత్రముల జాబితా సిద్ధపరచెను. ఆ నక్షత్రముల సంఖ్య 4,00,000.

గిల్ విజ్ఞాని 1886 లో ఛాయాచిత్ర విధానము ఖగోళ పరిశీలనలో ధారాళముగ ఉపయోగింపవలయునని సలహా ఇచ్చెను. అందులకై నానాదేశ విద్వాంసులు పారిస్ నగరములో సమావేశమై నక్షత్రపట మొకటి ఏర్పాటు చేయుటకై ఒక తీర్మానము ప్రతిపాదించిరి. ప్రపంచములో కల 18 వేధశాలలు ఆ పనికి పూనుకొనినవి. మొదట 11 తరముల నక్షత్రముల జాబితాలు తయారుచేసి, వాటి నిరూపకములు సూక్ష్మమాపకముతో ఛాయా పటముల నుండి కనుగొనుట, 14 తరముల వరకు ఛాయా పటములు తీసి వాటినుండి నక్షత్రపట మొకటి తయారుచేయుట, ఆ వేధశాలల కార్యభారము. ఇటలీ దేశములో కటానియా వేధశాల ఇతర వేధశాలల పనిని క్రోడీకరించెను. ఇది ప్రచురించిన నక్షత్రపటములో 10 కోట్ల నక్షత్రములు కలవని శాస్త్రజ్ఞులు తలచుచున్నారు. దీనితో కూడ 60 లక్షల నక్షత్రముల జాబితా ఒకటి తయారుచేయబడెను.

నక్షత్రముల దూరము

సూర్యబింబము యొక్క శుక్రతరణమువలన సూర్యునికి భూమికి గల మధ్యదూరము కనుగొన ప్రయత్నములు సాగినవి. కాని ఫలితములు శుద్ధముగా లేనందున కొందరు లఘుగ్రహములను వాడమని సలహా ఇచ్చిరి. నభోమూర్తుల దూరమును కనుగొనుటకు వాటి లంబనములు కనుగొనెదరు. చంద్రుని విషయములో భూమి యొక్క వ్యాసార్ధమును తీసికొని దానివలన చంద్రబింబము వద్ద ఏర్పడు కోణమును చంద్రుని లంబముగా తీసికొందురు. సూర్యుడు, ఇతర నక్షత్రములు చాల దూరములో ఉండుటచే భూవ్యాసార్ధముచే వాటివద్ద ఏర్పడు కోణములను కొలుచుట వీలుకాదు. కాబట్టి భూమికక్ష్య యొక్క వ్యాసమును ఆధారముగా తీసికొని దీనిచే సూర్యునివద్ద కాని, ఇతర నక్షత్రములవద్ద కాని ఏర్పడు కోణములు క్రమముగా వాటి లంబనములను గుర్తించును. సూర్యుని యొక్క లంబనము 8″.80 అని కనుగొనిరి. మనకు మిక్కిలి దగ్గరగా నుండు నక్షత్రము త్రిశంకువు యొక్క లంబనము 0″.75.

నెప్ట్యూన్ - ఆవిష్కరణము

యురేనస్[1] యొక్క చలనము గణితాగతస్థితిని అనుసరించలేదని 1820 లో తెలియవచ్చెను. దీనికి కారణ మేమైయుండునని ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులకు గొప్ప సమస్య ఏర్పడెను. అవిదిత గ్రహము ఒకటి దీనికి కారణమై ఉండవచ్చునని తలచి, ఆడమ్స్ అను బ్రిటిష్ విద్యార్థి గణితమూలముగా ఆ అవిదిత గ్రహము యొక్క ద్రవ్యరాశి, భోగము కక్ష్య యొక్క అంశములు 1845 లో గణించి గ్రీనిచ్ వేధశాలాధికారికి చూపించిన ఆ విషయమున అతడు ఎక్కువ ఆదరణ చూపలేదు. 1846 లో లవెరియా అను ఫ్రెంచ్ శాస్త్రజ్ఞుడు ఇదే విషయమును స్వంతముగా గణించినపుడు అతని తోడి శాస్త్రజ్ఞులు గణితమునంతయు ఆమోదించి ప్రచురించిరి. బెర్లిన్ వేధశాలాధికారి గాలే ఆ గణితమును అనుసరించి ఒక నూతన గ్రహమున్నట్లు లవెరియాకు తెలియపరచెను. ఇది ప్రచురింపబడిన తర్వాత బ్రిటన్‌లో గొప్ప ఆందోళనము కలిగి, ఆడమ్స్ అనాదరణకు అందరు నొచ్చుకొనిరి. ఆ క్రొత్త గ్రహమునకు నెప్ట్యూన్[2] అని నామకరణ మొనర్చిరి. అప్పుడే లవెరియా దాని కక్ష్యకు బయట కూడ గ్రహములు ఉండవచ్చునని హెచ్చరించెను. అతని హెచ్చరిక సత్యమైనదని ప్లూటో[3] గ్రహ ఆవిష్కరణముచే తెలియుచున్నది.

1. దీనికి భారతీయులు పెట్టిన ఇప్పటి పేరు 'ఇంద్రుడు'.
2. దీనికి భారతీయులు పెట్టిన ఇప్పటి పేరు 'వరుణుడు'.

చంద్రచారము

ఇది చాల కఠిన విషయము. సూర్యుడు భూమి మధ్య గల ఆకర్షణము ఏకరూపముగా ఉండక మారుచుండును. కాబట్టి, చంద్రకక్ష్యావేగము కొన్ని సమయములందు అధికముగాను, కొన్ని సమయములందు తక్కువగాను ఉండును. చంద్రకక్ష్య యొక్క నిమ్నత, ఉత్కేంద్రత, పరిజ్యా, పాతములు వీటి స్థితిలో విడువని మార్పు లేర్పడుచుండును. ఇన్ని చిక్కులు గల చలనమును పరిశీలించి, దానిని నిర్ణయించు సూత్రములు ఏర్పరచుట చాల కష్టమగు కార్యము. ఆడమ్స్, న్యూకమ్, హిల్, బ్రౌన్ మొదలగువారి పరిశ్రమలచే ఈ మహాకార్యము సాధించబడినది.

ఇట్లే బుధచారములో సంశయము లేర్పడెను. బుధుని పరిహేళి భోగము, లెక్కబెట్టిన దాని కంటె 43″ (వికలలు) ఎక్కువ యుండెను. ఈ సంశయములు సాపేక్షతా వాదముచే తరువాత పరిష్కరింపబడెను (చూ. బుధుడు).

ఇతర విషయములు

ఖగోళ యాంత్రికశాస్త్రము పలువిధములుగా ఉపయోగింపబడుచుండెను. ప్రచారములో ఉన్న సూర్యగోళ చార పథకములలో పొరబాట్లు కలవని తెలిసిన తర్వాత వానిని సరిదిద్దుటకు, 'ఏరీ' పరిశోధనలు ప్రారంభించెను. దీర్ఘకాల వ్యత్యాసములు సూర్య పథకములలో కలవని తెలిసికొని, వాటిని సరిచేసి క్రొత్త పథకములు ప్రచురించెను. ఖగోళ యాంత్రికశాస్త్ర సోపానములలో ఇది మరియొక మెట్టు.

ఈ విధానము నక్షత్రములకు ప్రయోగించి, వానితో ప్రోసియన్, మృగవ్యాధుడు నక్షత్ర ద్వికములని తీర్మానించి, వాటి అనుచరుల ప్రధాన నక్షత్రముల నుండి దూరము, భ్రమణకాలము మొదలగునవి కనుగొనబడినవి. ప్రోసియన్ యొక్క అనుచర తార 4″.5 దూరములో ఉండును. అది 13 వ తరములో చేరినది. మృగవ్యాధునికి కూడ అనుచరుడు కలడు. ఇది వరలో ఏక నక్షత్రములని తలచుకొనిన నక్షత్రములలో కొన్ని నక్షత్రద్వికములని తెలియవచ్చినది. ఇట్టి విషయముల కనుగొనుటకు విశేషముగా నక్షత్రావలోకనములు చేయవలసి వచ్చెను. అవెర్స్ 6 సంవత్సరముల కాలము

3. దీనికి భారతీయులు పెట్టిన ఇప్పటి పేరు 'యముడు'.

దీనియందు గడిపి 7000 మధ్యాహ్న రేఖావలోకనములు, 4,500 క్రాంతి అవలోకనములు చేసి, అంతవరకు ప్రచారములో ఉన్న నక్షత్ర పథకములలోని లోపములను సవరించెను. ఈ సవరణలు 1888 లో ప్రచురింపబడెను. ఈ కృషివలన నక్షత్రముల స్థితి వాటి ప్రత్యేక గమనముల పరిశోధన పూర్తియయ్యెనని చెప్పవచ్చును.

హేళిమాపకము[1] ను విస్తారముగా వాడి గిల్ గురు గ్రహముయొక్క ద్రవ్యరాశిని, దాని ఉపగ్రహముల లక్షణములను కనుగొనెను.

19 వ శతాబ్దాంతమున అతడు ఖగోళయాంత్రిక శాస్త్రమున క్రొత్త విధాన మవలంబించెను. పరిశోధముల గణించుటకు వాడు పరంపరలు పూర్ణ ఉపసరణ పరంపరలు కావనియు అవి సామి[2] ఉపసరణ పరంపరలు అనియు తెలిసిన తర్వాత సౌరకుటుంబమునకు స్థిరతోలనస్థితి ఉండునా అను సంశయము అతనికి ఏర్పడినది.

ఇట్టి పరిశోధనల పరిణామము చాల అద్భుతమయినదిగా మారినది. ప్రధానమూర్తినుండి ఉపగ్రహములు ప్రత్యేకమనుట, ప్రపంచ సృష్టి విధానము, నక్షత్ర ద్వికముల సంభవము మొదలగు సృష్టి రహస్యములయొక్క మర్మము తెలియవచ్చెను.

1846 నుండి 1851 నాటికి శని, ఇంద్ర, వరుణ గ్రహముల ఉపగ్రహము లన్నియు ఆవిష్కరింపబడెను. ఈ కార్యమును సాధించుటకు మాల్టాలో గొప్ప దూరదర్శిని విల్లియమ్ లాసెన్ నిర్మించెను. దీని ముఖము సుమారు 1.25 మీటరు (49 అం॥)లు పొడవు 10.36 మీటరు (34 అ॥)లు.అతడు దానితో ఉపగ్రహములను, నీహారికలను పరిశోధించి 600 క్రొత్త నెబ్యులాలపట్టిక తయారు చేసెను.

1862 - 1910 వరకు షియాపరెల్లి మిలాన్ వేధశాలాధికారిగా ఉండెను. అతడు కుజగ్రహ వాతావరణము, కుజ మండలరచన, దాని భౌతికలక్షణములు మొదలగు విషయములను పూర్తిగా పరిశోధించెను. తర్వాత ఉల్కలను పరిశోధించి, అవి అంతరాళము నుండి వచ్చునట్లును, ధూమకేతువులకు ఉల్కలకు ఉండు సంబంధమును కనుగొనెను. టెంపుల్, బీలా ధూమకేతువులు జీర్ణములై అదృశ్యములయిన తర్వాత వాని ఆవృత్తి కాలములను అనుసరించి ఉల్కలు ఏర్పడుటవలన ఆ ధూమకేతువులు ఏమయినవో అను సంశయములు తొలగిపోయెను.

1. సూర్యుని వ్యాసమును, పరస్పర సన్నికృష్టములగు రెండు నభోమూర్తుల మధ్యకోణీయ దూరమును నిర్ణయించు పరికరము.

2. సామి = సగము ($\frac{1}{2}$)

ఆధునిక యుగము

ఈ యుగములో శాస్త్రవిజ్ఞానమునకు యాంత్రికసహాయము అధికమయ్యెను. అనేకులు ఖగోళవిచారమునందు పాల్గొనిరి. వేధశాలలు విరివిగా నిర్మింపబడెను. విశ్వరచనాక్రమము, నక్షత్రముల శక్తి పరిణామములు మున్నగు విషయములందు అంతర్జాతీయ పర్యాలోచనము హెచ్చి, నూతనభావములు ఉదయించెను. ఖగోళశాస్త్రమునకు, ఖగోళ భౌతికశాస్త్రమునకు మధ్యగల భేదము సన్నగిల్లి, పరిశోధన ఏభాగమునకు చెందినదో నిర్ణయించుట కష్టమయ్యెను. ఈ పరిశోధనారంగమున ముఖ్యపాత్రధారులు 1. జార్జి; ఇ. హేల్ ; 2. ఆర్థర్ ఎడ్డింగ్టన్.

జార్జి, ఇ. హేల్ : మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలకు అధికారియై హేల్ అచట ప్రతిష్ఠింపబడిన (1.524 మీటరు (60 అం॥) లు పొడవు, 2.54 మీటరు (100 అం॥) లు ముఖము గల) దూరదర్శనితో నీహారికలు, నక్షత్రలంబనములు మొదలైన విషయములందు విశేష పరిశోధనలు కావించెను. ఇతడు 1889 లో వర్ణమాలా హేళిలేఖని (స్పెక్ట్రోహీలియోగ్రాఫ్) అను పరికరమును నిర్మించెను : కాల్సియమ్ యొక్క K రేఖ[3]ల వెలుతురు సహాయమున 1892 లో సూర్యబింబముయొక్క ఛాయాపటమునుతీసెను. అది ఏకవర్ణచ్ఛాయా పటము. సౌరజ్వాలలయొక్క, సూర్యకళంకములయొక్క ఛాయాపటములుకూడ తీసి, వాటి రచనాక్రమము, వాటిలోని మూలద్రవ్యములను అతడు నిర్ణయించెను. తన అనుచరుల సహాయముతో హేల్ తాపక్రమమువలన వివిధమూలద్రవ్యముల వర్ణమాల రేఖలలో ఏర్పడు పరిణామములను ప్రయోగశాలలలో పరిశోధించి, నిర్ణయించెను.

సూర్యబింబము ఒక అయస్కాంత క్షేత్రమనియు, సూర్యకళంకములు ఒక ఆవృత్తిలో ధనధ్రువకములైనచో, మరుచటి ఆవృత్తిలో ఋణధ్రువకములై ఉండుననియు, పరిపూర్ణావృత్తికాలము 22 సంవత్సరములనియు, భూలోక వాతావరణ వర్షపాతములలోని మార్పులు ఆ ఆవృత్తులను అనుసరించుననియును తెలియవచ్చెను. సూర్యబింబ మకుటము సూర్యునికాంతి మండలములను ఆవరించియున్నది. సూర్యమండల పరిణామమును అనుసరించి 11 సంవత్సరముల కాలపరిమితిలో దాని ఆకారము మారుచుండును. దాని వర్ణమాలలో కొన్ని నూతన ఉద్గమనరేఖలు గోచరించుట వలన వాటి ప్రభవస్థానము కొరోనియమ్ అను

3. K రేఖ : చూ. భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు - పు. 459.

(భూమిపై కనబడని) నూతన మూలద్రవ్యము అని భావింపబడెను.

ఆర్థర్ ఎడ్డింగ్‌టన్ (1882 - 1944) : నక్షత్రముల పరిణామము విషయమై అదివరకు ప్రచారములో ఉన్న రసెల్ సిద్ధాంతము నవీనభూతార్థముల ఆవిష్కరణచే తన ప్రామాణ్యమును కోలుపోగా, ఎడ్డింగ్‌టన్ నక్షత్రముల వర్ణమాలా రేఖల అవేక్షణవలన లభ్యమైన పర్యవసానములతో అనువదించు నక్షత్రపరిణామ సిద్ధాంతమును గణితశాస్త్రరీత్యా స్థాపింపగల్గెను. ఇది నేడు ప్రచారములో ఉన్న సిద్ధాంతము.

ఫిల్టర్ విధానము : ఖగోళభౌతికశాస్త్రములో ఫిల్టర్ విధానము చాల ఆవశ్యకము. దానితో ఏకవర్ణ రేఖలను ప్రత్యేకించి పరిశోధింపవచ్చును. 1929 నుండి 1939 వరకు కృషిచేసి లయో అను వైజ్ఞానికుడు స్ఫటికఫలకములను ఉపయోగించి, వర్ణమాలలో ఒక Å* వెడల్పుగల పట్టాలు వేరుపరచెను. దీనిచే సూర్య మకుటముయొక్క, జ్వాలల యొక్క ఏకవర్ణ ప్రతిబింబముల ఛాయాపటములను తీయగా జ్వాలలు చాల ప్రసారవేగము కనపరచెను. కాని, మకుటములో మార్పులు కనబడలేదు. అందువలన దాని పరిమాణములోని మార్పు దాని భాగముల చలనమువలన కాదనియు, దీప్తిలో హెచ్చుతగ్గులవలననే కలుగుననియు అతడు గ్రహించెను.

నక్షత్రముల లంబనములు కనుగొని, 7,534 నక్షత్రముల జాబితా ఒకటి ష్లిసింజర్ ప్రచురించెను.

నక్షత్రచ్ఛాయా చిత్రములు : ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనలలో ఛాయాచిత్ర విధానము చాల సహకారి. దానివలన ఫలితములు త్వరగా, శుద్ధముగా లభించును. కార్ల్ ష్వార్జ్ షైల్డ్ అను జర్మనీ వైజ్ఞానికుడు 7.5 తరముల కంటె కాంతిమంతములగు 3,500 నక్షత్రముల ఛాయా చిత్రమహత్వములు కనుగొనెను. దృక్సిద్ధతరమునకు, ఛాయాచిత్రతరమునకు గల వ్యత్యాసమే నక్షత్రము యొక్క వర్ణసూచకము. కాలవాతావరణములో మార్పులు వచ్చినను ఛాయాచిత్రము నిస్సంశయముగా నిర్దేశించుటకుగాను ఫిక్‌రింగ్ ఉత్తరధ్రువప్రాంతీయ నక్షత్రములను మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలలో పరిశీలించి 96 నక్షత్రములకు తరములు నిశ్చయించెను. అవి అంతర్జాతీయ సమ్మతి పొందెను.

ఖగోళఛాయాచిత్రములు సులభముగా తీయుటకు సూక్ష్మగ్రాహులగు కెమేరాలు, నాక్షత్ర వికిరణ తీవ్రతను కొలుచుటకు కాంతి విద్యుత్ ఘటములు (ఫొటో ఎలక్ట్రిక్ సెల్స్) నిర్మింపబడెను. వీని సహాయమున మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలలో 16 తరముల వరకుగల నక్షత్రముల తరములను కొలుచుటకు వీలుకలిగెను. కొందరు 18.5 తరముల వరకు కూడ నక్షత్రములను కొలిచిరి. 1932 లో మౌంట్ విల్సన్, మౌంట్ పాలమార్ వేధశాలలలో ఈ పరికరము సహాయముతో మొదటిసారిగా ఆకాశము యొక్క మొత్తము కాంతిని వందలాది బహిర్మందాకినీ నెబ్యులాల కాంతితో కూడ కనుగొనిరి. అనేక నభోమూర్తుల వర్ణమును ఈ పరికరముతో సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

ధవళ నక్షత్రముల యొక్కయు, గోళీయ నక్షత్ర బృందముల యొక్కయు వర్ణమును పరిశీలించునప్పుడు అంతర్నక్షత్రధూళి దూరపునక్షత్రముల కాంతిని తగ్గించి, లోహిత వర్ణముగా మార్చుచున్నదని తెలియవచ్చెను. ఈ కాలమునందే నక్షత్రముల తాపక్రమ నిర్ణయకృషి కూడ ప్రారంభమయ్యెను. తాపగ్రహణ పరికరములను 254 సెం. మీ. (100 అం॥) ల దూరదర్శనియొక్క నాభిస్థానమునందుంచి, తగిన మార్గములను అవలంబించి, మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలలో 100 నక్షత్రముల పూర్ణవికిరణమానములను కనుగొనిరి. వీటికి వికిరణమాపతరములు (రేడియోమెట్రిక్ మాగ్నిట్యూడ్స్) అని పేరు. వీటిని దృక్సిద్ధతరముల నుండి తగ్గించినచో ప్రతి నక్షత్రముయొక్క తాప సూచకము (హీట్ ఇండెక్స్) లభించును. ఇది సాధారణముగా ధనసంఖ్య; అరుణ నక్షత్రములకు ఈ సంఖ్య చాల పెద్దదిగా ఉండును.

పరమతరము. ఖగోళభౌతికశాస్త్రజ్ఞులు ప్రతి నక్షత్రమునకు వ్యక్తతరము, దానిలోని మార్పును కనుగొనినను, వాటి పరమతరము (అబ్సల్యూట్ మాగ్నిట్యూడ్) కూడ కనుగొనుటకు ప్రయత్నములు సాగుచుండెను. నక్షత్రములన్నియు ఒక నిర్దిష్టదూరములో ఉన్నచో వాటి సహజప్రకాశమువలన ప్రతి నక్షత్రమునకు నిర్ణయింపబడు తరము లేదా దీప్తిమహత్వమునకు పరమతరము అని వ్యవహారము.

1905, 1907 సంవత్సరములలో ఒక నవీనాద్భుత విషయము ఆవిష్కరింపబడెను. నక్షత్రవర్ణమాలల జాబితాలను పరిశీలింపగా ఒకే జాతికి చెందిన నక్షత్రముల వర్ణమాలరేఖలలో వ్యత్యాసము గోచరించెను. ఈ వ్యత్యాసమునకు కారణము నక్షత్రముల పరిణామములో ఉండు స్థితిని అనుసరించి ఉండవచ్చునని వైజ్ఞానికులు అభిప్రాయపడిరి. నక్షత్ర పరమతరములకు సరిపోల్చి ఈ విషయమును పరిశోధింపగా కొన్ని నూతనాంశములు

* Å $= 10^{-10}$ మీటరు.

బయటపడెను. మొదటి జాతి నక్షత్రములు - శ్వేతములు - సహజముగ అతి కాంతిమంతములైనవి. మూడవజాతి నక్షత్రములు - అరుణములు - రెండు విధములుగ కనపడినవి; అందులో కొన్ని అతి కాంతిమంతములు; తక్కినవి మందకాంతికలవి; మధ్యమ కాంతిమంతములు బొత్తిగా లేవు.

నక్షత్ర పరిమాణము : నక్షత్రముల పరిమాణమును గూర్చి డెన్మార్క్ దేశీయుడగు హెర్ట్జ్‌స్ప్రింగ్ పరిశోధించెను. తత్ఫలితములనుబట్టి నక్షత్రములన్నియు రెండు పరంపరలకు చెందినవి. మొదటి పరంపర శ్వేతముల నుండి ఆరంభించి వేగముగ మంద అరుణములతో అంతమొందును. రెండవది శ్వేతములనుండి ఆరంభించి కాంతిమంతములగు అరుణములతో ముగియును. శ్వేతములు కాంతిమంతములైనందున అవి రెండు పరంపరలలో ఉండును; తక్కినవి అట్లుండక చీలికలై వేర్వేరుగా ఉండును. అతికాంతిమంతములగు నక్షత్రములు బృహత్తులు, మొదటి పరంపరలోని అరుణములు, రక్తపీతములు వామనములు అని అతడు గుర్తించెను.

రసెల్ దీనిని విమర్శించి, నక్షత్ర పరిణామము విషయమై ఒక సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించెను. దాని ప్రకారము నక్షత్రములు ఏర్పడునపుడు అరుణములు, క్రమేణ అవి నీలశ్వేతములై, తరువాత మందోష్ణములై, మరల అరుణములగును. పిదప అతడొక రేఖాచిత్రము తయారుచేసి, అందు నక్షత్రముల పరమతరమునకును, వర్ణమాలకును గల సంబంధము వివరించెను. అనంతర పరిశోధనల వలన ఈ సిద్ధాంతమునకు తుదినిర్ణయముచేసి, పీతములను బృహత్తులని, అరుణములను వామనములని విడదీసెను.

నక్షత్రవర్ణమాల పరిశోధన : మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలలో నక్షత్రవర్ణమాలలో కనబడు రెండు ప్రత్యేక రేఖల మూలమున వాటి పరమతరమును కనుగొనవచ్చునని తెలియవచ్చిన తరువాత ఆడమ్స్ అను శాస్త్రవేత్త అనేక నక్షత్రములకు వర్ణమాల లంబనములు (స్పెక్ట్రోస్కోపిక్ పేరలాక్సెస్) కనుగొనెను. నక్షత్రవర్ణమాల పరిశోధన తీవ్రముగా సాగెను.

అయనీకరణము అనగా ఒక పరమాణుకేంద్రకము చుట్టు భ్రమించు ఎలక్ట్రాన్‌లలో కొన్నింటిని బహిష్కరించుట. ఇందు మేఘనాథ్‌సాహా 1920 లో ఒక క్రొత్త సూత్రమును కనిపెట్టెను. దాని ప్రకారము అయనీకృత పరమాణువుల శాతము, వాటి ప్రేషము, నక్షత్రముల బయటి పొరల తాపక్రమము - ఈ మూడిటిలో ఏవైన రెండింటిని కనుగొనినచో మూడవదానినికనుగొనవచ్చును.వర్ణమాలా దర్శనితో పరిశీలింపబడు నక్షత్రములకే ఈ సూత్రము వర్తించును. వర్ణమాలా రేఖల నుండి అయనీకరణస్థితిని కనుగొనవచ్చును. తాపక్రమమును కనుగొనుటకు మార్గములు కలవు. నక్షత్రములలో విచూషణలు జరుగు తలముల ప్రేషమును సాహా సూత్రముతో కనుగొనవచ్చును. ఇట్లు నక్షత్రములలో గల మూలద్రవ్యముల గుణాత్మక, పరిమాణాత్మక సంఘటనమును సులభముగా కనుగొనుటకు వీలయ్యెను.

ఈ సూత్రము సహాయమున సూర్యమండల వాతావరణములో 80% హైడ్రోజన్ కలదనియు, తాపక్రమము కొద్దిగా తగ్గినచోట కార్బన్ యౌగికములును, తాపక్రమము మరీ తగ్గినచోట కార్బన్ మోనాక్సైడ్ కలవనియు శాస్త్రవేత్తలు కనుగొనగలిగిరి.

నవతారలు (నోవా) : వర్ణమాలదర్శనితో నవతారలను పరిశోధించు విధానము చాల అభివృద్ధిచెందినది. 1918 జూన్ 8 వ తేదీనాడు ఆక్విలా (గరుడ) రాశిలో ఒక నవతార కనపడెను. అది అధిక కాంతిమంతమై ఉండెను. మరునాటికి దాని తరము 0.5 వరకు హెచ్చి, తరువాత త్వరలో తగ్గిపోయెను. ఇట్లు ఉన్నట్లుండి కాంతిమంతములై, తరువాత కాంతి మందగించు తారలకు నవతారలు అని పేరు.

1604 నుండి 1901 వరకు 5 నవతారలును, 20 వ శతాబ్దమున (1964) వరకు 8 నవతారలును కనిపించినవి. ఈ ఎనిమిదిలోను 2 మొదటి తరముల తారల కంటె ఎక్కువ కాంతి కలవి; 2 రెండవతరములోనివి; ఒకటి నాల్గవ తరములోనిది; మిగిలినవి ఏడవతరములోనివి. వీటిని కనుగొనుటకు కారణము పరికరముల సామర్థ్యమే. నవతారల కాంతి హెచ్చుటకు కారణము వాటిగర్భ కేంద్రముల నుండి చీలి బయటికివచ్చు కాంతిమంతములైన గాలిపొరలు. గాలిపొరలు బయటికి రానప్పుడు నవతారల కాంతి మందగించును.

అతినవ తారలు (సూపర్ నోవా) : ఆండ్రోమీడా (దేవయాని) రాశిలో ఉండు పెద్ద సర్పిల నెబ్యులాలో 1885 లో ఒక నవతార గోచరించెను. దాని కాంతి ఏడవ తరమునకు చెందియుండి, తరువాత తగ్గిపోయెను. ఛాయాపటము మూలమున పరిశోధింపగా అచ్చట 20 నవతారలు కనపడెను. వాటి అన్నిటికంటెను 1885 లో కనపడిన నవతార అతికాంతిమంతమై ఉండెను. అందువలన అది వేరుజాతికి చెందినదని నిర్ణయించి, దానికి అతినవతారయని నామకరణము కావింపబడెను. 1936 లో ఒక నవతార కనిపించెను; అది సుమారు సెకనుకు 6,437 కిలోమీటరు

(4,000 మైళ్ళ)ల వేగముతో వ్యాకోచించినదని దాని వర్ణమాల యొక్క అనుశీలనవలన తెలియవచ్చెను. 1939 లో మూడు నవతారలు కనిపించెను. 1885 నుండి 36 నక్షత్రరాశులలో 40 అతినవతారలు, 300 నవతారలు ఆవిష్కరింపబడినవి.

1963 మే 22 న సోవియట్ రష్యా ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు దూరాకాశమందొక సూపర్ నోవా స్ఫోటనమును గుర్తించిరి. ఈ నభోమూర్తి ఔజ్జ్వల్యము సూర్యుని ఔజ్జ్వల్యము కన్న 25 కోట్ల రెట్లుండెను సూర్యుడు 10 లక్షల ఏండ్లలో ప్రసరింపగలవేడిమి, కాంతి మొత్తమునకు సమానమగు వికిరణమును అది ప్రతి 24 గంటలకు వెలిబెట్టును. 1702 తరువాత మన మందాకినిలో సూపర్ నోవా స్ఫోటనములు కానరాలేదు. ఈ సూపర్ నోవా అతిదూరస్థ మందాకినీ నిష్ఠము:.



చిత్రము 39 ఆంద్రోమీడాలోని పెద్ద నెబ్యులా

విశ్వద్రవ్యము (కాస్మిక్ మేటర్): దూరపు నక్షత్రముల కాంతి మందగించుటచే ఆ నక్షత్రములకు, మనకు మధ్య ఏదో ఒక విశ్వద్రవ్యము ఉండి తీరవలయునను అభిప్రాయము 1720 లో హేలీకి కలిగెను. ఆ అభిప్రాయమును 1847 లో స్ట్రూవే గణిత మూలమున స్థిరపరచెను.

విశ్వములో బహుగర్భ ధూమకేతువులు అనేకములు కలవు. అవి శిథిలములు కాగానే వాటిలోని అధిక భాగములు కాంతిరహితములై, విశ్వమునందు ఒకచోట నుండి మరియొకచోటికి పోవును. నిజమునకు అవి చలనెబ్యులాలు. వాటి విశ్వయాత్ర శతాబ్దముల తరబడి సాగును. దూరాంతరాళములలో అవి నల్లని రాశులుగా గోచరించును. ఈ కృష్ణరాశులు నక్షత్రముల చుట్టుభ్రమించుచున్నవని వర్ణమాల పరిశోధనలవలన వ్యక్తమగుచున్నది. అందుచేతనే ఆల్గాల్ నక్షత్రకాంతిలో దిగ్భ్రమ పుట్టించు మార్పులు గోచరించుచున్నవి. మందాకిని ధనూరాశిగుండ వెళ్లుచున్నది. అచ్చట నెబ్యులాలు కొన్ని కలవు. వాటిలో ఉండు కృష్ణవర్ణ ప్రదేశములు నల్లని రంధ్రములు కావనియు నీలవర్ణద్రవ్యముచే ఆక్రమింపబడి, వెనుకనుండి మనకు చేరు కాంతికిరణములకు అడ్డుగా ఉన్నవనియు వర్ణమాల పరీక్షలు తెలుపుచున్నవి. నెబ్యులాలు వాయుస్థితిలో ఉండుటవలన, వాటి వర్ణమాలలో స్థిరమగు కృష్ణవర్ణద్రవ్యములు ఉండుటకు అవకాశములేదు. కాబట్టి అడ్డుగా ఏదో ద్రవ్యము ఉండవలయును.

"విశ్వమునందెల్లెడల కృష్ణవర్ణ ద్రవ్యములు కలవు. మందాకినిలో నక్షత్రముల గుంపులు హెచ్చు కాబట్టి, ఆ ద్రవ్యములు హెచ్చుచోట్ల మరుగుపడుటయే మందాకినిలో కృష్ణవర్ణ ప్రదేశములు హెచ్చుగా కనబడుటకు ముఖ్య కారణము. తక్కినచోట్ల నక్షత్రములు దట్టముగా లేనందున అట్టి దృశ్యము మనకు కనబడదు." అని బార్నార్డ్ 1919లో ప్రతిపాదించెను. ఈ కృష్ణవర్ణ అంతర్నాక్షత్ర మేఘములు విశ్వములో ఎల్లెడల వ్యాపించి ఉన్నవి. ఇవి అన్నియు విద్యుత్ క్షేత్రములని తెలియవచ్చినది.

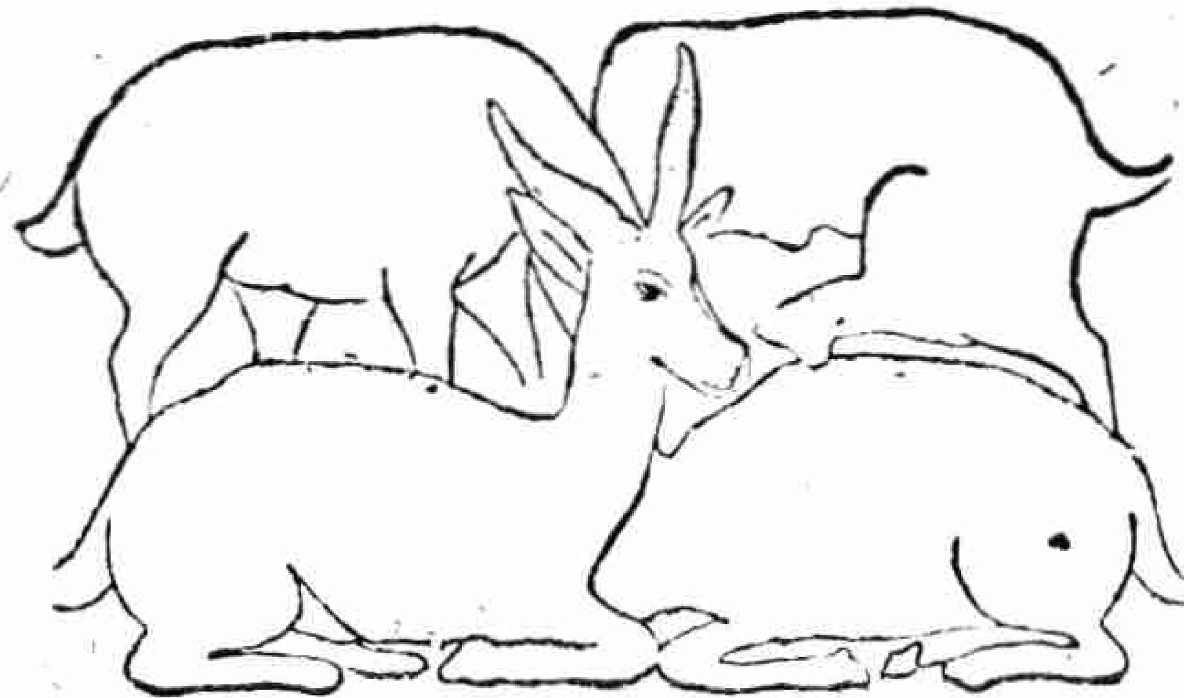
సెఫీడ్ చలతారలు - మందాకిని : నక్షత్రములలో కొన్ని ఆచ్ఛాదితచలతారలు. ఘటక నక్షత్రములు మూల నక్షత్రములచుట్టు భ్రమణము చేయుటవలన ఇట్టి వింత సంభవములు ఏర్పడుచున్నవని తెలిసికొని 1912 తర్వాత వాటిలో 90 జాతులను శాస్త్రవేత్తలు గుర్తించిరి. ఆనక్షత్రములు కొన్ని సమయములలో కాంతిమంతములై, మరి కొన్ని సమయములలో కాంతిరహితములై ఉండుటయే ఆ వింత సంభవము.

సెఫీడ్ నక్షత్రములు అట్టివా అను సందేహము కలిగెను ; ఏలన, అవి కూడ చలతారలే. వాటి చలదీప్తిని పరిశీలించి, అవి ఆచ్ఛాదక చలతారలు కావని తీర్మానించి 1914లో షాప్లీ వేరొక వాదమును ప్రతిపాదించెను. ప్రతి నక్షత్రము ఏకనక్షత్రమనియు, ద్వికము కాదనియు, దాని వ్యాసములో న్యూనాధిక్యతలు ఆవృత్తిక్రమమున కలుగు ననియు అతని వాదము. దాని కాంతి మొదట మందముగా ఉండి తరువాత అధికమగును ; కొన్ని గంటలు, లేదా కొన్ని దినములు కడచిన తరువాత మెల్లగా తగ్గనారంభించును. వర్ణమాల పరిశోధనవలన దాని తాపక్రమము, వికిరణము, సాంద్రత - వీటిలో మార్పులు ఉండవలయునని విశదమయ్యెను.

సెఫీడ్ చలతారల ప్రధాన లక్షణములు మన మందాకినికి బాహ్యములైనప్పుడు ఒకే విధమున ఉండును. ఈ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి, షాప్లీ విశ్వపులోతులను కనుగొనుటకు ఒక సూత్రమును కనిపెట్టెను. నక్షత్రముల వర్ణము, తరముల పరిశోధన ఈ సూత్రములపై ఆధారపడి ఉన్నవి. వాటి ఆవర్తనదీప్తి సంబంధమును ఉపయోగించి, వాటికి సౌర కుటుంబమునకు నడుమ గల దూరము, వాటి తరములు, మందాకిని యొక్క సరిహద్దులు నిర్ణయించుటకు వీలుకలిగెను.

సూర్యుని చుట్టు ఉన్నట్లే కొన్ని నక్షత్రములకు గూడ గ్రహకుటుంబములు ఉండవచ్చునని 1943 లో ఊహింపబడెను (చూ. సౌరకుటుంబ ప్రాదుర్భావము). 61 హంస, 70 పూచ్ నక్షత్రములను పరిశోధించిన సందర్భమున మొదటి నక్షత్రమునకు 0.016 వంతు, రెండవ నక్షత్రమునకు 0.01 వంతు సూర్యమండల ద్రవ్యములలోని ద్రవ్యాంశములు కల అనుబంధములు ఉన్నట్లు తెలియవచ్చెను. ఈ అనుబంధములు ఆ నక్షత్రములచుట్టు గ్రహములు ఉండుటకు సూచకములు. ఆ గ్రహముల ద్రవ్యరాశులు గురుగ్రహ ద్రవ్యరాశికి 10 రెట్లకంటె ఎక్కువగా ఉండవచ్చును.

మన మందాకిని విశ్వములో ఒక భాగము. సెఫీడ్ చలతారల సహాయమున విశ్వములో అనేక మందాకినులు ఉండవచ్చునని శాస్త్రజ్ఞులు కనుగొనిరి (చూ. గాలక్సీ, నెబ్యులా, నోవా, సూపర్ నోవా). ఆచార్య.



గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములు

అకారాది వివరణము

అంకగణితము : అంకగణితము అనగా అంకెల లక్షణములను, వాటి ఉపయోగములను విమర్శించుట అని అర్థము. అంకగణితములో ఋణసంఖ్యలకును, సంఖ్యలకు బదులు ఉపయోగించు అక్షరములకును ప్రసక్తి లేదు. సామాన్యముగా భిన్నములు, దశాంశములు, వర్గ మూలములు, ఘన మూలములు మొదలగునవి అంక గణితములో చేరినవి.

ధన సంఖ్యల గురించిన మూలన్యాయము : రెండు సమితులలో ఉండు వస్తువులను ఒకటికి ఒకటి వంతున జతపరచ సాధ్యమైనచో, ఆ రెండు సమితులలో ఉండు వస్తువుల సంఖ్య సమానము అని చెప్పుదుము. సాధా రణముగా ఒక సమితిని (1, 2, 3, 4........) ప్రమాణ వరుసగా తీసికొనుట సహజము. వస్తువుల సమితి ప్రమాణ వరుసలో ఏ సంఖ్యవద్ద ముగియునో, ఆ సంఖ్య వస్తువులు ఆ సమితిలో కలవని చెప్పుదుము. ఉదా: వస్తువుల సంఖ్య 12 తో ముగిసినప్పుడు, సమితిలో 12 వస్తు వులు ఉన్నవి.

పరిమిత వస్తు సమితిని ఎంచునపుడు వస్తువుల సంఖ్య వస్తువులు ఎంచు క్రమముపై ఆధారపడదు. అనగా ఒక సమితిలో 12 వస్తువులు ఉండినచో వాటిని ఏ క్రమముగ పరివర్తించినను వస్తువుల సంఖ్య మారదు.

రెండు సమితులు వేరొక పెద్ద సమితికి అంశములై ఉండినచో, వాటి సంకలిత సమితియొక్క సంఖ్య రెండు సమితులలో ఉండు వస్తువుల సంకలిత సంఖ్యకు సమాన మని చెప్పుదుము. ఉదా : రెండు సమితులలోని వస్తువులు క్రమముగా 15, 17 అయినచో ఆ రెండింటిని ఒకటిగా చేర్చిన ఏర్పడు సమితిలో $15 + 17 = 32$ వస్తువులు కలవని చెప్పుదుము.

a, b, c మూడు సంఖ్యలైనచో $a + b = b + a$ అనియు, $(a + b) + c = a + (b + c)$ అనియు సోప పత్తికముగ చూపవచ్చును.

గుణకారము : రెండు సంఖ్యల (ఉదా : 15, 17) గుణ కారమును మనము ఇట్లు గ్రహింతుము. ఒక్కొక్క సమితిలో 15 వస్తువులు ఉండునట్టి 17 సమితులు తీసికొనిన, వాటిలో ఉండు మొత్తము వస్తువుల సంఖ్య $17 \times 15 = 255$.

క్రింది సూత్రములు సులభగ్రాహ్యములు :

1. $a \times b = b \times a$.
2. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
3. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

భాగహారము - విభాజకీకరణము : రెండు సంఖ్య (ఉదా: 7, 5) లను గుణించినపుడు 35 లభించిన, 35 యొక్క విభాజకములు 7, 5 అని చెప్పుదుము. అప్పుడు 35 ను 7 తో భాగించిన వచ్చు నిశ్శేషలబ్ధము 5. భాగహార సంజ్ఞ $\div$. $35 \div 7 = 5$. ప్రతి సంఖ్యకు అదే సంఖ్యయు, 1 యు ఎల్ల ప్పుడు విభాజకములు. ఇవికాక వేరు విభాజకములు దానికి లేనిచో దానిని ప్రధాన సంఖ్య (ప్రైమ్ నంబర్) అందురు. మొదటి కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు క్రింద ఈయబడినవి :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31........

ప్రధాన సంఖ్యలు అపరిమితములని యూక్లిడ్ చూపించినాడు.

పూర్ణాంకములు 1, 2, 3, 4........లో పూర్ణాంకము a పూర్ణాంకము b కంటె ముందుండిన, b కంటె a చిన్నది, లేదా a కంటె b పెద్దది అని చెప్పుదుము. వ్రాయు విధము $a < b$ లేదా $b > a$ (b కంటె a చిన్నది). b కంటె a చిన్నదైనప్పుడు, b నుండి వీలైనంతవరకు a యొక్క గుణిజములను తీసివేయవచ్చును. అప్పుడు లభించు శేషము a కంటె చిన్నదిగా ఉండును.

ఉదా : $35 - 11 - 11 - 11 = 2$ అనగా,

$$35 = (11 \times 3) + 2.$$

ఇపుడు దీనిని వేరు విధముగ వివరింతము : 11 చే 35 ని భాగించినచో భాగఫలము = 3; శేషము = 2.

పూర్ణాంకముల ముఖ్యధర్మ మొకటి కలదు. ప్రతి పూర్ణాంకమును ఒకే విధముననే ప్రధాన సంఖ్యల గుణకార లబ్ధములుగా గుర్తింపవచ్చును. క్రింది విధముగ

$$550 = 2 \times 5^2 \times 11 = A.$$

$$17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = B.$$

A, B లకు గరిష్ఠ సామాన్య (ఉమ్మడి) భాజకము (గ. సా. భా.) $2 \times 5 = 10$. ఇందు రెండు సంఖ్యలలోను ఉమ్మడిగ ఉండు ప్రధాన సంఖ్యల కనిష్ఠ ఘాతములను తీసికొని $2^1 \times 5^1 = 10$ లభించును.

ఇక్కడ రెండు సంఖ్యలలో ఉన్న అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలను తీసికొని, వాటి గరిష్ఠ ఘాతముల గుణకారముచే లభించు సంఖ్య $C = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 =$ 9,70,200. దీనికి కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క. సా. గు.) అని పేరు. దీని గుణము ఏమనగా, ఏదైనా ఒక సంఖ్య N ను A, B సంఖ్యలు నిశ్శేషముగా విభజించ సాధ్యమైతే, N ను C సంఖ్య నిశ్శేషముగా విభజించును. ఎన్ని సంఖ్యలు ఉండినను వాటికి క. సా. గు. కనుగొన వచ్చును. వాటి విభాజకములను కనుగొనకనే రెండు సంఖ్యలకు గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును కనుగొనవచ్చును. ఇది శేషముల పరస్పర భాగహార విధానము. రెండు సంఖ్యలు A, B లు తీసికొందము. వానిలో B పెద్దదైన $B = AQ + R_1$ అని వ్రాయవచ్చును. Q, R పూర్ణాంకములు, $R_1 < A$. ఇప్పుడు A, B ల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము R_1 యొక్క విభాజకము కావలయును. కాబట్టి A, R_1 లకు గ. సా. భా. కనుగొనిన చాలును.

$A = R_1T + R_2$. ఇక్కడ నిశ్శేషము లభించువరకు చేయవలయును. ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము. 130, 35 సంఖ్యలకు గ. సా. భా. కనుగొనుట :

```
35)130(3
   105
   ---
    25)35(1
       25
       --
       10)25(2
          20
          --
           5)10(2
             10
             --
              0
```

$\therefore$ గ.సా.భా. = 5.

భిన్నములు : అంకగణితములో ధన సంఖ్యలనే కాక భిన్నములు కూడ వాడుదుము. భిన్నము 27/32 యొక్క అర్థమేమన, ఒక యూనిట్‌ను 32 భాగములుచేసి, 27 భాగములు తీసికొనవలయును. 32 కు హారమనియు, 27 కు లవమనియు పేర్లు.

పై నిర్వచనమునుండి $a/b = ka/kb$ అని విశదమగుచున్నది. ఇచట k ఒక ధనపూర్ణాంకము; అది శూన్యముగా ఉండకూడదు.

సంకలన, గుణకార, భాగహార సూత్రములు :

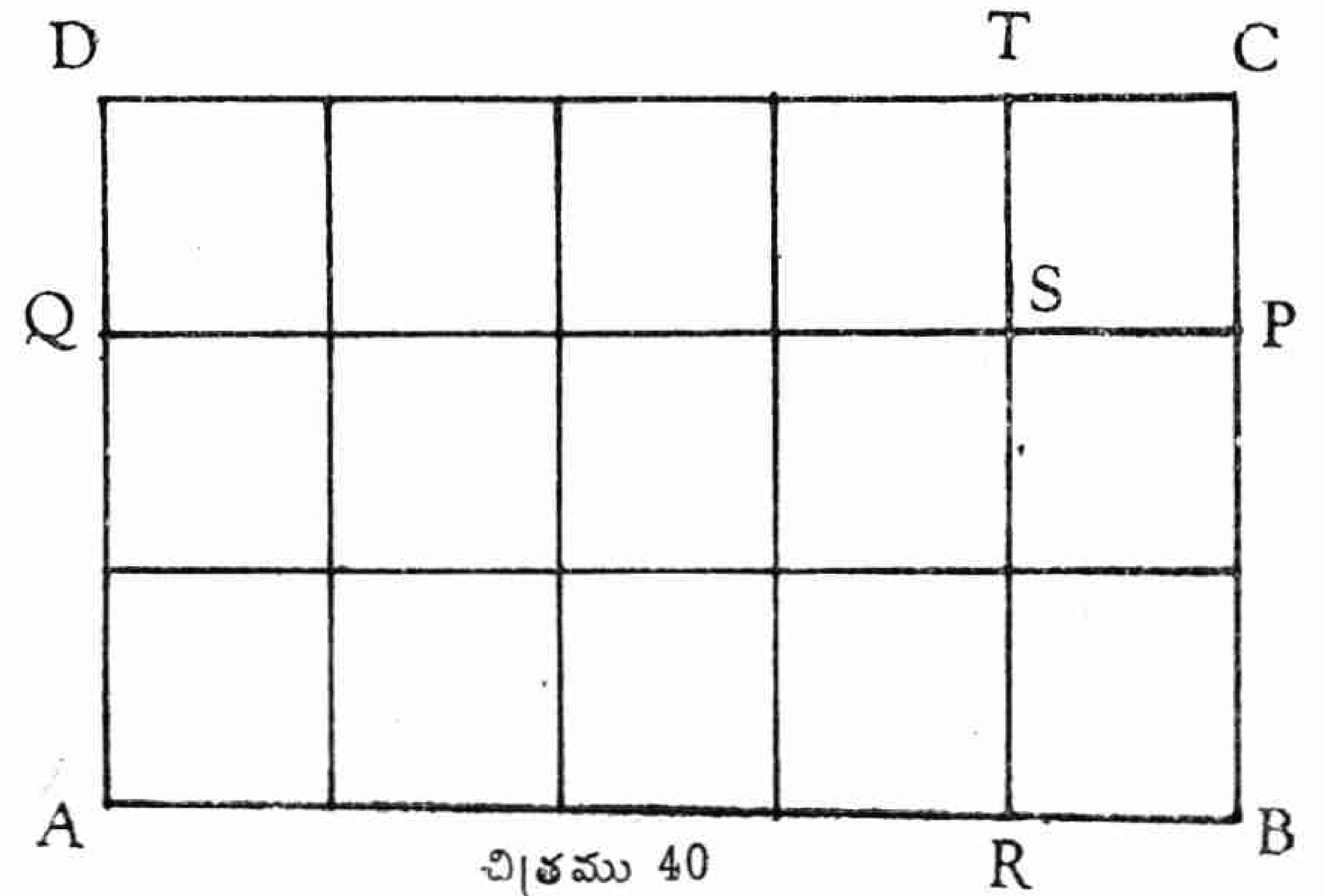
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

ఇచ్చట ad అనగా $a \times d$. ఇటులనే అన్నిటికిని.

సూత్రములు (ii), (iii) యొక్క విమర్శనమునకు భిన్నాంకములను తీసికొందము.



చిత్రము 40

చిత్రము 40 లో $\frac{2}{3}$ భాగము అనగా $ABCD$ ని మూడు సమభాగములుచేసి, రెండు సమభాగములు తీసికొనవలెను. ఇదియే ($ABPQ$).

$\frac{4}{5}$ అనగా ఒక వస్తువును 5 సమభాగములుచేసి, 4 సమ భాగములు తీసికొనుట. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ అనగా $\frac{2}{3}$లో $\frac{4}{5}$ భాగము అని అర్థము. $ABCD$ లో $\frac{2}{3}$ భాగము $ABPQ$, దానిలో $\frac{4}{5}$ భాగము $ARSQ$. ఇపుడు $ABCD$లో 15 గళ్లు కలవు. $ARSQ$ లో 8 గళ్లు కలవు.

$A\ R\ S\ Q$ భిన్నరూపమున $\frac{8}{15}$ అగును. అనగా $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ భిన్న గుణకారములో హారమును హారము చేతను, లవమును లవముచేతను గుణింపవలయును అని విశదమగుచున్నది.

$10 \div 2$ అనగా 10 రూపాయలను ఒక్కొక్కరికి రు. 2 వంతున ఎంతమందికి ఈయవచ్చును ?

(1) $10 \div 2 = 5 = 10 \times \frac{1}{2}$.

(2) $10 \div \frac{1}{2}$ = రు. 10లను రు. $\frac{1}{2}$ వంతున ఎంతమందికి పంచవచ్చును ?

రు. 10 = 20 అర్థరూపాయలు అయినందున 20 మందికి పంచవచ్చును.

$10 \div \frac{1}{2} = 20 = 10 \times \frac{2}{1}$.

(3) $6 \div \frac{3}{4}$ అనగా రు. 6 లను ముప్పావలా వంతున ఎంత మందికి పంచ వచ్చును ?

రు. 6 = 24 పావలాలు, 3 పావలాల చొప్పున 8 మందికి పంచవచ్చును.

కాబట్టి ఒక సంఖ్యను ఒక భిన్నముచే భాగించుటకు బదులు దానిని తలక్రిందులు (వ్యుత్క్రమము)గా చేసి దాని గుణింపవలయును.

అందువలన $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

భిన్నము $\frac{a}{b}$ లో $a < b$ అయిన దానిని క్రమభిన్నము అనియు లేనిచో అపక్రమ భిన్నము అనియు చెప్పుదురు. అపక్రమ భిన్నము $\frac{a}{b}$ ని ఒక పూర్ణసంఖ్య + ఒక క్రమ భిన్నముగా వ్రాయవచ్చును. భిన్నములకు ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో వాడు సంకేతములు క్రింద చూపబడినవి:

$\frac{3}{4}$ = ౻ (ముప్పాతిక) $\frac{3}{16}$ = ౾ (ముప్వీసము)
$\frac{1}{2}$ = ౺ (సగము) $\frac{1}{8}$ = ౽ (పరక)
$\frac{1}{4}$ = 1 (పాతిక) $\frac{1}{16}$ = – (వీసము)
$\frac{1}{64}$ = 01 (కాణి)

దశాంశములు: మనము సంఖ్యలను వ్రాయు విధానమును 'దశాంశ సంకేతనము' అని చెప్పుదుము. ఇందు 1 నుండి 9 వరకు సంకేతములు, శూన్యమునకు '0' అను ప్రత్యేక సంకేతము కలవు. అంకెలకు సహజమైన విలువయే కాక స్థానిక విలువకూడ కలదు. ప్రతి అంకెయు ఎడమ వైపు ఒక పదము జరుగునవుడు దాని స్థానపు విలువ పదిరెట్లు హెచ్చును. సంకేతము 4307 యొక్క విలువ = 7 ఒకట్లు, 0 పదులు, 3 వందలు, 4 వేలు. ఇంత చక్కగ వ్రాయు మార్గము భారతీయులు కనిపెట్టిరి. అది అరబ్బులద్వారా పాశ్చాత్యులకు తెలిసెను. వారు దీనికి అరబిక్ సంకేతనమని పేరు పెట్టిరి. అంతకు పూర్వము రోమన్ సంకేతములను పాశ్చాత్యులు వాడుచుండిరి. అందు ప్రతి సంఖ్యకు ఒక సంకేతము వాడవలసిఉండినందున గుణకార భాగహారములు చాల కష్టమయ్యెను. ఉదా: 10కి X, 100కి C, 1000కి M అని వాడుచుండిరి. భారతీయుల సంకేతనమువలన అంకగణితాభ్యాసము సులభమయ్యెను. సర్వదేశములందును ఈ సంకేతనము వ్యాపించిన తర్వాతనే అంకగణితమునందును, గణితమునందును పురోభివృద్ధికి అవకాశము కలిగెను.

బాబిలోనియన్‌లు కూడ అంకెలకు స్థాన విలువ కల్పించిరి. భారతీయుల 10కి బదులు వారు 60 వాడిరి. 1 మొదలు 59 వరకు గల సంకేతములు ఒక స్థానము ఎడమ వైపునకు జరిగిన ప్రతి సంకేతమును 60 రెట్లు హెచ్చగును. శూన్యమును ఒక వృత్తముతో గుర్తించినను, ఒకట్ల స్థానమునకు వారు స్పష్టముగా నిర్ధారణచేయు సంకేతము వాడనందున వారి వ్రాతలో ఎక్కువ సంశయము ఏర్పడెను. ఒక సంఖ్య 60 రెట్లో, 60^2 రెట్లో, 60^3 రెట్లో అని నిశ్చయించుటకు వీలులేక ఉండెను. కాని ఈ 60వ విధానము యొక్క గుర్తు ఇప్పటికిని మనము ఉపయోగించు కాలమానములో కనబడుచున్నది. ఒక గంటకు 60 నిమిషములు, ఒక నిమిషమునకు 60 సెకనులు కదా!

ఒక అంకెయొక్క స్థానిక మూల్యము అంకె కుడివైపునకు జరిగిన పదిరెట్లు తగ్గుటవలన ఒకట్లస్థానమునకు ఉండు అంకెయొక్క విలువ రెండవ స్థానమున ఉన్నదానికంటె పదిరెట్లు చిన్నది. ఒకట్ల స్థానమునకు కుడివైపున 5 ఉండిన దాని స్థానిక విలువ 5/10, రెండు స్థానములు కుడివైపున ఉండిన స్థానిక విలువ 5/100 అనియు మారుచుండును. ఈ సంఖ్యలకు దశాంశ సంఖ్యలని పేరు.

పూర్ణాంకములకును, దశాంశములకును మధ్య గుర్తుకుగాను (.) ఒక చుక్కను ఉంచుదురు.

ఉదా: $437 \cdot 143 = 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7 \times 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{3}{10^3}$.

భిన్నములకు దశాంశ విధానము చాల ఉపయోగమైనది. మనకు ఎంత కచ్చితముగ కావలెనో అన్ని సంఖ్యలు ఉంచుకొనవచ్చును.

దశాంశ విధానము ఎక్కువ అనుకూలమగుటచే ప్రభుత్వమువారిచే అన్ని కొలతలును భారతదేశములో దశాంశవిధానములోనికి మార్చబడినవి. దశాంశ విధానము ఫ్రాన్స్‌దేశములో 1840 లో ప్రారంభింపబడెను. (చూ. మెట్రిక్ పద్ధతి: భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు-పు. 545). దశాంశ విధానములో కొన్ని లోపములు గలవు.

(i) కొన్ని భిన్నములను గుర్తించుటకు అనంత దశాంశములు కావలయును.

ఉదా: $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = \dot{3}\ldots\ldots$

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

పైన వాడిన రెండు చుక్కలు, వాని మధ్య ఉండు అంకెలు అనంతముగా 'ఆవర్తిత' మగుచుండును. $3.1\dot{4}5\dot{6}$ లో 4 5 6 మాత్రము ఆవర్తిత మగును.

భిన్నముగా వ్రాసిన దీని విలువ $= 3\frac{1}{10} + \frac{456}{9990}$

(ii) రెండవ లోపము ఏమనగా, ఒక భిన్నమును దశాంశ విధానములో రెండు విధములుగా వ్రాయవచ్చును. ఉదా: 0.145 తీసికొందము. దీనిని $0.14499999\ldots = 0.144\dot{9}$ అని వ్రాయవచ్చునుగదా! ఇందు 9 ని అమితమగు సారులు ఉపయోగించవచ్చును. 9ని అపరిమిత పర్యాయముగ వాడకూడదను నిబంధనము వాడినచో, ఇట్టి సంశయములకు అవకాశము లేదు.

వర్గమూలము, ఘనమూలము, కరణీయములు: అంకగణితములో $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ మొదలగు సంఖ్యలు

కలవు. వాటిని a, b పూర్ణాంకములుగా గల a/b వంటి పరిమిత - భిన్నములుగా వ్రాయుటకు వీలులేదు. కొన్ని సమయములందు $\sqrt{(16/9)}$, $\sqrt[3]{(8/27)}$ మొదలగు సంఖ్యలను పరిమిత భిన్నము 4/3,2/3లుగా వ్రాయవచ్చును.

వర్గమూలములను, ఘనమూలములను భిన్న ఘాత ములు గల సంఖ్యలుగా వ్రాయవచ్చును.

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$. ఇపుడు క్రింది సూత్రములను స్మరణకు తెచ్చుకొనవలయును :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m / a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ఇది m, n యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యము. $a^0 = 1$ అని తీసికొనవలయును :

ఇందుండి $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ అని లభించును.

వర్గమూలము కనుగొను విధానము :

$$(10\,a + b)^2 = 100\,a^2 + 20\,a\,b + b^2$$
$$= 100\,a^2 + b\,(20\,a + b),$$

అను సూత్రమును మరల మరల ఉపయోగించుటచే వర్గ మూలము లభించును. ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము :

5776 యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుము.

మొదట దత్తసంఖ్యలో రెండు రెండు స్థానముల వంతున కుడినుండి ఎడమవైపుకు గుర్తు వేయవలయును.

$$5776 = 5700 + 76$$
$$70^2 < 5700 < 80^2 \text{ అయినందున}$$
$$5776 = (70 + b)^2 = 4900 + 140\,b + b^2$$
$$= 4900 + 876.$$

కనుక $(140 + b)\,b$ కి 876 సమానము కావలసి ఉండిన, b ఎంత ? $b = 6$ అని తెలియుచున్నది.

$(140 + b)\,b$ యొక్క విలువ 876 కు సమానము కానిచో దానికి ఆసన్నమగు గరిష్ఠపు విలువను తీసివైచి, పైనుండి మరల రెండు అంకెలను క్రిందికి తీసికొని రావలయును. మనకు కావలసినన్ని స్థానములు వచ్చు వరకు ఇట్లే చేయవలయును.

```
          76
     7 | 5776
         49
   146 |  876
          876
           0
```

∴ 5776 వర్గమూలము 76.

ఘనమూలము కనుగొనుటకు పై విధమున $(10\,a + b)^3 = 1000\ a^3 + b\,(300\,a^2 + 30\,ab + b^2)$ సూత్రమును వాడుదుము.

చతుర్ఘాతీయ మూలమునకు రెండుసారులు వర్గ మూలము కనుగొనవలయును.

న్యూటన్ విధానమును అనుసరించి $x^n = a$ అను సమీకరణ ఆసన్నమూలము నుండి మరింత కచ్చితమైన $\sqrt[n]{a}$ విలువ కనిపెట్టవచ్చును.

ఒక భిన్నము యొక్క లవహారములందు కరణీయ రాశులుండిన హారమునందుండు కరణీయ రాశులను, పూర్ణాంకములుగా మార్చుటకు వీలుకలదు.

ఉదా :
$$\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{6+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{4}$$

ఇందు లవహారములను $3+\sqrt{5}$ చే గుణించితిమి.

అయితే ఇటువంటి భిన్నముల విలువలను కనిపెట్టుట లాగరిదమ్‌ల ప్రయోగమువలన సులభముగా సాధించ వచ్చును. ఆ. స.

అంగారకుడు : చూ. కుజుడు.

అంతర సమీకరణము : దీనిని ఇంగ్లీషులో 'డిఫరెన్స్ ఈక్వేషన్' అని వ్యవహరింతురు. u_0, u_1, u_2 ...... అనునవి ఒక పరంపరలోని పదములు అను కొనుము :

$$u_{n+1} - u_n = \Delta\,u_n\,;\ E\,u_n = u_n + \Delta\,u_n = u_{n+1}$$

అని వ్రాసినచో, $\Delta\,u_n = (E-1)\ u_n$ అగును. అపుడు

$$\Delta\,v_n = u_{n+1}\,;\ \text{లేదా}\ (E-1)\ v_n = u_{n+1}$$

అనునది ఒక అంతర సమీకరణము. ఇచ్చట u_n తెలిసినది గను, v_n కనిపెట్టవలసినదిగను తీసికొనవలెను. ఈ అంతర సమీకరణము యొక్క సాధనము :

$$v_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n.$$

మొదటి తరగతి వ్యాపక అంతర సమీకరణము అనునది క్రింది రూపములో ఉండును :

$$v_{n+m} + a_1 v_{n+m-1} + \ldots\ldots + a_m v_n = f(n)$$

ఇచ్చట a_1, a_2......a_n అనునవి స్థిరరాశులు. $f(n)$ అను నది n యొక్క ఒక దత్తఫలము. ఈ సమీకరణమును క్రింది విధమున కూడ వ్రాయవచ్చును :

$$(E^m + a_1 E^{m-1} + \ldots\ldots + a_m)\ v_n = f(n)$$

లేదా

$$(E - p_1)\ (E - p_2)\ldots\ldots(E - p_m)\ v_n = f(n)$$

$p_1, p_2 \ldots\ldots p_m$ అనునవి వేర్వేరు విలువలు కలిగియున్నచో పై సమీకరణము యొక్క సాధనము :

$$v_n = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n + \ldots\ldots + c_n p^m + g\ (n)$$

ఇచ్చట $c_1, c_2 \ldots\ldots c_n$ అనునవి n మీద ఆధారపడని స్థిరరాశులు. $v_m = g\ (n)$ అనునది పై సమీకరణము యొక్క ఒక సాధనము. ఈ సాధనమును కనుగొనుట $f\ (n)$ యొక్క రూపముమీద ఆధారపడి ఉండును. ఈ p ల యందు రెండుగాని, అంతకన్న ఎక్కువగాని సమాన విలువలు కలిగి ఉన్నచో ఈ సమీకరణ సాధనమును కనుగొనుటకు పై జెప్పిన సాధనములో కొన్ని మార్పులు అవసరమై ఉండును.

1885లో ప్వాంకరే ఈ అంతర సమీకరణములను గురించి ఒక నివేదిక వ్రాసెను. ప్రస్తుతము మనము ఈ సమీకరణ ములను గూర్చి తెలుసుకొనుచున్న విషయములు ఆ నివేదిక ద్వారా వెలువడినవి.

$p_i\ (x),\ \phi\ (x)$ అనునవి దత్త ఫలములు అయినచో

$$\sum_{i=0}^{p} p_i\ (x)\ u\ (x+i) = \phi\ (x)$$

అను దానిని మొదటి తరగతి వ్యాపక అంతరసమీ కరణము అని అందురు. $u\ (x)$ అను ఫలమును మనము కనుగొనవలసి ఉన్నది. $\phi\ (x) = 0$ అయినచో ఈ సమీ కరణమును సమఘాత సమీకరణము అని అందురు. ఈ సమీకరణములోని గుణకములు స్థిరరాశులు అయినప్పుడు దీనిని లాగ్రాంజ్ సాధించెను. $\phi\ (x)$ అనునది విశ్లేషణ ఫలము అయినప్పుడు విశ్లేషణ శాస్త్రమున :

$$u\ (x+1) - u\ (x) = \phi\ (x)$$

అను ఫలమును గురించి ఎక్కువగా అనుశీలించబడినది. $\phi\ (x)$ అనునది ఒక బహుపదము అయినచో 18 వ శతాబ్దపు పద్ధతులను అనుసరించి, ఈ సమీకరణమును గురించి 1887 లో గ్విచర్డ్ పూర్తిగా చర్చించెను.

1885 లో ప్వాంకరే ఈ సమీకరణములకుఅసంపతనీయ (అసిమ్‌టాటిక్) సాధనములను కనుగొనుటకు పూను కొనెను. ఈ మార్గమును అనుసరించి, 1909 ప్రాంతమున ఎచ్. గాల్బ్రిన్స్ చలరాశి హెచ్చు విలువలను కలిగి ఉన్నప్పుడు ఈ సమీకరణములకు అసంపతనీయ సాధనము లను కనుగొన ఆరంభించెను. ఆ తరువాత జి. డి. బిర్కాఫ్, ఆర్. డి. కార్మైకల్ 1879 ప్రాంతమున ఈ సమీకరణ ములను గురించి కొన్ని ఫలితములను ఒకే సమయమున ప్రకటించిరి. ఎమ్. వి. సు.

అంతరీకరణ కలనము : మన నిత్య జీవితమందు మనకు పరిచితమగు అనేకవస్తువులు అనుక్షణము మార్పు చెందుచుండును. ఉదాహరణమునకు ఒక నిర్ణీతస్థలమందు తెర్మామీటరు చూపు తాపక్రమము క్షణక్షణము మారు చుండును. ఈ విధముగ మార్పు చెందునట్టి రాశులను గణితశాస్త్రమందు చలరాశులు అందురు.

అటువంటి చలరాశుల మార్పుల గతిని పరిశీలించు గణితశాస్త్రభాగమునే 'అంతరీకరణ కలనము' (డిఫరెన్షి యల్ కాల్క్యులస్) అందురు. దీనిని 17వ శతాబ్దములో న్యూటన్, లైబ్నిట్జ్ అనువారలు విడివిడిగా కనుగొనిరి.

ఈ శాస్త్రమును గురించి తెలుసుకొనుటకుముందు, దానియందువచ్చు కొన్ని ముఖ్యపదములను గురించి తెలుసుకొనుట ఆవశ్యకము.

స్థిరరాశులు - చలరాశులు : ఒక గణిత చర్చయందు ఒకే విలువను కలిగిఉండు రాశిని స్థిరరాశి అందురు; పలు విలువలను స్వీకరించు సంకేతములను చలరాశులు అందురు. ఆ చలరాశికి ఇచ్చు విలువల సమూహమునకు ఆ చలరాశి యొక్క మేర (రేంజ్) అందురు.

ఉదా : x అనునది అక్టోబరు మాసమునందు ఒక దినమును గుర్తించుచున్నదని భావించు కొందము. అప్పుడు x అనునది ఒక చలరాశి అగును. x ఆ మాసమందలి 31 దినములలో ఏ దినమునైనను సూచింపవచ్చును. అందు చేత దానిమేర 1 నుండి 31 వరకు గల ధనరాశుల క్రమ మగును.

ఫలములు : y అను ఒకరాశి x అను మరియొక రాశిపైగాని, లేదా అట్టి పలురాశులపైగాని ఆధారపడి ఉన్నచో అటువంటి రాశిని ఆరాశుల ఫలములందురు.

x కు మనము దాని మేరలో ఏవిలువనైన ఈయ వచ్చును. అపుడు y యొక్క విలువలు నిర్ణీతమగును. అందుచేత x ను స్వతంత్రచలరాశి అని, y ని పరతంత్ర చలరాశి అని అందురు.

విలోమ ఫలములు : y అను చలరాశి x చలరాశి ఫలము $y = f\ (x)$ గా ఈయబడినదని అనుకొందము. ఈ సమీ కరణమునందు y ని ఈయబడిన చలరాశిగా భావించి x ను సాధించవచ్చును. అట్లు సాధించగా, x చలరాశి y చలరాశి యొక్క ఫలము $g\ (y)$ అగుచున్నది. దీనినే $f\ (x)$ యొక్క విలోమ ఫలము అని అందురు. $x = f^{-1}\ (y)$ అని వ్రాయుట వాడుక. అనగా $g\ (y) = f^{-1}\ (y)$.

అవ్యక్త ఫలములు : కొన్ని సమయములందు x, y చల రాశుల సంబంధము $y = f\ (x)$ రూపమునగాని, లేదా $x = g\ (y)$ అను రూపమునగాని ఈయబడక $f\ (x, y) = 0$ అను రూపములో ఈయబడవచ్చును.

ఉదా : $x^2+y^2-1=0$ ఇటువంటి సందర్భములందు y ని x యొక్క అవ్యక్త ఫలమనియు, x ను y యొక్క అవ్యక్తఫలమనియు చెప్పవచ్చును. దీనినే $y=\sqrt{1-x^2}$ అని, లేదా $x=\sqrt{1-y^2}$ అని వ్యక్తఫలముగా వ్రాయవచ్చును.

అవధులు : x అను ఒకచలరాశి ఒక అవధి(లిమిట్)ని సమీపించుచున్నదను భావమును జ్యామితి సహాయముతో వివరించవచ్చును. ఒక వృత్తమందు అంతర్లిఖితమైన n భుజములుగల క్రమబహుభుజియొక్క వైశాల్యము పరిశీలించుదము. n యొక్క విలువ (భుజముల సంఖ్య)ను పరిమితి లేకుండ పెంచినచో ఆ బహుభుజి యొక్క వైశాల్యము ఒక అవధిని సమీపించును. ఆ అవధినే ఆ వృత్తవైశాల్యముగ నిర్వచించవచ్చును. x అనునది బహుభుజియొక్క చలవైశాల్యమై, a అనునది వృత్త వైశాల్యమయినచో n యొక్క విలువ పెంచిన అనగా $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు పై రెండు వైశాల్యముల వ్యత్యాసము $(a-x)$ తగ్గుచు, చిట్టచివరకు అది శూన్యమును మితిలేకుండ సమీపించును. పై సంబంధమును గణితరీత్యా $x \longrightarrow a$ అని వ్రాయుదురు. అనగా x అవధిగా a ని సమీపించుచున్నది అని అర్థము.

ఒక చలరాశి శూన్యమును అవధిగా సమీపించుచున్న ఎడల దానిని సూక్ష్మరాశి అందురు. పై ఉదాహరణమందలి $(a-x)$ సూక్ష్మము; కారణమేమనగా, అవధి $|a-x|=0$

x చలరాశి a ని సమీపించుకొలది, ఫలము $f(x)$ అవధిగా b ని సమీపించుచున్నచో $f(x)\longrightarrow b$ అని అందురు. దీనినే $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ అనియు వ్రాయవచ్చును. ఈ క్రింది సిద్ధాంతములు అవధులందు ముఖ్యమైనవి :

$x\longrightarrow b,\ y\longrightarrow c$ అని ఈయబడినచో,

$x\pm y\longrightarrow b\pm c$ [(పరిమితి) సంకలనము యొక్క అవధి, అవధుల సంకలనమునకు సమానము)].

$x\,.\,y\longrightarrow b\,.\,c$ (చలరాశిగుణకారముల అవధి, అవధుల గుణకారమునకు సమానము).

$\frac{x}{y}=\frac{b}{c},\ c\neq 0$; (భాగఫలము యొక్క అవధి, అవధుల భాగఫలమునకు సమానము).

అవిచ్ఛిన్నత : $x\longrightarrow a$ అగునప్పుడు $f(x)\longrightarrow f(a)$ అయినచో, $x=a$ అను బిందువు వద్ద $f(x)$ ఫలము అవిచ్ఛిన్నముగా ఉన్నది అనెదము.

$f(x)$, $g(x)$ లు రెండును $x=a$ అను ఒకేబిందువు వద్ద అవిచ్ఛిన్న ఫలములైనచో $g[f(x)]$ కూడా $x=a$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నముగ ఉండును.

అంకగణితమునందు $0/0$ ను అర్థములేని సంకేతము అనెదము. కాని, అవధులందు $x\longrightarrow 0$, $y\longrightarrow 0$ అయినప్పుడు x/y అవధికి నిశ్చితమైన విలువ ఉండవచ్చును.

ఉదా : $x=2$ అగునపుడు $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$ అను అనిశ్చిత రూపమును ధరించుచున్నది. అయితే $x\neq 2$ అగునపుడు $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$; దీనియందు $x\longrightarrow 2$ అగునపుడు $(x+2)\longrightarrow 4$; అందువల్ల $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$

$x\longrightarrow a$ అగునపుడు $f(x)$ యొక్క అవధి కనిపెట్టుటకు $f(a)$ కు విలువ ఉన్నదా లేదా అను ప్రశ్నయు, $f(a)$ యొక్క విలువయు అనావశ్యములు. x కొంచెము కొంచెముగా a దగ్గరకు సమీపించవలెనుగాని $x=a$ అని తీసికొనకూడదు. అందువలన మనకు $f(a)$ తెలియనక్కరలేదు. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ అను విలువ వేరు; $f(a)$ విలువ వేరు. ఇవి రెండును ఒకే విలువగా ఉండవచ్చును. వేరువేరుగా కూడ ఉండవచ్చును.

అంతరీకరణ గుణకము : ఇదియే కలనశాస్త్రములోని మిక్కిలి ముఖ్యమైన భావము. P అను ఒక బిందువు ఒక ఋజురేఖపై జరుగుచున్నదనుకొందము. దాని యొక్క చలనమును వర్ణించుటకు ప్రతి సమయము (కాలము) t యందును దాని స్థలము తెలియవలెను. ఆ రేఖపై ఒక స్థిరబిందువు O ను తీసికొని O నుండి P యొక్క దూరము $OP=y$ ఈయబడినట్లయిన P యొక్క స్థలము తెలియుచున్నది. అందువలన ఆ బిందువు చలనమును వర్ణించుటకు గతకాలము t కిని గత దూరము y కిని ఉన్న సంబంధమును కనుగొనవలెను. ఇది $y=f(t)$ అను ఒక ఫలము వలన నిర్వచించబడవచ్చును.

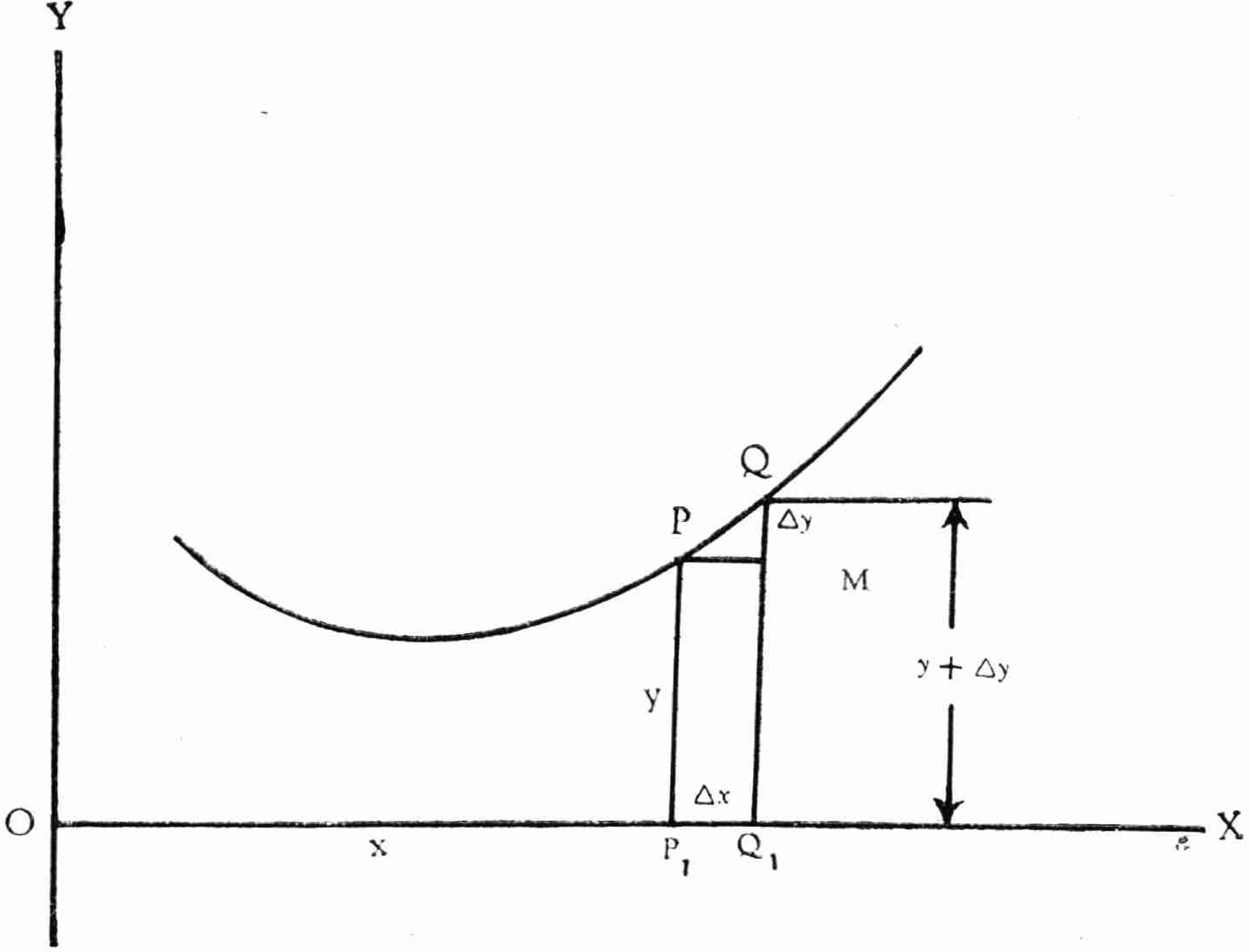
కాలము t_0 అగునపుడు P యొక్క దూరము $y=f(t_0)$ అనుకొందుము. కొంతసేపు తరువాత అనగా కాలము t_1 అగునపుడు P యొక్క దూరము $f(t_1)$ అగును. అందువలన (t_1-t_0) కాలమునందు ఆ బిందువు వెళ్ళిన దూరము $f(t_1)-f(t_0)$. దాని వేగము $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$; ఇది (t_1-t_0) కాల అంతరములోని సరాసరి వేగము. t_0 సమయమందు ఆ బిందువు వేగమేమి?

ఈ ప్రశ్నకు ఉత్తరము కావలెననిన మనము $(t_1 - t_0)$ ను కొంచెము కొంచెముగా తగ్గించి. $t_1 \longrightarrow t_0$ అనగా $(t_1 - t_0) \longrightarrow 0$ అగునపుడు $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ యొక్క అవధిని కనిపెట్టవలెను. ఇచ్చట t_0 ఒక స్థిరమైన విలువ ; t_1 ఒక చలరాశి. t_1 విలువ t_0 ను సమీపింపగా $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ ఏదో ఒక అవధిని సమీపించినచో దీనికే $f(t)$ ఫలము యొక్క t_0 అందున్న 'అంతరీకరణ గుణకము' అనెదము. ఇది P బిందువు యొక్క తాత్కాలిక వేగము లేదా $f(t)$ ఫలము పెరుగు రేటు.

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ లేదా అవధి $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ను గుర్తించుటకు వివిధ సంకేతములు ఉపయోగించబడు చున్నవి. వానిలో ముఖ్యమైనవి :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = y'$$

$y = f(x)$ ఫలము యొక్క రేఖా చిత్రము వ్రాయుదము. ఇచట P బిందువు యొక్క నిరూపకములు $x, y = f(x)$. ఇది ఒక స్థిరబిందువు అనుకొందము. Q ఆ రేఖపై P కి దగ్గర ఉన్న మరొక బిందువు. దాని నిరూపకములు $x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$, లేదా $x + \Delta x, y + \Delta y$. చిత్రము 41 లో



చిత్రము 41

ఇపుడు t కి బదులు x వ్రాసెదము. x కొంచెము ఎక్కువై $x + \Delta x$ అగునపుడు $y = f(x)$ పెరిగి $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ అగుచున్నది. ఇచ్చట Δx, Δy సంకేతములు $\Delta \times x$, $\Delta \times y$ అని గుణకార ఫలములుగ తీసికొనకూడదు. అవి x, y చలరాశులలోని వృద్ధిని గుర్తించు ఏకసంకేతములు. పైన వర్ణించిన ప్రకారము $f(x)$ ఫలమునకు పెరుగు రేటు $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ యొక్క అవధి. ఈ అవధిని కనిపెట్టుటకు $x + \Delta x \longrightarrow x$ అనగా $\Delta x \longrightarrow 0$ అని తీసికొని గణించవలెను.

$PM = P_1 Q_1 = \Delta x$, $P_1 P = y$, $Q_1 Q = y + \Delta y$, $QM = \Delta y$: అందువలన $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan Q\,PM$.

Δx విలువ శూన్యమును సమీపించుకొలది వక్రరేఖపై Q బిందువు P ని సమీపించును $(Q \longrightarrow P)$. అందుచేత PQ రేఖ, బిందువు P వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖను సమీపించును. కాబట్టి, మనకు ఒక ఫలము యొక్క అంతరీకరణ గుణకము ఆ ఫలమును గుర్తించు వక్రరేఖ యొక్క స్పర్శరేఖకు, x అక్షమునకు మధ్యగల కోణము యొక్క స్పర్శజీవము (టాంజెంట్) అగును.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta =$$ స్పర్శరేఖ యొక్క నిమ్నము.

అందువలన అంతరీకరణ గుణకమును ఈ క్రింది మూడు విధములుగా భావింపవచ్చును :

(1) x కాలమును సూచించు సంఖ్యగను, $y = f(x)$ ఆ కాలములో ఒక బిందువు జరుగు దూరముగను తీసి కొనిన, $\frac{dy}{dx}$ అనునది ఆ బిందువుయొక్క వేగమును సూచించును.

(2) y చలరాశి x చలరాశి యొక్క ఫలమయినచో $\frac{dy}{dx}$, y లోని స్వల్పమార్పగు Δy కును x లోని స్వల్ప మార్పగు Δx నకును కల నిష్పత్తియొక్క అవధి అగును.

(3) x, y చలరాశులకు గల సంబంధము $y = f(x)$ ను ఒక రేఖాచిత్రముగ వ్రాసినచో $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ అనునది (x, y) బిందువునందున్న స్పర్శరేఖ నిమ్నము లేదా స్పర్శరేఖకును, x అక్షమునకును మధ్యనున్న కోణము θ యొక్క స్పర్శజీవము అగును.

అంతరీకరణ సూత్రములు : వివిధ రకములైన ఫలము లను, ఫలముల సంయోజనములను సులభముగా అంతరీ కరణించుటకు కొన్ని సూత్రములు కావలెను.

I. మొట్టమొదట స్థిరఫలము $y = c$ కు వ్యుత్పన్నమును కనుగొందము :

$$y = c,\ y + \Delta y = c,$$

$$\therefore \Delta y = 0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad (\Delta x \neq 0)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

అందుచే, స్థిరఫలము యొక్క అంతరీకరణ గుణకము శూన్య మగును.

II. $y = ax$, (a స్థిరరాశి) ; $y + \Delta y = a(x + \Delta x)$

$$\Delta y = a(x + \Delta x) - ax = a\Delta x \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

ఉదా : $\frac{d(3x)}{dx} = 3.$

III. n ధనాత్మక పూర్ణాంకమైనపుడు x^n యొక్క వ్యుత్పన్నము : $y = x^n$.

ఇచ్చట x యొక్క మార్పు Δx అనియు, y యందు అనుగుణమగు మార్పు Δy అనియు అనుకొందము ; అందుచేత $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$

ఇచ్చట n ధనాత్మక పూర్ణాంకమైనచో ద్విపద సిద్ధాంత ప్రకారము రెండవ అంగము నందలి కుడివైపు భాగమును విపులీకరించి క్రింది విధమున వ్రాయవచ్చును.

$$y + \Delta y = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2} + \ldots\ldots + (\Delta x)^n$$

$$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots\ldots + (\Delta x)^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

ఉదా : $y = x^9$ అయితే, $\frac{dy}{dx} = 9x^8$. పైన వివరించిన సిద్ధాంతము అనగా $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ అనునది n ధనా త్మక పూర్ణసంఖ్యకు రుజువు చేసితిమి. కాని ఈ సిద్ధాంతము అన్ని సంఖ్యలకును నిజమగును.

ఉదా : $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ అయినచో

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ అయినచో

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

IV. సంకలనము యొక్క వ్యుత్పన్నము : $x = a$ అను బిందువు వద్ద u, v లు రెండును x యొక్క ఫలములు అనుకొనిన వాని సంకలనము $y = u + v$ అగును.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= du/dx + dv/dx$$

ఉదా : $\frac{d(x^5 + 7x)}{dx} = 5 \cdot x^4 + 7.$

గుణకారలబ్ధము యొక్క వ్యుత్పన్నము: u, v లు రెండు అవిచ్ఛిన్న అకరణీయ ఫలములనియు, వాని గుణకార లబ్ధము $y = u . v$ అనియు అనుకొందము. అప్పుడు

$$y = u . v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

ఏలన $\lim \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim (\Delta u) \times \frac{dv}{dx} = 0$

ఉదా: $u = x^5,\ v = x^3,\ uv = x^8$

$$\frac{d}{dx}(u . v) = x^5 . \frac{d(x^3)}{dx} + x^3 . \frac{d(x^5)}{dx}$$

$$= x^5 . 3x^2 + x^3 . 5x^4$$

$$= 3x^7 + 5x^7 = 8x^7$$

x^8 ను నేరుగా అంతరీకరణముచేసినను $8x^7$ ను పొంద వచ్చును.

VI. భాగఫలవ్యుత్పన్నము : u, v లు రెండును అంతరీకరణీయఫలములు, వాని భాగఫలము y అని అనుకొందము. $y = \frac{u}{v}$. పై ఉదాహరణములోని మార్గమును ఉపయోగించి,

$$\frac{dy}{dx} = \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right) \Big/ v^2$$ అని చూపవచ్చును.

ఉదా: $u = x^5 + 7x,\ v = x^3$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5 + 7x}{x^3}\right) = \frac{x^3(5x^4 + 7) - 3x^2 \ (x^5 + 7x)}{x^6}$$

VII. $y = f(u)$ అని, $u = g(x)$ అని అనుకొందము. అనగా y అనునది u ద్వారా x యొక్క ఫలమగుచున్నది.

అప్పుడు $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x}$

పై పదముయొక్క అవధిని తీసికొన్నచో

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

ఉదా: $(x^2 - 3x + 5)^5$ యొక్క వ్యుత్పన్నమును కనుగొనుము.

$u = x^2 - 3x + 5$ అనుకొందము.

అప్పుడు $y = u^5$ అగును

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= 5u^4 (2x - 3)$$

$$= 5(x^2 - 3x + 5)^4 (2x - 3)$$

VIII. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ను $1 / \frac{\Delta x}{\Delta y}$ అని వ్రాయవచ్చునుగదా! $\Delta x \longrightarrow 0$ అగునపుడు $\Delta y \longrightarrow 0$ అగుచున్నది కదా! కనుక అవధులను తీసికొనునపుడు $\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$ అని లభించును.

IX. సూత్రములు VII, VIII ఉపయోగించి $x = f(t),\ y = g(t)$ అని ఈయబడినచో మనము ప్రత్యేకముగ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ లను కనుగొనవచ్చును. అప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

ఉదా: $y = t^3,\ x = t^2$ అయినచో $\frac{dy}{dx}$ కనుగొందము.

ఇచ్చట $\frac{dy}{dt} = 3t^2, \frac{dx}{dt} = 2t$

అందువలన $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2} t = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

ముఖ్యమైన ఫలముల వ్యుత్పన్నములు : పై పద్ధతి ననుసరించి $\log x$, e^x, a^x వంటి ముఖ్యమయిన గణిత ఫలముల వ్యుత్పన్నములను క్రింది జాబితాలో చూడవచ్చును :

x యొక్క ఫలము $y = f(x)$	$f(x)$ యొక్క అంతరీకరణ గుణకము $\frac{dy}{dx} = \frac{d f(z)}{dx} = f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$ (n స్థిరరాశి)
e^x	e^x $\left[e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$
$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$

x యొక్క ఫలము $y = f(x)$	$f(x)$ యొక్క అంతరీకరణ గుణకము $\frac{dy}{dx} = \frac{df(z)}{dx} = f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$

అవ్యక్తఫల అంతరీకరణము : y అనునది x యొక్క ఫలముగా ఈయబడినపుడు దాని వ్యుత్పన్నము $\frac{dy}{dx}$ సులభముగా లబ్ధమగును. ఏలన $y = f(x)$ అయినచో $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ అగును. కాని y ని x యొక్క అవ్యక్త ఫలముగా, అనగా $F(x, y) = 0$ గా తీసికొనినప్పుడు మొట్టమొదట y యొక్క **మూల్యమును** సాధించుటకు బదులుగా, ఆ తీసికొన్న సమీకరణమును ఉన్నపాటుగా అంతరీకరణము చేసిన **తరువాత** $\frac{dy}{dx}$ ను (x, y పదముల ద్వారా) సాధించ వచ్చును. అట్టి అంతరీకరణమును అవ్యక్త అంతరీకరణము అందురు.

ఉదా : $x^5 + x^2y^3 - y^6 + 7 = 0$, అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము. పై సమీకరణమును అవ్యక్తముగా అంతరీకరణముచేయుటవలన

$$5x^4 + 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} - 6y^5\frac{dy}{dx} = 0 \text{ వచ్చును.}$$

దీనిని $\frac{dy}{dx}$ కొరకు సాధించినచో క్రింది ఫలము లభించును.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x^4 + 2xy^3)}{(6y^5 - 3x^2y^2)}$$

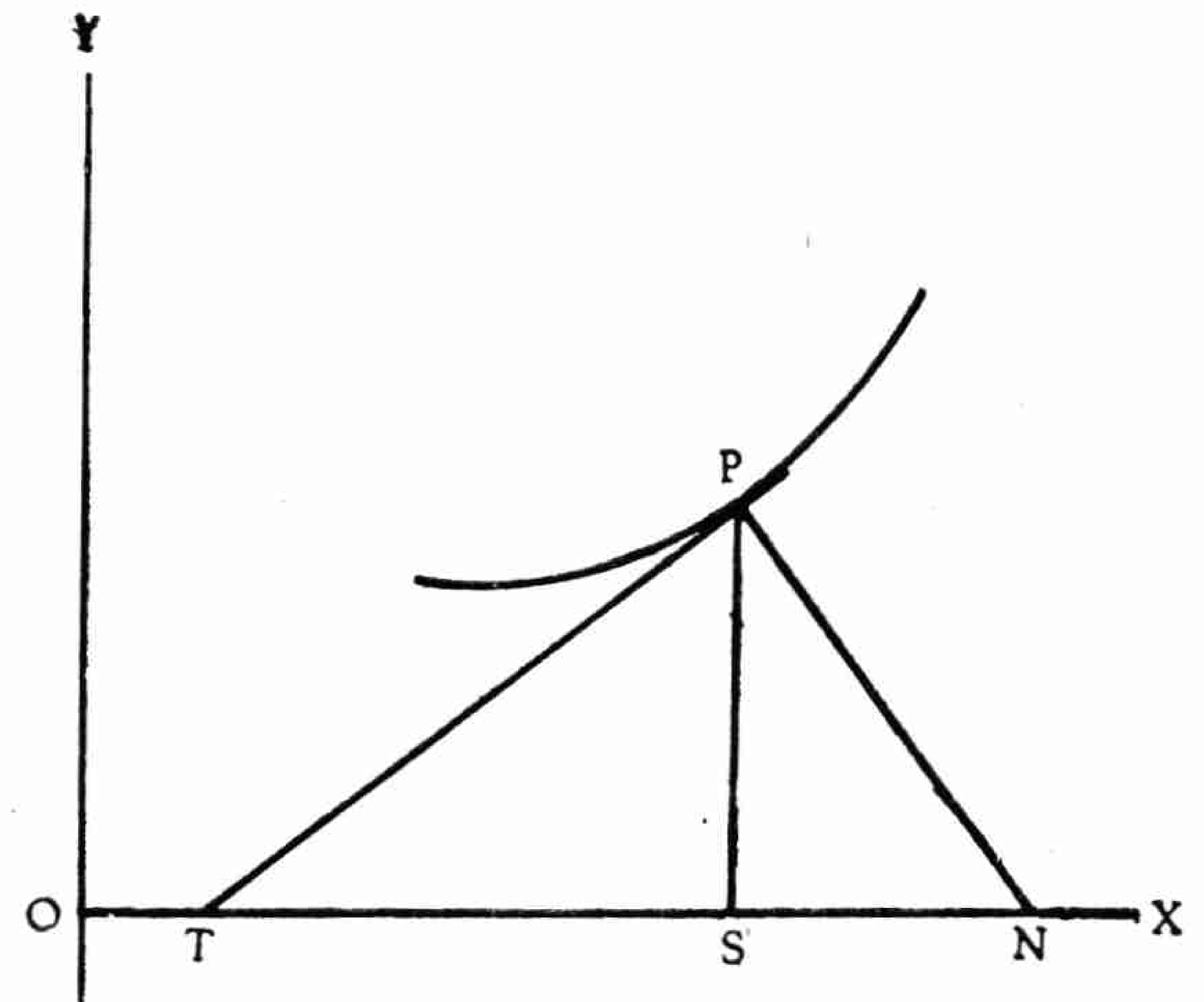
హెచ్చుతరగతి వ్యుత్పన్నములు : ఫలము y యొక్క వ్యుత్పన్నమగు $\frac{dy}{dx}$ కూడ x యొక్క ఫలమగుటచే, దాని యొక్క వ్యుత్పన్నమును కూడ కనుగొనవచ్చును. దీనిని $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ అని, y'', f'', D^2y అని ఇన్ని విధముల వ్రాయుదురు. దీనిని **మూలఫలము**యొక్క ద్వితీయ వ్యుత్పన్నము అని అందురు.

అదే విధముగ తృతీయ వ్యుత్పన్నమును $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ అని, n వ వ్యుత్పన్నమును $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ అనియు గుర్తింతురు.

స్పర్శ రేఖలు - అభిలంబ రేఖలు : నిరూపక జ్యామితి యందు m నిమ్నత గలిగి (x_1, y_1) అను బిందువునుండి పోవు రేఖయొక్క సమీకరణము :

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \text{ అగును.}$$

ఇచ్చట $y = f(x)$ అను వక్రముపై (x_1, y_1) బిందువువద్ద దాని నిమ్నత, దాని వ్యుత్పన్నమగు $\frac{dy}{dx}$ కు సమానము. అందుచేత $y = f(x)$ అను వక్ర స్పర్శరేఖా సమీకరణము నందు m కు బదులు (x_1, y_1) అను బిందువు వద్ద $\frac{dy}{dx}$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చును.



చిత్రము 42

ఈ రేఖకు లంబముగా ఉండు రేఖయొక్క నిమ్నత $-1/m$ అగును. కాబట్టి ఆ బిందువందున్న అభిలంబరేఖ (నార్మల్) యొక్క సమీకరణము :

$$y - y_1 = -(x - x_1) \Big/ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \text{ అగును.}$$

ఈ క్రింది నిర్వచనములకై 106 వ పుటలోని చిత్రము 42 ను పరిశీలింపుము.

ఉపస్పర్శరేఖ (సబ్‌టేన్జెంట్) యొక్క పొడవు ST ;
ఉపఅభిలంబము (సబ్‌నార్మల్) యొక్క పొడవు SN ;
స్పర్శరేఖ (టేన్జెంట్) పొడవు PT ;
అభిలంబము పొడవు PN.

స్పర్శరేఖా సమీకరణమునందు $y=0$ అని ప్రతిక్షేపించి, x కొరకు సాధించినచో T యొక్క నిరూపకములు $T\left(x_1-\frac{y_1}{m},\ y_1\right)$ అని వచ్చును. అదే విధముగ అభిలంబరేఖ సమీకరణమునందు $y=0$ అని ప్రతిక్షేపించినచో N యొక్క నిరూపకములు $N\left(x_1+my_1,\ 0\right)$ అని తెలుసుకొనవచ్చును. ఈ విషయ సంగ్రహణముచే ST మొదలగు వాని పొడవులను నిర్ణయించవచ్చును :

ఉపస్పర్శరేఖ ST పొడవు $=\left|x_1-\left(x_1-\frac{y_1}{m}\right)\right|=\left|\frac{y_1}{m}\right|$

ఉప అభిలంబ SN పొడవు $=\left|(x_1+my_1)-x_1\right|=\left|my_1\right|$

స్పర్శరేఖ PT పొడవు $=\left|\frac{y_1\sqrt{1+m^2}}{m}\right|$

అభిలంబరేఖ PN పొడవు $=\left|y_1\sqrt{1+m^2}\right|$

ఇచ్చట m అనునది ఆ బిందువందున్న $\frac{dy}{dx}$.

ఉదా 1: $x^2+y^2-8x-12y+27=0$ అను వృత్తముపై $(7, 2)$ అను బిందువువద్ద ఉపస్పర్శరేఖ, ఉప అభిలంబరేఖ, స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల పొడవులను కనుగొనుము.

$x^2+y^2-8x-12y+27=0$

దీనిని అంతరీకరణము చేయగా

$2x+2y\ dy/dx-8-12\ dy/dx=0$ లభించును.

దీనినుండి $dy/dx=-(x-4)/(y-6)$ అగును.

$\therefore$ $(7, 2)$ బిందువువద్ద ఆవృత్తనిమ్నత

$$=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(7,2)}=\frac{-(7-4)}{(2-6)}=3/4 \text{ అగును.}$$

పైన పేర్కొనిన నాలుగు సూత్రములచే :

ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు $=\frac{y_1}{m}=2/\frac{3}{4}=8/3.$

ఉప అభిలంబరేఖ పొడవు $=my_1=\frac{3}{4}\times 2=3/2.$

స్పర్శరేఖ పొడవు :

$$\frac{y_1\sqrt{1+m^2}}{m}=\frac{2\sqrt{1+(3/4)^2}}{3/4}=\frac{2\sqrt{25/16}}{3/4}=10/3.$$

అభిలంబరేఖ పొడవు :

$$y_1\sqrt{1+m^2}=2\sqrt{1+(3/4)^2}=2\times\tfrac{5}{4}=5/2.$$

ఉదా 2: పరావ $y^2=4ax$ లో అభిలంబము యొక్క పొడవును కనిపెట్టుము. ఇచ్చట $y=2\sqrt{a}\ \sqrt{x}$;

$m=\frac{dy}{dx}=2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ అందువలన

ఉప అభిలంబము యొక్క పొడవు :

$$my_1=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}=2a.$$

ఇది స్థిరమైన ఒక పొడవు :

రెండు వక్రముల మధ్యకోణము (ఏంగిల్ బిట్వీన్ టూ కర్వ్స్): రెండు వక్రముల మధ్యకోణమనగా, ఆ వక్రములకు వాని ఖండన బిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము. m_1, m_2 లు వరుసగా వాని నిమ్నత అనుకొనిన, వాని మధ్యకోణమును

$$\tan\theta=\frac{(m_2-m_1)}{(1+m_1m_2)}$$

అను సూత్రముతో కనుగొనవచ్చును.

ఉదా : $y=x^2$, $y^2=x$ ఈ వక్రముల మధ్యకోణమేమి ?

ఇవి ఖండించు బిందువు $x=1,\ y=1$

ఇచ్చట మొదటి వక్రమునకు $\frac{dy}{dx}=m_1=2x=2$

రెండవ వక్రములో $y=\sqrt{x}$. $\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{1}{2}$

$$\tan\theta=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{3}{4}$$

ఫలముల పెరుగుదల, తగ్గుదల నిర్ణయించుట : ఒక ఫలము $f(x)$ ఒక స్థలము $x=a$ యందు పెరుగుచున్నదా తగ్గుచున్నదా అని కనిపెట్టుటకు ఆ స్థలమునందు $f(x)$ యొక్క వ్యుత్పన్నమగు $f'(x)$ ను పరిశీలించవలెను. $f'(a)$ ధనాత్మక సంఖ్యగ నున్నచో, x చలరాశి a విలువ నుండి పెరుగునపుడు అనగా $x>a$ అగునపుడు $f(x)$ పెరుగును. అనగా $f(x)>f(a)$ అగును. x చలరాశి a విలువనుండి తగ్గునపుడు అనగా $x<a$ అగునపుడు $f(x)<f(a)$ అగును. ఇటులకాక $f'(a)$ ఋణాత్మక సంఖ్య యగునపుడు $[f(x)<0]$ x చలరాశి a నుండి పెరుగగా $f(x)$, $f(a)$ నుండి తగ్గును. x తగ్గగా $f(x)$ పెరుగును.

ఉదా : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ అను ఫలము ఏ విలువలకు పెరుగును ? ఏ విలువలకు తగ్గును ?

ఇచట $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. అందువలన $1 - \frac{1}{x^2} > 0$ అగునపుడు అనగా $x > 1$ లేదా $x < -1$ విలువలు తీసికొనునపుడు x పెరుగగా $f(x)$ పెరుగును. $-1 < x < 1$ విలువలు తీసికొనునపుడు $1 - \frac{1}{x^2} < 0$; అందువలన x పెరుగగా $f(x)$ తక్కువగును.

ఉదా 2: x చలరాశి $2 < x < 3$ విలువలు తీసికొనునపుడు $f(x)$ ఫలమునకు గరిష్ఠ మూల్యమేది ? కనిష్ఠ మూల్యమేది ?

ఈ మేర (రేంజ్)లో $f'(x) > 0$; అందువలన x పెరుగగా $f(x)$ కూడ పెరుగును. అందువలన x కు కనిష్ఠవిలువ $x = 2$ ఇచ్చినపుడు $f(x) = x + \frac{1}{x}$ కనిష్ఠవిలువ $2 + \frac{1}{2}$ను పొందును. x కు గరిష్ఠ విలువ $x = 3$ ఇచ్చినపుడు $f(x) = x + \frac{1}{x}$ గరిష్ఠ విలువయగు $3 + \frac{1}{3}$ ను పొందును. అనగా $2 \le x \le 3$ అగునప్పుడు

$2\frac{1}{2} \le \left(x + \frac{1}{x}\right) \le 3\frac{1}{3}$ అగును.

కొన్ని సమయములందు $a < x < b$ అను మేర ఇచ్చినపుడు $f(x)$ యొక్క గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు, ఆ మేరలో మధ్యనున్న ఏదో ఒక స్థలము నందు ఉండవచ్చును. అట్టిసందర్భములందు ఆ విలువను కనిపెట్టుటకు వ్యుత్పన్నము ఉపయోగపడు చున్నది.

గరిష్ఠ, కనిష్ఠ మూల్యములు (మాక్సిమా & మినిమా): $x = x_1$ స్థలమునందు $f(x)$ విలువయగు $f(x_1)$ ప్రక్కన, దగ్గరనున్న అన్ని విలువలకంటె ఎక్కువగ ఉన్నదనుకొందము. అనగా ఒక చిన్న మేరలో

$$x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon \ldots\ldots$$

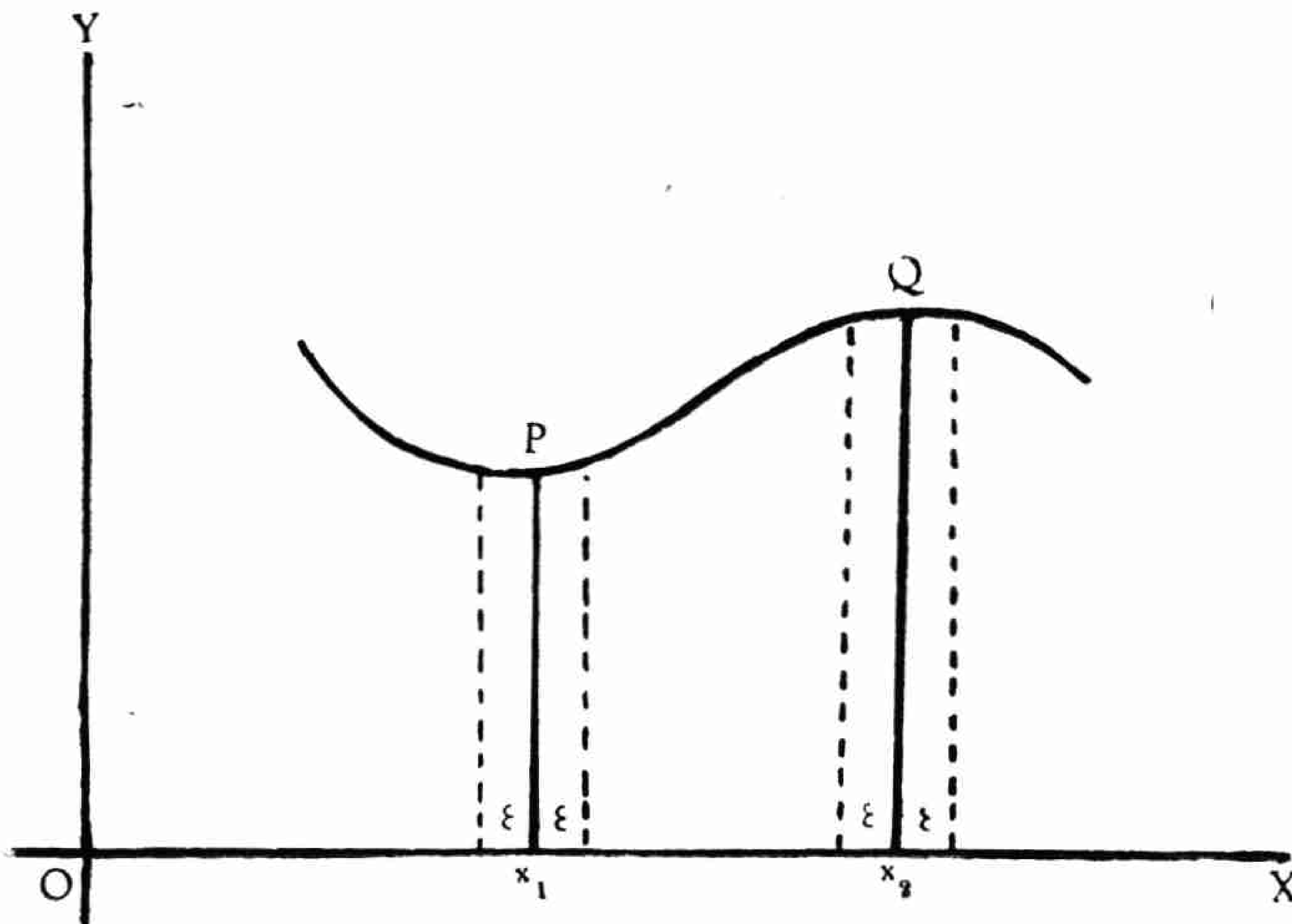
అనుకొందము. అపుడు ఆ ఫలము యొక్క రేఖాపటము చిత్రము 43 నందు P వద్ద ఉన్నట్లుండును. అనగా $y = f(x)$ పై $x = x_1$ అను బిందువునందు ఆ వక్ర స్పర్శ రేఖ x — అక్షమునకు సమానాంతరముగ ఉండును. అనగా

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = f'(x_1) = 0 \text{ అగును.}$$

ఇంతేకాక $x < x_1$ విలువలు తీసికొనునపుడు చిత్రములో ఉండునట్లు x పెరుగగా $f(x)$ తగ్గును. అందువలన $x < x_1$ అగునపుడు $\frac{dy}{dx} = f'(x) < 0$ [$f'(x)$ ఋణాత్మక సంఖ్యగ ఉండును]. $x > x_1$ అయినపుడు చిత్రములో ఉన్నట్లు x పెరుగగా $f(x)$ కూడ పెరుగును. అందువలన $f'(x) > 0$ [$f'(x)$ ఒక ధనాత్మక సంఖ్య] ఈ రెండు విషయములు చేర్చి కనిష్ఠ విలువయందు $f(x)$ యొక్క ప్రవర్తనను ఇట్లు వర్ణించవచ్చును :

" $x = x_1$ విలువయందు
$f(x)$ కనిష్ఠ విలువను పొందినచో
(i) $f(x_1) = 0$ అగును.
(ii) $x < x_1$ గ ఉండునపుడు
$f'(x)$ ఋణాత్మకముగను,
$x > x_1$ గ ఉండునపుడు
$f'(x)$ ధనాత్మకముగను ఉండును."

ఇటులనే $x = x_2$ బిందువునందు $f(x)$ ఒక గరిష్ఠ విలువ పొందుచున్నదనుకొందము. అనగా $x = x_2$ నందున్న విలువ $f(x_2)$, ప్రక్కన, దగ్గరనున్న అన్ని విలువలకంటె తక్కువగ ఉన్నదనుకొందము. అనగా ఒక చిన్న మేర $x_2 - \varepsilon < x < x_2 + \varepsilon$ లో $f(x) < f(x_2)$ అనుకొందము. అపుడు ఆ ఫలము యొక్క రేఖాపటము చిత్రము 43 నందు Q వద్ద వలె ఉండును. ఇచట $x = x_2$, $y = f(x_2)$ అగు బిందువు Q నందు $f'(x_2) = 0$ అగును. $x < x_2$ అగునపుడు x పెరుగగా $f(x)$ కూడ పెరుగును. అయితే $x > x_2$ అగునపుడు x పెరుగగా $f(x)$ తగ్గును. అందువలన



చిత్రము 43

గరిష్ఠ విలువ $x = x_2$ బిందువునందు $f(x)$ యొక్క ప్రవర్త నను ఇట్లు వర్ణించ వచ్చును :

"$x = x_2$ విలువయందు
$f(x)$ గరిష్ఠవిలువను పొందినచో
(i) $f'(x_2) = 0$;
(ii) $x < x_2$ గ నుండు నపుడు
$f'(x)$ ధనాత్మకముగను,
$x > x_2$ అగునపుడు
$f'(x)$ ఋణాత్మకముగను ఉండును."

ఉదా: దత్త లోహపు రేకునుండి ఒకప్రక్కన తెరచి యున్న స్తూపాకారపు (సిలిండ్రికల్) పాత్రచేయవలెను. దాని ఘనపరిమాణము గరిష్ఠమయినచో ఆ పాత్ర ఎత్తు ఎంత ?

స్తూపాకారపు పాత్ర యొక్క వ్యాసార్ధము r అనియు, దాని ఎత్తు h అనియు తీసికొందము, అపుడు దాని ఘన పరిమాణము $V = \pi r^2 h$. ఈ పాత్ర ఒక ప్రక్కన మాత్రము మూయబడియున్నది. కనుక దాని తల వైశాల్యము $S = 2\pi rh + \pi r^2$. S విలువ ఒక నిర్ణీత సంఖ్య $= 600$ అనుకొందము. అందువలన

$$S = 2\pi rh + \pi r^2 = 600$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{600\,r}{2} - \frac{\pi r^3}{2} = f(r)$$

$V = f(r)$ గరిష్ఠ విలువ పొందవలెనన్న $\frac{dV}{dr} = f'(r) = 0$ కావలెను. అనగా $300 - \frac{3\pi r^2}{2} = 0$.

$$\therefore r^2 = \frac{200}{\pi},\ r = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$ కావలెను.

అపుడు $2\pi rh = 600 - \pi r^2$
$= 600 - 200 = 400$ అగును.

$$\therefore h = \frac{400}{2\pi r}$$

$$= \frac{200}{10\sqrt{2\pi}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore r = h = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$V = \frac{2000\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = 1595{\cdot}8$$

ఇచ్చట $\frac{dV}{dr} = 300\left(1 - \frac{\pi r^2}{200}\right)$

కనుక $r < 10\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$ అగునపుడు $\frac{dV}{dr}$ ఒక ధనాత్మక విలువను తీసికొనును. $r > \frac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ అగునపుడు అది ఋణాత్మకము. అందువలన rకు ఈ విలువ వచ్చు వరకు V పెరిగి తరువాత తగ్గుచున్నది. కనుక ఇది V యొక్క గరిష్ఠ విలువ.

ఒక ఫలము $f(x)$ గరిష్ఠ విలువ లేదా కనిష్ఠ విలువ పొందుటకు $f'(x) = 0$ కావలెను. కాని, ఇది మాత్రము చాలదు. $f'(x)$ మొదట $x = x_0$ వచ్చువరకు పెరిగి తరువాత తగ్గవలెను. లేదా మొదట తగ్గి తరువాత పెరగవలెను. అనగా $f'(x)$ యొక్క సంజ్ఞ మారవలెను.

బిందుచలనము : హెచ్చు తరగతి వ్యుత్పన్నములు బిందుచలనములో వాడుకకు వచ్చుచున్నవి. ఒక బిందువు ఒక ఋజురేఖపై జరుగుచున్నదని, అది t సెకెనుల కాలములో s సెంటీమీటరులదూరము జరిగినదనుకొందము అపుడు దాని తాత్కాలిక వేగము $\frac{ds}{dt} = v$ అగును. ఆ బిందు త్వరణము dv/dt అనగా $\frac{d^2s}{dt^2}$ అగును. న్యూటన్ గతినియమము ప్రకారము దాని ద్రవ్యరాశి m గ్రాము లైనచో దాని చలన సమీకరణము $m\frac{d^2s}{dt^2} = F$; ఇచ్చట F అనునది దానిమీద ప్రయోగింపబడు బలము. దీనిని డైన్‌లలో కొలువవలెను.

అదే బిందువు వక్రరేఖలో జరుగుచున్నచో, దాని త్వరణమును రెండు దిక్కులలో విభజింపవచ్చును. స్పర్శ రేఖ దిక్కులో $\frac{d^2s}{dt^2}$ ఒక భాగము; అభిలంబరేఖ దిక్కులో ఆ బిందు త్వరణము $\frac{v^2}{\rho}$; ఇచ్చట ρ అనునది ఆస్థలములోని చలనపథము యొక్క వక్రతా వ్యాసార్ధము.

వక్రత : ఒక ఋజురేఖకు వక్రత లేదు. ఒక వృత్తము నకు అన్ని స్థలములందును సమాన వక్రత ఉన్నదని చెప్ప వచ్చును. ఒక వృత్తమునందు వ్యాసము ఎక్కువ కాగా దాని వక్రత తగ్గి, తుదకు వ్యాసము అనంతమగునపుడు, అనగా అది ఋజురేఖ అగునపుడు, దాని వక్రత శూన్య మగుచున్నది. ఈ స్థూల భావములను ఆధారముగా ఉంచుకొని, వక్రత అను భావమును గణితరీతిగా నిర్వ చించవచ్చును. ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము r అయితే దాని వక్రత యొక్క పరిమాణము $1/r$ అనుట

న్యాయముగ గోచరించుచున్నది కదా! ఏలన r పెరుగగా, $1/r$ తగ్గుచున్నది. తుదకు r అనంతమగునపుడు $1/r$ శూన్యమగుచున్నది.

వక్రభావమును మరియొక దృష్టితో చూడవచ్చును. ఒక ఋజురేఖపై ఒక బిందువు జరుగునపుడు దాని గమన దిక్కు అనగా స్పర్శరేఖ దిక్కు మారదు. అదే బిందువు ఒక వక్రముపై జరుగునపుడు దాని స్పర్శరేఖ దిక్కు మారుచున్నది. వక్రపథముపై ఒక బిందువు P నిర్ణీత వేగముతో జరుగుచున్నదనుకొందము. అపుడు P యందు ఆ వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ దిక్కుకూడ తిరుగును. ఈ భ్రమణ వేగము $\frac{d\theta}{dt}$.

ఇచ్చట θ అనునది స్పర్శ రేఖకును ఒక స్థిర దిక్కునకును మధ్యకోణము. వక్రత ఎక్కువగ నున్న స్థలములో స్పర్శరేఖ భ్రమణపురేటు ఎక్కువగ ఉండును. వక్రత తక్కువగ ఉన్న స్థలమందు ఈ భ్రమణపురేటు తక్కువగ ఉండును. వక్రతలేని స్థలమందు భ్రమణమే ఉండదు. కనుక P బిందువందున్న స్పర్శరేఖ భ్రమణవేగమునకును, P ఆ వక్రముపై జరుగు వేగమునకును ఉన్న నిష్పత్తినే ఆ వక్రత పరిమాణముగా తీసికొనవచ్చును. దీని విలువ $\frac{d\theta}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds}$. ఒక వృత్తమునందు $s = r\theta$ అగుచున్నది. కనుక $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$ అనగా మనము స్పర్శ రేఖ భ్రమణము వలన నిర్వచించిన వక్రతయు, పైన వివరించినట్లు వృత్తము యొక్క వక్రత $\frac{1}{r}$ అనుటయు ఒకే నిర్వచనమగుచున్నది. ఈ వక్రతకు κ అను సంకేతము ఉపయోగించుట వాడుక. ఒక వృత్తమునకు $\kappa = \frac{1}{r}$.

వృత్తము కాని వేరు వక్రరేఖ తీసికొనెదము. వేర్వేరు స్థలములలో దీని వక్రత భిన్నముగ ఉండును. ఒక నిర్ణీత స్థలము P యందు వక్రతను నిర్వచించుటకును, గణించుటకును 2 విధములున్నవి. మొదటిది ఆ బిందువు P యందున్న స్పర్శరేఖకును, ఒక నిర్ణీత దిక్కునకును ఉన్న మధ్యకోణము θ ను కనిపెట్టి, P వక్రరేఖపై జరుగునపుడు $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ ను కనిపెట్టవచ్చును. రెండవది ఆ వక్రరేఖకు P యందు ఎంత వక్రత ఉన్నదో అదే వక్రతయున్న ఒక వృత్తమును రచించి, దాని వ్యాసార్ధము r ను కనిపెట్టి, $\kappa = \frac{1}{r}$ ను P స్థలములోని వక్రతగా తీసికొనుటయే. అట్టి వృత్తమును గీయుటకు P కు దగ్గరగా మరి రెండు బిందువులు Q, R లు తీసికొని P, Q, R ద్వారా ఒక వృత్తమును గీయుము. Q, R బిందువులు కొంచెము కొంచెముగా స్థిరబిందువగు P ను సమీపించగా PQR వృత్తమునకు ఒక అవధి వృత్తము ఏర్పడును. ఇదియే ఆవక్రరేఖకు P యందున్న వక్రతావృత్తము (సర్కిల్ ఆవ్ కర్వేచర్). దీని వ్యాసార్ధము ρ కు వక్రతా వ్యాసార్ధము (రేడియస్ ఆవ్ కర్వేచర్) అని పేరు. ఈ వృత్తము యొక్క కేంద్రమే వక్రతా కేంద్రము. దీని వ్యాసార్ధమే వక్రతా వ్యాసార్ధము. పైన వివరించిన ఏ విధము ననుసరించినను, ఒక వక్రరేఖకు $P\ (x,\ y)$ బిందువందున్న వక్రతా వ్యాసార్ధము ρను క్రింది సూత్రము ద్వారా కనుగొనవచ్చును :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \Big/ \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

టేలర్ పరంపర : $f(x)$ అను ఫలము ఒక దానిని తీసికొందము. $x = a$ అగునపుడు దీని విలువ $f(a)$. x చలరాశికి a కు సమీపమైన విలువ $(a+h)$ ని తీసికొనునపుడు $f(x)$ ఫలము సాధారణముగ $f(a)$ కు సమీపపు విలువను తీసికొనును. కనుక $f(a+h)$ విలువను

$$f(a+h) = f(a) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots\ldots$$

అను రూపములో వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట A, B, C.... స్థిరసంఖ్యలు. $h \longrightarrow 0$ అగునపుడు పై సమీకరణము కుడివైపు అవధి విలువ $f(a)$. కనుక $h \longrightarrow 0$ కాగా $f(a+h) \longrightarrow f(a)$ అని ఊహించికొని ఉన్నాము. అనగా $x = a$ అను బిందువు వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమై ఉన్నదనుకొన్నాము.

A, B, C స్థిరసంఖ్యలకు విలువలను కనిపెట్టుటకు a ఒక స్థిరరాశిగను, h ఒక చలరాశిగను తీసికొని ఇరుప్రక్కలును h అపేక్షయా అంతరీకరణము చేయుదుము. అపుడు

$$f'(a+h) = A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \ldots$$

$$f''(a+h) = 2B + 3{\cdot}2\,Ch + 4\cdot 3\,Dh^2 + \ldots$$

$$f'''(a+h) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C + 4\cdot 3\cdot 2\cdot Dh + \ldots$$

అను సమీకరణములు లభించును.

ఇచ్చట $f'(x) = \frac{df}{dx}$; $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$; $f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3}$.

పై సమీకరణములలో $h = 0$ అని ప్రతిక్షేపించినచో A, B, C, D ... ... లకు క్రింద విలువలు లభించును.

$$A = \left\{\frac{df(a+h)}{dh}\right\}_{h=0} = f'(a)$$

$$2\ B = \left[\frac{d^2 f(a+h)}{dh^2}\right]_{h=0} = f''(a)$$

$$3\cdot 2\cdot C = \left\{\frac{d^3 f(a+h)}{dh^3}\right\}_{h=0} = f'''(a)$$

కనుక

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \cdots\cdots$$

అగుచున్నది. ఇది అంతరీకరణ గణితములో ముఖ్యమైన సూత్రము.

ఉదా : $f(x) = \sin x$ అయితే $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = \cos x$. కనుక

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\cdots$$

పై సిద్ధాంతములో $a = 0$, $h = x$ అని తీసికొని ఉన్నాము (చూ. న్యూటన్; లైబ్నిట్జ్). పా. ల. నా.

అంతరీకరణ జ్యామితి : అంతరీకరణ జ్యామితిలో జ్యామితిధర్మములను పరిశీలించుటకు నిరూపకములును, అంతరీకరణకలన విధానమును ప్రయోగింపబడును. ఈ జ్యామితిని వక్రములు, వక్రతలములు అను రెండు విభాగముల క్రింద పరిశీలింతము.

వక్రములు : ఏకపరిమాణిక అవిచ్ఛిన్న అనంతబిందు సముదాయమునకు వక్రము అని పేరు. ఒక వక్రము నందుండు ఒకబిందువు నిరూపకములను క్రింది విధమున వ్రాయవచ్చును :

$$x = f(t),\ y = \phi(t),\ z = \psi(t).$$

ఇందు t కి వేరువేరు విలువలు ఇచ్చుటచే వివిధ బిందువులు లభించును. రెండు సన్నిహిత బిందువులను చేర్చు జ్యా యొక్క అవధి స్పర్శరేఖ అగును. దీని నిర్దిష్టకోటిజీవలు $f'(t)$, $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ లకు అనుపాతములో ఉండును.

ఒక వక్రమునకు P బిందువువద్ద ఉండు స్పర్శరేఖ గుండాను, దానిని అనుసరించునట్టి వేరొక సన్నిహిత బిందువు Q గుండాను వెళ్ళు ఒక సమతలము అవధిలో P బిందువు వద్ద ఆవక్రమునకు పరిస్పర్శ సమతలము (ఆస్క్యులేటింగ్ ప్లేన్) అని పేరు. పరిస్పర్శసమతలము P బిందువువద్ద వక్రమును మూడు సన్నిహిత బిందువులలో ఖండించును. P వద్ద స్పర్శరేఖకు లంబముగా పరిస్పర్శ సమతలమునందుండు ఋజురేఖకు ప్రధాన అభిలంబరేఖ అని పేరు. స్పర్శరేఖకును, ప్రధాన అభిలంబరేఖకును లంబముగా ఉండు రేఖకు రెండవ అభిలంబరేఖ అని పేరు. ప్రధాన అభిలంబరేఖ, రెండవ అభిలంబరేఖ - వీటిచే ఏర్పడు సమతలమునందు P బిందువుగుండా వెళ్ళు రేఖలు అన్నియు స్పర్శరేఖకు లంబములు. ఈ సమతలమునకు లంబతలము అనిపేరు. స్పర్శరేఖ, రెండవ అభిలంబరేఖ - వీటివలన ఏర్పడు సమతలమును ఋజుకరణతలము అని అందురు. పరిస్పర్శ, లంబ, ఋజుకరణతలములు అన్నియు పరస్పర లంబములు. వీటితో P బిందువువద్ద వక్రమునకు ఒక మూలత్రితలము ఏర్పడుచున్నది. వక్రము వెంబడి P బిందువు జరుగునపుడు ఈ త్రితలము దృఢవస్తువువలె వక్రము వెంబడి జరుగుచుండును.

వక్రత : నిర్వచనము : P బిందువువద్ద, వక్రత κ =

$$\text{అవధి}\ \frac{\text{ఆసన్న స్పర్శరేఖాద్వయముల మధ్యకోణము,}}{\text{చాపలవము}}$$

ఇందు చాపలవము యొక్క విలువ శూన్యమును సమీపించవలయును. $1/\kappa$ ను వక్రతావ్యాసార్ధము అందురు. దానినే ρ అను సంకేతముచే గుర్తింతురు. P వద్ద ఉండు

$$\frac{\text{ఆసన్న రెండవ అభిలంబ రేఖాద్వయముల మధ్యకోణము}}{\text{చాపలవము}}$$

యొక్క అవధికి విమోటనము (టార్షన్) (τ) అని పేరు. $\sigma = \left(\frac{1}{\tau}\right)$. విమోటన వ్యాసార్ధము చాపము s వృద్ధి అగునపుడు రెండవ అభిలంబరేఖ యొక్క పరిభ్రమణము దక్షిణావర్తభ్రమి స్పర్శరేఖవైపు జరుగునపుడు ఉండు దిశలో ఉండినచో విమోటనమునకు ధనసంజ్ఞ కలదు అని చెప్పుదురు.

ఇటుపై చాపము యొక్క పొడవు s విలువయే ప్రాచలము (పెరామీటర్) t గా తీసికొనబడును. అందువలన గణిత విధానము సులభము అగును. ఒక వక్రము బిందువు P యొక్క స్థలసదిశరాశి r అయినచో వక్రము యొక్క సమీకరణము $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అగును.

స్పర్శరేఖ, ప్రధానఅభిలంబరేఖ, రెండవ అభిలంబరేఖ - వీటి దిశలలో ఉండు సదిశరాశి యూనిట్‌లను వరుసగా $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ లతో గుర్తించెదము. సెరె - ఫ్రెనే మూలసూత్రముల ప్రకారము $d\mathbf{t}/ds = \kappa\mathbf{n}$; $d\mathbf{n}/ds = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}$; $d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n}$ ఒక వక్రముపై ఉండు P బిందువుగుండాను, దాని సన్నిహిత బిందువులు Q, R గుండాను వెళ్ళువృత్తము Q, R బిందువులు P ని సమీపించునపుడు అవధివృత్తమునకు P వద్ద వక్రతావృత్తము అగును. ఆ వృత్తము పరిస్పర్శతలములో ఉండును. దాని కేంద్రము ప్రధాన అభిలంబరేఖపై ఉండును. దాని వ్యాసార్ధము ρ.

సన్నిహితబిందువులు P, Q, R, S లలో మూడు బిందువులు Q, R, S లు బిందువు P ని సమీపించినపుడు ఆనాలుగు బిందువులగుండా వెళ్ళుగోళము అవధిలో పరిస్పర్శ గోళము అనబడును. దానికి P యందు వక్రముతో మూడవతరగతి సంస్పర్శ కలదు. దానికేంద్రమును కనుగొనుటకు ప్రధాన అభిలంబరేఖవెంబడి ρ దూరము వెళ్ళి, అచ్చటినుండి రెండవ అభిలంబరేఖదిక్కున $\sigma \dfrac{d\rho}{ds}$ దూరము వెళ్ళవలెను. ఇపుడు పరిస్పర్శగోళముయొక్క కేంద్రము లభించును. దాని వ్యాసార్థము :

$$\left\{\rho^2 + \left(\sigma \frac{d\rho}{ds}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ అగును.}$$

సమతల వక్రముయొక్క విమోటనము శూన్యము. విపర్యయముగా ప్రతి బిందువువద్దను శూన్య విమోటనము కల వక్రము ఒక సమతలవక్రము అగును. వక్రముపై నుండు ఒకబిందువును మూలబిందువుగా తీసికొని, అచటి స్పర్శరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖ, రెండవ అభిలంబరేఖ నిరూపకాక్షములుగా తీసికొనినచో, మూలబిందువునకు దగ్గరగఉండు ఒకబిందువుయొక్క నిరూపకములు x, y, z లను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును :

$$x = s - \tfrac{1}{6}\kappa^2 s^3 - \tfrac{1}{8}\kappa\kappa' s^4 + \ldots \ldots$$

$$y = \tfrac{1}{2}\kappa s^2 - \tfrac{1}{6}\kappa' s^3 + \tfrac{1}{24}\left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)s^4 + \ldots$$

$$z = \tfrac{1}{6}\kappa\tau s^3 + \tfrac{1}{24}\left(2\kappa'\tau + \kappa\tau'\right)s^4 + \ldots \ldots$$

ఇందు ఉతములు s అపేక్షయా వ్యుత్పన్నములను గుర్తించును. అనగా $\kappa' = d\kappa/ds$; $\kappa'' = d^2k/ds^2$. కాబట్టి సామాన్యముగా ఒక బిందువువద్ద వక్రమునకు పరిస్పర్శతలము ఒకప్రక్కనుండి మరియొకప్రక్కకు దాటిపోవును. $\tau = 0$ అయినపుడు వక్రము పరిస్పర్శతలమును దాటదు.

హెలిక్స్ : ఒక వక్రముయొక్క స్పర్శరేఖలకును, ఒకనిర్దిష్టదిశకును ఎల్లప్పుడు స్థిరకోణములు ఏర్పడినచో ఆవక్రమునకు హెలిక్స్ అని పేరు. అట్టి వక్రమునకు ప్రధాన అభిలంబరేఖలు అన్నియు ఈ నిర్దిష్ట దిశకు లంబములు అగును. ఇట్టి వక్రములకు κ/ρ స్థిరముగ ఉండును. విపర్యయముగా ఒకవక్రమునకు κ/ρ స్థిరము అయినచో అది ఒక హెలిక్స్.

హెలిక్స్ బిందువులగుండా ఋజురేఖలు నిర్దిష్టదిశకు సమాంతరముగ తీసికొనినచో, అవియన్నియు ఒక స్తూపముమీద ఉండును. ఆ స్తూపము వక్రముయొక్క ఋజుకరణతలముల వేష్టనము. హెలిక్స్ ఈ స్తూపముపై ఉన్న హ్రస్వతమరేఖ. అనగా వక్రముయొక్క ప్రధాన అభిలంబరేఖలు స్తూపముయొక్క లంబరేఖలు అగును. స్తూపముమీద ఇదియే కురుచపథము.

ఒక వక్రమునకు ρ, σ లుస్థిరములు అయినచో అది వర్తులస్తూపముపై ఉండును ; ఆ స్తూపము యొక్క ఉత్పాదకములను ఒక స్థిరకోణములో ఛేదించును.

అంతర్లుంఠి - బహిర్లుంఠి : ఒక వక్రము C' యొక్క స్పర్శరేఖలు అన్నియు మరియొక వక్రము C యొక్క లంబరేఖలు అయినచో C' ను C యొక్క అంతర్లుంఠి అందుము ; లేదా C ని C' యొక్క బహిర్లుంఠి అందుము. ఒక వక్రమునకు అనేకములగు అంతర్లుంఠులు, బహిర్లుంఠులు కలవు. వక్రతాకేంద్రముయొక్క పథము అంతర్లుంఠి అగుటకు సమతలవక్రమై ఉండవలయును. వక్రముయొక్క లంబముల యొక్క వేష్టనమునకు ధ్రువతలము అని పేరు. అంతర్లుంఠులు అన్నియు దీనిపైఉండును. C యొక్క రెండు లంబరేఖలు రెండు అంతర్లుంఠులకు స్పర్శరేఖలు అయినచో, ఆ రెండు రేఖలకు మధ్యకోణము స్థిరకోణము అగును. ఒక సమతల వక్రమునకు ఒకసమతల అంతర్లుంఠి కలదు.

వక్రతలములు : ఒక బిందువు యొక్క సమీప ప్రాంత విమర్శనతో మనము ప్రారంభించెదము. మొదట ఒక వక్రతల సమీకరణము $F(x, y, z) = 0$ అని తీసికొందము. ఇందు లంబాక్ష నిరూపకములను వాడుదము. ఆ తలముపై $P(x_0, y_0, z_0)$ అను ఒక బిందువును తీసికొనినచో $F(x_0, y_0, z_0)$ శూన్యముగ ఉండును. P బిందువుగుండా వెళ్ళు ఒక ఋజురేఖ :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = r \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ను తీసికొనినచో, అది (x_0, y_0, z_0) నుండి r దూరములో తలము $F(x, y, z) = 0$ ను సంధించినచో

$$F(x_0 + lr + y_0 + mn + z_0 + nr) = 0 \text{ అని లభించును.}$$

టేలర్ సిద్ధాంతము ప్రకారము దానిని విస్తరించినచో

$$F(x_0, y_0, z_0) + r\left(l\frac{\partial F}{\partial x_0} + m\frac{\partial F}{\partial y_0} + n\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) +$$

$$r^2\left(l\frac{\partial F}{\partial x_0} + m\frac{\partial F}{\partial y_0} + n\frac{\partial F}{\partial z_0}\right)^2 + \ldots = 0 \ldots (2)$$

$F(x, y, z)$ యొక్క తరగతి (డిగ్రీ) N అయినచో 2వ సమీకరణము తరగతి r లో N అగును. ఒకమూలము

$r = 0$ అని తేలుచున్నది. పలన (x_0, y_0, z_0) బిందువు $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ పైనుండుటవలన,

మరియొక మూలముకూడ శూన్యము అయినచో

$$l \frac{\partial F}{\partial x_0} + m \frac{\partial F}{\partial y_0} + n \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0$$

(1) నుండి l, m, n లను నిరాసనము చేసినచో

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

ఇది ఒక సమతలముయొక్క సమీకరణము. $F(x, y, z) = 0$ వక్రతలమునకు P గుండా వెళ్ళు స్పర్శ రేఖలు అన్నియు ఈ సమతలముపై ఉండును. దీనికి P యందున్న స్పర్శతలము అని పేరు. ఈ సమతలమునకు P గుండా వెళ్ళు లంబరేఖయే $F(x, y, z) = 0$ కు P యందు అభిలంబరేఖ. దీని నిర్దేశక కోటిజీవలయొక్క విలువలు $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ లకు అనుపాతములో ఉండును.

$\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ లు మూడును శూన్యములు అయినచో ఒకవిశేష సంభవము ఏర్పడును. అపుడు P గుండావెళ్ళు ప్రతి ఋజురేఖయు $F(x, y, z) = 0$ వక్రతలమును బిందుద్వయములో ఖండించును. ఈ సంభవము కలుగునపుడు 2వ సమీకరణములోని r^2 గుణకము శూన్యము అగునట్లు l, m, n లు తీసికొందుము. ఈ రేఖలు అన్నియు

$$(x - x_0^2) \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + (y - y_0^2) \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} + (z - z_0^2) \frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2} + 2(y - y_0)(z - z_0) \frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \, \partial z_0} + \cdots\cdots\cdots = 0$$

అను శంకువుమీద ఉండును. ఈపరిస్థితిలో P ఒక సాధారణ బిందువుకాదు; $F(x, y, z) = 0$ వక్రతలమునకు అది ఒక శాంకవబిందువు. P గుండా వెళ్ళు స్పర్శతలములో ఉన్న రెండు ఋజురేఖలు వక్రతలమును 3 ఏకీకృతబిందువులలో ఖండించును.

ఈ రెండు స్పర్శరేఖలకు పరిస్పర్శరేఖలు అని పేరు.

$F(x, y, z) = 0$ సమీకరణమును $z - f(x, y) = 0$ అని వ్యక్తఫలముగా వ్రాయుదురు. కనుక పైసూత్రములలో $F(x, y, z)$ కు బదులు $z - f(x, y)$ అని వ్రాయుదుము. ఇపుడు సూత్రములు సులభములు అగును. అభిలంబరేఖ యొక్క నిర్దేశకకోటిజీవల నిష్పత్తి $p : q : -1$ అగుచున్నది. అటులనే పరిస్పర్శరేఖలు $(rx^2 + 2sxy + ty^2) = 0$ చే గుర్తింపబడుచున్నవి. ఇచట p, q, r, s, t చిహ్నములు క్రమముగా

మూలబిందువువద్ద $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ లను గుర్తించును.

సూచక శాంకవము: ఒక వక్రతలముపై ఒక బిందువు O ను మూలబిందువుగా తీసికొని, అచ్చటి అభిలంబరేఖను z అక్షముగా తీసికొందుము. అపుడు ఆ వక్రతల సమీకరణము $2z = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \ldots\ \ldots\ \ldots$ అగుచున్నది. ఇచట ....అను సంకేతము x, y లలో 3 లేదా అంతకన్న ఎక్కువ తరగతికల పదములను సూచించును.

k ఒక అల్పరాశి అయిన, సమతలము $z = k$ చే వక్రతలమును ఛేదించినచో ఛేదకముయొక్క సమీకరణము $rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2k$ అగును. ఇది ఒక శాంకవము. తీనికి ఆ బిందువువద్ద ఉండు సూచకశాంకవము అని పేరు. దీనిని ఉపయోగించి, O వద్ద ఆవక్రతలము రూపమును కనుగొనవచ్చును.

సూచకశాంకవము దీర్ఘవృత్తముగ, పరావసగ, అతిపరావసగ ఉండవచ్చును. దీనిని అనుసరించి, O బిందువును క్రమముగా దీర్ఘవృత్తబిందువు (చూ. చిత్రము 18) పరావసబిందువు (చూ. చిత్రము 20) అతిపరావసబిందువు (చూ. చిత్రము 19) అని చెప్పుదురు (చూ. పు. 53). ఈ మూడు పరిస్థితులలోను O సమీపమున ఆ వక్రతలము యొక్క రూపము ఆ యా చిత్రములలో చూడవచ్చును. సూచక శాంకవము యొక్క ముఖ్యాక్షముల దిశలే O వద్ద ముఖ్య దిశలు అనెదము. సూచకశాంకవము వృత్తము అయినచో O బిందువును నాభి అని అందురు.

త్రిపరిమాణిక వక్రములు: ఒక వక్రమును తీసికొనుము. దానిపై P ఒక బిందువు, దాని స్పర్శరేఖ PQ. మరియొక దగ్గరి బిందువు R అయితే, PQR సమతలమునకు అవధిలో పరిస్పర్శతలము అని పేరు. పరిస్పర్శతలములో వక్రమునకు లంబరేఖకు ప్రధాన అభిలంబరేఖ అని, పరిస్పర్శతలమునకు P వద్ద లంబరేఖకు రెండవ అభిలంబరేఖ అని పేరు.

ఒక తలముపై వక్రముయొక్క ప్రధానఅభిలంబరేఖ ప్రతి బిందువువద్దను తలముయొక్క అభిలంబరేఖతో ఏకీభవించినచో, అట్టి వక్రమునకు హ్రస్వతమరేఖ (జియో

డెసిక్) అని పేరు. ప్రతిబిందువువద్దను రెండవ అభిలంబ రేఖ తలముయొక్క అభిలంబరేఖతో ఏకీభవించినచో, ఆవక్రము అసంపాతీయరేఖ అనబడును. ఒక వక్రతలమున ఉండు వక్రమునకు ప్రతిబిందువునందును స్పర్శరేఖయొక్క దిశ తలముయొక్క ఒక ముఖ్యదిశవైపున ఉన్నచో అట్టి వక్రమును వక్రతారేఖ అందుము.

తలముపై ప్రక్కప్రక్కల ఉన్నబిందువులు P, Q నందు గీయబడిన అభిలంబరేఖలు ఖండించుకొనుటకు P, Q వక్రతారేఖపై ఉండవలెను. ఇది వక్రతారేఖయొక్క విశిష్టలక్షణము. భ్రమణతలముపై ఉండు వక్రతారేఖలు ఆతలమునకు యామ్యోత్తరరేఖలుగనో, వృత్తములుగనో ఉండును.

వక్రతారేఖలకు క్రిందచెప్పబడిన మరికొన్ని ధర్మములు కలవు :

రెండుతలములు ఖండించుకొనుచోట గోచరించు ఖండన రేఖ ఆరెండుతలములకును వక్రతారేఖగా ఆచరించుచో, ఆరెండుతలములును అన్నిస్థలములందును ఒకే కోణములో ఖండించుకొనును. మూడుభిన్నతలసమూహములు పరస్పరము లంబకోణీయములందు ఖండించుకొనినచో అందు ఒక తలమునఉన్న వక్రతారేఖలు, తక్కినరెండు సమూహములలో ఉన్న తలములు దానిని ఖండించురేఖలే అగును. ఇట్టి పరస్పరలంబకోణీయసమూహములకు ప్రసిద్ధ దృష్టాంతము సనాభి రెండవతరగతి తలములు.

తలముల అంతరీకరణజ్యామితి అనుశీలనకు x, y, z నిరూపకములకంటె వక్రరేఖీయనిరూపకములు u, v లు అత్యుపయుక్తములు. ఈరెండు నిరూపకములకు కల సంబంధమును క్రింది సమీకరణములచే వ్యక్తపరచవచ్చును.

$x = x\,(u, v)\,;\ y = y\,(u, v)\,;\ z = z\,(u, v)\,;$

$u = u\,(x, y, z)\,;\ v = v\,(x, y, z).$

ఇట్లు $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ అను సమీకరణముచే తెలుపబడు గోళమునకు u అక్షాంశ, v రేఖాంశముల రెండింటిని క్రింద చూపిన సంబంధములను ఉపయోగించి, నిరూపకాక్షములుగా గ్రహింపవచ్చును.

$x = \cos u \cos v\,;\ y = \cos u \sin v,\ z = \sin u$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}};\ v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

తలముల అంతరీకరణజ్యామితి అనుశీలన క్రిందచూపిన రెండు వర్గాత్మక విభేదకరూపముల ధర్మములపై ఆధారపడి ఉండునట్లు నేడు కొనసాగించబడినది.

$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$

$Ldu^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$

ఇందులో 1 వ రూపము (u, v), $(u + du, v + dv)$ ఆ రెండు ఆసన్నబిందువుల మధ్యఉన్న దూరముయొక్క వర్గమును, రెండవది (u, v) బిందువువద్ద ఉన్న స్పర్శతలమునుండి $(u + du, v + dv)$ అను బిందువుయొక్క లంబదూరమును తెల్పును.

లంబఛేదకవక్రత : ఒక వక్రతలమును దాని ఒక అభిలంబరేఖద్వారా వెళ్ళు సమతలము ఖండించు వక్రరేఖను లంబఛేదనరేఖ అందుము. du, dv దిశలుగా కలిగిన (u, v) అను ఏబిందువువద్దనైన గీయబడిన లంబ ఛేదకరేఖ యొక్క వక్రత K అని తీసికొనుము. అప్పుడు

$$\frac{1}{K} = \frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{Ldu^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2} \text{ అగును.}$$

K యొక్క గరిష్ఠ, కనిష్ఠ మూల్యములు

$$(KE - L)\,(KG - N) = (KF - M)^2$$

అనువర్గసమీకరణముయొక్క మూలములు. ఈ మూల్యములకు వక్రతా ప్రధానార్ధవ్యాసములు అని పేరు. వీటిని K_1, K_2 లచే తెలియజేసినచో

$$K_1 + K_2 = \frac{EN + GL - 2\,FM}{EG - F^2} = H$$

$$K_1\,K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

ఇప్పుడు H తలముయొక్క ప్రథమవక్రత, లేదా, మధ్యమ వక్రత అనబడును. K ద్వితీయవక్రత, లేదా, గాస్ వక్రత అనబడును. గాస్‌వక్రత K ను E, F, G అను పదములచే, వాటి వ్యుత్పన్నములచే తెలియజేయవచ్చును అనునది ఈ విషయమునకు చెందిన గణనీయపర్యవసానము.

సి. ఎన్. శ్రీ.

అంతరీకరణ సమీకరణములు : కొన్ని చలరాశుల ఫలమును, ఆ ఫలముయొక్క వ్యుత్పన్నములను కలిగియుండు సమీకరణములను 'అంతరీకరణ సమీకరణము' అందురు. వీటికి కొన్ని ఉదాహరణములు :

$$\frac{dy}{dt} = -\,ky \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0 \ \ldots \quad (2)$$

వీనియందు 't' లేదా 'x' స్వతంత్రచలరాశి ; y దాని ఫలము.

అంతరీకరణ సమీకరణములను ప్రథమమున(i) సాధారణ అంతరీకరణ సమీకరణము (ఆర్డినరీ డిఫరెన్సియల్ ఈక్వేషన్) అనియు (ii) ఆంశిక అంతరీకరణ

సమీకరణము (పార్షియల్ డిఫరెన్షియల్ ఈక్వేషన్) లనియు విభజింపవచ్చును. సమీకరణసాధనము కనిపెట్టవలెననిన, అది ఏకైకచలరాశిపై ఆధారపడియున్నపుడు దాని వ్యుత్పన్నములన్నియు సాధారణ వ్యుత్పన్నములగుటచే, అది 'సాధారణ అంతరీకరణ సమీకరణ' మగును. అట్లుగాక ఫలము అనేక స్వతంత్రచలరాశులపై ఆధారపడియున్నపుడు దాని వ్యుత్పన్నములు ఆంశికములగుటచే, అది ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణమగును.

ప్రకృతినియమముల సూత్రీకరించు రీతులకు కొన్ని ఉదాహరణములు : ప్రకృతినియమముల వ్యక్తపరచుటకు అంతరీకరణ సమీకరణములు ఏవిధమున ఉపయోగపడుచున్నవో కొంతవరకు తెలిసికొనుటకు కొన్ని ఉదాహరణములు:

(1) రేడియోధార్మిక ద్రవ్యముయొక్క ఒకరాశి అనవరతముగ క్షీణించుచుండు ననియు, ప్రతిక్షణమందు అది క్షీణించు రేటు ఆక్షణమందు శేషించియున్న ద్రవ్యరాశి పరిమాణముపై ఆధారపడియుండుననియు ప్రయోగముచూపినది. ఆ రేడియోధార్మిక ద్రవ్యరాశిని y అనియు, కాలమును t అనియు గుర్తించినచో, ఆ ద్రవ్యరాశి క్షీణించు రేటు $-\frac{dy}{dt}$ అగును. ఈ ప్రయోగ దత్తనియమము ననుసరించి, ఈ క్షీణించు రేటు y కి అనుపాతములో ఉండును. అనగా $-\frac{dy}{dt} \propto y$ ఈ సంబంధమును $-\frac{dy}{dt} = ky$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట k ఒక స్థిరరాశి.

(2) అంతరీకరణ కలనమందు $y = f(x)$ అను ఒక వక్రముయొక్క వక్రత (κ) ను ఈ క్రింది సూత్రము తెలియపరచును :

$$\kappa = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2y}{dx^2}$$

ఒక వక్రముయొక్క వక్రత κ స్థిరరాశి అయితే $\frac{d\kappa}{dx} = 0$. ఇదియే పైన పేర్కొనిన 2వ అంతరీకరణ సమీకరణము. వృత్తములన్నిటికి తృప్తిచేయు సమీకరణము ఇది.

అంతరీకరణ సమీకరణముల సాధనములు: ఒక సాధారణ అంతరీకరణ సమీకరణమునందు ఫలము, స్వతంత్ర చలరాశి రెండును వరుసగా y, x లచే గుర్తింపబడును. అటువంటి సమీకరణము x యొక్క ఫలము y అని అవ్యక్తముగా సూచించును. దీనినుండి y ని వ్యక్తముగా కనిపెట్టుటయే ఆ అంతరీకరణ సమీకరణసాధన. దీనినే చయనీకరణమనికూడ అందురు.

అంతరీకరణ సమీకరణములను సాధించు పద్ధతులు దిగువ నీయబడినవి :

మొదట $\frac{dy}{dx} = f(x)$ అను సమీకరణమును తీసికొనెదము. దీనియందు $f(x)$ అనునది దత్తఫలము. ఈసమీకరణసాధనము :

$$y = \int f(x)\, dx + c$$

పైన గుర్తించబడిన చయనీకరణము $f(x)$ యొక్క ఏదేని ఒక అనిశ్చయచయనము. ఇట్టి అనిశ్చయచయనమును కనిపెట్టుట చయనకలనమందు విశదపరచియున్నాము. సాధారణముగా అప్పుడప్పుడు అవసరమగు ఫలముల చయనములకు పట్టికలున్నవి.

పై సమీకరణమందలి చివరిపదము c చయనీకరణ స్థిరాంకమగుటచే, దానికి ఏవిలువనైన ఈయవచ్చును. ఈ స్థిరరాశియొక్క ప్రతివిలువకు ఈ సమీకరణ సాధనము (x, y) తలములో ఒక వక్రమును నిర్వచించును. కనుక ఆ సమీకరణము ఒక వక్రసమూహమును సూచించును. అటునుంచిటు ఒక వక్రసమూహము $f(x, y, c) = 0$ అను సమీకరణమును సూచించును. ఈ వక్రములన్నియు ఒక అంతరీకరణ సమీకరణము యొక్క సాధనములగును. ఉదా: ఏకకేంద్రములు గల వృత్తములు $x^2 + y^2 = c$ అను సమీకరణమువలన ఈయబడుచున్నవి. ఇవన్నియు $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ అంతరీకరణము యొక్క సాధనములు. ఈ వృత్తసమూహములో ఏదేని ఒక ప్రత్యేక వృత్తమును సూచించవలెనన్న మరికొన్ని నిబంధనలు కావలసియున్నవి. ఉదా: $(1, 2)$ బిందువుద్వారా వెళ్లు వృత్తము కావలెననిన $c = 5$ అని నిర్ణీతమగును.

మొదటితరగతి సమీకరణములో ఎట్లు ఒక ఇష్టస్థిరరాశి యున్నదో అటులనే n వ తరగతి సమీకరణసాధనలో n ఇష్టస్థిరరాశులుండును. ఈ స్థిరరాశులన్నిటికి ఏదేని విలువ నిచ్చినచో, వక్రసమూహములోని ఒక వక్రము దొరకును. ఇట్లు ఒక వక్రమును నిర్ణయించుటకు n నిబంధనలు కావలెను.

కొన్నిసమయములందు ఇష్టస్థిరరాశులకు ప్రత్యేక విలువల నిచ్చుటవలన దొరకని సాధనములుండవచ్చును. వానిని అసాధారణసాధనము (సింగ్యులర్ సొల్యూషన్)లనెదము.

మొదటితరగతి అంతరీకరణ సమీకరణములలో కొన్ని జాతులను పరిశీలించెదము :

వేరుచేయదగిన చలరాశులుగల సమీకరణములు (ఈక్వేషన్స్ విత్ వేరియబుల్స్ సెపరబుల్): క్రింది మొదటి తరగతి అంతరీకరణ సమీకరణమును పరిశీలించెదము.

$$N(x, y)\frac{dy}{dx} = M(x,y) \qquad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

దీని యందలి N, Mలు వ్యక్తఫలములు. పై సమీకరణము నే

$$M(x, y)\,dx - N(x, y)\,dy = 0 \qquad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

అనియు వ్రాయవచ్చును. కొన్నిసమయములందు ఇది

$$M(x)\,dx + N(y)dy = 0 \qquad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

అను రూపమును స్వీకరించును.

ఇచ్చట ముఖ్యముగా మనముగుర్తించవలసిన విషయ మేమన, సమీకరణము (5) నందు dx గుణకమగు M నందు y పదముండదు. అట్లే dy గుణకమగు N అందు x పదముండదు. (4), (5) లకు మధ్యగల ముఖ్య భేద మిదియే. సమీకరణము (5) నందు చలరాశులు వేరు చేయబడినవని యందురు. ఇటువంటి సమీకరణముల సాధనము చయనీకరణము వలన లభ్యమగును. అనగా దీని సాధనము :

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C \qquad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

ఇచ్చట C ఇష్టస్థిరరాశి.

ఉదా : $dy = k\,y\,dt$

ఇది పైనఈయబడిన (1)వ అంతరీకరణ సమీకరణముగా గుర్తింపుము. దీనిని గుణకము $1/y$ చే గుణించినచో, చలరాశి విడదీయబడును. అట్లు చేయగా

$$\frac{1}{y}\,dy = kdt \text{ లభించును.}$$

దీనియందు చలరాశి వేరుచేయబడినది. దీనిని చయనీకరణముచేయ దత్తసమీకరణ సాధనము

$$\log y - kt = c \quad \therefore \quad y = e^{c+kt} \text{ లభించును.}$$

సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణములు (ఎగ్జాక్ట్ ఈక్వేషన్స్): ఒక ఫలము $f(x, y)$ యొక్క సమగ్రఅంతరీకరణము (పర్ఫెక్ట్ డిఫరెన్షియల్) df అనగా $\frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ అను సమాసము.

దృష్టాంతములు :

$$x^2\,dy + 2\,xy\,dx = d\,(x^2y)$$

$$3\,x^2\,dx + 3\,y^2\,dy = d\,(x^3 + y^3)$$

$$\frac{2\,xy\;dy - y^2\,d\,x}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{x}\right) \qquad \cdots \quad \cdots (7)$$

సమగ్ర అంతరీకరణమును శూన్యమునకు సమానమని వ్రాసినచో అది సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణ మగును. ఆ విధమున క్రింద నీయబడినవి సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణములగును :

$$xdy + ydx = 0$$

$$2\,xdx + 2\,ydy = 0$$

$Mdx + Ndy = 0$ అనునది సమగ్రఅంతరీకరణ సమీకరణమైనచో $F(x, y)$ అను ఏదో ఒక ఫలమునకు

$$M = \frac{\partial F}{\partial x};\; N = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \cdots \cdots \; (8) \text{ గ నుండవలెను.}$$

అనగా $Mdx + Ndy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF$

అందుచేత (8) నుండి

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

అని గ్రహింపవచ్చును. అనగా

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \cdots \cdots (9)$$

అగును. అందుచేత $Mdx + Ndy = 0$ అనునది సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణమైన, (9)వ సంబంధము రుజువగును. విలోమముగ (9) వ సంబంధము రుజువైనపుడు, $Mdx + Ndy = 0$ సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణమగును. క్రింది ఉదాహరణముల నుండి సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణములను సాధించు విధానములను తెలిసికొనవచ్చును :

ఉదా : $(2\,xy + y^2 + 1)\,dx + (x^2 + 2\,xy)\,dy = 0$

దీనియందు $M = 2\,xy + y^2 + 1$; $N = x^2 + 2\,xy$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\,x + 2\,y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

అందుచేత దత్తసమీకరణము సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణమని రుజువగుచున్నది. (8) యొక్క మొదటి అంగమునుండి $\frac{\partial F}{\partial x} = 2\,xy + y^2 + 1$

x అపేక్షయా (y-ని స్థిరముగా భావించి) చయనీకరణము చేసిన

$$F(x, y) = x^2\,y + x\,y^2 + x + c$$

వచ్చును. ఇచ్చట ఆంశికచయనీకరణమగుటచే c కి బదులు $f(y)$ అని తీసికొనవచ్చును.

$F(x, y)$ యొక్క ఈవిలువను (8) నందలి రెండవ అంగమునందు ప్రయోగించిన

$x^2 + 2\,xy + f'(y) = x^2 + 2\,xy$ అని వచ్చును. అందుచేత $f'(y) = 0$; $f(y) = c$ స్థిరము. అందుచేత దత్త అంతరీకరణసమీకరణ సాధనము :

$$x^2y + xy^2 + x + c = 0$$

అగును. ఇదియే x, y చలరాశులకు గల సంబంధము.

చయనీకరణ గుణకములు: కొన్ని అంతరీకరణ సమీకరణములు ఉన్న రూపములు సమగ్రములైనవి కానప్పటికిని, ఉచిత సమాసములచే వాటిని గుణించినచో; అవి సమగ్రములగును. ఉదా:

$$\left(2y+\frac{1}{xy}\right)dx+\left(x-\frac{1}{y^2}\right)dy=0 \;\ldots\;\ldots\quad(10)$$

సమగ్రమైనది కాదు. కాని దానిని x చే గుణించినచో, అది సమగ్ర సమీకరణమగును. అంతరీకరణ సమీకరణములను సమగ్రములుగా మార్చగల పై దృష్టాంతమందలి x మాదిరి గుణిజములను 'చయనీకరణ గుణకములు' అనెదరు. 10వ సమీకరణమునకు $\frac{y}{xy^2+1}$, $x^2\left(xy+\frac{1}{y}\right)$ అనునవి ఇతర చయనీకరణ గుణకములు. ఒక అంతరీకరణ సమీకరణమునకు అనంత చయనీకరణగుణకము లుండును.

మొదటి తరగతి అంతరీకరణ సమీకరణములు: ఇవి క్రింద వ్రాసిన రూపములో ఉండును:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \qquad \ldots\;\ldots(11)$$

P, Q లు స్థిరరాశులు గాని, లేదా x యొక్క ఫలములైగాని యుండవచ్చును. కాని వికల్పరూపములో వ్రాసిన

$$[yP(x)-Q(x)]dx+dy=0$$

లభించును. ఇది సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణము కాదనియు, దీనిని $e^{\int P(x)\,dx}$ అను చయనీకరణ గుణకముచే గుణించిన సమగ్రమగుననియు గమనించవలెను. దీని సాధనమును క్రింది విధమున కనుగొనవచ్చును:

$$ye^{\int P(x)\,dx}-\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx=C\ldots(12)$$

ఉదాహరణమునకు క్రింది అంతరీకరణ సమీకరణమును పరిశీలించుదము:

$$\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=\frac{5}{x}$$

దీనికి చయనీకరణ గుణకము $e^{x+\log x}=xe^x$

దీనితో ఇరుప్రక్కలు గుణకారముచేసినచో లభించునది $\frac{d}{dx}(yxe^x)=5e^x$. దీని సాధనము $yxe^x=5e^x+c$ అనగా $y=5/x+ce^{-x}/x$ అగును.

ఈ క్రింది అంతరీకరణ సమీకరణము కూడ పై జాతికి చెందినదియే;

$$\frac{dy}{dx}+2y\tan x=2x\cos^2 x$$

ఇచ్చట చయనీకరణ గుణకము $\sec^2 x$.

దీని సాధనము: $y\sec^2 x-x^2=c$ లేదా

$y=x^2\cos^2 x+c\cos^2 x$ అగును,

చలరాశిని మార్చుట: అంతరీకరణ సమీకరణముల సాధనమునకు అనుకూల పద్ధతులలో ఇది ఒకటి. దత్త చలరాశులు x, y లకు బదులు వేరు నూతన చలరాశులను తీసికొని దత్తసమీకరణమును, నూతన చలరాశులతో వ్రాయవలయును. ఈ నూతన సమీకరణమును సాధించుటకు అవకాశములు లభించవచ్చును. కొన్ని సందర్భములందు సమీకరణములందే క్రొత్త చలరాశులను ఎట్లు తీసికొనవలయునో ప్రత్యక్షముగా గోచరించును. ఉదా 1:

$$(x+3y+2)\,dx+(2x+6y+3)\,dy=0\;\ldots(13)$$

ఈ సమీకరణమందు $(x+3y)$ అను సమ్మేళనము ప్రధానముగా గోచరించు చున్నది. మనము $u=x+3y$ అని, అనగా $x=u-3y$ అని భావించినచో $dx=du-3dy$ అగును. x, dx ల విలువలను దత్తసమీకరణమునందు ప్రవేశ పెట్టిన, అది $(u+2)(du-3dy)+(2u+3)dy=0$ అగును. ఇది వేరుచేయగల చలరాశులుగల సమీకరణము. ముందు వివరించిన విధమున దీనిని చయనీకరణముచేసిన $u-\log(u+3)=y+c$ అను సంబంధము లభ్యమగును. దీనియందు $u=x+3y$ అని ప్రతిక్షేపించగా,

$$x+3y-\log(x+3y+3)=y+c$$

అని లభ్యమగును. ఇదియే దత్త సమీకరణమునకు సాధనము.

ఉదా. 2:

$2x^2y\,dx+(xy^2+x^3)\,dy=0$ దీనియందు అన్ని పదములును x, y లందు ఒకే తరగతి గలిగియున్నవి. దీనిని x^{-3} చే గుణించగా ఈ క్రింది రూపము వచ్చును.

$$2\left(\frac{y}{x}\right)dx+\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]dy=0$$

ఇప్పుడు $u=y/x$ అనగా $y=ux$ అను మార్పు సూచించి యున్నది. ఈ మార్పు చేసినచో $dy=xdu+udx$ అగును.

y, dy ల ఈ విలువలను పై సమీకరణములో ఉపయోగించినచో, $2u\,dx+(u^2+1)(x\,du+u\,dx)=0$ అని దొరకును. దీనికి సాధనము $\log y+\log(u^2+3u)=0$ అగును. దీనియందు u యొక్క విలువను వ్రాయగా దత్తసమీకరణ సాధనము

$\log x+\log(y^3/x^3+3y/x)=c$ అగును.

ఇంతవరకు చర్చించబడిన రీతి చయనీకరణమును ఇచ్చు ప్రమాణ అంతరీకరణ సమీకరణ రూపము క్రింది విధమున ఉండును :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^k \quad \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

దీనియందలి గుణకములగు P, Q లు, x చలరాశిని మాత్రము కల ఫలములు. $k = 0$ అయిన పై సమీకరణము మొదటి తరగతి అంతరీకరణ సమీకరణమగును. ఈ అభియోగములందు చయనీకరణ విధానము చర్చించియున్నాము. మిగిలిన అభియోగములందు అనగా $k \neq 0$, $k \neq 1$ అయిన $u = y^{1-k}$ అను చలరాశి మార్పువలన దత్తసమీకరణమును మొదటి తరగతి రూపములోనికి మార్చవచ్చును.

స్థిర గుణకములుగల n-వ తరగతి అంతరీకరణ సమీకరణములు : ఇట్టి సమీకరణముల రూపము :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \cdots (15)$$

దీనినే $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$ అని వ్రాసెదము. దీనియందలి $a_1 \ldots a_n$ గుణకములు స్థిరములు; $f(x)$ అనునది ఒక దత్తఫలము. మొదట $f(x) = 0$ అని తీసికొనెదము. $n = 1$ అయిన పై సమీకరణము ఈ క్రింది రూపమును పొందును :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_1}{a_0} y = 0 ; \text{ దీని సాధనము } y = ce^{-a_1 x/a_0}.$$

ఈ సాధనము e^{rx} అనురూపము కలది. ఇచ్చట $r = -a_1/a_0$ అను స్థిరరాశి.

కనుక (15)వ సమీకరణమునకును $y = ce^{rx}$ రూపముగల సాధనమున్నదా అని పరిశీలించెదము. ఇచ్చట r ఒక స్థిరరాశియని తీసికొనెదము. $y = e^{rx}$ అయితే, $Dy = cre^{rx}$ $D^2 y = cr^2 e^{rx}$, …… $D^n y = cr^n e^{rx}$ అగును.

ఈవిలువలను (15) వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా $ce^{-rx}\left[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots\ldots a_n\right] = 0$ అని లభించును. ఇది, [ ] కుండలములోనుండు భాగము శూన్యమయినపుడు, అనగా r అనునది :

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} \ldots . + a_n = 0 \ldots \ldots (16)$$

అను సమీకరణ మూలమైయుండునపుడు సత్యమగును. ఈ (16) వ సమీకరణమును పరిశీలించినచో, అది (15) వ దానియందలి y యొక్క (k) వ వ్యుత్పన్నమును r^k చేత ప్రతిక్షేపించగా ఏర్పడినదని తెలియగలదు. ఈ (16) వ సమీకరణమును (15) వ దాని సహాయక సమీకరణమందురు.

ఈ సహాయకసమీకరణమునకు $r_1, r_2 \ldots r^n$ అను n వేర్వేరు మూలములున్నఎడల, (15) వ దానికి

$y_1 = c_1 e^{r_1 x}$, $y_2 = c_2 e^{r_2 x}$, …… …… $y^n = c_n e^{r_n x}$ అను u సాధనములుండును. అంతేగాక ఈ సాధనముల సంకలనము అనగా $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots . + c_n e^{r_n x} \ldots\ldots (17)$ అనునది (15) వ సమీకరణమునకు $f(x) = 0$ అగునపుడు వ్యాపక సాధనమగును.

ఉదా : $(D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D)\, y = 0$

పై సమీకరణ సహాయక సమీకరణము :

$r^4 - r^3 - 4r^2 + 4r = 0$ అగును.

దీని మూలములు 1, 2, −2, 0 అందుచేత దత్తసమీకరణ సాధనము :

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4$ అగును.

ఇచ్చట $c_4 e^{0x}$ కు బదులు c_4 అని వ్రాసియున్నాము. $e^0 = 1$ కదా!

మరియొక సమీకరణము : (15) వ సమీకరణమునందు కుడివైపున $f(x)$ అను ఫలమొకటి ఉన్నది. ఇంతవరకు $f(x) = 0$ అను సరళసమీకరణములను మాత్రము గమనించితిమి. ఇపుడు $f(x)$ శూన్యముకాని సమీకరణములను తీసికొనెదము. అనగా

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots . a_{n-1} D + a_n) y = f(x) \ldots . (18)$$

దీని సాధనమగు y రెండు భాగముల సంకలనముగా నుండును. అనగా $y = y_1 + y_2$. దీనియందు y_1 అనునది $f(x)$కు బదులు శూన్యము వ్రాసి పై విధానముచే కనిపెట్టిన సాధనమే యగును. కనుక y_1 భాగములో $c_1, c_2 \ldots\ldots c_n$ అను n స్థిరరాశు లుండును. రెండవ భాగము y_2, పై సమీకరణము (18) యొక్క (అనగా కుడివైపున $f(x)$ ను ఉంచుకొనిన సమీకరణముయొక్క) సాధనము ఏ సాధనమైనను ఉండవచ్చును.

ఉదా : $(D^2 + 4)\, y = 2x \quad \ldots \quad \ldots \quad (19)$

ఇచ్చట $f(x) = 2x$. దీనికి బదులు శూన్యమును తీసికొనిన కలుగు సమీకరణము $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$. దీని వ్యాపక సాధనము $y_1 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ సమీకరణము (19)కు వ్యాపకసాధనము దొరకుటకు y_1తో, (19)ను తృప్తి చేయు ఏదో ఒక సాధనమును కలుపవలయును. $y_2 = \frac{x}{2}$ అనునది అటువంటి ఒక సాధనము. కనుక (19) సమీకరణమునకు వ్యాపక సాధనము :

$$y = y_1 + y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x/2 \ldots . (20)$$

ఇచ్చట c_1, c_2లు ఏ స్థిర సంఖ్యలుగనైన ఉండవచ్చును. (19)వ సమీకరణమునకు మరియొక సాధనము $\frac{x}{2} + \cos 2x$. దీనిని తీసికొనినచో మనకు దొరకు వ్యాపకసాధనము : $y_1 + y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{2} + \cos 2x =$

$$(c_1 + 1) \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{2} \quad \ldots \quad (21)$$

సాధనములు (21), (20) వేరుకాదు. ఏలన c అనిర్ణీత స్థిర సంఖ్య అయినచో $(c_1 + 1)$ కూడ ఒక అనిర్ణీత స్థిర సంఖ్యయే.

సమాన మూలములు గల సహాయక సమీకరణము : 16వ సమీకరణ మూలములలో రెండుగాని అంతకన్న హెచ్చుగాని మూలములు సమానమైన, అది (15)వ సమీకరణము యొక్క వ్యాపక సాధనము కానేరదు. (17) నందు, $r_1 = r_2$ అనుకొందము. అప్పుడు దాని కుడిచేతి వైపు నందలి మొదటి రెండు పదములను

$c_1 \; e^{r_1 x} + c_2 \; e^{r_2 x} = (c_1 + c_2) \; e^{r_1 x} = ce^{r_1 x}$ అని వ్రాయవచ్చును. కనుక ఇచ్చట రెండు ఇష్టస్థిర రాశులకు బదులు ఒకే స్థిరరాశిని కలిగియుండును. ఈ పరిస్థితియందు, $e^{r_1 x}$ ను $xe^{r_1 x}$ ను దత్తసమీకరణము యొక్క ప్రత్యేక సాధనలని నిరూపించవచ్చును. కనుక $c_1 \; e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$కు బదులు $(c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$ అను రెండు స్థిరరాశులు గల సాధనమును తీసికొనవచ్చును.

అటులనే $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots . r_k$ అయితే వ్యాపక సాధనమునందు

$$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + c_3 x^2 e^{rx} \ldots . c_k x^{k-1} e^{rx} \quad \text{లేదా}$$

$$e^{rx} \; (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots . c_k x^{k-1}) \quad \ldots \quad (22)$$

తీసికొనవచ్చును. ఇతర మూలములగు $r_{k+1}, r_{k+2} \ldots$.లకు అనురూపముగ పదములు $c_{k+1} \; e^{r_{k+1} x}$ వ్యాపక సాధనమునందుండును. అయిన (17)వ సమీకరణమునందు వ్రాయబడిన $c_1 e^{r_1 x}$, $c_2 e^{r_2 x} \ldots . c_k e^{r_k x}$ అను పదములను వరుసగా $1, \; x, \; x^2 \ldots \ldots . x^{k-1}$ లచే గుణించి వీటిని ఉపయోగించవలెను.

ఉదా. 1 : $(D^3 - 3 D^2 + 3 D - 1) \; y = 0 \quad \ldots (23)$ అనునది దత్త అంతరీకరణ సమీకరణము. దీని సహాయక సమీకరణము $r^3 - 3 r^2 + 3 r - 1 = 0$. దీని మూలములు 1, 1, 1, అందుచేత (23)వ సమీకరణ సాధారణ సాధనము. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \ldots \ldots . (24)$ అగును.

ఉదా. 2 : $D^3 y - D^2 y = 0 \quad \ldots \quad \ldots (25)$

దీని సహాయక సమీకరణము $r^3 - r^2 = 0$ అగును. దీని మూలములు 1, 0, 0. మూలము 1కి సంబంధించిన సాధన భాగము $c_1 e^x$; మూలములు 0, 0 లకు సంబంధించిన సాధన భాగము $c_2 e^{0x} + c_3 x e^{0x}$ లేదా $c_2 + c_3 x$ అందుచేత (25)వ సమీకరణ సాధారణ సాధనము :

$$y = c_1 e^x + c_2 + c_3 x \quad \ldots (26) \text{ అగును.}$$

సంకీర్ణ మూలములు గల సహాయక సమీకరణము : సహాయక సమీకరణ గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలై, $r = a + ib$ అనునది దానికి ఒక మూలమైన, దానికి $a - ib$ అను వేరొక మూలము తప్పక ఉండును. ఈ రెండు మూలములకు సంబంధించిన సాధన భాగము.

$$Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = e^{ax}[Ae^{ibx} + Be^{-ibx}] \quad \ldots \quad (27)$$

దీనియందు $e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx \text{ అను}$$

విలువలను ఉపయోగించినచో

$$e^{ax}[(A + B) \cos bx + (A - B) \, i \sin bx] \quad \ldots . \quad (28)$$

అగును. ఇప్పుడు (28)వ సమీకరణమునందు $A + B = C_1$ అని $(A - B)i = C_2$ అని వ్రాసిన $e^{ax} \; (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \ldots \ldots (29)$ అనునది సహాయక సమీకరణములో $(a \pm ib)$ అను జత సంకీర్ణ మూలములకు సంబంధించిన సాధారణభాగము.

ఉదా : $(D^3 + D^2 + D) \; y = 0$ సాధనము. ఈ అభియోగమునందు సహాయక సమీకరణము $r^3 + r^2 + r = 0$ అగును. దీని మూలములు $0, \; -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$. 0 మూలమునకు సంబంధించిన సాధన భాగము c_1 అగును.

$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ మూలములకు సంబంధించిన

$$\text{సాధనభాగము } e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

అందుచేత దత్తసమీకరణ సాధారణ సాధనము:

$$y = c_1 + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3} x}{2} + c_3 \sin \frac{\sqrt{3} x}{2} \right)$$

సామాన్య అంతరీకరణ సమీకరణములు: (18) సమీకరణమందు గుణకములగు $a_0, \; a_1, \ldots . a_n$ ను స్థిర రాశులని తీసికొంటిమి. అట్లుకాక అవి అన్నియు x యొక్క ఫలములుగనే ఉండవచ్చును. ఇపుడును సమీకరణ సాధనము $y = y_1 + y_2$ అను రూపములో వ్రాయవచ్చును. మునుపటివలె y_1 అనునది, (18)లో కుడివైపున ఉన్న $f(x)$కు బదులు శూన్యము వ్రాసిన సమీకరణము. y_1 లో, మునుపటివలె n అనిర్ణీత స్థిరసంఖ్యలుండును. అయితే y_1 కనిపెట్టుటకు వేరు విధానము ఉపయోగింప

వలెను. y_2 అనునది, మునుపటివలె (18) సమీకరణమునకు (అనగా $f(x)$ను తిరస్కరించని) సమీకరణమునకు ఒక ప్రత్యేక సాధనము.

$$\text{ఉదా : } x^2 \frac{d y^2}{d x^2} + 2x\frac{d y}{d x} - 6 y = 2 - x \quad \ldots \quad (30)$$

ఇచ్చట కుడివైపునఉన్న $(2-x)$కు బదులు శూన్యము తీసికొనినచో, లభించు అంతరీకరణ సమీకరణమునకు వ్యాపక సాధనము $y_1 = c_1 \ x^2 + c_2/x^3$ అని చూపించవచ్చును. కుడివైపున ఉన్న $(2-x)$ శూన్యము చేయని (30) సమీకరణమునకు $y_2 = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{3}$ అని సరిచూపవచ్చును, కనుక (30) కు సాధనము :

$$y = y_1 + y_2 = c_1 x^2 + c_2/x^3 + \frac{x}{4} - \frac{1}{3}.$$

ఇచ్చట c_1, c_2 అనిర్ణీతరాశులకు ఏ విలువైనను ఇవ్వవచ్చును. ఇవి నిర్ణీతమగుటకు మరికొన్ని నిబంధనలు కావలెను. ఉదాహరణమునకు $x = 1$ అగునపుడు $y = -1/12, \ \dfrac{d y}{d x} = 5\frac{1}{4}$ అని ఇచ్చినచో $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ అని నిర్ణయమగును.

అనంత పరంపరలద్వారా సాధనము : కొన్ని అంతరీకరణ సమీకరణములకు సాధనములు తెలిసిన ఫలముల ద్వారా పరిమిత సమాసములు దొరకవు. అట్టి పరిస్థితులలో ఏదో ఒక అనంత పరంపర రూపమున సమీకరణమును సాధించవచ్చును. ఉదాహరణమునకు nవ జాతి బెసల్ అంతరీకరణ సమీకరణము :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad \ldots \quad (31)$$

$n = 0$ అగునపుడు దీనికి ఒక సాధనము :

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} + \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \ldots\ldots$$

దీనికి $J_0(x)$ అని పేరు. ఇదియు, $J_n(x)$ అను (31) యొక్క సాధనము వినియుక్త గణితములో అతి ముఖ్యమైనవి.

ఎక్కువజాతి అంతరీకరణ సమీకరణములు: ఇంతవరకు మనము పరిశీలించిన సమీకరణములందు y ను దాని వ్యుత్పన్నములగు Dy, D^2y, ... మొదటి తరగతిలోనే వచ్చినవి.

అనగా సమీకరణములో $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$, లేదా $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ ...అను సమాసములు రాలేదు. కనుకనే ఇవి మొదటిజాతి సమీకరణములు. ఎక్కువజాతి సమీకరణములున్నవిగాని వాటి సాధనము చాలా కష్టమైనది. వాటిని గురించి ప్రౌఢ గ్రంథములను చూడవలెను.

ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణములు : ఇట్టి సమీకరణములలో రెండు లేదా ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులు $x, y, z, \ldots\ldots$ ఉండును. $u(x, y, z, \ldots)$ వీటిమీద ఆధారపడియుండు ఫలము స్వతంత్ర చలరాశులలో ఏదో ఒకటి-ఉదాహరణమునకు x మాత్రము మారుచుండి, ఇతర చలరాశులు స్థిరములైయున్నచో దొరకు వ్యుత్పన్నము $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ఆంశిక వ్యుత్పన్నమనబడును. ఇటులనే $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, ... ఆంశిక వ్యుత్పన్నములు. సాధారణముగా $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y}$ను $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\ \partial x}$ను సమానముగ నుండును.

ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణమునందు చలరాశులు $x, y, z, \ldots$ ఫలము u, దాని ఆంశికవ్యుత్పన్నములు, అన్నియు ఉండును. ఉదాహరణమునకు క్రింద కొన్ని ఆంశికసమీకరణములు ఇచ్చియున్నాము :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y} = 0; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణముల జననము : సాధారణ అంతరీకరణ సమీకరణములు అనిర్ణీత స్థిర సంఖ్యల త్రోసివేయుట వలన జనించును. ఉదాహరణమునకు $y = c \ x^2 + x$ అయినచో $\dfrac{d y}{d x} = 2\,cx + 1$; వీటినుండి c ను త్రోసివేసినచో $x\dfrac{d y}{d x} - 2y + x = 0$ అను సమీకరణము లభించును. కనుకనే విలోమముగా అంతరీకరణ సమీకరణమును చయనీకరించునపుడు, ఒక్కొక చయనమునకును ఒక అనిర్ణీత స్థిరరాశి ఉద్భవించును.

ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణములలో, అనిర్ణీత స్థిరరాశులకు బదులుగ అనిర్ణీత ఫలములు ఉద్భవించును. ఉదాహరణమునకు $u = f\ (y, z \ldots)$ అనుకొనెదము. ఇచ్చట x తప్ప వేరు అన్ని చలరాశులు f ఫలములో ఉన్నవి. f ఏ ఫలముగనైనను ఉండవచ్చును. అపుడు $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. ఏలన, x మాత్రము మారిన, u మారదు. ఈ సమీకరణము

x లేని ఫలమునుండి జనించినది. విలోమముగా $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ అను సమీకరణసాధనము $u = f(y, z, ...)$ అగును. అటులనే $\frac{\partial^2 u}{\partial x \; \partial y} = 0$ యొక్క సాధనము :

$$u = f(y, z....) + g(x, z, ...)$$

అగును. ఇచ్చట f, g ఏ ఫలములైనను ఉండవచ్చును.

కనుక ఆంశిక సమీకరణముల సాధనలలో అనిర్ణీత ఫలము లుండును. ఎన్నిమార్లు అంతరీకరణమున్నదో అన్ని అనిర్ణీత ఫలము లుండును.

ఇపుడు $u(x, y) = ax + by + ab$ అని తీసికొనుము. ఇచ్చట a, b స్థిరసంఖ్యలు. $\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{d u}{d y} = b$ కనుక a, b లను త్రోసివేయుటవలన $u = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ అను ఆంశిక సమీకరణము లభించినది. ఈ ఆంశిక సమీకరణమునకు సాధనము $u = ax + by + ab$ అనునదియే. కనుక ఆంశిక సమీకరణముల సాధనములలో స్థిరరాశులు రావచ్చును.

కొన్ని ముఖ్య ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణములు : ఒక దారము లేదా తీగ x-అక్షమునందు బిగువుగా ఈడ్చి $x = 0$ నుండి $x = l$ వరకు వ్యాపించి యున్నదను కొనెదము. దాని బిగువు (టెన్షన్) T అనియు, దాని సాంద్రత ρ అనియు అనుకొనెదము. అది కంపించునపుడు x చోటులో నున్న బిందువు కాలము t అగునపుడు y అక్షదిక్కులో u దూరము జరిగియున్నదను కొనెదము. అనగా, ఆ బిందు నిరూపకములు (x, u) అను కొనెదము. అపుడు దాని చలన సమీకరణము :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad c^2 = T/\rho$$

అని చూపవచ్చును. దీని సాధనము :

$u = f(x + ct) + g(x - ct)$. ఇచ్చట f, g అనిర్ణీత ఫలములు. $x = 0$, అగు ఒక కొనయందును $x = L$ అగు మరియొక కొనయందును u శూన్యముగ నుండవలెను. ప్రారంభమందు ఒక్కొక్క బిందువు యొక్క వేగమును $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ఇచ్చినట్లైతే, సాధనము పూర్తిగా నిర్ణయించవచ్చును.

ఒక వస్తువునందు ఉష్ణ సంచారమునకు సంబంధమైన ఆంశిక సమీకరణము

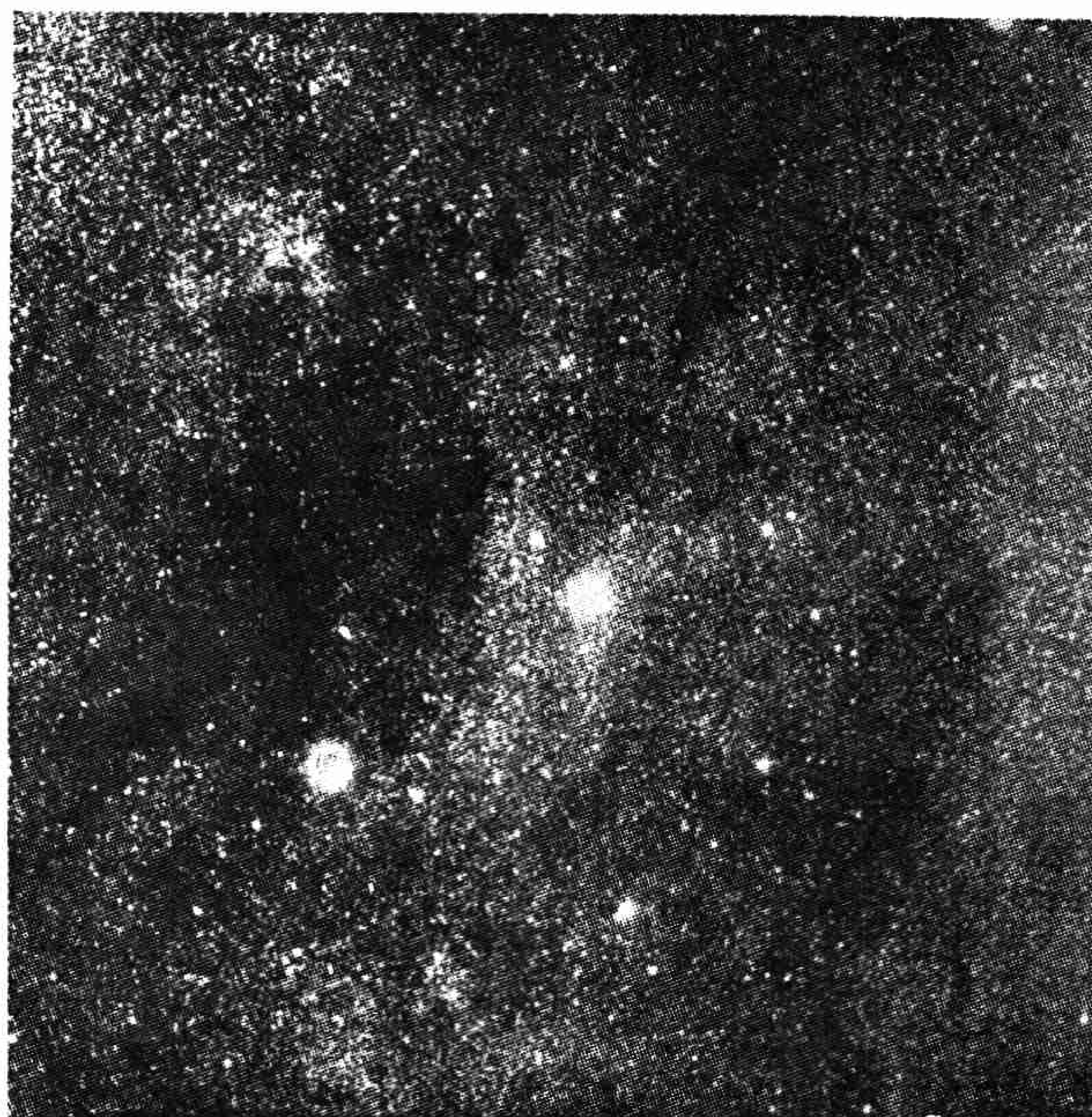
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

ఒక పొర (మెంబ్రేన్) యొక్క కంపనము యొక్క సమీకరణము :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

అనునది భౌతిక శాస్త్రములో ఒక ముఖ్య సమీకరణము. దీనిని సాధించుటకే గణితశాస్త్రములో గోళీయ హరాత్మక ఫలముల (స్ఫెరికల్ హార్మానిక్స్) ను ప్రవేశ పెట్టి ఉన్నారు. లెజాండర్ ఫలములు బెసల్ ఫలములు ఇవన్నియు పై సమీకరణ సాధనకుఉపయోగమైన ఫలములు. పొ.ల.నా.



చిత్రము 44 అంగారకోశనీహారిక

అంతర్నక్షత్ర వాయువు:

దూరదర్శిని ద్వారా చూచినచో మృగశిరానీహారిక ఒక అద్భుత దృశ్యముగా కన్పడును. అది స్వచ్ఛమగు వాయువు నీహారికా మేఘము వలె ఉండును. దాని వర్ణమాలలో విశేషముగ హైడ్రోజన్ యొక్క, అయనీకృత ఆక్సిజన్ యొక్క, హీలియమ్ యొక్క రేఖలు కనబడును. అది స్వయంప్రకాశకము కాదు; దగ్గరఉన్న ఉష్ణతారచే వెలుగును.

నీహారికామండలములోని సాంద్రత, ప్రేషము అతిస్వల్పముగ ఉండును. పార్థివప్రమాణముతో సరిపోల్చినచో అది

అంతయు శుద్ధశూన్యమని తీసికొనవలయును. అయనీకృత పరమాణువులమధ్య క్రియాప్రతిక్రియలు సావకాశముగా జరుగుచుండును. నీహారికామండలములు విస్తారముగా సాంద్రీకృతమగు అంతర్నక్షత్రవాయువు అని అతిదూరములలో ఉండు మందాకినులలో కనపడు విచూషణరేఖలచే తెలియుచున్నది. రేడియో ఖగోళశాస్త్రమువలన కూడ అంతర్నక్షత్రవాయువు ఉన్నట్లు తెలియుచున్నది. అతిదూరస్థతారకల వర్ణమాలలలోకనబడు విచూషణరేఖల పరీక్ష అంతర్నక్షత్రవాయువు నిశ్చయముగా కలదని నిరూపించుచున్నది.

మృగశిర (డెల్టాఓరియన్స) లోని ఒక తారాయుగళములోని తారలు రెండును ఒకదానిచుట్టు ఇంకొకటి తిరుగుచున్నవి. కాని వర్ణమాలలోని విచూషణరేఖ, k, స్థిరముగా ఉండుటచే ఈ విచూషణ అంతర్నక్షత్రవాయువువలన కలిగి ఉండవలయునని ఊహింపవలసియుండును. ఈ వాయువు మేఘరూపములో ఉన్నది; మన మందాకిని యొక్క భ్రమణములో పాల్గొనుచున్నది; మన భూమికి, కాంతిమంతములగు విస్తృత నీహారికలకు నడుమ కృష్ణనీహారికలు కలవని తెలియుచున్నది (చూ. కృష్ణనీహారికలు).

అశ్వశిరనీహారిక ఇందుకొక చక్కని ఉదాహరణము. దానికి అవతలివైపున ఉండు నక్షత్రము యొక్క కాంతిని విచూషించు శక్తి కలదని విశదమగుచున్నది.

అంగారకోశనీహారిక (చూ. చిత్రము 44 - పు. 121) భూమికి 400 కాంతివత్సరముల దూరములో ఉన్నది. మృగశిరానీహారిక భూమికి 2 వేల కాంతివత్సరములు దూరములో ఉన్నది.

ఆచార్య.



చిత్రము 45 అశ్వశిరనీహారిక

అక్షపరివర్తన: సామ్యముగా అక్షముల స్థానాంతరముల మార్పులచే కలుగు నిరూపక పరివర్తనలకు అక్షపరివర్తనము అని పేరు. అదే మూలబిందువు చుట్టు లంబాక్షములు 'θ' కోణముగుండ భ్రమణము చేసినచో కలుగు నిరూపకముల మార్పులు ఇపుడు వివరించబడును. చిత్రము 46(పు. 123)లో OX, OY నిరూపకాక్షములైనచో P యొక్క నిరూపకములు x, y; OX′, OY′ అపేక్షయా దాని నిరూపకములు x', y'. $\angle XOX' = \theta$ అయినచో పై నిరూపకములకు గల సంబంధము* సులభముగా చూపవచ్చును.

అచలరాశులు: నిమ్నకోణము ω కల నిరూపకాక్షములు OX, OY అనుసరించి ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకములు x, y; నిమ్నకోణము ω' కల నిరూపకాక్షములు OX′, OY′ అనుసరించి అదే బిందువు యొక్క నిరూపకములు x_1, y_1; x, y పై ఆధారపడని రాశులు a, h, b కల $ax^2 + 2hxy + by^2$ ఫలము $a_1 x_1^2 + 2h_1 x_1 y_1 + b_1 y_1^2$ గా మారిన ఎడల

$$\frac{a_1 + b_1 - 2h_1 \cos \omega_1}{\sin^2 \omega_1} = \frac{a + b - 2h \cos \omega}{\sin^2 \omega}$$

$$\frac{a_1 b_1 - h_1^2}{\sin^2 \omega_1} = \frac{ab - h^2}{\sin^2 \omega}$$

అనగా a, b, h, ω మారినను పైన వివరించిన a_1, b_1, h_1, ω_1 ల ఫలములు మారవు. వీనికి అచలరాశులని పేరు. లంబాక్షములలో $\omega = \omega_1 = 90^\circ$. ఈ సందర్భములో

$$a + b = a_1 + b_1 ; \; ab - h^2 = a_1 b_1 - h_1^2.$$

$* = x'x \cos \theta - y \sin \theta ; \; y' = x \sin \theta + y \cos \theta$

రెండవతరగతి వ్యాపక సమీకరణము : లంబాక్షము లను తీసికొనినచో

$$ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2\,gx + 2\,fy + c = 0$$

అను రెండవతరగతి సమీకరణమును

$$a_1\,x_1^{\,2} + b_1\,y_1^{\,2} + 2\,g_1\,x_1 + 2\,f_1\,y_1 + c_1 = 0$$

గా మార్చవచ్చును. ఇచ్చట $a_1 = b_1$ అయినచో వృత్తము లభించును. $ab - h^2 = a_1\,b_1$ అయినందున $ab - h^2 = 0$ అయినచో a_1 గాని b_1 గాని శూన్యముగ ఉండవలెను. $b_1 = 0$ అయినప్పుడు సమీకరణము :

$$a_1\,x^2 + 2g_1x_1 + 2\,f_1\,y_1 + c_1 = 0$$

అగుచున్నది. ఇది ఒక పరాసను గుర్తించును.

$ab - h^2 < 0$ అయినచో a_1, b_1 విరుద్ధ సంజ్ఞలు కలవి. అపుడు అతి పరాస లభించును.

$ab - h^2 > 0$ అయినచో a_1, b_1 రెండును సమాన సంజ్ఞలు కలవి. అపుడు దీర్ఘవృత్తము లభించును.

చిత్రము 46

వ్యాపక సమీకరణమునకు $lx + my + n = 0$ స్పర్శరేఖ అగుటకు నిబంధన :

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

దీనినే $Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2\,Fmn + 2\,Gnl + 2Hlm = 0$ అను రూపములో వ్రాయవచ్చును.

పై సమీకరణమునకు స్పర్శీయ సమీకరణము అనిపేరు. ఇది $lx + my + n = 0$ ఎపుడును స్పర్శరేఖ అని నిర్ధరించును.

శాంకవములు : రెండు శాంకవములు నాలుగు బిందువులలో ఖండించుకొనును. రెండు బిందువులు ఒకటిగా చేరినపుడు అచట ఆ రెండింటికిని ఆ బిందువువందు ఒకే స్పర్శరేఖ కలదు. మూడు, నాలుగు బిందువులు ఒకటిగా చేరవచ్చును. బిందువులు జతజతగా చేరినపుడు వాటిని స్పర్శద్వయము అని అందురు. 5 బిందువులగుండ సాధారణముగ ఒక శాంకవము గీయవచ్చును. శాంకవ సమీకరణములో ఆరు స్థిరరాశులు కలవు.

రెండు శాంకవములు $S = 0$, $S_1 = 0$ ఖండించు బిందువులగుండ వెళ్ళు శాంకవములకు సమీకరణము :

$$S - KS_1 = 0.$$

శాంకవనాభులు :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తమునకు దీర్ఘాక్షముపై రెండు నాభులు కలవు. వాటి నిరూపకములు $\pm\, ae, 0$; వాటి ధ్రువరేఖలు $\frac{ex}{a} = \pm\, 1$; దీర్ఘవృత్తము యొక్క నియతరేఖలు వాస్తవికములు.

హ్రస్వాక్షము వెంబడి రెండు నాభులు కలవు. అవి కల్పితములు. వాటి నిరూపకములు $0, \pm\,\sqrt{(b^2 - a^2)}$. ఇందు $a^2 - b^2 = a^2e^2$ అని జ్ఞాపకముంచుకొనవలెను. వీటికి అనుసరించిన కల్పిత నియతరేఖలు కలవు.

నాభినుండి స్పర్శరేఖాద్వయము :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దీర్ఘవృత్తమునకు ae, 0 అనగా $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, 0 నుండి స్పర్శరేఖాద్వయమునకు సమీకరణము :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} - 1\right) = \left(\frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} - 1\right)^2$$ ను

సూక్ష్మీకరించినచో $\left(x - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2 = 0$ లభించును. ఇది నాభి కేంద్రముగాగల వృత్తబిందువు అనియు చెప్పబడవచ్చును. ఈ లక్షణమును ఉపయోగించి, దత్తశాంకవమునకు నాభియొక్క నిరూపకములను కనుగొనవచ్చును.

ఏకనాభికా శాంకవములు (కాన్‌ఫోకల్ కానిక్) నిర్వచనము : రెండు శాంకవములకు నాభులు ఒకే నాలుగు బిందువు లయినచో అవి ఏకనాభికా శాంకవములు. వాని సమీకరణము :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

ఒక బిందువు x_1, y_1 గుండ వెళ్ళు ఏకనాభికా శాంకవ ములలో ఒకటి దీర్ఘవృత్తము, రెండవది అతిపరాన.

వైశాల్య నిరూపకములు : ABC ఒక ప్రమాణ త్రిభుజము ; ఆ తలములో P ఒక బిందువు. ABC అపేక్షయా P యొక్క వైశాల్య నిరూపకములు :

$$X = \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC};\ Y = \frac{\Delta PCA}{\Delta ABC};\ Z = \frac{\Delta PAB}{\Delta ABC}$$

ఇచ్చట $X + Y + Z = 1$ అని గమనించతగినది.

A, P రెండును BC కి ఒకేవైపున ఉన్నచో X ధనాత్మకము ; ఎదుటివైపున నున్నచో X ఋణాత్మకము. ఇట్లే Y, Z లకు కూడ.

వైశాల్యనిరూపకములకును, కార్టీసియను (సాధారణ) నిరూపకములకును గల సంబంధము :

ప్రమాణ త్రిభుజము ABC యొక్క శీర్షములు క్రమముగా x_1, y_1 ; $x_2\ y_2$; x_3, y_3. P యొక్క నిరూపకములు x, y అయినచో

$$X = \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

కనుక $\Delta ABC = \Delta$ అని వ్రాసినచో

$$\Delta X = x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + x_2 y_3 - x_3 y_2$$

ఇట్లే $$\Delta Y = x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$\Delta Z = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1$$

పై సమీకరణములను వరుసగా x_1, x_2, x_3 లచే మొదట గుణించి సంకలనముచేసినచో

$$\Delta(X x_1 + Y x_2 + Z x_3) = x\Delta$$

$$\therefore\ x = X x_1 + Y x_2 + Z x_3$$

అట్లే, $$y = X y_1 + Y y_2 + Z y_3 \quad \Big\}\ \dots\ \dots\ \lfloor A$$

C మూలబిందువుగాను, CB, CA లను నిరూపకాక్షములుగను తీసికొనినచో, A, B, C ల నిరూపకములు $(0, b), (a, 0), (0, 0)$ అగును.

అపుడు $x = aY$; $y = bX$ అనగా

$$X = \frac{y}{b};\ Y = \frac{x}{a};\ Z = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\ \dots\ \dots\ \lfloor B$$

$X + Y + Z = 1$ అను సంబంధమును వాడి ప్రతి సమీకరణమును సమఘాతముగా చేయవచ్చును.

అనంతమునందున్న ఋజురేఖ : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ కార్టీసియను నిరూపకములలో ఒక ఋజురేఖను గుర్తించును. x, y నిరూపకాక్షములపై ఋజురేఖచే ఏర్పడు ఖండములను a, b లు గుర్తించును.

ఋజురేఖ అనంతదూరములోనికి పూర్తిగా పోయినచో $a \longrightarrow \infty, b \longrightarrow \infty$ కావలయును. కాబట్టి $1 = 0$ అను విపరీత సమీకరణము కార్టీసియను నిరూపకములలో లభించును.

వైశాల్యనిరూపకములలో అనంతములో ఉండు ఋజురేఖకు :

$$x + y + z = 0$$

అను సాధారణ సమీకరణము లభించుచున్నది. కారణమేమనగా వైశాల్యనిరూపకములు విక్షేపతలమునకు ఉచితమైనవి. విక్షేపతలములో అనంతమున ఉన్న రేఖకు ఏ ప్రాముఖ్యము లేదు (చూ. సమీక్ష - పు. 40).

శాంకవ సమీకరణము : క్రింది ద్వివర్గ సమఘాత సమీకరణమును తీసికొందము :

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2H xy + 2G zx + 2Fyz = 0$$

ఇది ఎల్లపుడు ఒక శాంకవసమీకరణము అగును.

ఇది ప్రమాణ త్రిభుజము ABC యొక్క శీర్షములు $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$ గుండ వెళ్ళినచో $A = 0 = B = C$ అని తెలియగలదు. కాబట్టి ప్రమాణ త్రిభుజము యొక్క పరివృతశాంకవము యొక్క సమీకరణము :

$$H xy + G zx + F yz = 0$$

ఇది త్రిభుజము యొక్క భుజములను తాకినచో లభించు సమీకరణము :

$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx - 2\lambda\mu xy = 0$$ అగును. ఇది ఒక వృత్తమయితే

$$\frac{B + C - 2F}{a^2} = \frac{C + A - 2G}{b^2} = \frac{2(C + H - F - G)}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{A + B - 2H}{c^2}$$

ఉదా : ప్రమాణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తమును కనిపెట్టుదము. పరివృతశాంకవము యొక్క సమీకరణము :

$$F yz + G zx + H xy = 0$$

ఇది వృత్తమగుటకు $\frac{F}{a^2} = \frac{G}{b^2} = \frac{H}{c^2}$ కావలయును.

కనుక వృత్తసమీకరణము $a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0$

అంతర్లిఖిత వృత్తము : ఇటులనే ప్రమాణ త్రిభుజము యొక్క అంతర్లిఖిత వృత్తము యొక్క సమీకరణము :

$$\sqrt{(s-a)}\,x + \sqrt{(s-b)}\,y + \sqrt{(s-c)}\,z = 0$$

Cకి ఎదుట బహిర్లిఖిత వృత్తము :

$$\sqrt{(s-b)}\,x+\sqrt{(s-c)}\,y+\sqrt{(-sz)}=0$$

ఇట్టివి మరి రెండు కలవు:

నవబిందు వృత్తము: ఇది $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ గుండ వెళ్ళును. వృత్తనిబంధనలను వాడినచో క్రింది సమీకరణము లభించును:

$$\frac{a^2}{y+z-x}+\frac{b^2}{z+x-y}+\frac{c^2}{x+y-z}=0$$

అనంతమున ఉన్న వర్తుల బిందువులు:

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$

వృత్తమైనచో

$$\frac{B+C-2F}{a^2}=\frac{C+A-2G}{b^2}=\frac{A+B-2H}{c^2}=\lambda$$

కాబట్టి $2F=B+C-\lambda a^2$

$2G=C+A-\lambda b^2$

$2H=A+B-\lambda c^2$

వీటిని మీది సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరించి, దానిని క్రింది రూపమున వ్రాయవచ్చును.

$$(Ax+By+Cz)(x+y+z)-\lambda(a^2yz+b^2zx+c^2xy)=0$$

ఈ సమీకరణమునుండి మనము తెలిసికొనవలసినదేమనగా మొదటి సమీకరణమునకును ప్రమాణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తమగు $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$ నకును (ఇవి రెండును శాంకవములగుటచే) 4 ఛేదన బిందువులు ఉన్నవి వీటిలో రెండు $Ax+By+Cz=0$ సమీకరణముగల మూలాక్షముమీద ఉన్నవి. తక్కిన రెండును $x+y+z=0$ అనంత బుజురేఖమీద నున్నవి. అనగా అనంత బుజురేఖను $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$ ఖండించు బిందుద్వయముగుండ మొదటి సమీకరణపు వృత్తము వెళ్ళును. ఆ బిందువులద్వారా తలములోని అన్ని వృత్తములును వెళ్ళును. వాటికి వర్తుల బిందువులు. (అనంతమున ఉన్నవి) అని పేరు (చూ. సమీక్ష - పు. 44).

$lx+my+nz=0$ అను బుజురేఖ

$\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\mu y}+\sqrt{\nu z}=0$ అను

శాంకవమునకు స్పర్శరేఖ యగుటకు నియమము:

$\lambda mn+\mu nl+\nu lm=0$ అని చూపించవచ్చును.

నవబిందు వృత్తము ఒక త్రిభుజముయొక్క అంతర్లిఖిత, బహిర్లిఖిత వృత్తములను స్పృశించును (చూ. ఫ్యూయర్ బాక్ సిద్ధాంతము). ఇదిఒక రసవంతమయిన సిద్ధాంతము; దీనిని పై నియమమును ఉపయోగించి సరిచూపవచ్చును.

సమఘాత నిరూపకములు: వైశాల్య నిరూపకము లందు అన్ని సమీకరణములు సమఘాతములు. ఇట్టి గుణముకల ఇతరవ్యాపక నిరూపకములు కలవు. అవియే సమఘాత నిరూపకములు. నిర్వచనము:

$$\alpha x=\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC};\ \beta y=\frac{\triangle PCA}{\triangle ABC};\ \gamma z=\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}.$$

ఇచ్చట α, β, γ వాస్తవ సంఖ్యలు.

$x+y+z=1$ బదులు $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ అని లభించును.

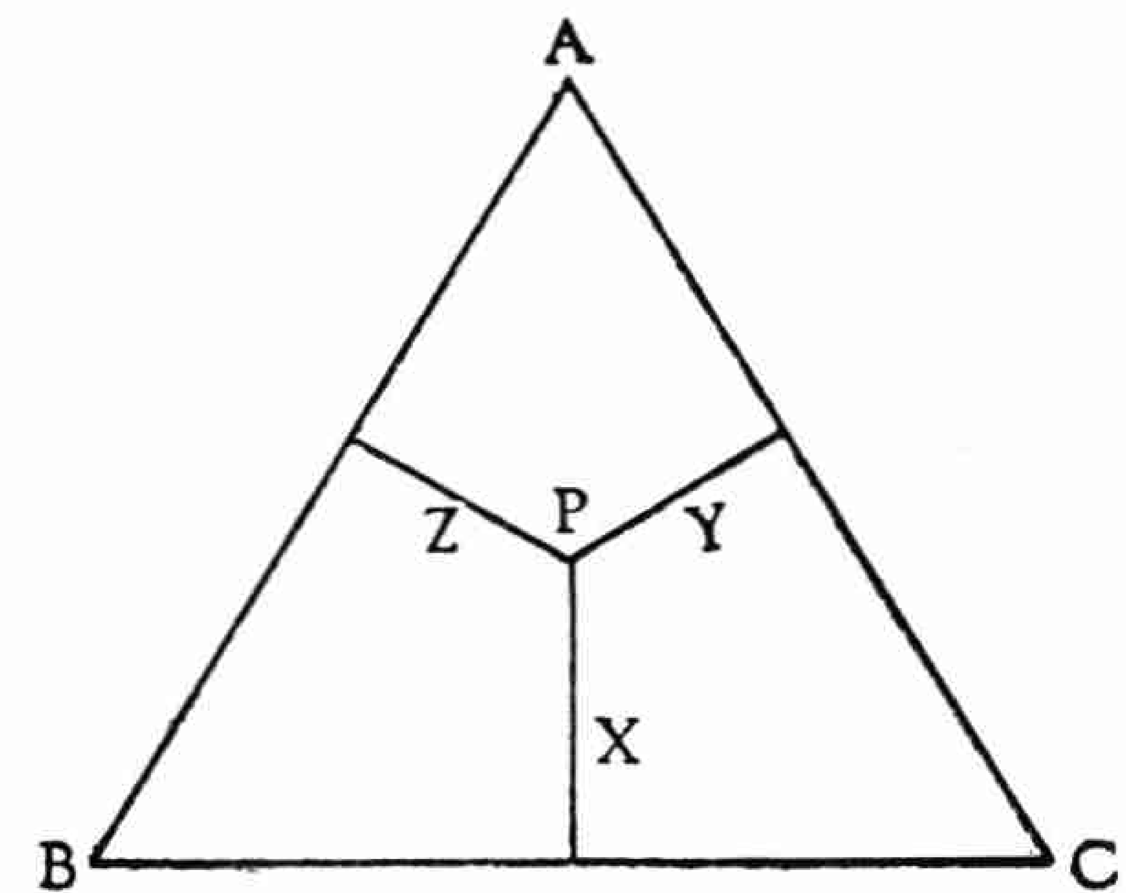
అనంతబుజురేఖ $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$

ప్రమాణత్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము

$$a^2\beta\gamma\,yz+b^2\gamma\alpha\,zx+c^2\alpha\beta\,xy=0$$

ఇట్లే ఇతరసూత్రములను మార్చుకొనవచ్చును.

త్రిరేఖీయ నిరూపకములు: ఇచ్చట ఒక బిందువు P నుండి ABC త్రిభుజ భుజములపై పడు లంబములు నిరూపకములు (x, y, z) గా తీసికొందము.



చిత్రము 47 త్రిరేఖీయ నిరూపకము

$$ax+by+cz=2\triangle$$

అనగా $\alpha=\frac{a}{2\triangle}, \beta=\frac{b}{2\triangle}, \gamma=\frac{c}{2\triangle}$

అనంత బుజురేఖకు సమీకరణము $ax+by+cz=0$.

ఈ విధమున ఇతర సూత్రములను సాధింపవచ్చును

ధ్రువీయ వ్యుత్క్రమము: $T=0$ శాంకవమును అనుసరించి, $S=0$ శాంకవముయొక్క స్పర్శరేఖల ధ్రువముల బిందుపథము వేరొకశాంకవము $S_1=0$ అగును.

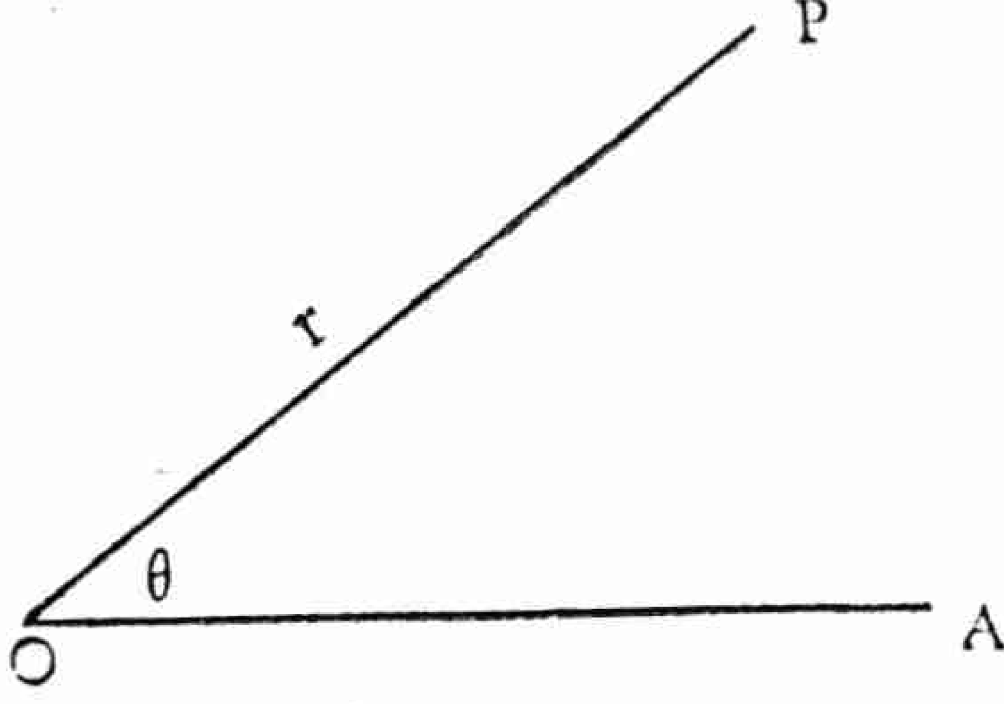
దీనికే $T=0$ అపేక్షయా $S_1=0$ శాంకవము $S=0$ యొక్క ధ్రువీయ వ్యుత్క్రమము అని పేరు.

T యొక్క సమీకరణము: $x^2+y^2+z^2=0$ అని తీసికొందము. అపుడు $S=0$ యొక్క సమీకరణము వ్యాపక సమీకరణమగు

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ అయితే, $T = 0$ అపేక్షయా దాని ధ్రువీయ వ్యుత్క్రమము:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ అగును.}$$

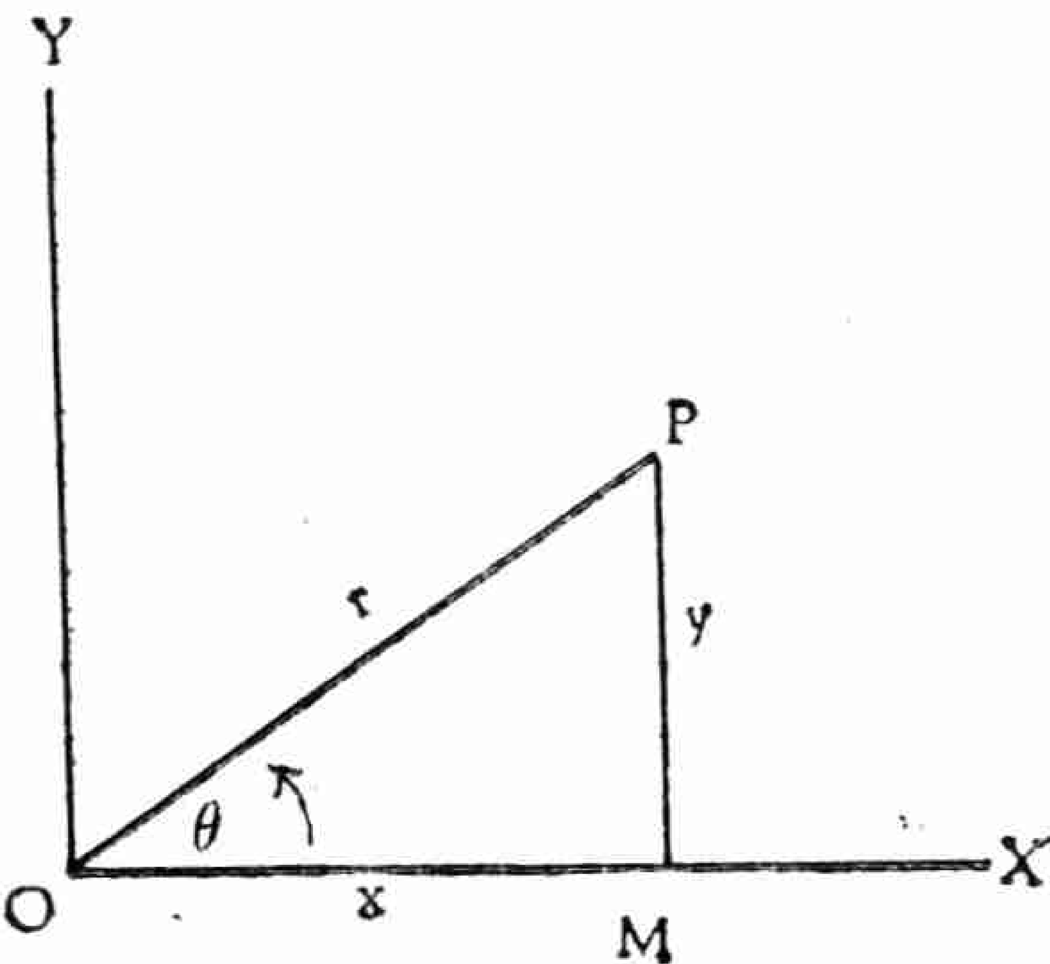
ధ్రువీయ నిరూపకములు : ఇవి మరియొక విధమగు నిరూపకములు. ఇందు 'O' ఒక బిందువు ; దీనిగుండ



చిత్రము 48 ధ్రువీయ నిరూపకములు

వెళ్లు ప్రారంభ రేఖ OA ముఖ్యము. బిందువు 'O'కు ధ్రువమని పేరు. 48వ చిత్రములో బిందువు P యొక్క నిరూపకములు $OP = r$, $\angle AOP = \theta$ చేతను గుర్తింపవచ్చును. P యొక్క ధ్రువీయ నిరూపకములు r, θ లచే గుర్తింపబడును. OP కి శ్రుతి (రేడియస్ వెక్టార్) అని పేరు. అపసవ్యదిక్కులో కొలిచిన θ ధనాత్మకము ; సవ్యదిక్కులో కొలచిన ఋణాత్మకము.

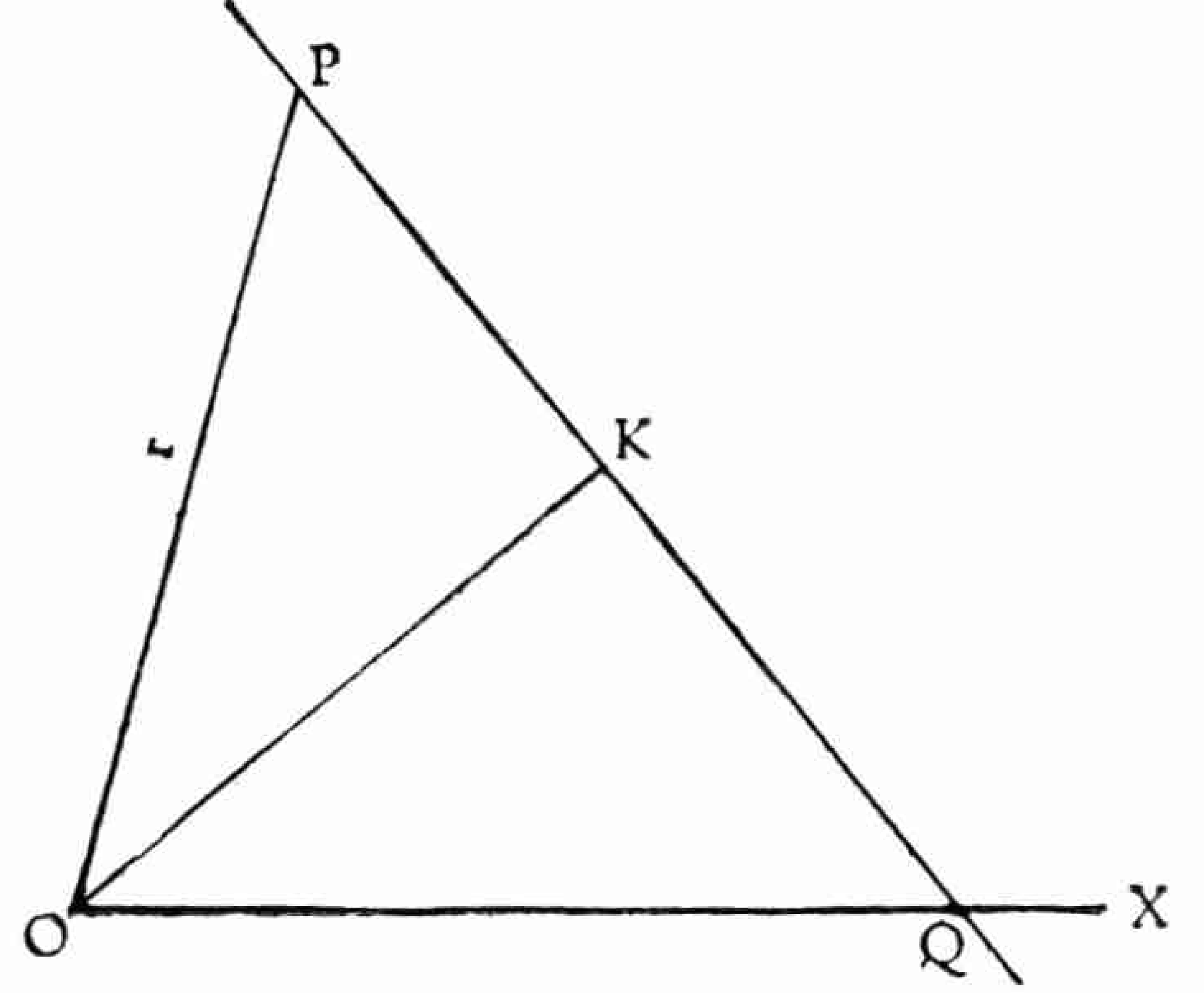
నిరూపకముల పరివర్తనము: 49వ చిత్రములో P బిందువు యొక్క ధ్రువీయ నిరూపకములు (r, θ), కార్టీసియను నిరూపకములు (x, y). x అక్షమునకు PM లంబము.



చిత్రము 49 నిరూపకముల పరివర్తన

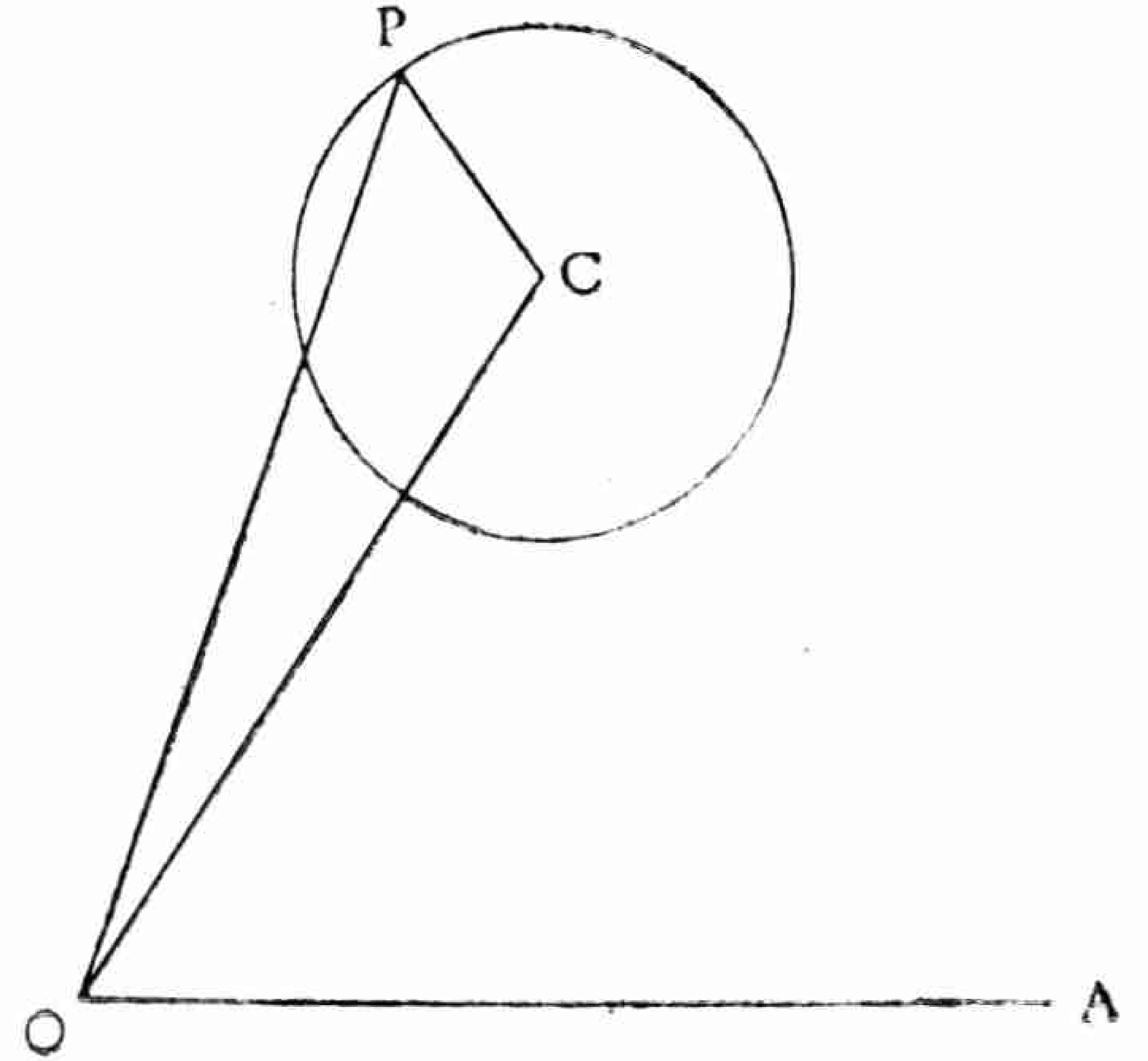
త్రిభుజము OPM లో నుండి $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. విలోమములో $r^2 = x^2 + y^2$ కాబట్టి ప్రతి కార్టీసియను సూత్రములోను $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ అని ప్రతిక్షేపించినచో ధ్రువీయ సూత్రములు లభించును. ప్రత్యేక సందర్భములలో ధ్రువీయ నిరూపకములు చాల ఉపయోగకరములు.

ఋజురేఖలు : ఋజురేఖ OP ధ్రువముగుండ వెళ్ళినచో దాని సమీకరణము $\theta = \alpha$. ఇందు $\angle POX = \alpha$. ఋజురేఖ PQ ధ్రువముగుండ వెళ్ళనిచో లభించు సూత్రము :



చిత్రము 50

50వ చిత్రములో O ధ్రువము, OX ప్రారంభరేఖ ; PQ పై P బిందువుయొక్క నిరూపకములు (r, θ) అని తీసికొనుము. $\angle XOP = \theta$, $OP = r$ అని తెలియుచున్నది. ధ్రువము O నుండి PQ ఋజురేఖకు OK లంబము గీయుము.



చిత్రము 51

$OK = p$; $\angle XOK = \alpha$ అని తీసికొనుము. అపుడు $\angle KOP = \theta - \alpha$; $OK = OP \cos(\theta - \alpha)$

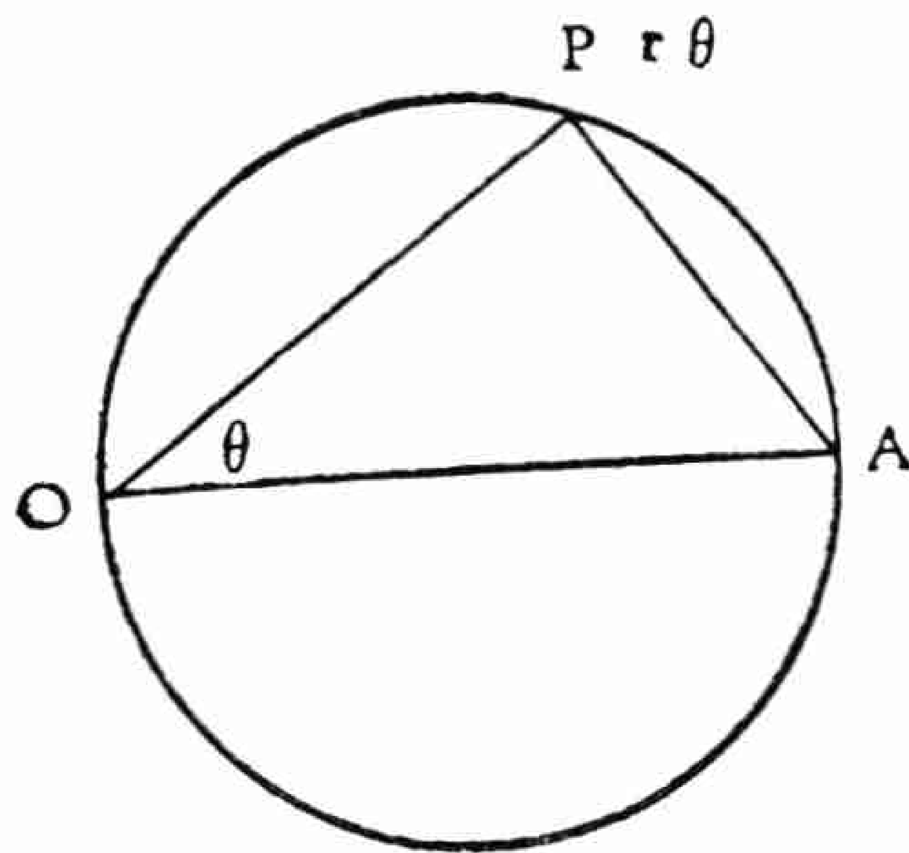
$$p = r \cos(\theta - \alpha)$$

ఇందుండి కార్టీసియను సమీకరణమును సాధింపవచ్చును.

$p = r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha$

$= x\cos\alpha + y\sin\alpha$

వృత్తములు : O ధ్రువము, OA ప్రధాన రేఖ ; C వృత్తకేంద్రము, దాని నిరూపకములు (a, α); P ఆవృత్తముపై బిందువు ; నిరూపకములు (r, θ). $PC =$ వృత్తవ్యాసార్ధము $= c$ $\angle POC = \theta - \alpha$, $OP = r$, $OC = a$



చిత్రము 52

ఇపుడు $PC^2 = OP^2 + OC^2 - 2\,OP.OC\cos POC$

$$c^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha).$$

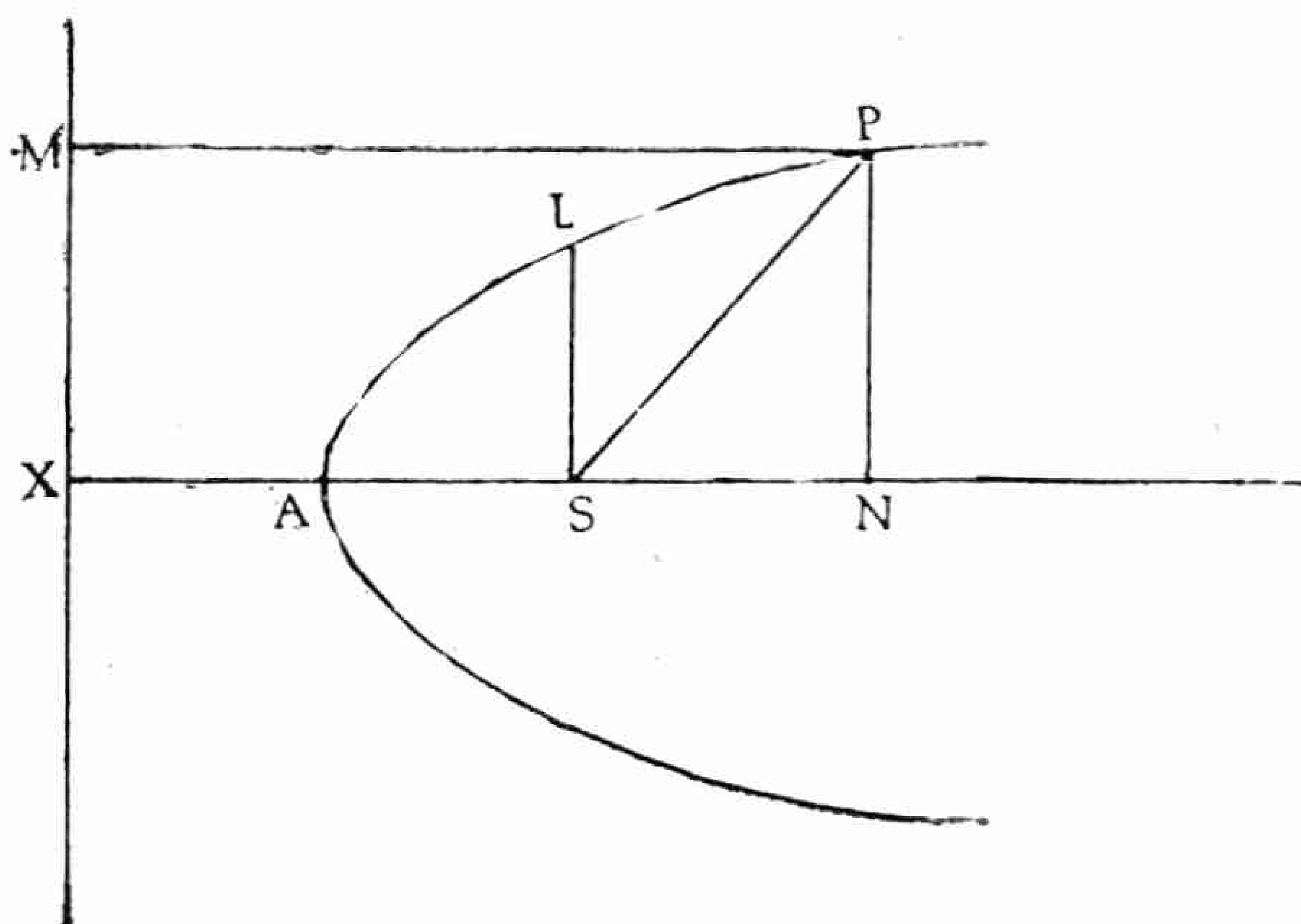
ఇది ధ్రువీయ నిరూపకములలో వృత్త సమీకరణము.

ధ్రువము O, కేంద్రము C తో చేరినచో $a = 0$. అప్పుడు $c^2 = r^2$, $r = c$; ప్రధాన రేఖ OA వృత్తమునకు వ్యాసము ; $OA = 2a$

P యొక్క నిరూపకములు r, θ ;

వృత్తసమీకరణము $r = 2a\cos\theta$.

శాంకవములు : ధ్రువమును ఒక నాభివద్దను, దీర్ఘాక్షమును ప్రధాన రేఖగాను తీసికొనిన లభించు సమీకరణము గతిశాస్త్రములో చాల ఉపయోగకరము.



చిత్రము 53 పరాన

53వ చిత్రములో S ఒకనాభి ; అదిధ్రువము. దీర్ఘాక్షము XSN ప్రధానరేఖ, MX నియతరేఖ, A శాంకవశీర్షము; S L ఉత్థానార్ధము (సెమీ లేటస్ రెక్టమ్).

శాంకవముపై బిందువు P యొక్క నిరూపకములు (r, θ), $SP = r$, $\angle NSP = \theta$:

శాంకవనిర్వచనము ప్రకారము

$$SP = e\,PM = e\,XN = e\,(XS + SN)$$

$$= e\,(XS) + e(SN) = SL + e\,r\cos\theta$$

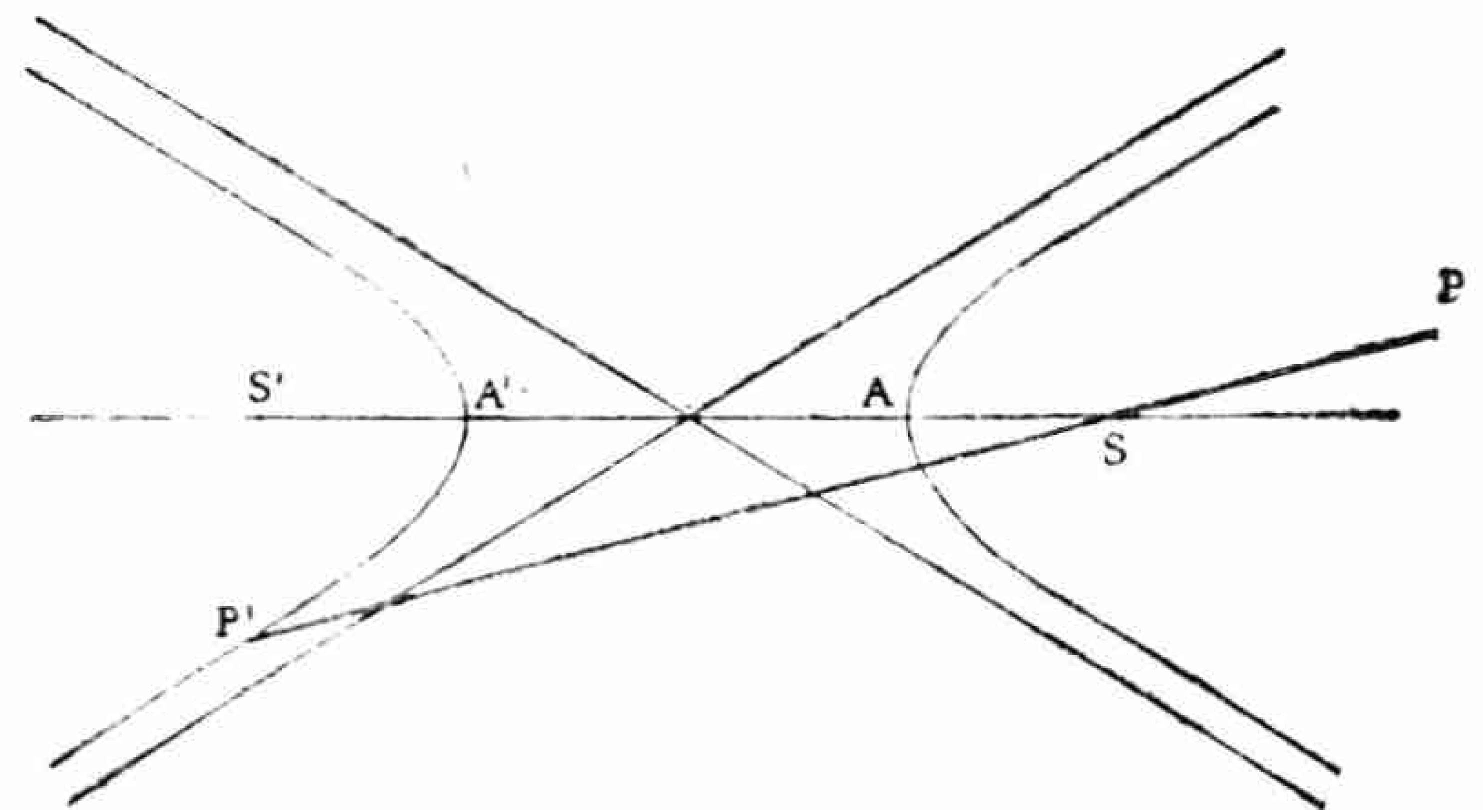
$$\therefore r = l + e\,r\cos\theta$$

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$$

θ కోణమును SA నుండి అప్రదక్షిణముగా కొలిచిన θ కు బదులు $\pi - \theta$ వ్రాయవలయును. అపుడు లభించునది

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

$e < 1$ అయినపుడు దీర్ఘవృత్తము, $e = 1$ అయినచో పరాన, $e > 1$ అయినచో అతిపరాన లభించును.



చిత్రము 54 అతిపరాన

$1 + e\cos\theta = 0$ అయిన, $r = \infty$ అగును.

కాబట్టి $\cos\theta = -\frac{1}{e}$ అయినట్టి θ యొక్క విలువ అసంపాతము యొక్క దిశను సూచించును.

చిత్రము 54లో అతిపరాన ఇవ్వబడినది. దానికి రెండు శాఖలు కలవు.

జ్యా యొక్క సమీకరణము, స్పర్శరేఖ :

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$. పై కోణములు$(\alpha + \beta)$, $(\alpha - \beta)$ గల బిందువులను చేర్చు జ్యాయొక్క సమీకరణము:

$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha)$ అగును.

$$\therefore \frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

స్పర్శీయ నిరూపకములు : ఒక ఋజు రేఖ $lx + my + nz = 0$, ఒక శాంకవము

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

కు స్పర్శరేఖ అయిన

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + 2Gnl + 2Hlm = 0. \quad (1)$$

ఇందు A, B, C మొదలగునవి నిర్ధారకములలో అను రూపాంతరములు a, b, c మొదలగు వాని కనిష్ఠములు.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

పై సమీకరణమును $S = 0$ యొక్క స్పర్శీయ సమీకరణ మందురు.

ఇపుడు $al^2 + b\,m^2 + c\,n^2 + 2fmn +$

$$2gnl + 2hlm = 0 \qquad \ldots. \quad \ldots. \qquad (2)$$

ఒక స్పర్శీయ సమీకరణమయినచో దాని బిందు సమీకరణము :

$$Ax^2 + By^2 + cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0. (3)$$

దీనిని సులభముగా నిరూపించవచ్చును.

$lx + my + nz = 0$ ఋజు రేఖ, బిందువు $x = A$, $y = B$, $z = C$ గుండ వెళ్ళినచో $Al + Bm + Cn = 0$ ....(4)

బిందువు A, B, C స్పర్శీయ నిరూపకములు l, m, n, అని చెప్పుదుము. (2) ఇచ్చిన, $lx + my + nz = 0$ ఋజు రేఖ (3) కి స్పర్శరేఖ అగును. అపుడు శాంకవము (3) ఋజు రేఖ $lx + my + nz = 0$ యొక్క వేష్టనము అని చెప్పబడును.

ఆచార్య.

అగస్త్యచారము : వరాహమిహురుడు ప్రాచీన జ్యోతిష్కులలో మేటి. తర్వాతి జ్యోతిష్కుల మన్ననకు పాత్రుడు. ఆదిత్యదేవతోపాసనాలబ్ధవరప్రసాదమూర్తి. నేటికిని అతనిని గౌరవింపని ఆర్యుడు లేడు.

అతడు వ్రాసిన బృహత్సంహితలో 12 వ అధ్యాయములో అగస్త్యచారము వివరింపబడి ఉన్నది అగస్త్యుడు (కనోపస్) ఒక నక్షత్రము. పాశ్చాత్య ఖగోళశాస్త్రవేత్తలు ఈ నక్షత్రచారమును గురించి చదివినపుడు. వారికి సంభ్రమమును, పౌరస్త్యజ్యోతిష్కుల ఎడల అనాదరణ, తిరస్కారము కలుగుచున్నవి. ప్రాచీన హైందవ జ్యోతిష్కులభావము వీరికి బోధపడనందున ఇట్టి సందిగ్ధావస్థ ఏర్పడినది. అగస్త్యచారములోని అంతరార్థము కీర్తిశేషులగు కృష్ణమూర్తి మొదలగు విద్వాంసుల వ్రాతల నుండి సంగ్రహించి ఇందు విశదీకరింపబడినది.

విట్నీపండితుడు అగస్త్యచారమునుగురించి ఇట్లు వ్రాసి ఉన్నాడు : "ఆసియాటిక్ రిసెర్చస్‌లో 9 వ సంపుటమున కోల్ బ్రూక్ హిందూ జ్యోతిషములోని కొన్ని అతిశయయుతములగు విషయములను గురించి వ్రాసినాడు. వాని సారాంశమేమన, అట్టి విషయములు మన పుస్తకములందు లేవు. అచట అగస్త్యనక్షత్రము యొక్క ఉదయ కాలమును నిర్ణయించుటకు సూత్రములు ఈయబడినవి. సప్తర్షులు ఉత్తరధ్రువముచుట్టు తిరుగుటకు 2700 సంవత్సరములగునట, ఒక సంవత్సరములో 8 నిమిషములు పోవుదురట; సూర్యసిద్ధాంతములోకూడ సప్తర్షి, అగస్త్యుల చారము గురించి వ్రాయబడినది. కాని, ఇట్టి తప్పు సిద్ధాంతమును హాస్యాస్పదమును అగు విషయమును సృజించి జ్యోతిష గ్రంథములో ఉంచుటవలన ప్రాచీన భారతీయ జ్యోతిష్కుల తెలివితేటల సరిహద్దు తెలియుచున్నది."

ఇందు విషయము దురవగాహమగుటచే విట్నీపండితుడు ఇట్లు వ్రాసినాడు. తప్పెవ్వరిది ? భారతీయ జ్యోతిష్కులదా ? పాశ్చాత్యులదా ? యాస్కాచార్యుల వచనము ప్రకారము గ్రుడ్డివాడు గోడకు మోదుకొనినచో తప్పు గోడను చేరదుగదా ?

అగస్త్యచారము, సప్తర్షియుగము ఈ రెండును విషుచలనము (ప్రెసెషన్ ఆఫ్ ది ఈక్వినాక్సెస్) పై ఆధారపడియున్నవి. సూర్యసిద్ధాంతమునందు విషుచలనమును గురించి విశదముగా వ్రాయబడినది.

శ్లో॥ త్రింశత్కృత్యో యుగేభానాం చక్రంప్రాక్పరిలంబతే'

"ఒక చతుర్యుగమునందు అనగా 4, 320, 000 సంవత్సరములలో భచక్రము ప్రాగ్దిశయందు 600 లంబకోణములు, లేదా 150 సార్లు తిరుగుచున్నది."

ఈ విషయమునే భాస్కరాచార్య II 'వ్యస్తఅయుతత్రయంకల్పే' అని వ్రాసియున్నాడు.

పౌరాణిక గాథలు : వింధ్యపర్వతము పెరుగుచుండుట వలన అది ప్రతిదిన సూర్యప్రయాణమునకు ఆటంకము కలిగించెననియు, వింధ్యయొక్క గర్వము అణచుటకు తపోగరిష్ఠుడగు అగస్త్యమహర్షి దేవతలచే ప్రార్థితుడై తాను మరలవచ్చువరకు వింధ్యపర్వతము పెరుగకూడదని ప్రమాణముచేయించుకొని, వింధ్యనుదాటి దక్షిణాపథమునకు వెళ్లి, మరల తిరిగిరాకుండెను. కాబట్టి వింధ్య పెరుగుట మానుకొనినది. పార్వతీపరమేశ్వరుల వివాహకాలములో దేవతలు కైలాసములో గుమికూడినపుడు భారముచే భూమి ఉత్తరభాగము క్రిందికిదిగినట్లును, దానిని సమానస్థితిలో ఉంచుటకు మహర్షులచే ప్రార్థితుడై అగస్త్యుడు దక్షిణమునకువచ్చి తనశక్తిచే భూమిని సమతులితస్థితియందుంచెను. అగస్త్యుడు 'పీతోదధి'-అనగా సముద్రమును ఆచమనము చేసినవాడు.

ఈ పౌరాణికగాథలను ఆధారముచేసికొని పాశ్చాత్య శాస్త్రపరిశోధకులు ఆర్యులు ద్రావిడదేశముపై దాడిచేసి,

దక్షిణాపథమునంతయు ఆర్యాక్రాంతము చేసిరని వ్రాసి యున్నారు. ఆ వ్రాతలు చాలమంది ఆమోదించుచున్నారు. వారి అద్భుత మేధాసంపదకు భారతీయుల అభినందనములు.

గోడపై మొత్తుకొనిన గుడ్డివాడెవరిని దూషించును? అతిసూక్ష్మతర జ్యోతిశ్శాస్త్రవిషయములు దురవగాహము లైనప్పుడు పాశ్చాత్యశాస్త్రజ్ఞులు తమయందుండు అంధత్వ మును కనుగొనక వరాహమిహిరాదులయందు దోషా రోపణము చేసిరి. దానికి మనవారు కరతాళములొనర్చిరి.

> "భానోర్వర్త్మ విఘాత వృద్ధశిఖరో వింధ్యాచలస్తంభితః
> పీతశ్చాంబునిధి స్తపోంబునిధినా యామ్యాచదిగ్భూషితా
> తస్యాగస్త్యమునేః పయోద్యుతికృతశ్చారః సమాసాదయమ్"
> [బృహత్సంహిత].

"తపస్సునకు సముద్రమువంటివాడును, సూర్యమార్గావ రోధి యగుచు విజృంభించు వింధ్యాచల శిఖరములను అణగద్రొక్కినవాడును, సముద్రజలము పానము చేసిన వాడును, దక్షిణదిక్కును భూషించినవాడును, అగు అగస్త్యమునియొక్క చారమును వివరించుచున్నాను."

అగస్త్యుడు తపోంబునిధి అనగా ఉద్దేశమేమియో, ఆర్యావర్తవాసులకు సాక్షాత్కరింప వలయుననియా? ఉండవచ్చును. అతని సాక్షాత్కారవర్ణనను గురించి కనుగొందము.

> శ్లో. సముద్రాంతః శైలైర్మకర నఖరోత్ఖాత శిఖరైః,
> కృతస్తోయోచ్ఛిత్యా సపది సుతరాం యేన రుచిరః
> పతన్ముక్తామిశ్రైః ప్రవర మణిరత్నాంబు నివహైః
> సురాన్ ప్రత్యావేష్టుం మితముకుట రత్నానివ పురా.

"సముద్రగర్భమునందుండు పర్వతముయొక్క శిఖరములు మకరనఖభేదితములు. వానిసహాయమున దీప్తిమంతుడై దక్షిణ దిగ్భూషణుడగు అగస్త్యమహర్షి సముద్రజలమును పూర్వము ఇంకించెను. దీప్తిమంతములగు నవరత్నములు పర్వతశిఖరములందుండి పడు సెలయేళ్లవలె కనిపింప, మితరత్నాభరణ భూషితులగు సురలను మరలచూచుటకు లేదా చుట్టుటకు (ప్రత్యావేష్టు) అగస్త్యముని ఏతెంచెనా యని తోచెను."

ఇందెంతటి అతిశయములగు జ్యోతిషవిషయము లిమిడియున్నవి! పూర్వకాలమునందు అగస్త్యఋషి (నక్షత్రము) దక్షిణభాగమున ఆవిర్భవించినపుడు నవరత్న కాంతితుల్యములైన అమితములగు నక్షత్రములు కనబడెను. అవియన్నియు మకరరాశియందుండెను. ఇదియొక అద్భుత జ్యోతిషదృశ్యము. తర్వాత అది పురాణగాథ అయ్యెను.

గణిత శోధన: విషుచలనముచే ఉత్తరధ్రువము కదంబము చుట్టి సుమారు 24° ల దూరమునందు 27,000 సంవత్సరములలో ఒక పూర్తిభ్రమణము చేయును. (చూ. విషుచలనము).

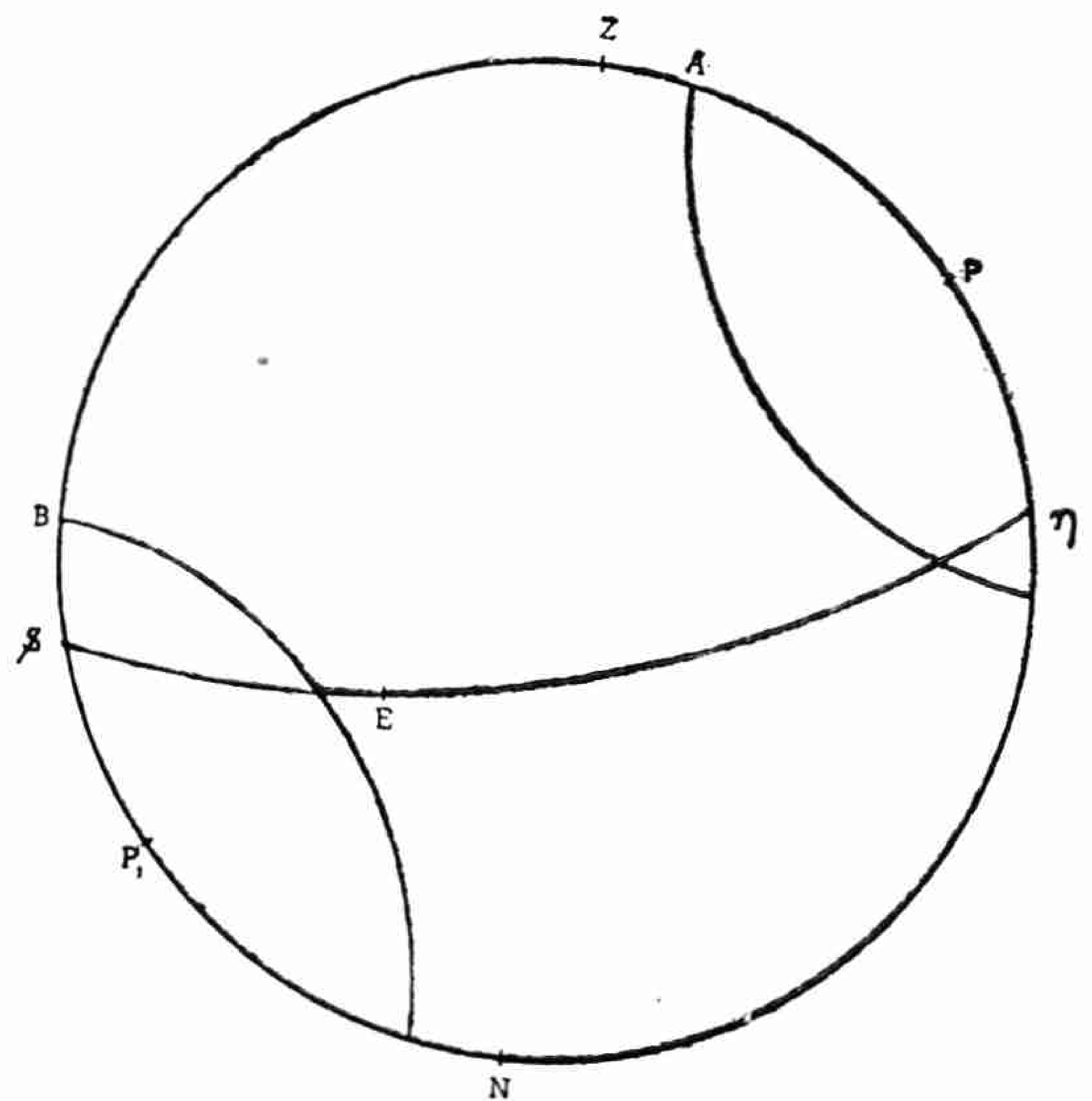
ఆర్యావర్తవాసులకు ఇందువలన కొంతకాలము అగస్త్యుడు దృశ్యముగాను, కొంతకాలము అదృశ్యము గాను దక్షిణసముద్రమునందు మరుగుపడి తపస్సు చేయు చున్నట్లుండెను.

అగస్త్యనక్షత్రము దక్షిణభాగవాసి, వరాహమిహిరుని కాలములో ఆ నక్షత్ర ధ్రువకము 90°, దక్షిణ విక్షేపము 80°.

ఉజ్జయినీవాస్తవ్యుడు వరాహమిహిరుడు. అతనికెప్పుడు దక్షిణదిగ్భాగస్థుడగు అగస్త్యుడు కనబడును? ఆ విషయము కనుగొందము.

చిత్రము 55లో ఉజ్జయినీ పురజ్యోతిష్కుని ఖగోళ దృశ్యము చూపబడినది. ఉజ్జయినీపుర ఉత్తర అక్షాంశము 24°.

వృత్తము PZN, యామ్యోత్తరవృత్తము(మెరిడియన్ సర్కిల్) sn. ఇందు n ఉత్తరబిందువు, s దక్షిణబిందువు.



చిత్రము 55

Z మస్తకము (జెనిత్), N పాతాళము (నాడిర్), P ఉత్తర ధ్రువము, P_1 దక్షిణధ్రువము, nEs క్షితిజము (హొరైజన్), సిద్ధాంతరీత్యా $Pn = P_1s = 24°$.

క్షితిజముపై ఉత్తరధ్రువముయొక్క ఎత్తు(ఆల్టిట్యూడ్) లేదా వేధ ప్రేక్షకుని అక్షాంశమునకు సమానము.

గ్రహములు, నక్షత్రములు ధ్రువముచుట్టు తిరుగుచుండి, దానికి సమానదూరములో ఎల్లప్పుడును ఉండును. అట్టి సమానదూరమునకు, ఉత్తరధ్రువాంతరము(నార్త్‌పోలార్ డిస్టెన్స్) అని పేరు.

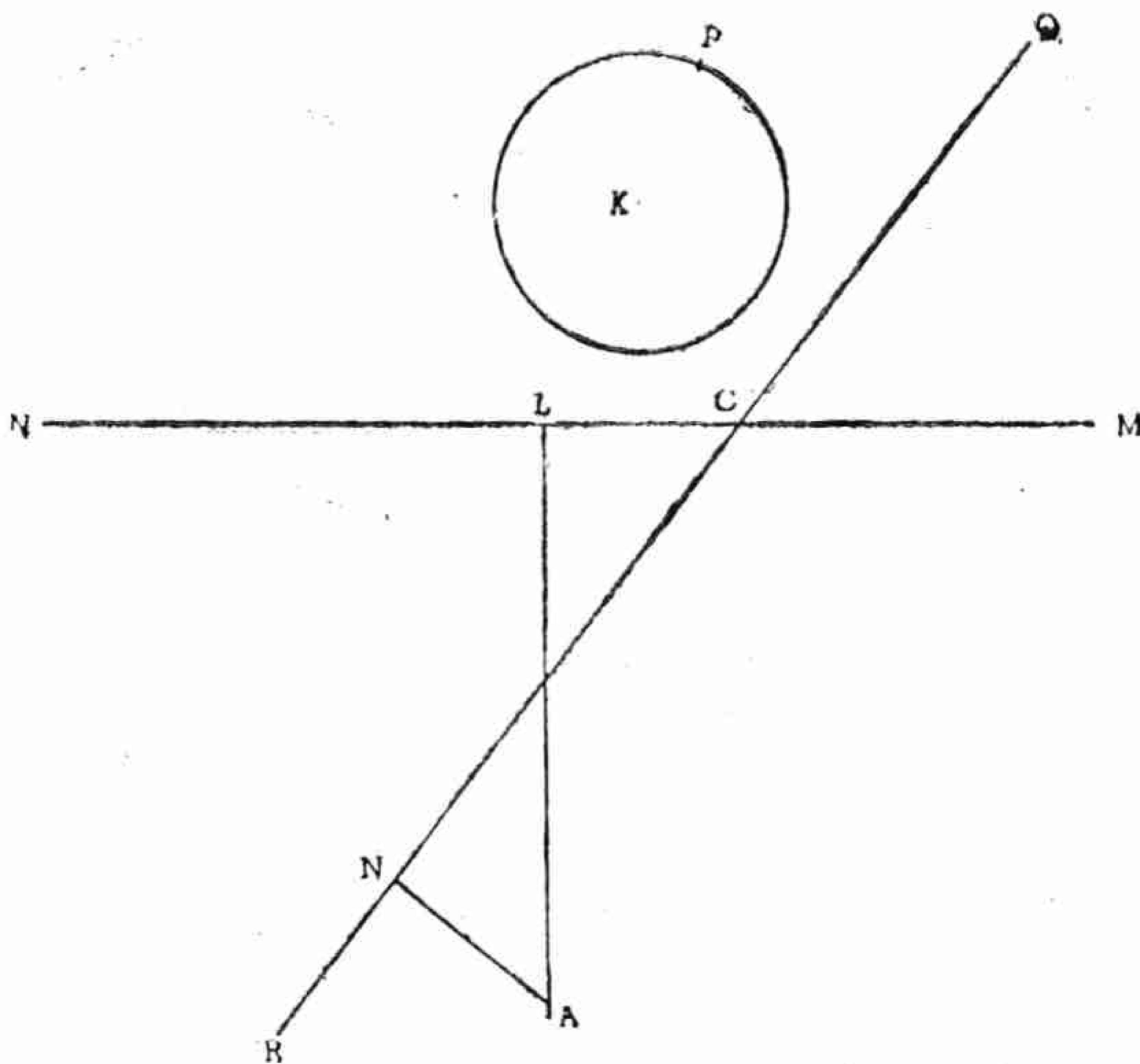
A ఉత్తర మండలములోను B దక్షిణ మండలములోను ఉండు రెండు నభోమూర్తులు (సెలెస్టియల్ ఆబ్జెక్ట్స్) యొక్క ఉత్తరధ్రువాంతరము AP; B యొక్క దక్షిణ ధ్రువాంతరము BP_1.

నభోమూర్తులు క్షితిజముపై నుండునపుడు దృశ్యములు, క్రిందికి పోయినపుడు అదృశ్యములు.

A P కంటె Pn ఎక్కువయైన నభోమూర్తికి ఉదయాస్తమానములుండవు; తక్కువయయిన ఉదయాస్త మానము లుండును. అట్లే P_1B కంటె P_1s తక్కువ యయిన B కి ఉదయాస్తమానములు కలవు. ఎక్కువ యయిన B ఎల్లప్పుడును క్షితిజము క్రిందనుండి ఉత్తర ఖండవాసులకు అదృశ్యమైయుండును.

కొన్ని శతాబ్దములకు, లేదా సహస్రాబ్దములకు పూర్వము విషుచలనముచే అగస్త్యుని దక్షిణ ధ్రువాంతరము 24° కంటె ఎక్కువయై, దక్షిణాకాశ భాగములోని నవరత్నతుల్యములగు నక్షత్రములను మన దృష్టి పథములోనికి తెచ్చి, వింధ్యపర్వతముపైకి వచ్చి, సముద్రములోని నీటినంతయు తన తపోబలమున ఆచమనము చేసి (త్రాగి), అగస్త్యుడు ఇంకించెనాయని వరాహమిహిరుని శ్లోకములవలన తెలియుచున్నది.

అగస్త్యుని దక్షిణధ్రువాంతరము మారుటకు కారణమేమి? విషు చలనము. ఇది ఎట్లు అను విషయమును కనుగొనవలయును.



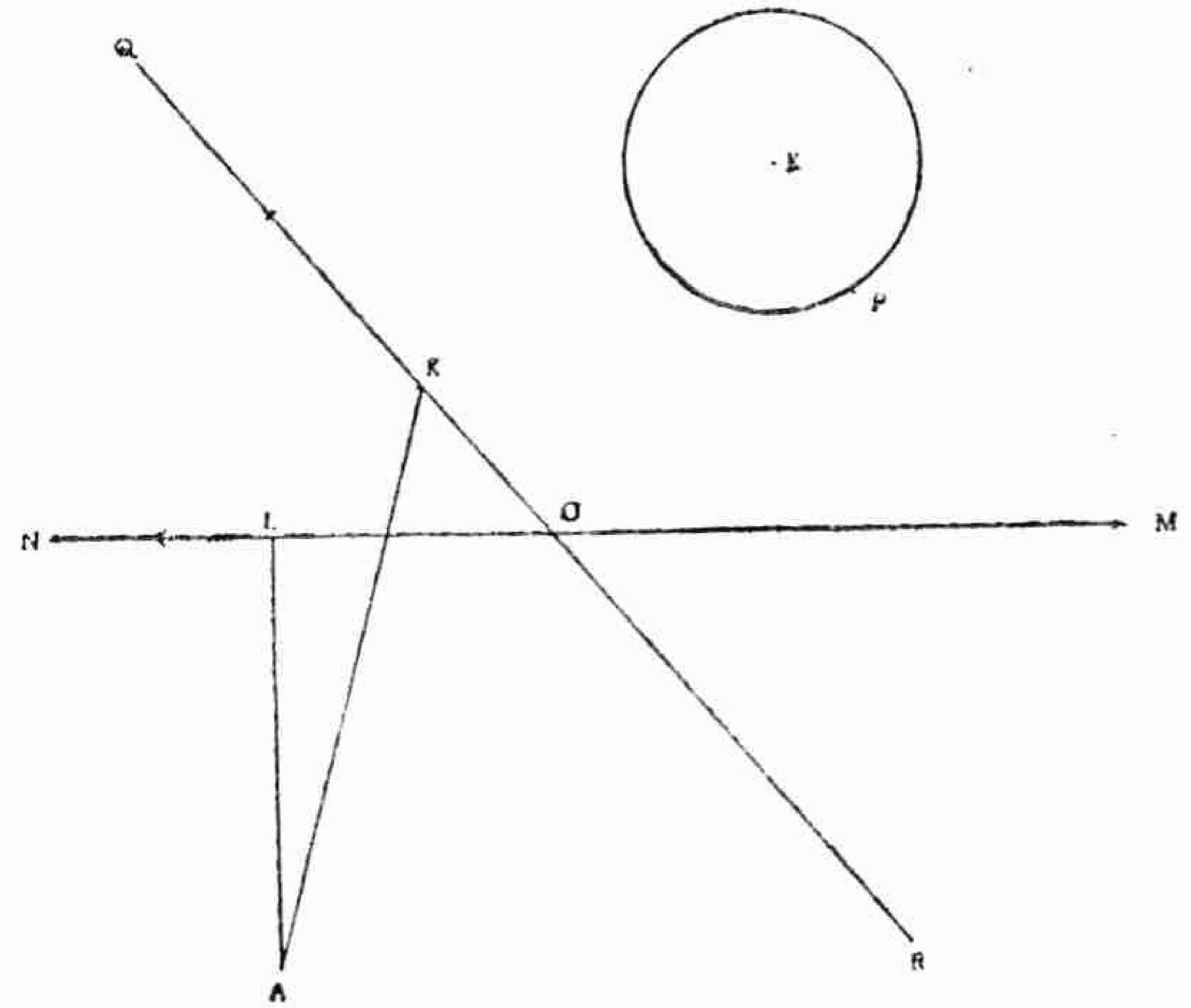
చిత్రము 56

K కదంబము — క్రాంతివృత్తము (ఎక్లిప్టిక్) యొక్క ధ్రువము; P ఉత్తరధ్రువము—విషువృత్తము (సెలెస్టియల్ ఈక్వేటర్) యొక్క ధ్రువము.

విషుచలనముచే K కేంద్రముగా P బిందువు 24° వ్యాసార్థముతో ఒక అల్పవృత్తమును రచించును.

A - అగస్త్యుడు, MN - క్రాంతివృత్తము, RQ విషువృత్తము. అగస్త్యుడు దక్షిణఖండవాసి; RQ రేఖకు దిగువ నుండవలయును. విక్షేపము AL (సెలస్టియల్ లాటిట్యూడ్) = 80°. QCN కోణము 24°అయినచో A యొక్క క్రాంతి (డెక్లినేషన్) AN సుమారు 80° + 24° = 104° ఉండును. క్రాంతి 90° కంటె ఎక్కువయుండును. కాబట్టి 104° లో నుండి 90° తీసివేసినచో అగస్త్యుని దక్షిణ ధ్రువాంతరము 14° వచ్చును.

P యొక్క భ్రమణముచే విషువృత్తము యొక్క స్థితి మారుచుండును. 57 వ చిత్రము చూడుడు. A యొక్క



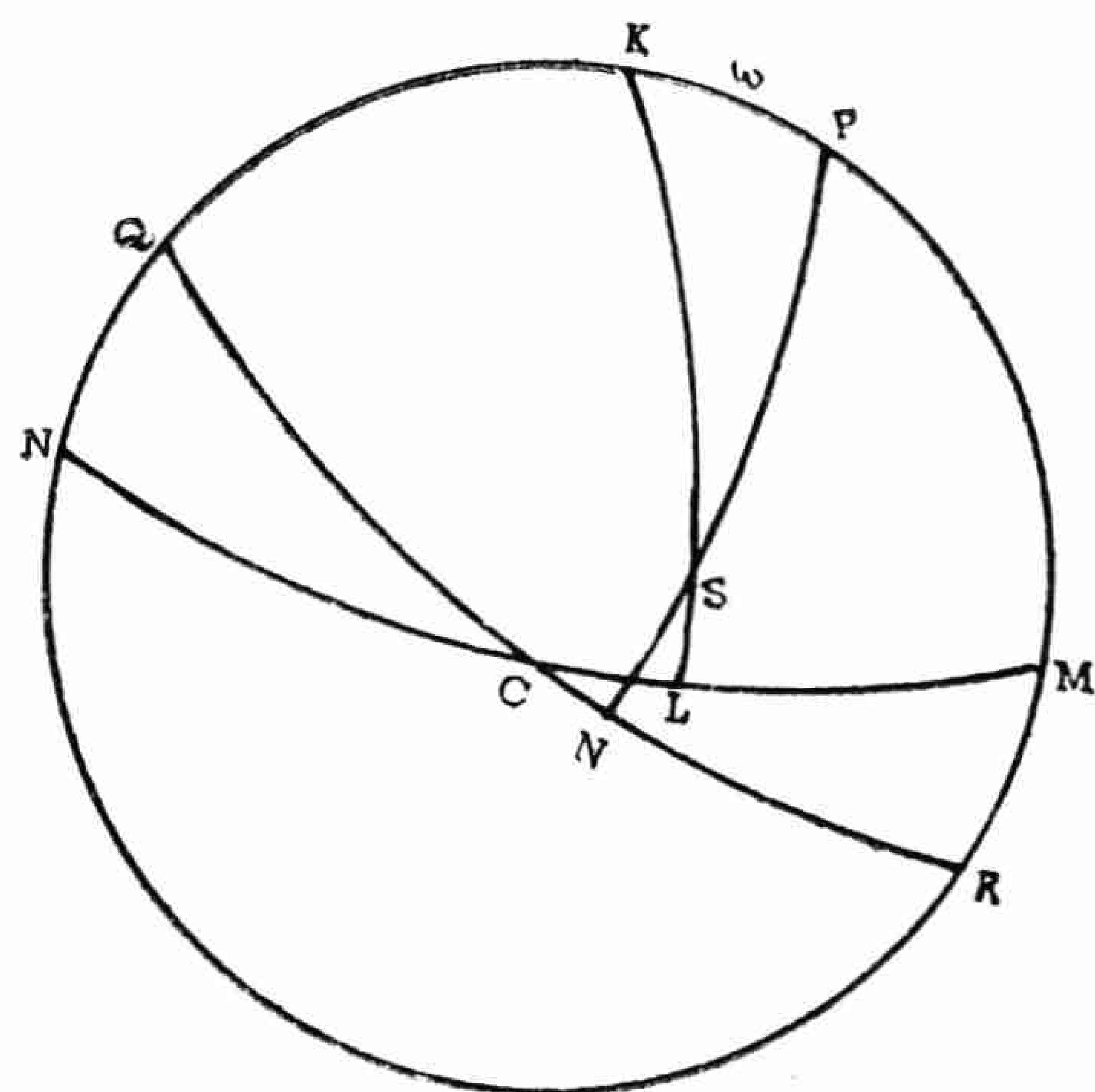
చిత్రము 57

క్రాంతి AN = 80° − 24° = 56°. A యొక్క దక్షిణ ధ్రువాంతరము 90° − 56° = 34°. ఇది ఉజ్జయినీ అక్షాంశకు ఎక్కువయినందున ఉజ్జయినీవాసులకు అగస్త్యుడు ఇట్టి కాలమున కనబడును. ఉత్తర అక్షాంశము 34° వరకు కల దేశములో నుండువారికే అగస్త్యచార అనుభవము కలుగును.

గోళీయత్రికోణమితి నవలంబించినను ఇవే విలువలు వచ్చును. A యొక్క ధ్రువకము ఒకప్పుడు 90° తర్వాత 270° అయినందున గణితము సులభమయినది,

ఆవిర్భావకాలము : గోళీయత్రికోణమితి మూలమున ఆవిర్భావకాలము కనుగొనవచ్చును. వరాహమిహిరుడు అగస్త్యుని ధ్రువకము = 90°, దక్షిణవిక్షేపము = 80° అని ఇచ్చియున్నాడు. అపుడు వసంతవిషువు(వెర్నల్ ఈక్వినాక్స్) 7 అశ్వినిలో నుండెను. అతని కాలములో అగస్త్యుని క్రాంతిని కనుగొందము.

క్రింది 58 వ చిత్రములో K కదంబము, MN క్రాంతి వృత్తము. P ఉత్తరధ్రువము, QR విషువృత్తము,



చిత్రము 58

S నక్షత్రము, KSL, PSN క్రమేణ క్రాంతి విషువృత్తములకు లంబ (గౌణ) వృత్తములు. గోళీయ కోణము KPS నుండి పరివర్తన సూత్రముల కనుగొనవచ్చును.

నక్షత్రము S యొక్క విషువాంశ $= CN = \alpha$ (రైట్ ఎసెన్షన్)

క్రాంతి $= NS = \delta$

(డెక్లినేషన్)

ధ్రువకము $= CL = \lambda$

(లాంగిట్యూడ్)

విక్షేపము $= LS = \beta$

(లాటిట్యూడ్)

గోళీయత్రిభుజముKSPలో

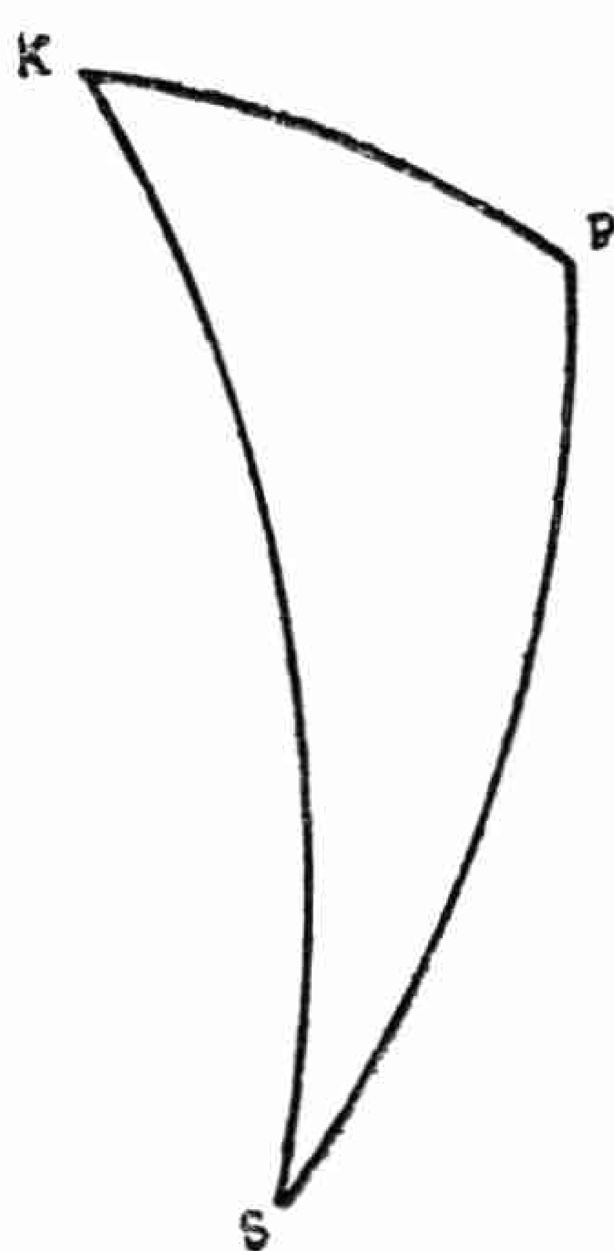
$KS = 90^\circ - SL = 90^\circ - \beta$

$PS = 90^\circ - SN = 90^\circ - \delta$

$KP = \omega =$ క్రాంతి విషువృత్తముల మధ్యకోణము.

$\angle PKS = 90^\circ - \lambda$

$\angle KPS = 90^\circ + \alpha$



చిత్రము 59

చిత్రము 59నుండి పరివర్తన సూత్రము కనుగొనవచ్చును.

$\cos PS = \cos KP \cos KS + \sin KP \sin KS \cos PKS$

కో. జీ PS = కో. జీ KP కో. జీ KS + జీ KP. జీ KS కో. జీ. PKS

[జీ = జీవ = sine, కో. జీ = కోటిజీవ = cosine.]

కో. జీ $(90^\circ - \delta)$ = కో. జీ ω. కో. జీ $(90^\circ - \beta)$ + జీ ω. జీ $(90^\circ - \beta)$. కో. జీ $(90^\circ - \lambda)$

$\therefore$ జీ δ = కో జీ ω. జీ β + జీ ω. కో.జీ β. జీ λ,

$\sin\delta = \cos\omega \sin\beta + \sin\omega \cos\beta \sin\lambda$,

వరాహమిహిరుని కాలములో

$\omega = 24^\circ,\ \beta = -80^\circ,\ \lambda = 90^\circ$

$\therefore \sin\delta = -\cos 24^\circ \sin 80^\circ + \sin 24^\circ \cos 80^\circ \times 1$

$= -\sin(80^\circ - 24^\circ) = -\sin 56^\circ \therefore \delta = -56^\circ$

అగస్త్యుని దక్షిణ క్రాంతి 56°; ధ్రువాంతరము 34°, విషుచలనమువలన λ యొక్క విలువ 270° అగును. అప్పుడీ సూత్రమువలన $\delta = -104^\circ = -(90^\circ + 14^\circ)$ అగును. అగస్త్యుని ధ్రువాంతరము 14°, అపుడు వసంత విషు బిందువు చిత్తమధ్యలో నుండి యుండవలయును.

విషుచలనము ఒక పూర్తి భ్రమణము చేయుటకు వరాహమిహిరుని గణిత ప్రకారము 28,800 సంవత్సరములు. ఆ కాలములో అగస్త్యుని దక్షిణధ్రువాంతరము 14° నుండి 34° వరకు అధికమగును. ధ్రువాంతరములోని మార్పు 0° నుండి 20° వరకు అధికను అయి క్రమేణ 0° వరకు తగ్గును. దక్షిణధ్రువాంతరము 24° ఉండినపుడు అనగా 10° ఎక్కువ అయినపుడు ఉజ్జయినీవాసులకు అగస్త్యుని ఆవిర్భావము అగును. ఇది వరాహమిహిరుని కాలమునకు 7,200 సంవత్సరములు పూర్వము జరిగి యుండవలయును. అనగా సుమారు క్రీ. పూ. 73 శతాబ్దములకు ముందు జరిగిన జ్యోతిష సంఘటన కథగామారెను. విట్నీ పండితునికిది దురవగాహ మయ్యెను. అప్పుడు ఉత్తర ధ్రువము కదంబమునకు పైకివెళ్లెను. ఉజ్జయినీ వాసులకు పెక్కు నక్షత్రములు కనిపించెను. దక్షిణధ్రువము వారికి దగ్గరకు వచ్చినట్లు లేదా పైకి లేచినట్లాయెను. శివపార్వతుల వివాహమునకు దేవతలు ఉత్తరమున చేరినపుడు అచట భారము ఎక్కువయై భూమి క్రుంగినట్లును, దానిని సరిపరచుటకు అగస్త్యుడు దేవబ్రాహ్మణప్రార్థితుడై దక్షిణము వెళ్లి భూమిని సమస్థితియందుంచి నట్లును పౌరాణిక గాథ ప్రచారమునకు వచ్చెను. తపోంబునిధియను పదమును, తాను మరలివచ్చువరకు వింధ్యపర్వతము పెరుగకూడదను వాక్యమును అర్థగంభీరములని పండితులు గ్రహింతురు గాక.

ఆచార్య.

అతిపరాస : చూ. 1.నిరూపక జ్యామితి, 2.వక్రములు.

అద్భుత గణకులు: కాలపథ మందచ్చటచ్చట అన్ని దేశములందును అతికఠిన అంకగణిత సమస్యలను మనస్సు నందే అతి శీఘ్రకాలములో సాధించు సామర్థ్యము గల వ్యక్తులు అగపడుచునే ఉన్నారు. వీరు సాధారణముగ

అనక్షరాస్యులు, చూపులేనివారును. మీరెట్లు ఈ లెక్కలు చేయగలుగుచున్నారు? అని ప్రశ్నించబడినపుడు వారు తగిన సమాధానమును చెప్పలేకున్నారు. తన విధానముల వివరణమును గురించి నిర్బంధించబడిన జెరాకోల్‌బర్న్ 'దేవుడు వీటిని నాబుర్రలో పెట్టినాడు. వాటిని మీ బుర్రలలో నేను పెట్టలేను' అని జవాబు చెప్పినాడు. 17 వ శతాబ్దమునకు చెందిన ఎనిమిదేండ్ల ఫ్రెంచి బాలుడు చూడగనే అంకెల ఘనమూలములు లెక్కగట్టగలిగేవాడు. 18వ శతాబ్దపు విద్యాగంధరహితుడగు యునైటెడ్ స్టేట్స్ వాసిని ఒకడు 7 ఏండ్ల 17 దినముల 12 గంటలలో ఉన్న సెకనుల మొత్తపుసంఖ్య $1\frac{1}{2}$ నిమిషములో లెక్కించి చెప్పెను. ప్రసిద్ధ భౌతికశాస్త్రవేత్త ఆంపియర్ 4 ఏండ్ల వయస్సులో గులకరాళ్లతో పెద్దపెద్ద లెక్కలు చేయుచుండెడివాడు. పసితనముననే అద్భుత గణనసామర్థ్యమును చూపి, తరువాత లోకప్రసిద్ధ గణితజ్ఞులయిన వారలలో గౌస్ ఒకడు. తోటకూలీలకు వేతనముల వితరించుటలో తనతండ్రి కూడికలోచేసిన తప్పును అతడు మూడేండ్ల వయసువాడై ఉన్నప్పుడు చూపించగలిగెను. నిజమునకు అతడు మాట్లాడుట నేర్వకమునుపే లెక్కలు చేయు సామర్థ్యము తనకు అలవడినదని ప్రగల్భోక్తులు పలుకుచుండెడివాడు.

హామిల్టన్: చతుష్కములు ఆవిష్కరించిన ఐర్లాండ్ దేశపు ప్రతిభావంతుడు హామిల్టన్ పైనచెప్పిన జేరా కోల్‌బర్న్‌తో లెక్కలలో పోటీకి దొరకొని, అతనితో సమానముగ నెగ్గినాడు.

బక్స్టన్(జననము 1707) కూడ అద్భుత గణకుడు. "426 అడుగులు పొడవు, 263 అడుగులు వెడల్పు, $2\frac{1}{2}$ అడుగులు లోతుగల కొలను నిర్మించుటకు ఎన్ని ఘనపు గజముల మట్టిని నేలనుండి తీసివేయవలెను" అని అడిగినపుడు ఆతడు 15 నిమిషములలో సరైన జవాబు చెప్పగలిగెను. ఎనిమిదేండ్ల వయస్సునాడు జేరాకోల్‌బర్న్ (జన్మ లండన్ 1804 లో) 8^{16} మూల్యమును కొన్ని సెకనుల వ్యవధిలో యథార్థముగ లెక్కగట్టగలిగెను. తరువాత అతడు 2, 3, ………… 9 అను అంకెలను 10 వ ఘాతములకు హెచ్చించవలసినదిగా కోరబడినపుడు, దగ్గర ఉన్న లేఖకుడు వ్రాయలేనంత శీఘ్రముగా ఫలములు చెప్పగలిగెను. 171,395 యొక్క విభాజకములు చెప్పమని అడిగినవెంటనే 5, 7, 59, 83 అను సంఖ్యలు దాని విభాజకములని చెప్పగలిగెను. 36,83 కు విభాజకముల వెల్లడించవలసినదిగా కోరబడినపుడు దానికి విభాజకములు లేవని అతడు బదులుచెప్పెను.

బిడ్డర్: 1806 లో ఇంగ్లండులో జనించిన బిడ్డర్ (ఒక రాతిపనివాని పుత్రుడు) మరియొక అద్భుత గణకుడు. ఈతని 9 వ ఏటనే ఈతని గణనాకౌశలము ప్రకటితమాయెను. ఈతని తండ్రి ఈతని సామర్థ్యమును ప్రదర్శించి ధనము ఆర్జించుచుండెడివాడు. అతడుజవాబులిచ్చిన కొన్ని ప్రశ్నలు, కాలవ్యవధులు క్రింద ఈయబడినవి:

ఒక గడియారపు లోలకము ఒక సెకనులో $9\frac{3}{4}$ అంగుళముల దూరము కంపించినచో, 7 ఏండ్ల, 14 రోజుల 2 గంటల, 1 నిమిషము, 56 సెకనులలో (365 రోజులు, 5 గంటలు, 48 నిమిషములు, 55 సెకనులు సంవత్సరములో ఉన్నవని తీసికొని) అది ఎంతదూరము కంపించును?

జవాబు 2, 165, 625, $744\frac{3}{4}$ అంగుళములు అని ఒక నిమిషములో చెప్పబడినది.

119, 550, 669, 121 యొక్క వర్గమూలమెంత? 30 సెకనులలో ప్రకటించబడిన జవాబు 345,761. భూమినుండి చంద్రబింబమును చేరుటకు ఎన్ని ఎద్దు తోకలు కావలెను? అని అడిగినపుడు బిడ్డర్ చాలినంత పొడవుగలిగిన తోక ఒక్కటియే చాలునని బదులు చెప్పెను. తరువాత బిడ్డర్ చదువుకొని, బి. ఏ. డిగ్రీ సంపాదించి, పేరుపొందిన ఇంజనీర్ అయినాడు. అతని గణనాసామర్థ్యము జన్మాంతము దాక నిలచి ఉండెను.

దాసే: ఇంకొక గణన ప్రతిభావంతుడు జర్మనీ దేశీయుడైనదాసే (జననము 1840). 79, 532, 853 ను, 93, 758, 479తో గుణించగా వచ్చు ఫలమును 54 సెకనులలో తెలియ చెప్పినాడు. ఇరువదేసి అంకెలుగల రెండు సంఖ్యల గుణకార లబ్ధమును ప్రకటించుటకు అతనికి 6 నిమిషములు పట్టినది. 40 అంకెల సంఖ్యను అట్టి మరియొక సంఖ్యచే గుణించి ఫలము తెల్పుటకు 40 నిమిషములు అతడు తీసికొనెను. ఆ రెండు సంఖ్యలు నూరేసి అంకెలు గలిగి ఉన్నప్పుడు అతడు గుణన ఫలమును సాధించుటకు 8 గంటల 45 నిమిషములు తీసికొనెను. అతడు ఒకప్పుడు నూరు అంకెలుగల సంఖ్యకు వర్గమూలమును 52 నిమిషములలో తేల్చివేసినాడు. కాని అతని జవాబులు కొన్ని సమయములలో ప్రమాదములకు గురి అగుచుండెను. తక్కిన గణకులవలె ఈతని ధారణశక్తిగూడ అత్యద్భుతమైనది. తానిచ్చిన తన సామర్థ్యప్రదర్శనము ముగించిన ఒకటి రెండు గంటల తరువాతకూడ, అతడు ఆ ప్రదర్శనమందు తాను పనిగలిగి ఉండిన సంఖ్యలు అన్నిటిని మరల చెప్పగలిగెడివాడు. ఒక్కమారు చూచి గొర్రెలమందలో ఎన్ని గొర్రెలున్నవో (30 వరకు) లెక్క చెప్పువాడు

కాగితము, కలము చేతిలో ఉన్నచో, అతడు అతియథార్థముగ శీఘ్రముగ లెక్కల చేయుచుండెడివాడు.

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$$

అను సూత్రమును ఉపయోగించి π యొక్క యథార్థమూల్యమును 200 ల దశమాంకముల వరకు లెక్కగట్టెను. దీనిని ఇతడు రెండు నెలలలో ముగించెను.

ఇటలీ, గ్రీస్, ఇండియా దేశములలో, ఇంకను ఇతర చోట్ల ఉద్భవించిన అద్భుత గణకులు అనేకులు కలరు. ఇటలీ దేశపు గొర్రెలకాపరి ఇనాడీ (జననము 1867) మామూలు లెక్కలుగాక, ఒకటి 4 అంకెలుగల సంఖ్యను నాలుగు వర్గ సంఖ్యల సంకలన ఫలముగా నిరూపించగల వాడై ఉండెను. ఇట్టి బుద్ధిప్రయోగములందు కలుగు మానసిక గ్లాని అత్యంతమైనది.

దక్షిణ భారతదేశములో నేడు సజీవులైన అద్భుత గణకులు ఇద్దరు కలరు. అందు ఒకడు ఆంధ్రుడు - శ్రీ లక్కోజు సంజీవరాయశర్మ ; రెండవవాడు తమిళుడు - శ్రీ గురుస్వామి పిళ్ళె (చూ. గురుస్వామిపిళ్ళె; సంజీవ రాయ శర్మ, లక్కోజు).

ఆ. న.

అనంత పరంపరల ఉపసరణత : 1. ఒక సంకలన పరంపర :

$$A \equiv a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

తీసికొనెదము. దీనియందు మొదటి n పదముల సంకలన ఫలితమును S_n అని వ్రాసెదము. అనగా

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \dots \quad \dots \qquad (2)$$

పదములు వాస్తవసంఖ్యలుగనో, సంకీర్ణసంఖ్యలుగనో ఉండవచ్చును. n అనంతమగునపుడు, S_n ఒక అవధి S ను సమీపించినచో, A ను ఒక ఉపసరణ పరంపర (కన్‌వర్జెంట్ సీరీస్) అనియు దాని సంకలనము S అనియు చెప్పెదము. అటులుకాక $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు s_n అనంతమైనచో, పరంపర A ను అపసరణ పరంపర (డైవర్జెంట్ సీరీస్) అనెదము. ఈ రెండు ప్రవర్తనలుకాక S_n ఊగులాడవచ్చును (ఆసిలేటింగ్). అప్పుడును అది ఉపసరణపరంపర కాదు; అది డోలాయమానపరంపర.

S_n యొక్క విలువకు ఒక సులభమైన సమాసమున్నచో, దానినుండి $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు S_n ప్రవర్తన కనిపెట్టవచ్చును.

ఉదా : $1 + r + r^2 + \dots r^n \quad \dots \quad \dots \qquad (3)$

అను పరంపరను తీసికొనుము. దీని సంకలన ఫలము $(1 - r^n)/(1 - r)$ అగుచున్నది. ఇచ్చట r వాస్తవ సంఖ్యగనుండి దాని ప్రకేవలవిలువ (చూ. ప్రకేవల విలువ) $|r| < 1$ గ ఉన్నచో, $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు $r^n \longrightarrow 0$ అగును. కనుక $-1 < r < 1$ అగునపుడు (3) ఒక అనంత ఉపసరణపరంపర; దాని విలువ $1/(1 - r)$ అగుచున్నది.

అయితే ఎన్నో సమయములలో, S_n యొక్క అవధి కనిపెట్టుట కష్టము. అట్టి సమయములలో S_n కు అవధి ఉన్నదా ? లేదా ? అనగా దత్తపరంపర ఉపసరణ పరంపరయా ? కాదా ? అని మాత్రము కనుగొనుటకు మార్గములను పరిశీలించెదము.

ఉపసరణతకు అవశ్యమైన నిబంధన ఒకటి యున్నది. అది ఏమనగా $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు $a_n \longrightarrow 0$ అగుటయే. దీని ఆవశ్యకత సులభముగా గ్రహింపవచ్చును. ఏలన అవధి S ఉన్నచో $a_1 + \dots + a_{n-1} \longrightarrow S$; $a_1 + \dots a_{n-1} + a_n \longrightarrow S$. కనుక $a_n \longrightarrow 0$. అయితే ఇది మాత్రమే చాలదు. ఉదా : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n}$ పరంపరలో n వ పదము $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$. అయినను కావలసినన్ని పదములు తీసికొనినచో n పదముల సంకలన ఫలమునకు పరిమితియే లేదు. దీనిని చూచుటకు ఈపరంపరను

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots \frac{1}{16}\right) + \dots$$

అని వ్రాసెదము.

ఇచ్చట $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{9} + \dots \frac{1}{16}\right) > \frac{1}{2} \quad \dots \quad \dots$$

కనుక పరంపరసంకలనఫలితము

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

అగుచున్నది. అనగా అనంతమగుచున్నది.

పరంపరలలో చాల సరళమైనవి ధనాత్మక సంఖ్యల పరంపర. అనగా $a_n > 0$. ఇట్టి పరంపరలలో n పెరుగగా S_n పెరుగుచునేయుండును. ఎపుడునుతగ్గదు. కనుక, ఇట్టి పరంపరలలో $S_n \longrightarrow \infty$ కావచ్చును ; అనగా అవి అపసరణ పరంపరలై యుండవచ్చును, లేదా ఎల్లపుడు S_n మితసంఖ్యకు తక్కువై యుండవచ్చును. అనగా $S_n < k$. (n అన్నివిలువలకును)- ఇట్టి సందర్భములలో S_n ఏదో ఒక అవధి S_n ను సమీపించియేతీరవలెననియు, ఈ అవధి

$\le k$ అనియు నిరూపించవచ్చును. అనగా ధనాత్మక సంఖ్యల పరంపరలు ఊగులాడవు. ఉదా :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\frac{1}{n!}+\dots$$

పరంపర తీసికొనుము. ఇచ్చట అన్నిపదములు ధనాత్మకములు. n పదముల సంకలన విలువ ఎల్లప్పుడును < 3 అని నిరూపించవచ్చును. కనుక ఇది ఒక ఉపసరణ పరంపర. దీని విలువ $e = 2{\cdot}71828 \dots \dots < 3$. ఇది ఒక ప్రసిద్ధ కరణీయ సంఖ్య.

తారతమ్య పరీక్షలు : ఒక ధనాత్మక సంఖ్యా పరంపర యొక్క ఉపసరణతను పరిశోధించుటకు మరియొక మార్గమున్నది. దత్త పరంపర Σa_n అనుకొనెదము. Σb_n మరియొక ధనాత్మక పరంపర అనియు అది ఉపసరణపరంపరయు అనుకొనెదము. అపుడు $a_n < cb_n$ (ఇచ్చట c ఒక స్థిర ధనరాశి) అన్ని n విలువలకు నిజమైతే, Σa_n ను ఒక ఉపసరణ పరంపర అగును. ఇదియే సూత్రము. దీని సరిచూచుటకు, $\sum_1^n a_n < c\sum_1^n b_n$ అను హెచ్చుతగ్గు సంబంధమును గమనించెదము. Σb_n ఉపసరణ పరంపర అని ఇచ్చియున్నది. కనుక దాని సంకలన విలువ B అయినచో $\sum_1^n b_n < B$, కనుక $\sum_1^n a_n < CB$. అనగా Σa_n ఉపరిబద్ధమైనది, కనుక అది ఉపసరణ పరంపర.

అటులనే ఒక దత్తధనాత్మక పరంపర Σb_n అపసరణ పరంపర అనియు, $a_n > cb_n$ (ఇచ్చట c ఒక ధనాత్మక స్థిరరాశి) అనియు ఉన్నచో, Σa_n ఒక అపసరణ పరంపర యగును.

ఉదా: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\dots\dots\frac{1}{n^n}+\dots\dots$

అను పరంపరను తీసికొనుము. ఇచ్చట అన్నిపదములు ధనాత్మకములు. పోల్చుటకు

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\dots+\frac{1}{n^2}+\dots\dots$$

పరంపర తీసికొనుము. ఇది ఉపసరణపరంపర అని మనకు తెలియును. మొదటి పరంపర యొక్క n వ పదమగు $\frac{1}{n^n}$ ఉపసరణ పరంపర యొక్క n వ పదము $\frac{1}{n^2}$ కంటె చిన్నది. కనుక $\Sigma 1/n^n$ ఒక ఉపసరణ పరంపర.

n వ పదములగు a_n, b_n పోల్చుటకు బదులు, రెండు పరంపరలలోను సమీపపదముల నిష్పత్తుల a_{n+1}/a_n, b_{n+1}/b_n హెచ్చుతగ్గును పరిశీలించవచ్చును, a_{n+1}/a_n ఎల్లప్పుడును b_{n+1}/b_n కు తక్కువగనుండి, Σb_n ఉపసరణ పరంపరగనున్నచో, Σa_n కూడ ఒక ఉపసరణ పరంపరయని నిష్కర్షించవచ్చును. ఉదాహరణమునకు $b_n = r^n$, $0<r<1$ అని తీసికొనెదము. ఇది ఉపసరణ పరంపర, కనుక పై సూత్రము ప్రకారము $a_{n+1}/a_n < r < 1$ అయితే, Σa_n ఉపసరణత కలది.

అటులనే Σb_n ఒక అపసరణ పరంపరగ నుండి $a_{n+1}/a_n > b_{n+1}/b_n$ గ నున్నచో (n విలువలన్నిటికిని), అపుడు Σa_n ఒక అపసరణ పరంపరయని నిష్కర్షింపవచ్చును. $b_n = r^n$ $(r>1)$ అయినచో, Σb_n ఒక అపసరణ పరంపర. కనుక $a_{n+1}/a_n > r > 1$ అయినచో (n విలువలన్నిటికిని) Σa_n ఒక అపసరణ పరంపర. ఇచ్చట r ఒక స్థిరరాశి. n పై ఆధారపడి యుండకూడదు.

చయనీయ పరీక్ష (ఇంటెగ్రల్ టెస్ట్): ఇదియు మునుపటి శోధనలవలె ధనాత్మక పరంపరలకు అన్వయించును. $f(x)$ ఏదో ఒక దత్తఫలము. $x = 1, 2, 3, \dots$ అన్ని విలువలకు $f(x)$ ధనాత్మకము. x ఎక్కువకాగా $f(x)$ తగ్గుచున్నదనుకొనెదము. అపుడు $\sum^{\infty} f(n)$ పరంపరను $\int^{\infty} f(x)dx$ అనంతచయనమును రెండును ఉపసరణముగనో అపసరణముగనో ఉండును.

ఉదా : $\Sigma \frac{1}{n^r}$ ఉపసరణతను పరీక్షించెదము.

$\int_a^b \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_a^b$ దీని యందు $b \longrightarrow \infty$ అగునపుడు చయన ఉపసరణతకు $r>1$ గా నుండవలెను. కనుక $\Sigma\frac{1}{n^r}$ పరంపర $r>1$ అగునపుడు ఉపసరణ పరంపర, $r<1$ అగునపుడు అపసరణపరంపర. $r=1$ అయితే $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a$. $b\longrightarrow\infty$ అగునపుడు ఇది అనంతమగుచున్నది. కనుక $\Sigma\frac{1}{n}$ అపసరణపరంపర.

ఈ పరీక్షను ఉపయోగించి క్రింది సూత్రములను పొందవచ్చును.

$\Sigma 1/n(\log n)^r$; $r>1$ ఉపసరణపరంపర

$r \le 1$ అపసరణపరంపర

$\Sigma\ 1/n \log (\log \log n)^r$; $r > 1$ ఉపసరణపరంపర
$r \leq$ అపసరణపరంపర.

ఒక అనంత పరంపరయందు ధనాత్మక ఋణాత్మక పదములున్నచో, అన్ని ఋణాత్మక సంఖ్యలను ధనాత్మకములుగా మార్చుము. అపుడు మార్చిన పరంపర ఉపసరణమైతే దత్త పరంపరను, ఉపసరణమే. అపుడు దానికి ప్రకేవల ఉపసరణ పరంపర అని పేరు.

ఉదా : $1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2$ ....ఉపసరణ పరంపర.

కొన్ని పరంపరలు

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \;\dots\; \dots \quad (4)$$

అను రూపములో ఉండును. అనగా ఒక ధనాత్మకసంఖ్య తరువాత ఒక ఋణాత్మకసంఖ్య, ఇట్లు మారిమారి యుండును. ఇట్టి పరంపరల ఉపసరణతకు క్రింద ఇచ్చిన నిర్ణాయికలు చాలును.

(1) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$........అనగా పదముల విలువలు తగ్గుచు నుండవలెను.

(2) $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు $a_n \longrightarrow 0$ గ నుండవలెను.

ఉదా : $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$.......

ఇది పై నిర్ణాయికల ప్రకారము ఉపసరణ పరంపర. అయితే అన్ని పదములను ధనాత్మకముగ తీసికొనినచో, మనకు దొరకు పరంపర $\Sigma\ 1/\sqrt{n}$ ఉపసరణము కాదు. కనుక దత్త పరంపర ఉపసరణత గలది, అయితే ప్రకేవల ఉపసరణ పరంపర కాదు.

అన్ని పరంపరలకు ప్రయోగించదగిన ఒక నిర్ణాయిక నివ్వవచ్చును. ఇది కోషీ నిర్ణాయిక. Σa_n పరంపర ఉపసరణమైతే $| a_{n+1} + a_{n+2} + \dots\dots a_{n+m} |$, n అనంతముకాగా m ఎటులుండినను, శూన్యమును సమీపించవలెను. అనగా $\lim_{n \to \infty} (S_{n+m} = S_n) = 0$. అయితే దీని ఉపయోగము అంతసులభము కాదు.

గుణకార పరంపరలు : ఇపుడు $\Pi_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \dots$ (5) అను గుణకార పరంపరను తీసికొనుము, దీనియందు n పదములున్నవి. n అనంతముకాగా Π_n శూన్యముకాని ఒక అవధిని సమీపించినచో, Π_n ను ఒక ఉపసరణ గుణకార పరంపర అనెదము. $\Pi_n \longrightarrow 0$. లేదా $\Pi_n \longrightarrow \infty$ అయితే, అది అపసరణ గుణకార పరంపర అనెదము. పదములను $(1 + a_r)$ రూపములో వ్రాయుటకు కారణమేమనగా, ఒక ఉపసరణ గుణకారపరంపరలో, పదములు తుదకు 1 ని సమీపించును. కనుక $1 + a_r$ అని వ్రాసినచో a_r తుదకు శూన్యమగును.

(5)కు ఇరుప్రక్కలను లాగరిదమ్‌లను తీసికొనుటచే

$$\log \Pi_n = \sum_{1}^{n} \log (1 + a_r) \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

అని దొరకును. ఇపుడు (6) ఒక సంకలన పరంపర. ఇది ఉపసరణమై, దీని విలువ శూన్యము కాకపోతే, (5) ను ఒక ఉపసరణగుణకారపరంపరే. సంకలనపరంపర ఉపసరణతకు పదములు శూన్యమును సమీపించవలెనని పైన చెప్పియున్నాము. కనుక, (5) యొక్క ఉపసరణతకు $\lim_{n \to \infty} \log (1 + a_n) = 0$ అనునది అవశ్యము. అనగా $a_n \longrightarrow 0$ అనునది అవశ్యము. అయితే ఇదిమాత్రము చాలదు.

$$\text{ఉదా : } \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4^2\pi^2}\right) \quad \dots$$

యొక్క ఉపసరణతను పరీక్షింపుము. n వ పదమునకు లాగరిదమ్ $\Sigma \log \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ ఒక ఉపరణశ్రేణి, కనుక $\Sigma \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ను, దత్త గుణకారపరంపరయు ఉపసరణపరంపరలు.

సి. టి. రా.

అపలోనియస్ (క్రీ. పూ. 260 - 200) : సుప్రసిద్ధ గ్రీక్ గణిత ఖగోళశాస్త్రవేత్త ; అలెగ్జాండ్రియా పరిషత్తునకు చెందినవాడు. శాంకవములపై అతడు వ్రాసిన గ్రంథము ప్రఖ్యాతికెక్కినది. అందు అంతవరకు తెలియవచ్చిన భూతార్థములు సంగ్రహింపబడుటయేకాక, అనేక నూతన విషయములుకూడ చేర్చబడినవి. పరాస, అతిపరాస, దీర్ఘవృత్తము అను పదములను అతడే ప్రవేశపెట్టెను (చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష - పు. 73) గ్రీక్ గణితము.

ఆ. వెం.

అపసరణత : చూ. గణితసమీక్ష - పు. 13.

అమావాస్య : చూ. గ్రహణములు ; చంద్రుడు.

అయనములు : ఒక సంవత్సరమునకు అయనములు రెండు. అవి: ఉత్తరాయనము, దక్షిణాయనము.

ఇపుడు ఉత్తరాయణ కాలము మకరాయనము లేదా మకర సంక్రాంతినుండి కటకాయనము లేదా కర్కాటక సంక్రమణము వరకును, దక్షిణాయన కాలము కర్కాటక సంక్రమణము నుండి మకర సంక్రాంతి వరకును జనులు పాటించెదరు.

పూర్వము సూర్యుడు విషువృత్తమునకు ఉత్తరమున ఉండునపుడు ఉత్తరాయణమనియు, దక్షిణమున ఉండునపుడు దక్షిణాయన మనియు పాటించుచుండిరి. అప్పటి నిర్ణయము ప్రకారము ఉత్తరాయణమున అనగా మేష సంక్రాంతి మొదలు తులా సంక్రాంతి వరకు ఉత్తర ధ్రువ వాసులకు పగలు, దక్షిణాయనమున రాత్రిగాను ఉండును. దక్షిణ ధ్రువవాసులకు ఇది వ్యత్యస్తముగా ఉండును. కాబట్టి ఉత్తర ధ్రువ వాసులకు మనయొక్క సంవత్సరము ఒక దినమగును; పగలు ఆరుమాసముల కాలము, రాత్రి ఆరుమాసముల కాలము. ఆచార్య.

అల్పప్రతిరూపములు (స్మాల్ శాంపుల్స్): అల్ప ప్రతిరూపములలో పౌనః పున్య విభజనములు చాల స్వల్పములు. కాబట్టి అవి సరళవక్రమును ఇచ్చునవి కావు. మరియు అవి మాతృలోకమునకు అనురూపములై ఉండక పోవుటవలన వాని నుండి లభించు మదింపు విలువలు నమ్మతగినవి కావు. కాబట్టి మన గణిత విధానమును మార్చవలయును.

అల్ప ప్రతిరూపములకు వాడు విధానము బృహత్ప్రతి రూపములకు కూడ ఉపయోగపడును. కాని బృహత్ప్రతి రూపవిధానములు అల్ప ప్రతిరూపములకు వాడకూడదు.

బృహత్ప్రతి రూపములను మాతృ లోకముతో సరిపోల్ప వచ్చును. అల్ప ప్రతిరూపములకు అట్లు చేయుటకు వీలు లేదు. వీనికి ముఖ్యమైన మదింపులు-మధ్యమములు, క్రమ విచలనములును.

మధ్యమాన విలువ : $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ప్రతిరూపము లోని అంశముల విలువలు అయిన, మధ్యమాన విలువ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma\, x_n.$$

క్రమ విచలనము : మాతృలోకముయొక్క క్రమ విచలనము కనుగొనుటకు మధ్యమాన విలువ m అని తీసికొందము.

m తెలిసినచో, ప్రతి రూపముయొక్క క్రమ విచలనము σ ను మధ్యమానవిలువ m నుండి గణించి s అని గుర్తించిన,

$$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma\, (x - m)^2.$$

కొన్ని సమయములందు m కూడ తెలియక పోయినచో దానియొక్క మదింపు ఊహింపవలయును.

మాతృలోకముయొక్క మధ్యమము m, ప్రతిరూపము యొక్క మధ్యమము $\bar{x}$ అయినచో

$$\begin{aligned}\Sigma\, (x - m)^2 &= \Sigma\, (x - \bar{x} + \bar{x} - m)^2 \\ &= \Sigma\, (x - \bar{x})^2 + \Sigma\, (\bar{x} - m)^2 \\ &= \Sigma (x - \bar{x})^2 + n\, (\bar{x} - m)^2\end{aligned}$$

కాబట్టి $$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma\, (x - \bar{x})^2 + (\bar{x} - m)^2$$

ఇచట $\frac{1}{n} \Sigma\, (x - \bar{x})^2 =$ ప్రతి రూపము యొక్క క్రమ విచలనము; $\bar{x}$ = ప్రతిరూపము యొక్క మధ్యమము; m = మాతృలోకము యొక్క మధ్యమము; బహు ప్రతిరూపములు తీసికొనిన వాని అంతరముల వర్గముల, మధ్యమముల యొక్క క్రమవిచలనము $\frac{\sigma^2}{n}$ కు సమానము.

కాబట్టి $(\bar{x} - m)^2$ ను నిరసించుటకు బదులు, $\frac{\sigma^2}{n}$ దానికి సమానముగా తలచుకొనవచ్చును.

σ యొక్క విలువ తెలియనిచో దానికి బదులు s తీసుకొనిన, $s^2 = \frac{1}{n}\; \Sigma (x - \bar{x})^2 + \frac{s^2}{n}$

$$\therefore s^2 = \frac{1}{n-1}\, \Sigma\, (x - \bar{x})^2.$$

$\Sigma\, (x - m)^2$ లో n ప్రత్యేక ప్రత్యవేక్షణలు కలవు. కాబట్టి ఈ సంకలనమునకు n – తర స్వేచ్ఛత కలదని చెప్పుదుము. కాని s^2 లో $(n - 1)$ తర స్వేచ్ఛత కలదని తెలియుచున్నది. ఈ సూత్రమునందు $(x - \bar{x})^2$ వాడుచున్నాము; $\bar{x}$ కనుగొనునపుడు ఒక నియమము వాడబడినది; కాబట్టి దాని స్వేచ్ఛతయొక్క తరము ఒకటి తగ్గినది, అనగా $(n - 1)$ కు సమానమయినది.

t విభజనము : $$s^2 = \frac{1}{n-1}\, \Sigma\, (x - \bar{x})^2$$

t అను ఒక నూతన రాశిని తీసికొని $t = \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{\nu + 1}$ అని వ్రాయుదుము. ఇచట m మాతృలోకము యొక్క మధ్యమము; $\nu = n - 1$. సరళ లోకమునుండి తీసికొనిన ప్రతి రూపమునకు t యొక్క విభజన :

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}}$$ అని చూపవచ్చును.

దీనిని సరళ వక్రమును వాడునట్లు వాడుదురు.

$$\nu \longrightarrow \infty \text{ అయినపుడు } \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

$\int ydx$ యొక్క విలువలు ఒక పథకములో ఈయబడినవి. యూల్ కేండెల్ గ్రంథమునుండి ఒక ఉదాహరణము:

ఒక జనసమూహములో 10 మంది వ్యక్తుల ఎత్తు క్రమముగా 63, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 70, 71, 71 అంగుళములయినచో, జన సమూహముయొక్క సరాసరి ఎత్తు 66 అంగుళములు అను విషయమును చర్చింతము.

ఇచట $\bar{x} = 67''.8$; $s = 3''.011$

$$\therefore t = \frac{67.8 - 66}{3.011}\sqrt{10} = 1.89$$

పథకమునుండి $\nu = 9$ వరుసలలో

$t = 1.8$ అయిన $P = 0.947$; $t = 1.9$ అయిన $P = 0.955$; కాబట్టి $t = 1.89$ అయిన $P = 0.954$ అగును. మనము చూచిన t కంటె ఎక్కువ విలువ లభించుటకు అవకాశము $1 - 0.954 = 0.046$ లేదా $1/20$. మొత్తములో $2/20$ లేదా $1/10$; దీనిని నిరసింపవచ్చును; మాతృలోక మధ్యమమునకు సామ్యతకలదని తలచుట సరికాదు.

రెండు ప్రతి రూపములను సరిపోల్చుట: రెండు ప్రతి రూపములను తీసికొందము. అవి $x_1, x_2 \cdots \cdots x_n$; $x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_m$; $\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\Sigma(x)$; $\bar{x}_2 = \frac{1}{m}\Sigma(x')$

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(x - \bar{x}_1)^2;\; S'_2 = \frac{1}{m-1}\Sigma(x' - \bar{x}_2)^2$$

మరియొక రాశిని తీసికొందము:

$$S^2 = \frac{1}{n+m-2}\left\{\Sigma(x - \bar{x}_1)^2 + \Sigma(x' - \bar{x}_2)^2\right\}$$

ఒక లోకమునుండి ఈ ప్రతి రూపముల తీసికొనిన S^2 రాశి σ^2 యొక్క వేరు రూపమని తలచవచ్చును.

$n - 1 + m - 1 = n + m - 2$; $\nu = n + m - 2$.

దానియొక్క స్వేచ్ఛత అని తీసికొనిన

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S}\sqrt{\frac{m\,n}{n+m}}$$

ఇపుడు ఫిషర్ ఇచ్చిన ఉదాహరణము తీసికొందము:

ప్రతిపాదున మూడు బార్లె చెట్లవంతున 8 పాదులకు విద్యుచ్ఛక్తి ప్రచారముచేసి, అదే విధమగు వేరు 9 పాదులకు ధాతుపంజరమును అమర్చిన, లభించు ఫలితము:

పంజరస్థము: 17, 27, 18, 25, 27, 29, 27, 23, 17

విద్యుత్ప్రసారితము: 16, 16, 20, 16, 20, 17, 15, 21

ఇచట విద్యుత్ప్రసారమువలన గుణము కలదా?

$\bar{x}_1 = 23.333$; $\bar{x}_2 = 17.625$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5.708$

$S^2 = \frac{1}{15} \times 221.875 = 14.7916$; $S = 3.846$

$$t = \frac{5.708}{3.846}\sqrt{\frac{8 \times 9}{17}} = 3.05$$

$\nu = 8 + 9 - 2 = 15$

పథకములోనుండి $\nu = 15$, $t = 3.05$,

సంభావ్యత $P = 0.996 = 1 - 0.004 = 1 - \frac{4}{1000}$

రెండు ప్రతిరూపములు ఒకే మాతృలోకమునకు సంబంధించి ఉండిన ఇచట లభించిన t విలువ అసంభావ్యము. అట్లు లభించుట 1000 లో 8 సార్లు జరుగును. కాబట్టి ప్రతిరూపములు ఒకే లోకమునకు చెందినవి కావు. విద్యుత్ప్రసారము వలన కొంత గుణము కలదని ఊహింపవలయును.

ఫిషర్‌యొక్క ప్రయోగ రచన: ఇపుడు మనవద్ద 3 రకముల ధాన్యములు కలవని తలచుకొందము. పలువిధముల ప్రయోగముల వలన ఈధాన్యపు విత్తులనుండి లభించు ఫలితములో వ్యత్యాసము కలదాయని కనుగొనుటకు ఫిషర్ ఒక నూతన విధానమును అవలంబించెను. పంటను అభివృద్ధిచేయవలయుననిన, మంచి విత్తులు, ఎరువు, భూమిని వాడ వలయును. తాను ప్రయోగించు ప్రదేశమును ఫిషర్ 9 చదురపు పాదులుగా చేసెను. మూడు విధములగు విత్తులను వాడుటలో పాదులలో $3 \times 3^2 = 27$ మార్పులు ఏర్పడును. ఈ మార్పులలో మూడు రకముల విత్తులు సమానరీతిని ప్రదర్శింపబడవు. సమానరీతిని విత్తులు వచ్చుటకు ఒక జాతివిత్తు A, వంశములోను, వరుసలోను ఒకసారి కనబడునట్లు ఏర్పాటు చేయవలయును (చూ. చిత్రములు 60 a, 60 b).

A	B	C
B	C	A
C	A	B

చిత్రము 60 a

A	C	B
B	B	A
C	A	C

చిత్రము 60 b

60 a రచనలో ఒక వరుసలో కాని, ఒక వంశములో కాని A, B, C లు ఒకసారియే కనబడును. 60 b రచనలో అట్లులేదు. 60 a రచనకు లాటిన్ చతురము అనిపేరు. ఈ 27 విధములలో ఏ అమరిక తీసికొనిన **ఉత్తమ** ఫలితము లభించును అనునది ఫిషర్ యొక్క సమస్య (చూ. లాటిన్ చతురము).

ఆచార్య.

అవధులు : x వాస్తవికచలరాశి; $f(x)$ దాని యొక్కఫలము. అనగా $f(x)$ యొక్క విలువలు సాధారణముగా x యొక్క విలువలపై ఆధారపడి ఉండును. x యొక్క ప్రతివిలువకు సాధారణముగా $f(x)$కు ఒక విలువ లభించును. కొన్నిసమయములందు అట్లు లభింపవు. అట్టి సమయములందు x ఒక విలువను సమీపించునపుడు $f(x)$ ఎట్లు ప్రవర్తించుచున్నదో పరిశీలింపవచ్చును. కొన్ని ఉదాహరణములు :

(ఏ) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. ఇందు $x = 1$, $f(x)$ ఫలమునకు ఒక అసాధారణవిలువ. ఏలన $x = 1$ అని $f(x)$ లో ప్రతిక్షేపించినచో మనకు $f(1) = \frac{0}{0}$ అని వచ్చును. గణితశాస్త్రరీత్యా దీనికి అర్థములేదు. అట్టి సమయమందు $x = 1$ అను విలువను తీసికొనక $x \longrightarrow 1$ (అనగా x చలరాశి 1 ని సమీపించునపుడు) $f(x)$ యొక్క ప్రవర్తనను క్రింది పట్టికలలో గమనించెదము :

x	4	3·5	3	2	1·5	1·1	1·01	1·001	1·0001
$f(x)$	5	4·5	4	3	2·5	2·1	2·01	2·001	2·0001

x యొక్క విలువలు, 1 కంటె ఎక్కువ విలువలనుండి 1 ని సమీపించునపుడు $f(x)$విలువలు 2 ను సమీపించును.

x	0	0·5	0·7	0·9	0·95	0.99	0·999	0·9999
$f(x)$	1	1·5	1·7	1·9	1·95	1·99	1·999	1·9999

x విలువలు 1 కి తక్కువగా ప్రారంభించి, దానిని అనగా 1 ని సమీపించునపుడు $f(x)$ యొక్క విలువలు క్రిందివైపు నుండి 2 ను సమీపించుచున్నవి.

కాని $x = 1$ అని తీసికొనిన, $f(x)$ యొక్క విలువ అర్థములేని $\frac{0}{0}$ రూపములో ఉన్నది.

కాబట్టి x యొక్క విలువలు 1 ని ఏవైపునుండి సమీపించినను $f(x)$ యొక్క విలువలు 2 ను సమీపించుచున్నవి. కనుక $x \longrightarrow 1$ అగునపుడు $f(x)$ యొక్క అవధి 2 అందుము. దీనినే $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ అని వ్రాయుదుము.

$f(x) = \frac{1}{x-1}$. ఇందు $x = 1$ అని ప్రతిక్షేపించినచో $1 = \frac{1}{0}$ అని లభించును. ఇదియు ఒక అర్థములేని సంకేతము. కనుక $x \longrightarrow 1$ అని తీసికొని $f(x)$ ను గమనింతము. అందుకు క్రింది పట్టికలను విమర్శింతము.

x	3	2	1·5	1·05	1·01	1·001	1·0001	1·00001
$f(x)$	0·5	1	2	20	100	1000	10,000	1,00,000

x యొక్క విలువలు 1 కి ఎక్కువగానుండి, 1 ని సమీపించునపుడు $f(x)$ విలువలు ధనాత్మకములై చాల ఎక్కువగుచుండును. వాటికి పైసరిహద్దులేదు.

x	0·5	0·9	0·99	0·999	0·9999	0·99999
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000	-10,000	-1,00,000

x యొక్క విలువలు 1 కి తక్కువగానుండి, 1 ని సమీపించునపుడు $f(x)$ విలువలు ఋణాత్మకములై చాల ఎక్కువగుచుండును. వాటికి క్రింది సరిహద్దులేదు.

మొదటి పక్షములో x యొక్క విలువలు 1 ని సమీపించునపుడు, G యొక్క విలువ ధనాత్మకముగా ఎంతగొప్పది అయినను $f(x)$ విలువలు G కంటె గొప్పవి అగును. దీనినే $f(x) \longrightarrow \infty$ అని వ్రాయుదుము.

రెండవ పక్షములో G ఋణాత్మకముగా ఎంత గొప్ప సంఖ్య అయినను $f(x)$ విలువలు G కంటె తక్కువ అగుచున్నవి. దీనినే $f(x) \longrightarrow -\infty$ అని వ్రాయుదుము.

గణితపరిభాషప్రకారము x విలువలు 1 కంటె ఎక్కువగా ప్రారంభించి, 1 ని చేరునపుడు $x \longrightarrow 1+0$ అని వ్రాయవచ్చును.

కనుక $x \longrightarrow 1+0$ అయిన $f(x) \longrightarrow \infty$;

అటులనే $x \longrightarrow 1-0$ అయిన $f(x) \longrightarrow -\infty$;

ఇపుడు $f(x)$ విలువలు $+\infty$ కి గాని, $-\infty$ కిని గాని అపసరించును.

కంపనము : ఇపుడు $f(x) = \sin\left[1/(x-1)\right]$ అను ఫలము తీసికొందము :

x విలువలు $1 \pm (\pi/2)^{-1}$; $1 \pm (5\pi/2)^{-1}$; $1 \pm (9\pi/2)^{-1}$ అగునపుడు $f(x) = +1$

x విలువలు $1 \pm (3\pi/2)^{-1}$; $1 \pm (7\pi/2)^{-1}$; $1 \pm (11\pi/2)^{-1}$ అగునపుడు $f(x) = -1$

$x \longrightarrow 1$ అగునపుడు $f(x)$ విలువలు $+1$ నుండి -1 వరకు ఊగులాడుచుండును. $+1$, -1 రెండును నిశ్చలములైన విలువలు. వీటిమధ్య $f(x)$ కంపనము

చేయుచుండును. దీనిని మర్యాదిత కంపనము (బౌండెడ్ ఆసిలేషన్) అని చెప్పుదురు.

ఉదా: $f(x) = \frac{1}{x-1} \sin \frac{1}{x-1}$

ఇపుడు $x \longrightarrow 1$ అగునపుడు $f(x)$ విలువలు అపర్యాప్తముగా కంపనము పొందునని విమర్శింపగా తెలియవచ్చుచున్నది.

ఇంతవరకు x చలరాశి ఒక పరిమిత సంఖ్య a ను సమీపించగా దాని ఫలముయొక్క ప్రవర్తనను గమనించితిమి. అయితే a అనంతముగను ఉండవచ్చును. అనగా $x \longrightarrow \infty$ ఉండవచ్చును. దీని అర్థమేమనిన, మనము x కు పరిమితిలేని విలువలు (ఉదా: $x = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$) ఇచ్చెదమన్నమాట.

ఉదా: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

ఇచ్చట $x \longrightarrow \infty$ అగునపుడు $f(x) \longrightarrow 1$ అగుచున్నది. ఏలన $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$.

అటులనే $x \longrightarrow -\infty$, అనగా $x = -1, -2, -3, \ldots \ldots$ విలువలు తీసికొనునపుడు $1 + \frac{1}{x} \longrightarrow 1$ అగుచున్నది. ఏలన ఇప్పుడును $1/x \longrightarrow 0$.

ఒక వరుసకు అవధి ఉన్నదా? లేదా? అను విమర్శన: $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \ldots$ ఒక దత్తవరుస. n అనంతమగునపుడు, దీనికి ఒక అవధి a ఉన్నదనుకొనెదము. కనుక $a_n \longrightarrow a$, అనగా $(a_n - a) \longrightarrow 0$, కనుక అవధి a ఊహించ సాధ్యమయితే, n అనంతమగునపుడు, $|a_n - a|$ (ఈ సంకేతముయొక్క అర్థము a_n, a రెండింటిలో చిన్నదానిని పెద్దదానినుండి తీసివేయవలెననుటయే) శూన్యమును సమీపించుచున్నదా అని పరిశీలించవచ్చును. ఉదా: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots \frac{n+1}{n}, \ldots$ వరుసను తీసికొనెదము. ఇచ్చట అవధి 1 అని ఊహించెదము. $\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n}$ ఇది $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు శూన్యమును సమీపించుచున్నది. కనుక $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

అవధి విలువ ఊహించుట అసాధ్యమైనపుడో లేదా ఒక క్రొత్త సంఖ్యగా ఉన్నపుడో దత్తవరుస ఉపసరణ వరుసయా కాదా అని కనిపెట్టుట మరింత కఠిన ప్రశ్న. దీనిని కనిపెట్టుటకు కొన్ని సూత్రములు ఉన్నవి.

వరుసలోని అన్ని సంఖ్యలును ధనాత్మకమై, వాటి విలువలు హెచ్చగుచునే ఉన్నచో, అనగా $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots a_n \leq \ldots$ ఉన్నచో a_n యొక్క అవధి అనంతముగనో $(a_n \longrightarrow \infty)$ లేదా పరిమితముగనో ఉండవలెను. కనుక వరుసలోని అన్ని పదములును ఒక దత్తసంఖ్య B కంటె తక్కువగ ఉన్నచో, ఆవరుసకు ఒక అవధి a ఉన్నదనియును, $a \leq B$ అనియును తీర్మానించవచ్చును.

ఉదా: $\left(\frac{2}{1}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots \left(\frac{n+}{n}\right)^n, \ldots$

ఈ వరుసలో పదముల విలువలు హెచ్చుచున్నవనియును, అయితే అన్ని పదములును 3 కంటె తక్కువనియు చూపవచ్చును. కనుక ఇది ఒక ఉపసరణవరుస. దీని అవధి అగు e యొక్క విలువ $2{\cdot}71828 \ldots$ ఇది ఒక క్రొత్త సంఖ్య.

ఇదే రీతిగా $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots \geq a_n \geq \ldots$ (అనగా పదములు తగ్గుచు ఉన్నచో) ఈ వరుస అవధి $-\infty$ లేదా ఒక పరిమిత సంఖ్య. కనుక అన్ని పదములు ఒక దత్తసంఖ్య B కంటె ఎక్కువగ ఉన్నచో $(a_n > B)$ అది ఒక ఉపసరణ వరుస. దాని అవధి $a \geq B$ గ ఉండును.

ఉదా: $\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{4}{3}\right)^4, \ldots \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \ldots$

ఈ వరుసలో పదముల విలువలు తగ్గుచున్నవనియు అయితే అన్ని పదములు 2 కంటె ఎక్కువనియు సరిచూడవచ్చును. కనుక ఈ పరంపరకు ఒక అవధి ఉన్నది. దాని విలువ 2 కంటె ఎక్కువ. ఈ అవధియును $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ యొక్క అవధి $e = 2{\cdot}71828 \ldots$ సంఖ్యయే.

పైన వివరించినవి అసాధారణవరుసలు. సాధారణ వరుసలకు ఒక ఉపసరణ పరీక్ష ఉన్నది. అయితే అది అంత సులభముకాదు.

$a_n \longrightarrow a$ అయితే, n పెద్ద సంఖ్య అగునపుడు $|a_n - a|$ చాల చిన్న సంఖ్య అగును. కనుక p, q పెద్ద సంఖ్యలు అగునపుడు $|a_p - a_q| \leq |a_p - a| + |a_q - a|$ ఒక చిన్న సంఖ్య అగును. అనగా $p \longrightarrow \infty$, $q \longrightarrow \infty$ అగునపుడు $|a_p - a_q| \longrightarrow 0$ అగును. ఈ నిబంధన అవశ్యము. ఇది చాలును. కనుక ఒక దత్తవరుస ఉపసరణ వరుసయా అనుటకు క్రింది పరీక్షను ఉపయోగించవచ్చును.

"ఏదో ఒక ధనసంఖ్య ε తీసికొనుము. అది ఎంత చిన్నదైనను ఫరవాలేదు. ε ఇచ్చిన తరువాత ఒక సంఖ్య N కనిపెట్టవలెను. ఇది ఎట్టిదంటె $p > N$, $q > N$ ఉన్నపుడెల్ల $|a_p - a_q| < \varepsilon$ నిజముగ ఉండవలెను. ఇట్టి ఏ ధన

సంఖ్య ఇచ్చినను ఒక N కనిపెట్టుట సాధ్యమైతే ఆ వరుసకు ఒక అవధి ఉన్నది." ఈ సూత్రము కనిపెట్టినది కోషీ. ఇది అవధి ఉన్నదని చెప్పుచున్నది కాని దానిని కనిపెట్టు మార్గము తెలుపలేదు.

ఉదా : $a_1 = \frac{1}{1^2}, a_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2},$

$a_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \ldots\ldots a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2}.$

ఇచ్చట $| a_q - a_p | = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} \ldots + \frac{1}{q^2}$

అయితే $\frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

$$\frac{1}{(p+2)^2} < \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

కనుక $| a_q - a_p | < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) \ldots \ldots + \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}\right)$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < \frac{1}{p}.$$

ఇపుడు ε ఇచ్చినట్లైతే $N = \frac{1}{\varepsilon}$ తీసికొనినచో, $p > N$, $q > N$ అగునపుడు $| a_q - a_p | < \frac{1}{p} < \frac{1}{N} = \varepsilon$ అగుచున్నది. ఉదా: $\varepsilon = 1/10{,}000$ ఇచ్చినచో $N = 10{,}000$ తీసికొనెదము. $p > 10{,}000$, $q > 10{,}000$ అగునపుడు $| a_q - a_p | < \varepsilon$ అగుచున్నది. ε కు ఏ విలువ ఇచ్చినను (ε శూన్యముగా ఉండకూడదు), $N = 1/\varepsilon$ మనము కనిపెట్ట వచ్చును. కనుక ఈ వరుసకు ఒక అవధి ఉన్నది. పై సూత్రము ఈ విలువ ఏమని చెప్పదు, కాని దాని విలువ $\pi^2/6$. అనగా $n \longrightarrow \infty$ అగునప్పుడు

$$\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

సి. టి. రా.

అస్త్రప్రయోగము : ఆయుధముల విక్షేపణగతిని గురించి చెప్పునది అస్త్రప్రయోగ విద్య. ఈ అస్త్రముల చర్యను ఆంతర అస్త్రప్రయోగము, బాహ్యాస్త్రప్రయోగము అని రెండు శాఖలక్రింద విభజించుట పరిపాటి.

ఉదాహరణమునకు మొదటిశాఖ తుపాకి విషయములో దాని నాళమందుండగనే గుండుయొక్క చలన విధమును, దానిని అనుసరించు ఇతర సంఘటనలను చర్చించును.

రెండవ శాఖ నాళమును విడచిపెట్టిన తరువాత బాహ్యయానకమందు (గాలియందుగాని, నీటి యందుగాని) ఆ గుండు చలనమును గురించి చర్చించును. అనుశీలనకు గ్రహించబడిన విషయముయొక్క విశిష్టతను బట్టి అస్త్రప్రయోగవిద్యను అవాంతర శాఖల క్రింద విభజించవచ్చును. ఉదాహరణమునకు మామూలు తుపాకికి చెందిన అస్త్రప్రయోగానుశీలనతోబాటు రాకెట్టు విక్షేప విద్యకూడ కలదు. ఇందు నోదకవాయువు రాకెట్టు గర్భాగారమందే ఉన్నతమగు ప్రేషములో ఉద్భవింపబడి, రాకెట్టులో నొక రంధ్రమునుండి విసురుగా అధిక వేగముతో వెనుకకు త్రోయబడును. ఈ పక్షమందు రెండు విషయములు అనుశీలనకు గురియగును. మొదటిది తగిన ప్రేషములో, తగిన మొత్తములో గర్భాగారమునకు నోదక వాయువును అందించుట. ఇది రాకెట్టుయొక్క అంతరాస్త్ర ప్రయోగమునకు చెందిన విషయము. రెండవది నోదకవాయు ప్రతిక్రియవలన రాకెట్టుయొక్క చలనము. ఇది బాహ్యాస్త్ర ప్రయోగానుశీలనకు చెందిన విషయము. బాంబు అస్త్రప్రయోగమునందు చర్చించు విషయము విముక్తమైన బాంబుయొక్క విక్షేప పథము. ఇది కేవలము బాహ్యాస్త్ర ప్రయోగ విద్యకు సంబంధించినదియే. ఇటీవలఈ విద్యయందు కొన్ని విశిష్టశాఖలు వెలుగు చూచినవి. అందు మొదటిది అంతిమ అస్త్రప్రయోగ విద్య. ఇది కవచములనుగాని, ఇతర అడ్డంకులనుగాని విక్షేపకము ఎట్లు ఛేదించికొని లక్ష్యమును చేరునో ఆ విషయమును చర్చించును. ఇట్టిదియే ఇంకొకటి శకలాస్త్ర ప్రయోగ విద్య. ఇది స్ఫోటక గోళకములు, బాంబులు పేలునపుడు ఏ రీతిని అవి శకలములుగా బద్దలగునో, ఆ శకలములు ఎట్లు విక్షేపింపబడునో అను విషయమును చర్చించును. ఇటీవలి విమాన శిల్పవృద్ధి అస్త్రప్రయోగ శాస్త్రమును ఎక్కువగా విస్తరింపజేయుటకు సహాయకారి అయినది.

ఆంతరాస్త్ర ప్రయోగము : ఆంతర అస్త్ర ప్రయోగ విద్యయొక్క ప్రాచీన సాంప్రదాయిక సమస్య (ఇది నేడు పూర్ణముగా పరిష్కరింపబడినది అని అనుకొనవచ్చును) మందుగుండు, తుపాకి వీటి లక్షణముల జ్ఞానముతో పరిచయము ఉన్న మీదట తుపాకినుండి వెలువడు గుండు యొక్క నాళముఖ వేగము, ఆ నాళమందేర్పడిన ఉన్నతతమ ప్రేషము-వీటిని గురించినది. మొదట నోదక రాసాయనిక ద్రవ్యరాశి (ఇంధనము) ని గురించి ఆలోచించినప్పుడు తగిన నోదక ద్రవ్యమును ఎన్నుకొనుట ముఖ్యమైన ప్రశ్న. ఈ ద్రవ్యమునకు క్రింది లక్షణము లుండవలెను. అది మందు రేటులో ఎగుడుదిగుడులు లేకుండుట ; పొగ,

వెలుతురు పుట్టకుండుట; తుపాకినాళమును కోయకుండుట; సులభముగా మండుట ; తాపక్రమమందు హెచ్చుతగ్గులు సంభవించినను, అది మండు రేటులో వ్యత్యాసములు ఉండకుండుట ; నిలువ యుంచినపుడిది ప్రేలిపోకుండ స్థైర్యమును కలిగియుండుట. కాని నేటికి పరీక్షించబడిన నోదక ద్రవ్యములలో ఏ యొకటియు ఈ లక్షణములు అన్నిటిని సమగ్రముగా కలిగి ఉన్నదిలేదు. ఆధునిక ఇంధనములు ముఖ్యముగా నైట్రోసెల్యులోజ్ అను రాసాయనిక విదారకద్రవ్యము మూలముగా గలవి. దీనిని ఒక దానినే వాడినపుడు ఈ నోదకమును ఏకమూలక నోదక మందురు. దీనితో నైట్రోగ్లిసరిన్ (గ్లిసరిన్ నుండి ఉత్పన్నమగు ఇంకొక ప్రమాదయుత రాసాయనిక ద్రవ్యము) వంటి ఇంకొక ద్రవ్యమును వాడునపుడు ఆ సంకలిత ద్రవ్యమును ద్విమూలకనోదకము అని అందురు. వేసలైన్ వంటి, వెన్నవంటి ఖనిజ ద్రవ్యము మరియొక దానిని ఆనోదకద్రవ్యమునకు స్థైర్యమును కూర్చుటకై చేర్చుదురు.

నోదక ద్రవ్యమును (ఇంధనమును) ఎన్నుకొనిన తరువాత ముఖ్యమైన సమస్య దానికి సంబంధమైన తాప రాసాయనిక శాస్త్ర ప్రవర్తన, అనగా నోదక ద్రవ్య ఘటకములు అగు ద్రవ్యముల పరమాణు సంఘట్టనము. దాని ఘటకముల తాప రాసాయనిక ధర్మములు, విదారణ కార్య ఫలిత ద్రవ్యములు, వీటి జ్ఞానము ఆధారముగాగొని, నోదక ద్రవ్య దహనమందు వాయువులు ఏ తాపక్రమమువద్ద విడివడినవో, నోదకకార్యమందావిర్భవించు ప్రేపము ఇత్యాది గుణము లన్నిటిని కనుగొనవలెను.

నోదకముల (సాధారణముగా ఇవి ఘనద్రవ్యములై ఉండును) జ్వలన ప్రక్రియను గురించిన విచారము ఆవశ్యకము. ఈ విచారమందు వాటి రాసాయనిక సంఘట్టనము, తొలి తాపక్రమము, ప్రేపము,వీటి జ్ఞానమును ఆధారముగాగొని నోదక ద్రవ్యముల మండు రేటును గురించి అనేక సిద్ధాంతములు వెలువడినవి. ఉపరితలీయ సిద్ధాంతములు, బాష్పస్థితి సిద్ధాంతములు అను రెండు తరగతుల సిద్ధాంతములు వెలుగు చూచినవి. ఇందు మొదటితరగతి సిద్ధాంతములందు జ్వలన ఫలితములగు వేడిగాలుల నుండి నోదకోపరితలమునకు ఉష్ణతాశక్తి సంక్రమించు రేటునుబట్టి, నోదక ద్రవ్య జ్వలనము నియంత్రితమగునని ఊహింపబడినది. రెండవతరగతి బాష్పస్థితి సిద్ధాంతములందు నోదక ద్రవ్య జ్వలనమునకు వాయుస్థితిలో జరుగు రాసాయనిక ప్రక్రియలు నియంత్రకములుగా పేర్కొనబడినవి. ఈసిద్ధాంతములన్నిట ముఖ్యాంశము నోదక ద్రవ్యరాశి మండు రీతిని గురించి ఒక నియమమును సూచించుట. నోదక ద్రవ్యరాశిని ఈ సిద్ధాంతములన్నియు సజాతీయ జ్యామితీయాకారము గల కణములు గల దానిగా పరిగణించును. ప్రజ్వాలక పదార్థముచే ఈ ద్రవ్యముయొక్క పై పొరలు ప్రజ్వలన తాపక్రమమునకు తేబడి, నోదక ద్రవ్య జ్వలన ఫలితములుగ ఒక నియత ఉన్నత తాపక్రమములో వెలువడు వాయువులు తరువాతి కణముల పొరలను ప్రజ్వలన తాపక్రమమునకు వేడిచేయును. ఇట్లు జ్వలనము సాగుకొద్ది, ప్రతికణముయొక్క ఉపరితలమును దానికి సమానాంతరదిశలో క్రమముగా వెనుకకు పోవుచుండును. ఇట్లు సమానాంతర స్తర క్రమజ్వలన నియమము సర్వే సర్వత్ర ఆంతర అస్త్రప్రయోగ సిద్ధాంతములందు స్వీకరించబడినది. జ్వలనము సంపూర్ణమగుటకు కాల్పబడు నోదక కణముయొక్క కనీసపు దళసరిని D చేతను, t అనే క్షణమందు D లో మండగా మిగిలినభాగమును f చేతను, t కాలవ్యవధిలో మండిపోయినభాగము z చేతను, ఆ కాలమందు కణోపరితల వైశాల్యమును S చేతను తెలియజేసినచో జ్వలననియమము z కును f కును, లేదా f కును S కును గల సంబంధము పైనను, ఇదిగాక S కణముయొక్క జ్యామితీయ ఆకారముమీదను, ఆధారపడియుండును.

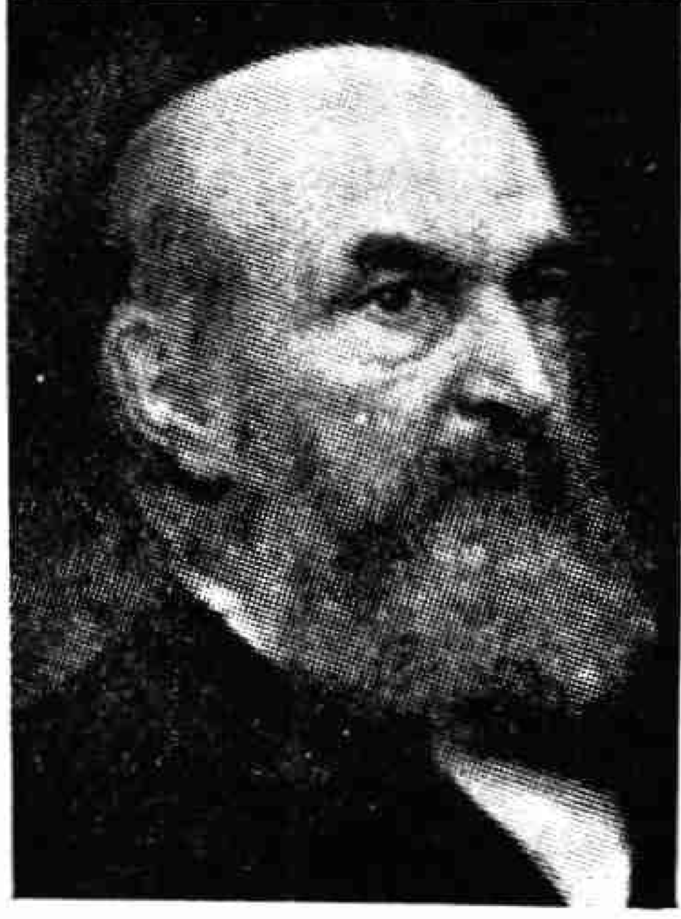
పైనచెప్పిన సంబంధములలో ఏదియైన ఆకృతి ఫలము అని పిలువబడును. θ ను f యొక్క ఫలముగా తీసికొనినచో

$$z = \phi(f) = (1 - f)(1 + \theta f) \quad .... \quad .... \quad .... \quad (1)$$

సమీకరణము సిద్ధమగును. ఈ రూపమును తీసికొనుటకు కారణమేమనగా $f = 1$ అయినపుడు $z = 0$ గను $f = 0$ అగునపుడు $z = 1$ గా నుండవలెను. కనుక θ నే ఆకృతి ఫలముగా గ్రహించవచ్చును. గొట్టము ఆకారము, నరద గల గొట్టము ఆకారము, రిబ్బన్ ఆకారము, చతురస్రాకారము, బహునాళ ఆకారము, ఇట్టి అనేక జ్యామితీయ ఆకృతులకు θ ను నిర్ణయించి, జ్వలన నియమ స్థాపననుగురించిన అన్వేషణలలో దానిని వాడుక చేయుదురు.

సిద్ధాంతమునటుంచి, ముందుగా పైన నిరూపించిన భిన్న భిన్న సిద్ధాంతముల నిష్కర్షయందు అంతరాస్త్రప్రయోగ విద్యా ప్రాయోగిక విధానము ఎంత ప్రముఖపాత్రను వహించునో తెలుపవలెను. ఒక నోదక ద్రవ్యముయొక్క అస్త్రప్రయోగ వ్యాపారమునకు సంబంధించిన ధర్మముల ప్రాయోగిక నిర్ణయమునకై నోదక ద్రవ్యమును స్థిరాయతన పరిస్థితులలో జ్వలింపజేయుటకు వీలగునట్లు మూయబడిన పాత్రలలో ప్రయోగములు కావింతురు. ఇట్టి

ముందుగా నిర్దేశించెను. కాని లవెరియా ఫలితములపై ఆధారపడి, బెర్లిన్ వేధశాలాధికారియగు గాలే 1846 లో ఆనూతనగ్రహ ఆవిష్కరణమును ప్రకటించినంత వరకు ఆడమ్స్ కృషి అధికారుల అనాదరణవలన అజ్ఞాతమై ఉండిపోయెను. కొంత వివాదము జరిగిన పిదప నెప్ట్యూన్ గ్రహావిష్కరణకీర్తి ఆ గణిత వేత్తలు ఇద్దరును పంచుకొనవలెనని నిశ్చయింపబడెను.



చిత్రము 61 ఆడమ్స్

ఆడమ్స్ 1867లో లియోనిడ్స్ అనబడు నవంబర్ ఉల్కల కక్ష్యలను నిర్ణయించి, సిద్ధాంతరీత్యా సాధ్యమగు వాటి 5 కక్ష్యలలో ఏది నిజమయినదో చూపించెను. ఆ. వెం.

అధికారిక సాంఖ్యకీయప్రచురణ : ఒక దేశము యొక్క ఆర్థిక జీవితములో సాంఖ్యకశాస్త్రము యొక్క ప్రాముఖ్యమును గురించి విమర్శించుట అనవసరము. ఇది ముఖ్యముగా యోజిత ఆర్థికస్థితికి అన్వయించును. ముఖ్యముగా తగిన సాంఖ్యకీయ దత్తాంశములపై యోజన ఆధారపడియున్నది. యోజనల కార్యక్రమమును, అభివృద్ధిని గమనించుటకు సమయోచితములగునట్టియు, నమ్మదగినట్టియు సాంఖ్యకీయ విషయములు అవసరము. భారత దేశములో దొరకు దత్తాంశములు ఆధికారిక సాంఖ్యకీయ ప్రచురణలనుండియే లభించును.

ఆధికారిక సాంఖ్యక ప్రచురణ భారతదేశములో క్రిందటి శతాబ్దమునుండియే ప్రారంభము. అందు చాల పురాతన ప్రచురణ 1868 లో తయారై, ఇంగ్లండులో ప్రచురింపబడెను. దాని శీర్షిక " బ్రిటిష్ ఇండియాగురించిన సాంఖ్యకీయ సంగ్రహము ". కాని అంతకు పూర్వమే కౌటిల్యుని 'అర్థశాస్త్రము' లోను (క్రీ. పూ. 300), 'అయినాక్బరీ' (16 వ శతాబ్దము) లోను సాంఖ్యకీయ దత్తాంశముల సేకరణకు నిదర్శనములు కలవు. ఇంపీరియల్ గెజటర్ లలో ఆర్థిక దత్తాంశములు అన్ని భాగములకును ఈయబడెను. ప్రప్రథమమున అట్టి ప్రచురణ 1881 లో జరిగెను.

అఖిలభారతీయ సస్యపూర్వ నిర్దేశము 1894 లో వరి, గోధుమ ధాన్యములతో ప్రారంభమయ్యెను. నూనె విత్తులు, ప్రత్తి, జనుము, చెరకుకూడ అందు 1900 లో చేర్పబడెను. 1887 - 88 లో పంచవర్ష పశు జనాభా ప్రారంభింపబడెను. 1886 లో మొట్టమొదట 'వ్యవసాయ సాంఖ్యక' సంగ్రహము ప్రచురించబడినది. తర్వాత 1906లో భారత వ్యాపారపత్రిక ఒకటి కలకత్తా నుండి వెలువడెను.

1925 నుండి 1935 వరకు ప్రభుత్వము అనేక సభల మూలమున సాంఖ్యక నివేదనల నిర్మాణము, అభివద్ధిని గురించి అనేక నివేదికలు ప్రచురించినది. వానిలో ముఖ్యములు క్రింద ఈయబడినవి.

1. " ఆర్థిక విమర్శసభ " 1925, శ్రీ ఎమ్. విశ్వేశ్వరయ్య అధ్యక్షత క్రింద ;
2. వ్యయసాయ రాజకీయసభ - 1928 ;
3. కార్మిక రాజకీయసభ 1931.
4. 1934 లో 'బౌలీ', రాబర్ట్సన్' అనువారలచే భారతీయ ఆర్థిక జనాభా యొక్క సాధ్యత యొక్క విమర్శ.

ద్వితీయ ప్రపంచ సంగ్రామ కాలములోను, తరువాతను నిర్బంధములు (కంట్రోళ్లు) అమలునకు దెచ్చుటకుగాను ప్రభుత్వశాఖలు ఆధికారిక సాంఖ్యకమును సమకూర్చినవి.

ప్రారంభమున ప్రభుత్వ వ్యాపార సమాచారము, సాంఖ్యకశాఖయందు సాంఖ్యకాంశ సేకరణ కేంద్రీకరింపబడియుండెను. తరువాత కార్యకలాపము ఎక్కువగుట చేతను, ప్రతి ప్రభుత్వశాఖయును సంశయరహిత దత్తాంశ సేకరణకు నిర్వచనములు, భావములు సామాన్య ప్రమాణములు స్థాపించుటకును. 1951 లో భారత ప్రభుత్వము ఒక కేంద్ర సాంఖ్యకీయ సంస్థ (సెంట్రల్ స్టాటిస్టికల్ ఆర్గనైజేషన్) ఏర్పరచెను.

1950 లో ప్రభుత్వ విత్తశాఖ ఒక దేశీయ నమూనా విలోకనసంస్థను స్థాపించి, తర్వాత దానిని ప్రభుత్వ మంత్రి మండలి నిర్వాహక సంస్థగా మార్చెను.

దత్తాంశ సేకరణలో కేంద్రప్రభుత్వమునకు, రాష్ట్రప్రభుత్వములకును కార్యకలాపములు చట్టరీతిగా విభజించుకొనుటకు అధికారము కలదు. దాని ప్రకారము రక్షణ, రైళ్లు, బ్యాంక్‌లు, ద్రవ్యము, విదేశవ్యాపారము, జనసంఖ్య మొదలగు వాటికి సంబంధించిన దత్తాంశసేకరణ కేంద్ర ప్రభుత్వమునకును ; వ్యవసాయము, పశువులు, అడవులు, విద్య మొదలగువాని దత్తాంశసేకరణ రాష్ట్రప్రభుత్వములకును విభజింపబడినవి. ఈ రీతిని అధికారము చెల్లించుటకు చట్టములు అమలులోనికి తేబడినవి.

ఆధికారిక సాంఖ్యకములో ముఖ్యములైనవి : దేశీయ ఆదాయము ; జనాభా ; వ్యవసాయ లేదా కృషిశాఖ ; గనులు, కార్మిక శాఖ ; వ్యాపార శాఖ ; ధరలు ; పని, ఉద్యోగము ; విత్తము, బ్యాంక్‌లు ; ఆరోగ్యము, జీవ సాంఖ్యకము ; రాకపోకలు ; విద్య.

వీని గురించి ముఖ్య విధములగు దత్తాంశముల సేకరణ, వాని అవర్తనము, విస్తారము, నిబంధనలు, అవి లభించు చోట్లు అన్నియు క్రింద ఈయబడినవి,

దేశీయ ఆదాయము : కేంద్ర సాంఖ్యకీయ సంస్థచే ప్రతి సంవత్సరము దేశీయ ఆదాయమును గురించి అంచనా ప్రచురింపబడును. ఈ అంచనాలలో సరకుల విలువలు ఉండును. అవి నాలుగు శీర్షికలుగా విభజింపబడి ఉండును.

కృషి, పశువుల రక్షణ వీనికి సంబంధించిన కార్యములు; గనులలో పని, చేతి పనులు ; వ్యాపారము, రాకపోకలు ; ఇతర పనులు.

ఈ నాలుగు శాఖలనుండి లభించు నికరాదాయము నికర స్వదేశీయ ఫలితమును ఇచ్చును; దీనితో విదేశీయ నికరపు రాబడి కూడవలయును. శాస్త్రరీత్యా గణించిన దేశీయ ఆదాయముయొక్క అంచనా 1958-59 లో రు. 12,470 కోట్లు, ప్రతివ్యక్తియొక్క ఆదాయము 313.2 రూపాయలు.

జనాభా : ఇండియాలో మొట్టమొదట జనాభా లెక్కలు 1872లో తీసికొనబడెను. ప్రతిదశాబ్దము జనాభా లెక్కల సేకరణ జరుగును. పరిపాలనకుగాను జనాభా లెక్కల సేకరణ జరిగినను, అందు ఆర్థిక, సాంఘిక, వ్యాపార సంబంధములగు విషయములన్నియు ఉండును. దేశీయ ఆదాయము కనుగొనుటకును, ఆర్థికసంబంధమైన ఏర్పాట్లకును జనాభా ఆవశ్యకము. జనసంఖ్యను గురించి ప్రతి సమాచారము అందుండును; పౌరులెందరు, జానపదులెందరు, వారి వ్యాపారము, జీవనము, నియోజక వర్గస్థాపన, ఆహార ధాన్య సేకరణ, ఖర్చు,విపణి కేంద్రస్థాపన మొదలగు విషయములు అందుండి తెలియును.

జనాభా లెక్కలు తీసికొనుటలో ఒకేకాలమున పౌరజానపదులను లెక్కపెట్టవలయును. ఇటీవలి జనాభా 1961 ఫిబ్రవరి 10 నుండి మార్చి 5 వరకు తీసికొనబడెను. ఈ జనాభా తీసికొనుటకు పూర్వము ఇండ్ల జాబితా ఒకటి తయారు చేయబడెను. తర్వాత 1961 ఫిబ్రవరి 10 నుండి 28 తేదీవరకు ప్రతి వ్యక్తిని లెక్కపెట్టి, మరల మార్చి 5 లోగా అంతయు తనిఖీ చేయబడినది. జనన మరణములు అన్నింటిని విమర్శించి, 1-3-1961 సూర్యోదయమునకు గల వ్యక్తుల సంఖ్య జాబితాలో ఎక్కింపబడినది. మరల వెయ్యికి ఒకటి వంతున అంతయును సరిచూడబడినది.

జనాభాయొక్క ఉద్దేశము క్రింది ప్రశ్నలనుండి తెలియును.

1. (a) పేరు. (b) యజమానునితో సంబంధము.

2. వయస్సు, జనన తేదీ.

3. వివాహితుడా ? అవివాహితుడా ?

4. (a) జన్మస్థానము, (b) పురమా, జనపదమా. (c) జన్మస్థానము ఇంకొకటి అయినచో ప్రస్తుతవాసస్థలము.

5. (a) మతము, (b) నిమ్నజాతి, తెగ.

6. అక్షరాస్యత, చదువు.

7. మాతృభాష, ఇతర భాషలలో పరిచయము.

8. కృషి.

9. వ్యవసాయపు కూలీ.

10. గృహకార్యములలో పని, (a) కార్మికుని లక్షణము. (b) చేతిపని లక్షణము, (c) యజమాని.

11. 8, 9, 10 లకు వ్యతిరిక్తమైన పనులు, (a) కార్మికుని లక్షణము, (b) చేతిపనియొక్క లక్షణము, ఉద్యోగము, వ్యాపారము లేదా ఊడిగము, (c) కార్మికుని తరగతి, (d) సంస్థపేరు.

12. పనిలేనపుడు కార్మికుని ప్రవృత్తి.

13. స్త్రీ పురుష విభాగము.

1961 జనాభా ప్రకారము, భారతదేశ జనసంఖ్య 43.8 కోట్లు. క్రిందటి దశాబ్దమున కంటె 21.49% అభివృద్ధి కన్పట్టినది. జానపదులు మొత్తములో 82.16%. ఈ జనాభా సేకరణలో 10 లక్షల గణకులు, ఇతర ఉద్యోగస్థులు పాల్గొనిరి.

వ్యవసాయశాఖ : వ్యవసాయ సాంఖ్యకమందు పంటల ఉత్పత్తి, సాగుబడిచేయు భూముల వైశాల్యము, నీటి పారుదల ; ధరలు, పశువులు, అడవులు, చేపలుపట్టు వృత్తులు మొదలగునవి విమర్శింపబడును. 1956-57 వరకు 28 కోట్ల హెక్టేరులు మాత్రము నిరీక్షణకు గురియైనవి. మొత్తము సాగుబడియగు భూములు 32.6 కోట్ల హెక్టేరులు. ఇపుడు 29 కోట్ల హెక్టేరులు నిరీక్షింపబడినవి. నివేదికలు రాని భూములు కాశ్మీరములోను, ఈశాన్య సరిహద్దు రాష్ట్రములోను, నాగాలాండ్‌లోను ఉన్నవి. సాగుబడి, బంజరు పదములకు క్రమనిర్వచనము చేసి, సాగుబడి కాగల భూముల తరగతులు, వానికి నీటిపారుదల విషయములు మొదలగువాటి జాబితాలు ప్రచురింపబడినవి. 1956-57 లో 12.4 కోట్ల హెక్టేరులు సాగుబడిలో ఉండెను. నీటి పారుదలకు అనుకూలముగల భూముల వైశాల్యము 2.3 కోట్ల హెక్టేరులు.

27 విధములగు పంటలకు వివరముల గురించియు, అవి సాగుబడియగు హెక్టేరుల గురించియు నమ్మకమగు సాంఖ్యకీయ వివరములు సేకరించబడినవి. క్రొత్త రాష్ట్రములలో ఒక్కొక్క స్థలమును తనిఖీచేసియు, ఇతర

చోట్ల యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపములు పరీక్షించియు వివరములు సేకరింపబడినవి. వీని సహాయమున పంటల యొక్క అంచనా తయారుచేసి ప్రచురింపబడెను. 1949 - 50 సంవత్సరము ఆధారముగా 1959-60 సంవత్సరమునకు లభించు పంటల సూచకసంఖ్య 127·2.

పశువులను గురించిన సాంఖ్యకాంశ సేకరణ జరుగుచున్నది. పశువులనుండి లభించు సామగ్రుల గురించి నమ్మదగిన వివరములు లేవు. అట్లే అడవుల గురించియు, చేపల గురించియును నమ్మదగిన లెక్కలు లేవు.

గనులు, చేతిపనులు : కేంద్రప్రభుత్వ వ్యాపార కార్మిక మంత్రిత్వశాఖ 1945 లో ఒక సంస్థను స్థాపించెను. అది 1946 లో వివరముల సేకరణ ప్రారంభించెను. 29 విధములగు చేతిపనులు పరిశీలింపబడి, 2,000 కర్మాగారములకు సంబంధించిన విషయములు అవలోకించబడినవి. అధికార ప్రతినిధులవల్లను, అనధికారమూలముగను లభించిన వివరములు 3 ముఖ్యశాఖల క్రింద ప్రచురింపబడినవి : అవి ఏవన : ఖనిజ సాధన, సంపాదన ; ఉత్పాదనలు ; విద్యుచ్ఛక్తి, ఇంధనవాయువులు, నీటి ఆవిరి.

1951వ సంవత్సరమును ఆధారముగా తీసికొనినచో, 1959 లో కార్మిక ఉత్పత్తి యొక్క సూచక సంఖ్య 152.

వ్యాపారము : విదేశ వ్యాపారము, స్వదేశ వ్యాపారముల గురించి విపులముగా వివరములు మాసపత్రికలలో కేంద్రప్రభుత్వ వ్యాపారశాఖ ప్రచురించుచుండును.

స్వదేశ వ్యాపార నిరీక్షకుగాను దేశమంతయు 39 వ్యాపార మండలములుగా విభజింపబడినది.

1960 లో విదేశములనుండి దిగుమతుల విలువ 1,012 కోట్ల రూపాయలు, ఎగుమతుల విలువ 623 కోట్ల రూపాయలు.

ధరలు : ధరలగురించి ప్రచురణ వారపత్రికలందును మాస పత్రికలందును, సాంవత్సరిక పత్రికలందును లభించును. వీనిని ప్రభుత్వము ప్రచురించును.

ఇచ్చట టోకు ధరల సూచిక సంఖ్యల నిర్మాణము గురించి యోచించుట యుక్తము. 112 సరకుల గురించి ప్రభుత్వ వివిధ శాఖల నుండి వచ్చు 555 నివేదికలపై ఇవి ఆధారపడి ఉండును. 1952-53 సంవత్సరము మూలముగా తీసికొనబడినది. సరకుల వెలలకు భారాంకిత గుణకములు తీర్మానించుట స్థానిక ఉత్పత్తి వస్తువుల ధరల పైనను, విదేశ వస్తువుల ధరల పైనను ఆధారపడి ఉండును. కర్మాగారముల నుండి వెలువడు నిర్మిత వస్తువులకు భారాంకిత గుణకములు 1948 నిర్మిత వస్తువుల స్థూలపు విలువలపై ఆధారపడి ఉండును.

ధరలకు మూల సంవత్సరము 1952-53. భారాంకిత గుణకములకు మూల సంవత్సరము 1948-49.

ఇవి అన్నియు ఐదు శాఖలుగా విభజింపబడినవి:

ఆహార పదార్థములు (50·4%) ; మద్యము, పొగాకు (2·1%) ; (c) ఇంధనములు, విద్యుత్ దీపములు కందెన, నూనెలు (3·01%) ; పారిశ్రామిక ముడి పదార్థములు (15·5%) ; నిర్మిత వస్తువులు (29·0%)

1961 ఫిబ్రవరి నెలకు టోకు ధరల సూచక సంఖ్య 126·6.

పరిశ్రమ, ఉద్యోగము : వ్యవసాయమునందును, పరిశ్రమలందును పనిచేయు కార్మికుల సంఖ్య, కూలి, వేతనము, వారికి చేసిన సదుపాయములు మొదలగునవి అధికార పత్రికల మూలమున అపుడపుడు ప్రచురింపబడును.

విత్తము, బ్యాంకులు : వీటి గురించిన విషయము లన్నియును రిజర్వు బ్యాంక్, స్టేటు బ్యాంక్, మండల బ్యాంక్ ప్రచురించు పత్రముల నుండి లభించును. ప్రభుత్వమువారి నుండి తగినట్టి ప్రకటనలు మనకు లభించుచున్నవి. ఆరోగ్యము, రాకపోకలు, విద్యావిధానములను గురించి ప్రభుత్వము చేయు ప్రకటనలు కావలసినంత ప్రచారములో నున్నవి.

జె. ఎస్. శర్మ.

ఆబకస్ : చూ. గణిత్ర యంత్రములు.

ఆయ్‌లర్, లియోనార్డ్ (1707 - 1783) : స్విజర్లండ్ గణితజ్ఞుడు. 18 వ శతాబ్దములో అతడు అత్యుత్తమశ్రేణికి చెందిన విజ్ఞాని. అనేక గ్రంథములతోపాటు అతడు దాదాపు 900 పరిశోధన పత్రములను వ్రాసెను. అతని రచనలు అన్నియు సంపూర్ణముగ ముద్రితములైనచో సుమారు 70 క్వార్టో సంపుటములుగ వెలువడును. జీవితాంతపు చివరి 17 ఏండ్లలో అతనికి సంభవించిన పూర్తిగ్రుడ్డితనము కూడ అతని అపార రచనా ప్రవృత్తికి నిరోధకముగ ఆచరింపలేకపోయెను ; ఏలన తన అత్యద్భుత ధారణాశక్తిని అండగాగొని అతడు గణిత పరిశీలన నిర్వహించెను.

అనేకములగు బీజగణిత సమాసములు అతని పేరున ఇప్పటికిని పిలువబడుచున్నవి.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\log\ n$ అను అవధి $n \longrightarrow \infty$ (n అనంతము అగునపుడు) γ అను గ్రీక్ అక్షరముతో వ్రాయబడి ఆయ్‌లర్ స్థిరాంకము అని పిలువబడుచున్నది. దాని విలువ 0·577 215 664 905 328......

$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ అనునది ఆయ్‌లర్ సమీకరణము.

ఇచ్చట $f(x)$ ఒక 4 వ తరగతి బహుపదము. పై అంతరీకరణ సమీకరణము నుండి దీర్ఘవృత్త (ఎలిప్టిక్) ఫలములకు సంబంధించిన ప్రసిద్ధ సూత్రము ఒకటి కనిపెట్టబడినది. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ అను సూత్రము ఘాత ఫలములకు, త్రికోణమితీయ ఫలములకు మధ్య ఒక సేతువుగా పనిచేయుచున్నది. దీనికి ఆయ్లర్ సూత్రము అని పేరు.

నిరూపక జ్యామితి యందు ఇతని పరిశోధనలలో 3 వ, 4 వ తరగతికి చెందిన వక్రరేఖలు, త్రిపరిమాణిక ఆకాశమందు రెండవ తరగతికి చెందిన వక్రతలములు, వక్రతలముల వక్రత అనునవి కొన్ని. బీటా, గామా ఫలములను ఇతడు సృజించి, పరిశీలించెను. గణితమునకు ఇతని ప్రధాన నిర్వాహము చలకలనవాద సృష్టి. ఇది క్రింది విధములగు సమస్యలను పరిశీలించును. 'ఒక దత్త తలముపై రెండు దత్తబిందువులను చేర్చు హ్రస్వతమరేఖ ఎద్ది? ఒక ఉదగ్ర (వర్టికల్) తలమున రెండు దత్త బిందువులు ఉన్నవి. ఒక బరువు కణము ఈ రెండు బిందువులను చేర్చు ఒక గరుకు కాని వక్రముపై జరుగుచున్నది. అది స్వీకరించు కాలము కనిష్ఠ పరిమాణము అగుటకు ఆ రెండు బిందువులను చేర్చు రూపము ఎద్ది? ఇవి గరిష్ఠ కనిష్ఠ మూల్యములకు చెందిన సమస్యల వంటివి. కాని కనుగొనవలసినది అవిదిత సంఖ్యగాదు, ఒక అవిదిత వక్రము.

దృఢవస్తుగతి శాస్త్రమున ఒక స్థిరబిందువు చుట్టు భ్రమించు వస్తువు యొక్క చలనమును సూచించు సమీకరణములను ఆయ్లర్ ఇచ్చినాడు. గతిశాస్త్రమందు అతిఫలదము, ప్రధానము అగు కనిష్ఠక్రియా సూత్రము (ప్రిన్సిపుల్ అవ్ లీస్ట్ ఏక్షన్) ను ఇతడు విస్తరించి సమర్థించెను: ద్రవ్యవస్తు శాస్త్రమందు ప్రవాహి యొక్క గతిని గురించిన సమీకరణములను స్థాపించెను.

ఖగోళశాస్త్రమందు ఇతని ప్రధాన పరిశోధనపత్రము న్యూటన్ ఆకర్షణ నియమములను అనుసరించి, పరస్పరము ఆకర్షించుకొనుచున్న మూడు మూర్తుల గతి సమస్యను చర్చించినది. ఇది చాల కష్టసాధ్యము; నేటికిని పూర్ణముగ పరిష్కరింపబడలేదు. కాని తక్కిన రెండు మూర్తుల ద్రవ్యరాశికంటె మూడవ దాని ద్రవ్యరాశి చాల చిన్నది అనుకొని భూసూర్యుల మొత్తపు ఆకర్షణ ప్రభావమున చంద్రచారమును నౌకాయానమునకు ఉపకరించుటకు సమర్థమగునంతటి యాథార్థ్యముతో నిర్ణయింపగలిగెను.

జ్యామితి శృంఖలముల నుండి, కలన గణితమును ఉద్ధరించి, ఆధునిక గణితమునకు వ్యక్తిత్వమును ఆపాదించిన కీర్తి, నవీన గణితవిశ్లేషణను స్వతంత్ర శాస్త్రముగా కీర్తి ఆయ్లర్ కే చెందును. ఆ. వ.

ఆయుర్దాయ పట్టికలు: నాగరకత వృద్ధిఅయినందున, జనులు సౌఖ్య జీవనమును వెదకుచున్నారు. దానికి విజ్ఞానము పలువిధములలో తోడ్పడుచున్నది. వానిలో ఒక విధమగు సంరక్షణము భీమా.

సంరక్షణ రెండు విధములు: (ఏ) సామాన్య సంరక్షణ, (బి) జీవితభీమా. అగ్నిప్రమాదము, జలప్రమాదము, సస్య సంరక్షణ మున్నగునవి సామాన్య సంరక్షణలో చేరినవి. ఇట్టి సంరక్షణ ఇష్టము వచ్చినపుడు కావలసినంత కాలము అమలులో ఉండునట్లు ఏర్పాటుచేయుట వాడుక.

గృహములకు అగ్నిప్రమాద సంరక్షణకుగాను ప్రతి సంవత్సరము కొంత ప్రీమియమ్ ఇచ్చిన, అగ్ని ప్రమాదము జరిగినవెంటనే సంరక్షణ కంపెనీవారు మనము ముందుగా ఏర్పాటుచేసుకొన్నంత పైకము అగ్నిప్రమాద నష్టమును ఉద్దేశించి, మన కందజేయుదురు. సంవత్సరప్రీమియమ్ ఇంటిపైనను, సంరక్షణ ధనముపైనను ఆధారపడిఉండును. పూరిండ్లను సంరక్షణచేయరు. అగ్నిప్రమాదము ఎప్పుడో ఒకసారి జరుగుటవలన భీమాకంపెనీవారికి నష్టముండదు. కాని అగ్నిప్రమాదమువలన బాధితుడైన వానికిమాత్రము భీమా కంపెనీవారిచ్చు ధన మూలమున చాల అనుకూలము కలుగును. దీనికి సంబంధించిన పట్టికలు శాస్త్రరీతిగా తయారుచేయబడి ఉన్నవి. ఆ పట్టిక ప్రకారము ప్రతి సంవత్సర ప్రీమియమ్ కంపెనీకి అందజేయవలయును.

సస్య సంరక్షణ కర్షకులకు చాల అనుకూలము. ఏదో రోగము చేతనో, వేరు కారణము చేతనో పైరు చెడిపోయినచో, కర్షకుడు నష్టపడకుండ వానికి కంపెనీ పరిహారమును చెల్లించును. ఇట్టి సంరక్షణ విధానములు భారత దేశములో ప్రచారములో లేవు.

మోటారు ప్రమాద రక్షణము, విమాన ప్రమాద రక్షణము తప్పక చేయవలయును. ఇవి నిర్బంధములు. స్వేచ్ఛతలేదు. విమాన ప్రమాదము జరిగిన ప్రయాణికులకు ప్రాణాపాయము కలుగవచ్చును. వారందరు తప్పక జీవిత భీమా చేసికొనవలయును. ఆ ప్రయాణము ముగియువరకే అది అమలులో నుండును. మోటారుకారు ప్రమాదము వలన కలిగిన నష్టము భరించుటకు సంరక్షణము ఏర్పాటు చేయుదురు. అది ఒక సంవత్సరకాలమే అమలులో నుండును.

మానవ జీవిత భీమా: ఇది చాల ముఖ్యమైనది, జన సౌఖ్యదాయకము. సంవత్సర ప్రీమియమ్, వయస్సుపైనను, నిర్ణీతకాలముపైనను, మొత్తముపైనను, ఆధారపడి

యుండును. అది గణిత మూలముగా నిర్ణయింపబడినది. విధానము క్రింద వివరింపబడును. ప్రీమియమ్ నిర్ణయించు పట్టికకు ఆయుర్దాయ పట్టికలని పేరు. ఇందు కొన్ని సంకేతములు కలవు. వానిని మొదట గమనింతము.

మూలసంఖ్య (రేడిక్స్): గణిత ఉపయోగార్థము అపుడు పుట్టినవారి సంఖ్య - 0 వయస్సు, సాధారణముగా 1,00,000 మందిని తీసుకొందుము.

l_x: ఈ లక్షమందిలో x సంవత్సరములు జీవించినవారు, l_{x+n}: పై లక్షమందిలో $x+n$ సంవత్సరములు జీవించిన వారు; వీరి సంఖ్య l_x సంఖ్య కంటె తక్కువ.

${}_np_x$: x వయస్సు గల ఒక వ్యక్తి $x+n$ సంవత్సరములు జీవించియుండిన, దాని సంభావ్యత, ${}_np_x$.

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

x వయస్సు గల ఒక వ్యక్తి ఒక సంవత్సరము వరకు జీవించుటకు సంభావ్యత $\frac{l_{x+1}}{l_x}$. దీనిని p_x చే గుర్తింతురు.

x వయస్సు గల వ్యక్తి ఒక సంవత్సరములో చనిపోవుటకు సంభావ్యత $q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$

x వయస్సు గల వారిలో ఒక సంవత్సరములోగా చనిపోవు వారు $d_x = l_x - l_{x+1}$

$$\text{కాబట్టి } q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

మృతిబలము: l_x యొక్క విలువ x యొక్క పూర్ణసంఖ్యలకు ఈయబడినవి; కాని సంవత్సరము పొడుగున జనులు మరణించు చుందురు. కాబట్టి l_x లో తక్కువయగు రేటు వయస్సు x గలవారిలో మృతిరేటు. కలనశాస్త్రము మూలముగా దాని విలువను కనుగొనవచ్చును.

$$x \text{ వయస్సులో మృతిరేటు } = \lim_{t\to 0} \frac{l_x - l_{x+t}}{t}$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{l_{x+t} - l_x}{t} = -\frac{d}{dx}(l_x)$$

$$x \text{ వయస్సులో ప్రతి వ్యక్తి యొక్క మృతిరేటు } = \text{మృతిబలము} = \mu_x$$

$$\therefore \mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}(l_x) = -\frac{d(\log x)}{dx}$$

l_x ఫలము, x యొక్క అవిచ్ఛిన్నఫలము; దానిని బీజ ఫలముగా చెప్పుటకు వీలులేదు. దాని స్థూల ఫలము మాత్రము కనుగొనవచ్చును. అట్లే μ_x యొక్క విలువ కూడ, $l_x = a + bx + cx^2$ అని తీసికొని; a, b, c లను l మూలముగా కనుగొనిన

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} + l_{x+1}}{2l_x} \text{ అని ఏర్పడును.}$$

జీవిత సంవత్సరములు: ప్రతి వ్యక్తికిని సరాసరి జీవిత సంవత్సరములు కనుగొని, జీవిత భీమా ప్రీమియమ్ ప్రతి ఏడాదికి దీని మూలమున నిర్ణయింపవచ్చును.

x వయస్సు గల l_x మనుష్యులలో d_x మనుష్యులు x సంవత్సరములోగాను, d_{x+1} మనుష్యులు $x+1$ సంవత్సరములోపుగను, d_{x+2}, $x+2$ లోపుగను, d_{x+3}, $x+3$ లోపుగను చనిపోవుదురు. కడపట చనిపోవువారు d_w; w సంవత్సరములలో చనిపోయిన తర్వాత వీరిలో ఎవరును మిగిలి యుండరు.

x వయస్సు ఒక వ్యక్తి సరాసరి జీవిత సంవత్సరములు $d_x, d_{x+1} \ldots d_w$ జనులు జీవించిన సంవత్సరముల యొక్క సరాసరి విలువ జీవిత ప్రత్యాశ లేదా, ఆకాంక్షకు సమానము.

$$e_x = \text{జీవిత ప్రత్యాశ} = \frac{d_x 0 + 1\,d_{x+1} + 2\,d_{x+2} \cdots\cdots}{d_x + d_{x+1} + d_{x+2} \cdots\cdots}$$

$$= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots}{l_x}$$

[$d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$; $d_{x+2} = l_{x+2} - l_{x+3} \cdots\cdots$ x సంవత్సరమున చనిపోయిన మనుష్యుల సంఖ్య $= d_x$]

పూర్ణజీవిత ప్రత్యాశ: e_x^0: d_x మనుష్యులు ప్రారంభమున చనిపోయి యుండరు. వారు సంవత్సరము పొడుగున చనిపోవుచుందురు. కాబట్టి వారు రమారమి 1/2 సంవత్సరము జీవించినట్లు తలచి, అట్టి మార్పులు అందరికి చేసిన,

$$e^0_x = \frac{\frac{1}{2}d_x + 1\frac{1}{2}d_{x+1} + 2\frac{1}{2}d_{x+2} \cdots\cdots}{l_x}$$

$$= e_x + \tfrac{1}{2}$$

మరికొన్ని నిర్వచనముల గమనింతము. ఒక సంవత్సరములో జనన మరణములు సమానముగా గల జనసంఘమునకు స్థిరసంఘమని పేరు. అట్టి సంఘములో జనాభా ప్రకారము x మొదలు $x+1$ సంవత్సరము వయస్సు గల వారి సంఖ్య L_x అని చెప్పుదురు.

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,dt = \int_0^1 [l_x - td_x]\,db$$

$$= l_x - \tfrac{1}{2}d_x = l_{x+\frac{1}{2}}$$

$$= l_x - \tfrac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) = \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

ఒక స్థిర సంఘములో x సంవత్సరముల వయస్సు, దానికి పైనుండు వారి సంఖ్య, T_x అనిన,

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots \dots L_w$$

x, $x+n$ సంవత్సరముల మధ్యనుండు జనుల సంఖ్య

$$T_x - T_{x+n}$$

ఆ వయస్సుల వారిలో మరణించు వారికిని, జనసంఖ్యకును గల నిష్పత్తి

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}}$$

$n = 1$ అయినపుడు దీనికి కేంద్రీయమృతి రేటు m_x అని పేరు.

$$\therefore\ m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{T_x - T_{x+1}} = \frac{d_x}{L_x}$$

$$= \frac{2(l_x - l_{x+1})}{l_x + l_{x+1}}$$

$$= \frac{2\,d_x}{l_x + l_{x+1}} = \frac{d_x}{l_x - \frac{d_x}{2}}$$

$$= \frac{2\,q_x}{2 - q_x}$$

$$\angle\ q_x = \frac{2m_x}{2+m_x}\ ; \quad p_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}$$

ఆయుర్దాయ పట్టిక నిర్మాణము : ఆయుర్దాయ పట్టికలు నిర్మించుటలో ముఖ్యమైనది q_x. దీని విలువలు అన్ని వయస్సులకు కావలయును. ప్రత్యవేక్షణచే ప్రతి వయస్సున మరణించు వారి సంఖ్య కనుగొని, తగినట్టి నిష్పత్తులను అనగా q_x కనుగొనుటకు వీలులేదు కాబట్టి వేరు మార్గము అవలంబింప వలయును.

జనాభా లెక్కలను, మరణ రిజిష్టరును ఉపయోగించి, జనన మొందిన వారలలో ఎంతమంది చనిపోయినారు అని కనుగొని, q_x పట్టిక నిర్మింపవలయును. జనాభా పట్టికలలో కొన్ని దేశములందు ఇచ్చు వయస్సులలో పొరబాట్లు ఉండవచ్చును. శిశువుల సందర్భములో అది తప్పక కనబడును. కాబట్టి జనాభా తీసికొన్న సంవత్సరమునకు పూర్వము ఐదు సంవత్సరములలోపున, జన్మించిన శిశువుల సంఖ్యను జనన రిజిష్టరు నుండి తీసికొని, జనాభా లెక్కలలో నుండు పొరబాటులను సవరింపవచ్చును. ఇపుడు జనాభా లెక్క ప్రకారము జనాభా తీయునపుడు ప్రతి వయస్సులో నుండు మనుష్యుల సంఖ్య తెలుసును. మరణ రిజిష్టరులో నుండి ప్రతి వయసులో మరణించు వారి సంఖ్య కనుగొనవలయును. x నుండి $x+1$ వయస్సు వరకు జీవించియుండు వారి సంఖ్య L_x.

$m_x = \frac{d_x}{L_x}$: $q_x = \frac{2\,m_x}{2+m_x}$ తర్వాత q_x పట్టిక తయారుచేయవచ్చును.

q_x యొక్క విలువలలో పొరపాట్లు ఉండును. వానిని సవరించుట గ్రాఫ్ **మూలముగా** చేయవచ్చును. గళ్ల కాగితములో x, q_x గుర్తించు బిందువులు వెనుక ముందుగ నుండును. బిందువుల చేర్చు రేఖ యొక్క గమకము ఎట్లున్నదని గమనించి, వాని గుండ అత్యంతయుక్త వక్రము గీయవలయును. తర్వాత q_x లను కనుగొనవలయును.

ఈ మార్గములో అనేక విధ క్రమములుండుటవలన q_x కు బదులు $\log(1 + 100\,q_x)$ తీసికొని గ్రాఫ్ గీసిన, వాని నుండి q_x విలువల కనుగొనవచ్చును. ఆయుర్దాయ పట్టిక నిర్మాణము తర్వాత చాల సులభము. క్రింది అఖిల భారత పురుషుల జీవిత పట్టిక 1,00,000 కి ఇవ్వబడినది:

వయస్సు (x)	l_x	d_x
78	2422	414
79	2008	367
80	1631	337
81	1294	296
82	998	253
83	745	210
84	535	168
85	367	128
86	239	90
87	147	65
88	84	39
89	45	23
90	22	12
91	10	6
92	4	3
93	1	.

పై పట్టికనుండి $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ కనుగొనవచ్చును.

$$q_{90} = \frac{12}{22} = 0{\cdot}54$$

$$\mu_{90} = \frac{l_{89} + l_{91}}{2\,l_{90}} = \frac{45+10}{44} = 1{\cdot}25$$

$$e_{85} = \frac{l_{86} + l_{87} + l_{88} + l_{89} + l_{90} + l_{91} + l_{92} + l_{93}}{l_{85}}$$

$$= \frac{554}{367} = 1{\cdot}5$$

కాబట్టి 85 సంవత్సరములు వయస్సుగల ఒక వ్యక్తి ఈ పట్టిక ప్రకారము 1·5 సంవత్సరములు బ్రతికి ఉండ వచ్చును. లేదా e^0_{85} ప్రకారము 2 సంవత్సరముల కాలము బ్రతికి యుండవచ్చును. ఇది జీవిత భీమాలో ప్రీమియమ్ నిర్ణయించుటకు ఉపయోగించును. ఆచార్య.

అరిస్టార్కస్ (క్రీ. పూ. 310 - 210): ప్రాచీన గ్రీక్ ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులలో ప్రసిద్ధుడు అరిస్టార్కస్. ఇతడు సామాస్ నగర నివాసి.

తన కాలములోను, తన తరువాత అనేక శతాబ్దముల వరకు ఎవ్వరు ఆమోదించని 'సూర్యుని చుట్టు భూమి తిరుగుచున్నది' అను వాదమును ప్రతిపాదించిన ప్రతిభా శాలి. అర్ధగోళాకార సూర్యఘటి (సన్‌డయల్)ని ఇతడు నిర్మించెను; సూర్యుని, చంద్రుని దూరములను, పరిమాణ ములను అరిస్టార్కస్ కనుగొన ప్రయత్నించెను. సంవత్సర నిడివి 365¼ దినములు అనునది రమారమి విలువ అని అరిస్టార్కస్ గుర్తించి సవరణగా 1/1623 దినమును చేర్చ వలెనని సూచించెను (చూ. కోపర్నికస్). పా. ల. నా.

ఆర్కిమీడీజ్ (క్రీ. పూ. 287 - 212): ప్రకృతి సంభవములను అవేక్షింపగల శక్తి, అవేక్షించిన విషయ మును అవగాహన చేసికొనగల బుద్ధి, ఆ అవగాహనవలన లభించిన సమాచారమును ఆధారముగా గొని, నూతన భావములను ఆవిష్కరింపగల నేర్పు శాస్త్రవేత్తల ప్రధాన లక్షణములు. ఆర్కిమీడీజ్ తొట్టెలో స్నానముచేసి, పరిశుద్ధ గాత్రముతోనే కాక, 'విశిష్టగురుత్వము' అని ప్రసిద్ధికెక్కిన ప్రముఖ భావముతో కూడ లేచి వచ్చెను.

ఆర్కిమీడీజ్ గ్రీక్ దేశీయుడు; క్రీ. పూ. 287 ప్రాంత మున సిసిలీ ద్వీపములోని సైరాక్యూజ్ నగరమున జనిం చెను; అలిగ్జాండ్రియాలో యూక్లిడ్ అనుచరుడైన ఒక ప్రసిద్ధశాస్త్రవేత్త వద్ద గణితమును అభ్యసించి, స్వస్థానము నకు తిరిగివచ్చి, తనజీవితకాలమంతయు గణిత, దార్శనిక చింతనలతో కడపెను.

ఆనాటి గ్రీక్‌లకు కాయకష్టము పరువుతక్కువపనిగా ఉండెను; ప్రయోగములన్న వారికి గిట్టవయ్యెను. అయినను గణితరీత్యా వాస్తవములైన తన పర్యవసానములను వెల్లడిచేయుటకుముందు ఆర్కిమీడీజ్ పెక్కు ప్రయోగ ములు కావించి ఉండవచ్చునని విద్వాంసులు అభిప్రాయ పడుచున్నారు. ఆయనమాత్రము తాను చేసిన ప్రయోగ ములను పేర్కొనలేదు; కేవలము ఆలోచనాశక్తిచే లభించి నట్లుగా తన పర్యవసానములను ప్రకటించెను.

నీటిలో మునిగిన (పూర్తిగా కాని, అసంపూర్తిగా గాని) వస్తువుయొక్క భారము తగ్గినట్లుకనిపించును; ఆ తగ్గుదల మునిగియున్న వస్తువుయొక్క లేదా దాని భాగము యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సమానమగు ఘనపరి మాణముకల నీటిబరువునకు సమానమని ఆర్కిమీడీజ్ కను గొనెను. ఇదియే ఆర్కిమీడీజ్ సూత్రము అని ప్రఖ్యాతి కెక్కిన నియమము. ఈ నియమస్థాపన సందర్భముననే ప్రచారములోనికి వచ్చిన హీరోరాజ కిరీట పరీక్ష ఉదంతము అందరికి సువిదితమే. ఒక ద్రవములో మునిగిన వస్తువును ఆద్రవము పైకి త్రోయుచుండుటవలననే దాని బరువు కొంత కోల్పోవును అని అతడు నిరూపించెను. ఆ బలము ఉత్ప్లవనబలము అనబడును. ఉచ్చాలక యంత్ర నియమమును మొట్టమొదట కనుగొన్నవాడు ఆయనయే. అతిసరళమయిన ఆ ఉపాయమువలననే పెద్దపెద్దబరువులను చేతిలో కదలించగలశక్తి మానవుడు సమకూర్చుకొను చున్నాడు. "ఆకాశములో నేను కాలానుకొనగలిగినచో భూమినే లేవనెత్తగలను" అని అతడు చెప్పగలుగుట పై నియమములో ఆతనికిగల పూర్ణవిశ్వాసమును వెల్ల డించును. (చూ. భౌతిక, రాసాయనికశాస్త్రములు పు.11)

ఆర్కిమీడీజ్ శుద్ధగణితమునకు, వినియుక్తగణితమునకు సమాన నిర్వాహము కావించెను. వృత్తమును చతురస్రీక రించుట అను సమస్య ఆకాలములో సంతృప్తికరముగా సాధింపబడలేదు. అందుకు వృత్తవైశాల్యమును కచ్చితముగ కనుగొనవలసి ఉండును. వృత్తవైశాల్యమునకు సమీ కరణము πr^2. ఇక్కడ π యొక్క ఆసన్నవిలువ 3·1416. ఇంతవరకు ఆ విలువ ఇతమిత్థమని తేలలేదు. దానివిలువ 3·1408కు 3·1429 మధ్య ఉండునని ఆర్కిమీడీజ్ చెప్పెను. నిరూపకజ్యామితి భావములును ఆయన దృష్టిని మించి పోలేదు. అందులోను గోళముల, శంకువుల ఛేదముల యొక్క ధర్మములు అను విషయము ప్రధానమైనది. అంతరీకరణకలనమును అభ్యసించువారు ఆర్కిమీడీజ్ సర్పిలము అని ఒక సర్పిలము (స్పిరల్) గూర్చి నేర్చు కొందురు.

గోళము, స్తూపము - వీటి గురించిన కృషి తనకు ప్రత్యేక గర్వహేతువు అని ఆర్కిమీడీజ్ చెప్పికొనినాడు. గోళముయొక్క తలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణము కను గొనుటకు ఆయన సూత్రములను ఇచ్చినాడు. గోళములను పూర్తిగాలోన ఇముడ్చుకొనగలిగిన స్తూపముయొక్క వైశాల్యము గోళవైశాల్యమునకు సమమని కనిపెట్టెను.

శాస్త్రవేత్తలు చాలమందివలె ఆర్కిమీడీజ్‌కూడ తన ధీశక్తిని యుద్ధపరికర నిర్మాణమునకు వినియోగించెను. అతడు నిర్మించిన యుద్ధయంత్రములే క్రీ. పూ. 215 లో సైరాక్యూజ్ నగరమును ముట్టడించిన రోమన్ సైనికులను

చిందరవందరచేసి, గ్రీకులకు విజయము చేకూర్చెనని చరిత్ర చెప్పుచున్నది.

కొన్ని ఏండ్ల తరువాత సైరాక్యూజ్ నగరము మార్సెల్లస్ అను రోమన్ సేనాని వశమయ్యెను. ఆర్కిమీడీజ్ ను, అతని గృహమును ముట్టవద్దని ఆ సేనాని ఉత్తరువులు జారీచేసినను జరుగవలసిన అత్యాచారము తప్పలేదు. నెరపిన ఇసుకలో లెక్కలు వేయుచు తదేక చింతతో ఉన్న ఆ మహావిజ్ఞానిని రోమన్ సైనికుడు ఒకడు తన కత్తికి బలి ఇచ్చెను. ఈ అకృత్యమునకు చాల వగచి, రోమన్‌లు అతనిని విశేషగౌరవములతో పూడ్చిపెట్టి, ఆసమాధిపై కట్టిన గోరీపై అతని అభిమానచిహ్నములైన గోళమును, స్తూపమును చిత్రించిరి.

ఆ. వెం.



చిత్రము 62 గణితమునందు నిమగ్నుడై ఉన్న ఆర్కిమీడీజ్‌ను రోమన్ సైనికుడు చంపుట.

ఆర్కిమీడీజ్ ఆధారతత్త్వము : యూక్లిడ్ తన జ్యామితి నిర్మాణములో నిర్వచనములేని కొన్ని పదములను, ఉపపత్తిలేని ఆధారతత్త్వములను ఉపయోగింపవలసి వచ్చెనని సమీక్షలో చెప్పితిమి (చూ. పు. 31). ఇట్టి ఆధారతత్త్వములను అన్నిటిని వ్యక్తముగా చెప్పవలయుననియే యూక్లిడ్ ఉద్దేశము. కాని అతడు తాను ఉపయోగించిన ఆధార తత్త్వములను అన్నిటిని గుర్తించలేదు. అందులో ఒకటి A, C అను రెండు బిందువుల నడుమ B అను బిందువు ఉండుట అను భావము, దానికి సంబంధించిన ధర్మములు. ఇట్టి లోపములను, లోపములకు సమాధానములను ఆధునిక గణితజ్ఞులు, ముఖ్యముగా హిల్బర్ట్ చూపించిరి.

ఒక ఋజురేఖపై A, B, C అను మూడు బిందువులు ఉన్నవి అనుకొందము. ఇవి A, B, C క్రమములో ఉండి, B బిందువు A, C బిందువుల మధ్య ఉన్నది అని కూడ అనుకొందము. అపుడు B, C బిందువులు A కి ఒకే ప్రక్కన ఉండును. ఇపుడు A నుండి సమాన కొలతలు AB, BB_1, B_1B_2, B_2B_3 … … తీసికొంటిమేని n కావలసినంత పెద్ద పూర్ణాంకము అగునపుడు – అనగా కావలసినన్ని పదముల తరువాత – B_n బిందువు C ను దాటి పోవును. ఇదియే ఆర్కిమీడీజ్ ఆధారతత్త్వము (చూ. పు. 33).

నిరూపక జ్యామితిలో ఈ ఆధార తత్త్వమునకు ఆవశ్యకతలేదు. ఏలన అచ్చట దూరములు అన్నియు వాస్తవ సంఖ్యలు. కనుక AB దూరము a అను సంఖ్య, AC దూరము b అను సంఖ్యయు అయినచో b ను a చేత భాగహారము చేసినచో ఒక పూర్ణాంకము p యు, ఒక భిన్నము f ను లభించును. అపుడు $(p+1)a > b$ అగును. అనగా $n \geq p+1$ పదముల తరువాత B_n బిందువు C ని దాటి ఉండును.

అయితే నిరూపకములను ఉపయోగింపక జ్యామితిని నిర్మించునపుడు 'దూరము' అను భావమును నిర్మింతుము గాని, ఆ 'దూరము'నకు ఏయే ధర్మములు ఉన్నవో చెప్పవలెను. అవి వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉండనక్కరలేదు. కనుక ఈ దూరములు ఆర్కిమీడిజ్ ఆధారతత్త్వమును అనుసరించునని విస్పష్టముగ చెప్పవలెను. ఈ ధర్మమును అనుసరించని 'దూరము' లను ఉపయోగించియు జ్యామితిని నిర్మించిరి.

ఆ. స.

ఆర్యభటుడు - I : ప్రాచీన భారతదేశములో శాస్త్రీయ లేదా సిద్ధాంతయుగమునకు చెందిన మేటి జ్యోతిర్గణితవేత్తలలో ఒంప్రథముడైన ఆర్యభటుడు-I క్రీ. శ. 476 లో జన్మించెను. అతడు 'ఆర్యభటీయము' లేదా 'ఆర్యసిద్ధాంతము' అను తనగ్రంథమును కుసుమపురము (నేటి పాట్నా) నందు రచించెను. కాని అతడు కేరళరాష్ట్రములోని అశ్మకపురమున జన్మించెనని వేరొక సంప్రదాయముకలదు. అశ్మక శబ్దము మళయాళీ స్థలనామమయిన 'కల్లు' నకు సంస్కృతరూపము కావచ్చును.

నేడు ఉపలబ్ధమగుచున్న అతని ఏకైక గ్రంథము ఆర్యభటీయమునందు దశగీతిక, ఆర్యాష్టశతము అను రెండు విభాగములుగలవు. అందు ఉత్తరవిభాగము మరల గణితపాదము, కాలక్రియాపాదము, గోళపాదము అను మూడు పరిచ్ఛేదములక్రింద విభజింపబడెను. దశగీతిక అంకెలకు అక్షర క్రమసంకేతములను కల్పించెను; కాని అది స్థానమూల్య నిర్దేశకపద్ధతిని సూచించునని చెప్ప సాధ్యముకాదు. గణితశాస్త్ర వివిధశాఖలకు ఆర్యభటుడు కావించిన నిర్వాహము దిగువ క్రోడీకరింపబడినది.

బీజగణితము : (1) ప్రథమతరగతి అనిశ్చిత సమీకరములు; (2) సంకలనశ్రేఢుల సంపూర్ణనిరూపణము; (3) ప్రకృతి సంఖ్యల, వాటివర్గముల, వాటిఘనముల సంకలనీయత; (4) త్రిభుజసంఖ్యల సంకలనము; (5) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ — వీటి విస్తరణములవంటి సరళసాంకేతికములు. సంకలనశ్రేఢుల పదసంఖ్యలకు అతడు ఇచ్చిన సాంకేతికము అతని వర్గసమీకరణ సాధనసామర్థ్యమును సూచించును.

జ్యామితి : (1) త్రిభుజము, ట్రెపీజియమ్, వృత్తము - వీటివైశాల్యములు కనుగొనుటకు సరియైన సాంకేతికములు, (2) వర్తమాన π విలువకు మిక్కిలి ఆసన్నమగు $\pi = \frac{62832}{20,000}$ అను విలువ, (3) ఒక వృత్తపరిధిలోని 1/6 భాగముయొక్క జ్యా ఆ వృత్తము వ్యాసార్థమునకు సమానము అని సిద్ధాంతముచేయుట, (4) సదృశ త్రిభుజముల యొక్క ధర్మములగూర్చిన పరిజ్ఞానము, (5) ఛాయా ప్రత్యవేక్షణలనుండి లెక్కలు కట్టుట.

త్రికోణమితి : (1) జీవ వ్యత్యాసముల పట్టిక, (2) విదిత కోటిజీవలనుండి ఇతర కోటిజీవల గణనమునకు మధ్యపదనిశ్చయ సూత్రములు.

అంకగణితము : (1) వర్గమూల ఘనమూలముల నిష్కర్షణ, (2) భిన్న పరికర్మములు, (3) త్రైరాశికములు.

క్షేత్రమాపనము : ఘనగోళము యొక్క, చతుస్తలకము యొక్క ఘనపరిమాణ గణనకు అతడు ప్రతిపాదించిన సూత్రములు రెండును అయథార్థములు. చతుస్తలకము విషయమై

ఘనపరిమాణము = $\frac{1}{2}$ ఆధారవైశాల్యము × లంబభుజము

అనునది అతని సూత్రము.

ఖగోళశాస్త్రము : భూమి ఘనగోళమనియు, అది తనలో తాను తిరుగుచున్నది అనియు, ఆర్యభటుడు ప్రతిపాదించెను. గ్రహముల స్థానస్ఫుటమునకు గ్రీకులు అనుసరించిన ప్రాక్చక్రపద్ధతిని ఆర్యభటుడు ఉపయోగించెను.

ఆర్యభటునిశైలి సంక్షిప్తముగను, క్లిష్టముగనుండును. ఆర్యభటీయముపై కేరళలో రచింపబడిన వ్యాఖ్యానముల బాహుళ్యము ఆర్యభటుని ఖగోళవిద్య ఎంత ప్రామాణికమో, ఎంత జనాదరమును పడసినదో మనకు తెలియజేయుచున్నవి. లల్ల, భాస్కరాచార్య - I కేరళ జ్యోతిశ్శాస్త్రజ్ఞులు ఆర్యభటుని అనుయాయులే, ఈతని తమతమ రచనలలో 'ఆచార్య' పదముచే బహూకరించి ఉన్నారు. కరణప్రకాశము, గ్రహలాఘవము అను గ్రంథములు కొంతమట్టుకు ఆర్యభటుని అనుసరించినవే. ఆర్యభటీయము 'ఆర్జబాహర్' లేదా 'ఆజ్‌జబాహర్' అనుపేర అరబ్బులకు పరిచితము.

సరస్వతి.

ఆర్యభటుడు - II : ఈతనికి ప్రాచీనుడగు మొదటి ఆర్యభటుడే ఈతడను భ్రాంతి చాలకాలముండెను. కాని వీరిద్దరు వేరువేరు వ్యక్తులని నేడు సోపపత్తికముగా స్థాపింపబడినది. అందుబాటులోఉన్న ప్రమాణములను అనుసరించి ఈతడు 10 వ శతాబ్దమువాడని రుజువుచేయవచ్చును. మహాసిద్ధాంతము లేదా ఆర్యసిద్ధాంతము అనునది నేటివరకు దొరకిన ఈయన రచించిన ఏకైక గ్రంథము. ఇందు ఖగోళశాస్త్రము, గణితశాస్త్రము 18 అధ్యాయములలో విస్తరించబడినవి. గ్రంథమంతయు ఆర్యావృత్తములలో రచింపబడినది. 15 వ అధ్యాయము నందు అంకగణితము, జ్యామితియును చర్చింపబడినవి. 18 వ అధ్యాయమునకు బీజగణితము విషయము.

తనపేరిటివాడగు మొదటి ఆర్యభటునివలె, రెండవ ఆర్యభటుడును 1 - 9 సంఖ్యలకు సంకేతములుగ అక్షర సమామ్నాయములోని అక్షరక్రమమును వాడినాడు

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
క	ఖ	గ	ఘ	ఙ	చ	ఛ	జ	ఝ	ఞ
ట	ఠ	డ	ఢ	ణ	త	థ	ద	ధ	న
ప	ఫ	బ	భ	మ					
య	ర	ల	వ	శ	ష	స	హ		

అచ్చులకు విలువలులేవు. సంఖ్యలు ఎడమనుండి కుడివైపునకు చదువబడును. ఇట్లు 'ఘ డ ఫ' = 432. మొదటి ఆర్య

భటుని పద్ధతియందు, బ్రహ్మగుప్తుడు, భాస్కరుడు ఇతర గణకులు వాడుకచేసిన సంఖ్యాసంకేతమునందు అంకెలు కుడినుండి ఎడమకు సాగును (అంకానాం వామతోగతి = అంకెలగతి అపసవ్యము). దక్షిణభారతదేశములో మిక్కిలి వాడుకలోఉన్నసంకేత లేఖనమందు సులభముగా జ్ఞాపకము ఉంచుకొనుటకు వీలైన చక్కనిమాటల సమూహములను సృజించుట రెండవ ఆర్యభటుని పద్ధతికి అనుసరణమే. కాని అంకెలు కుడినుండి ఎడమకు సాగుట, సంయుక్త హల్లులలోని ఘటకహల్లులకు ప్రత్యేకపు విలువలు లేకుండుట అను భేదముమాత్రము కలదు.

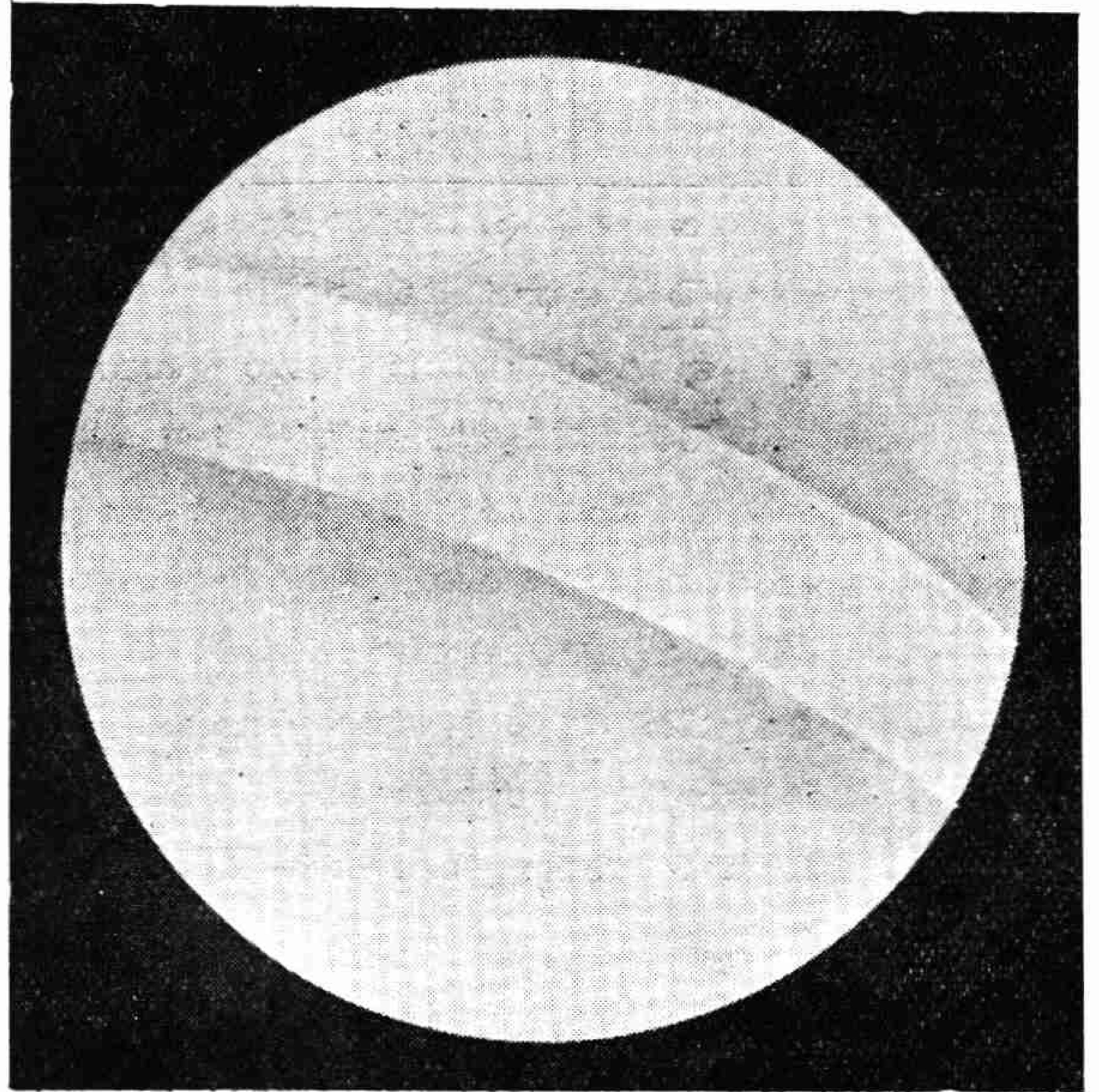
రెండవ ఆర్యభటుడు తనకు ముందుండిన గణకులను తీవ్రముగా విమర్శించెను. భాస్కరాచార్య - II వంటి తన తరువాతివారిపై ఈతని ప్రభావము మెండు. చక్రీయ చతుర్భుజములకు సంబంధించిన బ్రహ్మగుప్తుని సిద్ధాంతముల యొక్క అర్థము విషయమైనభ్రాంతి కొందరు భారతీయ గణితవేత్తలకు ఎట్లు సంక్రమించినదో మనము చెప్పలేము. కాని బ్రహ్మగుప్తుడు వివక్షించినది చక్రీయ చతుర్భుజము అని తెలిసికొనలేక, ఒక చతుర్భుజమును నిర్దేశించుటకు దాని నాలుగు భుజములుమాత్రమే చాలవని మొట్టమొదటి సారిగా చూపినవాడు రెండవ ఆర్యభటుడే. చతుర్భుజముల యొక్క కర్ణములపొడవులకు, భుజములపొడవులకు గల సంబంధములను విచారవిషయను కావించినవాడు, ఒక రాంబస్ వైశాల్యము దాని కర్ణముల గుణకార లబ్ధమునకు సమానమని కనుగొనినవాడు రెండవ ఆర్యభటుడే. ఇతనిచే అంగీకరింపబడిన π యొక్క విలువ $\frac{22}{7}$; శ్రీధరుని వలెఇతడుకూడ వృత్తఖండము యొక్క చాపము, వ్యాసము, వైశాల్యము - వీటికి సూత్రములు ఇచ్చినాడు. ఘనపరిమాణ గణనయందు సమములు, విషమములు అగు లోతులు గల గర్తముల ఆయతనములను కొలుచుటకు బ్రహ్మగుప్తుని నియమములు ఇచ్చుటయేగాక, ఇతడు గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము $\frac{19d^3}{36}$ అని చెప్పినాడు. $\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసికొనినచో దీనిని యథార్థ సూత్రమగు $\frac{4}{3}\pi r^3$ గ మార్చ వచ్చును.

సరస్వతి.

ఆల్ బట్టాని : చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష. పు. 75.

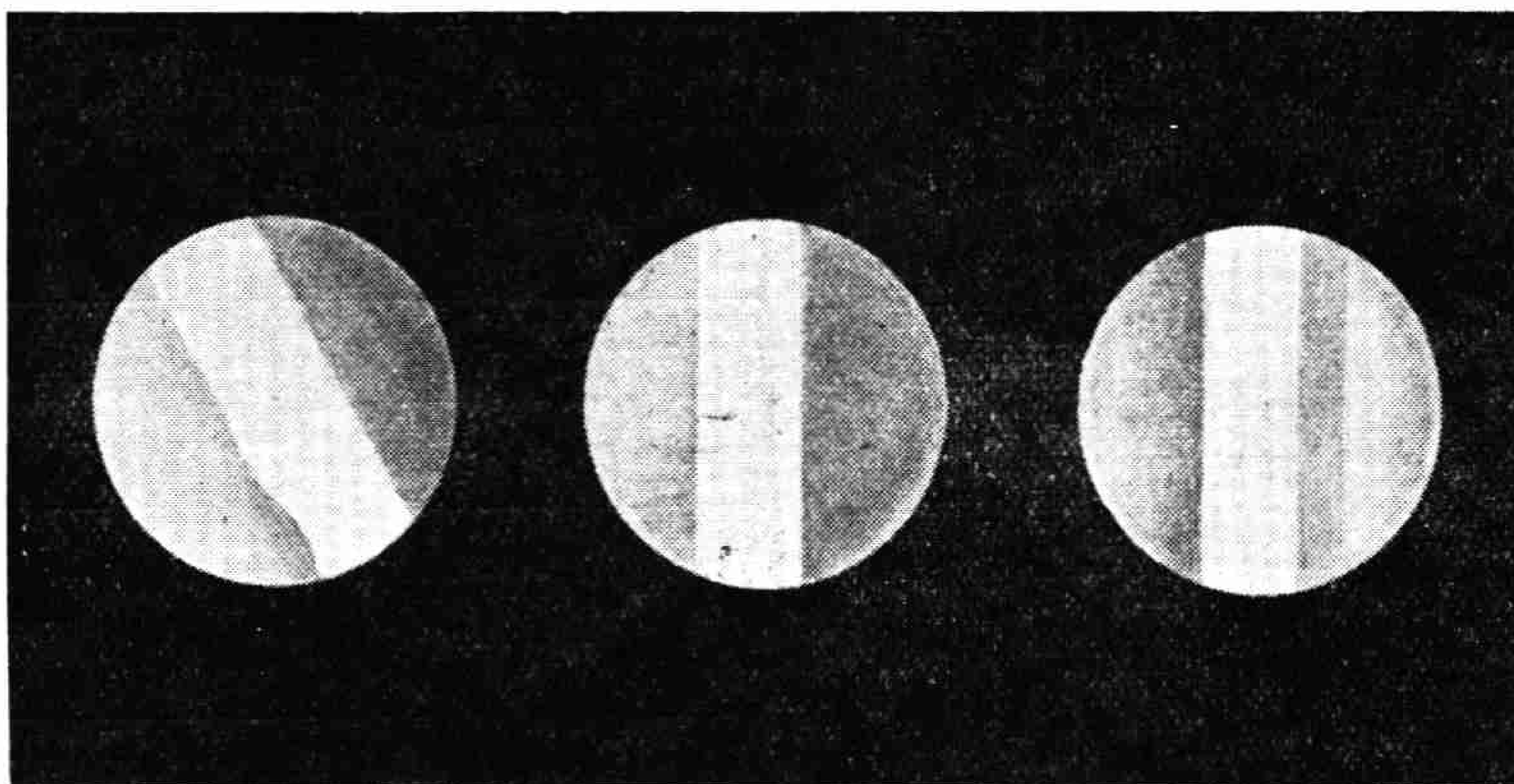
'ఇ' (e) సంఖ్య : చూ. పై (π) వగైరా విలువ.

ఇంద్రుడు (యురేనస్) : శనిగ్రహమే సౌర



చిత్రము 63 ఇంద్రుడు

కుటుంబములోని కడపటిగ్రహము అని 1781వ సం॥వరకు శాస్త్రజ్ఞులువిశ్వసించిరి. కాని ఆ సంవత్సరము మార్చినెల 13వ తేదీన సర్ విలియమ్ హర్షెల్ ఇంద్ర గ్రహమును ఆవిష్కరించెను. మానవునిచే ఆవిష్కరింపబడిన మొట్టమొదటి గ్రహము ఇంద్రుడే.

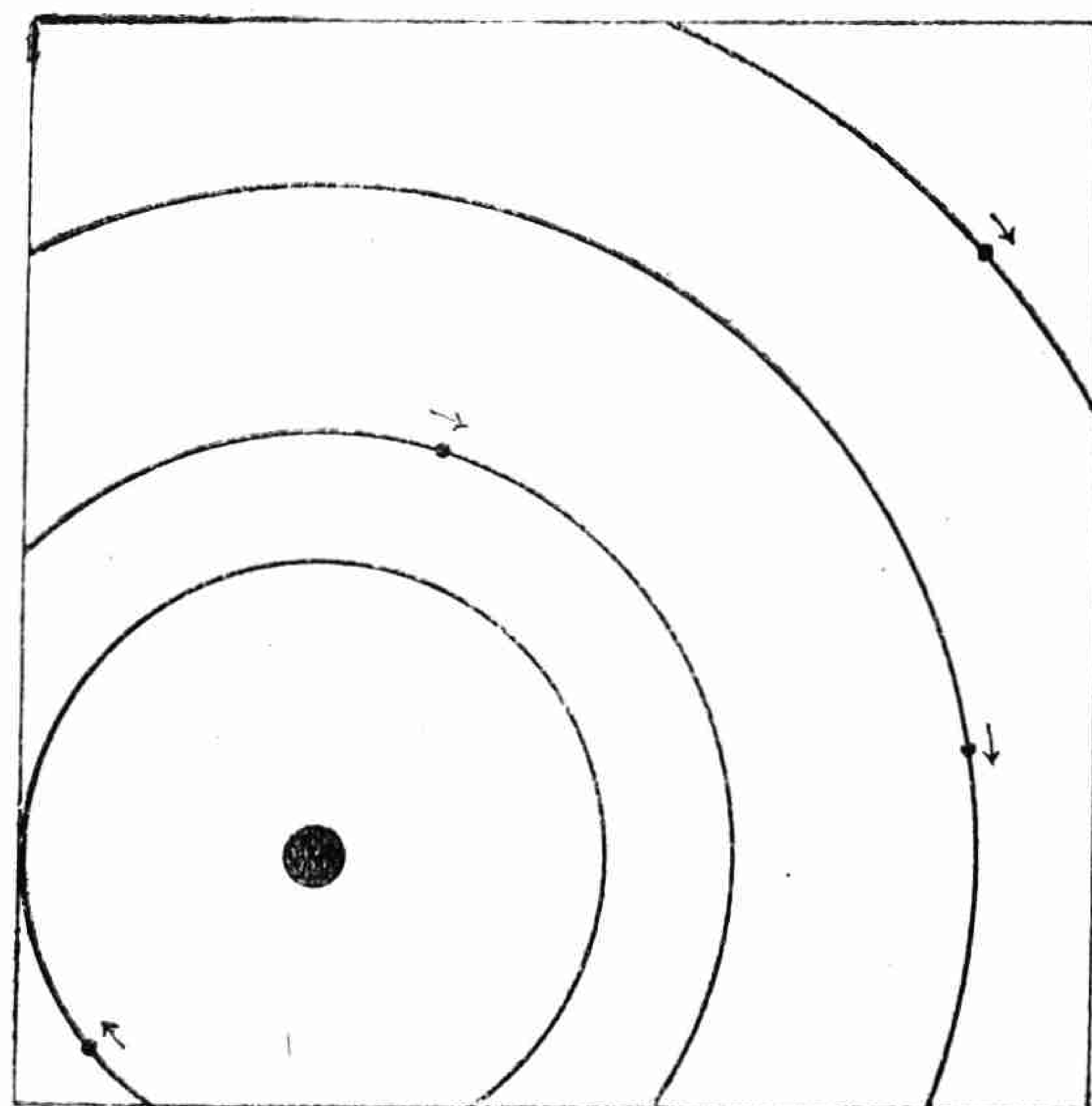


చిత్రము 64 ఇంద్రునిపై గురుతులు

ఇంద్రలోక వాతావరణము మేఘమయము. ఇంద్రుని కాంతి పరావర్తనశక్తి సుమారు 0.63. పరిస్థితులు అను

కూలముగ ఉండునపుడు ఇంద్రుని నిస్సహాయ నేత్రములతో చూడవచ్చును. ఇంద్రతలములో కచ్చితమైన చిహ్నములు లేనందున దాని భ్రమణకాలమును నేరుగ గణింప వీలుకాదు డప్లర్ సిద్ధాంతముపై ఆధారపడిన వర్ణమాలా చిత్ర పరిశీలనలనుండి ఇంద్రుని భ్రమణకాలము సుమారు 10 గం. 45 ని. అని తెలియవచ్చినది. ఇతర గ్రహములవలె గాక ఇంద్రుడు తూర్పునుండి పశ్చిమదిశవైపు భ్రమణము చేయును. ఇంద్రుని వర్ణమాల గురు, శనిగ్రహముల వర్ణమాలలను ఇంచుమించు పోలి ఉండును. దీనిలో మీథేన్ వలన కలుగు విచూషణపట్టికలు తీక్ష్ణముగ ఉండుట చూడవచ్చును. వికిరణమాపక (రేడియోమెట్రిక్) పరిశీలన వలన ఇంద్రుని తాపక్రమము సుమారు $-207°C$ అని తెలియుచున్నది.

ఇంద్రునకు 5 ఉపగ్రహములు కలవు. వాటిలో 4 ఉపగ్రహముల కక్ష్యలు ఇంచుమించు వృత్తములు. అవి ఇంద్రుని



చిత్రము 65 ఇంద్రుని ఉపగ్రహకక్ష్యలు

నిరక్ష రేఖాతలములో గ్రహభ్రమణదిశలోనే పరిభ్రమించుచున్నవి. వాటితలము ఇంద్రుని కక్ష్యాతలమునకు సుమారు 82 డిగ్రీలు ఏటవాలుగ ఉండును. ఉపగ్రహములను గురించిన

ఇంద్రుని ఉపగ్రహముల వివరములు

ఉపగ్రహము పేరు	ఆవిష్కర్త	ఆవిష్కరింపబడిన సంవత్సరము	ఇంద్రునినుండి దూరము (కిలోమీటరులలో)	భ్రమణకాలము ది.	భ్రమణకాలము గం.	వ్యాసము (కిలోమీటరులలో)
మిరాండ	క్వైపర్	1948	1,30,035	1	10	160 ?
ఏరియల్	లాసల్	1851	1,91,672	2	12	482 ?
అంబ్రియల్	లాసల్	1851	2,66,990	4	3	402 ?
టైటానియా	హర్షెల్	1787	4,37,740	8	17	965 ?
ఓబెరాన్	హర్షెల్	1787	5,86,605	13	11	885 ?

వివరములు పైన పేర్కొనబడినవి. కె. ఎస్. వి. న.

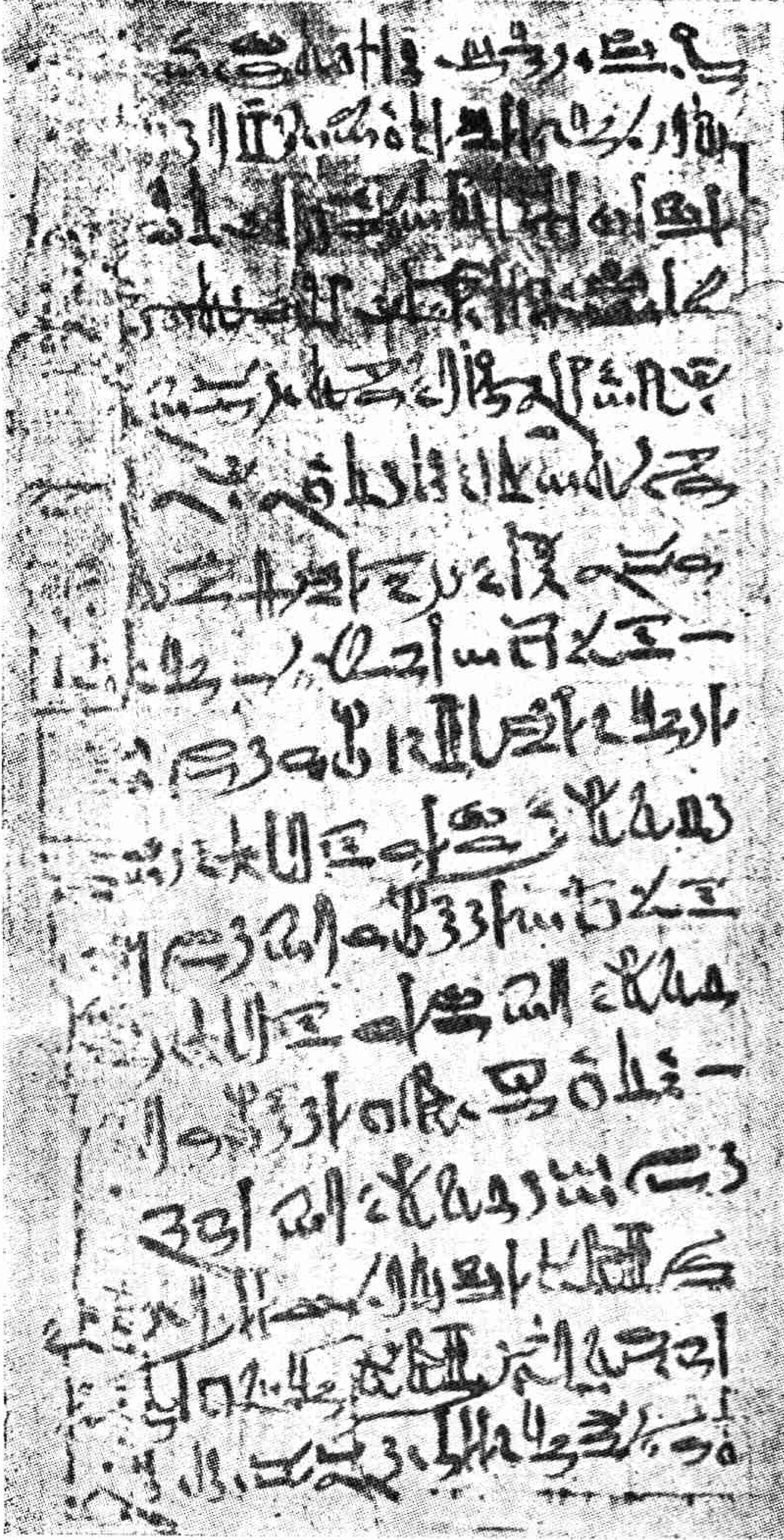
ఈజిప్టుదేశపు గణితము : ప్రాచీన కాలమందు మానవ నాగరికత అత్యున్నతస్థాయికి వృద్ధిచెందిన దేశములలో ఈజిప్టు అగ్రగణ్యము. క్రీ. పూ. దాదాపు 1800లో వ్రాయబడిన రిండ్ పపైరస్ ప్రాచీన ఈజిప్టు గణితశాస్త్ర సమాచారమునకు ఆధారము. కాని, దీనిని వ్రాసినవాడు ఇది మరియొక అసలు గ్రంథమునకు ప్రతి అని-అది మరి ఇంకను రెండు శతాబ్దముల వెనుకది అని వ్రాసి ఉన్నాడు. భూమి వైశాల్యపు కొలతలు, ధాన్యపుగాదుల ఘనపరిమాణములు ఎట్లు కొలువవలయునో ఈ పపైరస్ చెప్పును. అవి

కాలికసంక్షేపము

సాధారణ చరిత్ర	నాగరకత చరిత్ర	గణితశాస్త్ర చరిత్ర
క్రీ. పూ. 3000 మినిజ్ ప్రాచీన రాజ్యము	బొమ్మల లిపి, పిరమిడ్ల నిర్మాణము	సంఖ్యల సంకేతములు 100,000 వరకు
క్రీ. పూ. 2000 – 1800 మధ్యరాజ్యము	వాఙ్మయవృద్ధి స్వర్ణకారకళాభివృద్ధి.	రిండ్ పపైరస్, మాస్కో పపైరస్ శవపేటికలపై నాక్షత్రపంచాగములు
క్రీ. పూ. 1,700 హైక్సాస్ నిరంకుశ సార్వభౌమత్వము	—	రిండ్ పపైరస్కు అమీస్ ప్రతులు
క్రీ. పూ. 1600–1100 క్రొత్తరాజ్యము	శిల్పము, వాస్తుశాస్త్రము	బాల ప్రాథమిక దశలోనున్న ఖగోళశాస్త్రము
క్రీ.పూ. 300 క్రీ.శ. 300 గ్రీక్ల ప్రేరణ కనిపించుచున్నది	గ్రీక్ కళ, విజ్ఞాన జ్యోతిషములకు కేంద్రముగా అలిగ్జాండ్రియా మహత్వము.	గ్రీక్ విజ్ఞాన అత్యున్నత వికాసము.

గాక ఇందులో భిన్నాంకములతో చేయు లెక్కలు సువ్యవస్థితముగ ఈయబడినవి.

మాస్కోపపైరస్ అనునది ప్రాచీన గణితసమాచారమునకు మరియొక ఆధారము. ఈజిప్టుదేశపు ఇంకొక అద్భుత నిర్వాహమును ఇది లిఖించినది. అది ఏమన, పిరమిడ్ యొక్క ఛిన్నాంశ ఘనపరిమాణము



చిత్రము 66

ఈజిప్టు గణితము : క్రీ. పూ. 1480 నాటి హైరాటిక్ లిపిలో లభించిన పపైరస్ పత్రము

$V = (a^2 + ab + b^2)\, h/3$ అను సూత్రము. ఇచ్చట $h =$ ఎత్తు, a, b లు క్రింద, మీదనున్న చతురస్రముల భుజములు.

గణనరీతులు : రోమన్ల దానివలె వీరి అంకపద్ధతి చాల సరళము, అనిపుటమును. 1, 10, 100, 1000 సంఖ్యలకు భిన్న సంకేతములవారు వాడిరి. ఉదాహరణమునకు : 245 వ్రాయవలసి వచ్చినచో, 100 ల సంకేతమును రెండుసార్లు 10 ల సంకేతమును నాలుగుసార్లు ఏకముయొక్క సంకేతమును అయిదుసార్లు వ్రాసి ఉండిరి. ఇవి అన్నియు



చిత్రము 67

ఈజిప్టు గణితము : క్రీ. పూ. 2600 నాటి హైరోగ్లిఫిక్ లిపి

కుడినుండి ఎడమకు వ్రాయబడు వరుసలో ఉండును. సంకలనము చాల సరళ ప్రక్రియ. కూడవలసిన రెండు అంకెలలో ఉండు ఏకాంకముల పదుల, వందల, ... లెక్కపెట్టుట. ఒకవేళ అది పదికి మించినచో, వాటికి బదులు పదులకు వందలకు, ఉచితమైన సంకేతములను ఉంచుట.

12×13 అను గుణకారము ఇట్లు నిర్వహింపబడును: 12 ను రెట్టించిన 24 వచ్చును. 24 ను రెట్టించిన 48 (= నాలుగు పన్నెండ్లు) వచ్చును. దీనిని మరల రెట్టించిన 96(= ఎనిమిది పన్నెండ్లు) వచ్చును. $(4+8+1)$పన్నెండ్లు $= 13 \times 12 = 156$. భాగహారమునుకూడ ఒక విధమగు గుణకారము క్రిందనే పరిగణించిరి. కాని, గుణకారమునకు ఇది విరుద్ధ ప్రక్రియగ నడుపబడినది.

ఉదా: రిండ్‌పపైరస్‌లోని 29వ సమస్యను ఆధునిక సంకేతములకు మార్చినచో, ఇట్లు తెలియనగును.

"80 తో మొదలిడి 1120 లభ్యమగు వరకు కూడుచునే పొమ్ము" 1120 ని 80 తో భాగహారించుము అని దీనిఅర్థము.

1	80
10*	800*
2	160
4*	320*

మొత్తము 1120 (నక్షత్ర మార్కులు గల అంకెల కూడిక)

ఇచ్చట 80 అను సంఖ్యయొక్క వేరు వేరు గుణిజములు లెక్కించబడినవి. నక్షత్రపు గురుతు (*) గల గుణిజముల సంకలన ఫలము 1120 అగుచున్నది.

వీటికి ఎదురుగ ఎడమ ప్రక్క నున్న $10 + 4 = 14$ అగుచున్నది. 1120 ని 80 చే భాగింపగ దొరకు సంఖ్య 14.



చిత్రము 68 తోలుమీద వ్రాసిఉన్న ఈజిప్టు గణితము (క్రీ. పూ. 1700): సరళ భిన్నాంకము.

యూనిట్ లవభిన్నములు: మనము ఎరిగిన లవహారములతో కూడిన భిన్నాంకములు ఈజిప్టు గణితములోలేవు. మనమిప్పుడు భిన్నాంకములను వ్రాయుపద్ధతి భారతదేశమందు తొలిని వెలుగు చూచినట్లు కనిపించును. ప్రాచీన ఈజిప్టులో $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ వంటి కొన్ని సహజభిన్నాంకములకు వేరువేరు పేర్లు నుంచి కొనిరి. కొంతకాలమైన తరువాత వారు యూనిట్ భిన్నములను అనగా, యూనిట్ లవముగను, తక్కిన సంపూర్ణాంక మేదియైన హారముగను ఉన్న భిన్నాంకముల (అనగా యూనిట్‌ను కొన్ని సమవిభక్తములుగా నొనర్చిన చేకూరుఫలములను)కూడ వారు వాడమొదలిడిరి. తక్కిన భిన్నాంకములన్నిటిని ఇట్టి యూనిట్ భిన్నముల సంకలనములుగ వ్యక్తపరచిరి.

భిన్నాంకములతో ఎట్లు వారు ఆచరించిరో చూపుటకు ఒక దృష్టాంతము; $1/n$ అను భిన్నాంకమును $\overline{n}$ అని తెలియజేయుదము. ఈ పరిభాషలో $\overline{6}$ అనగా, $1/6$. ఇట్టి భిన్నాంకముల మధ్యనున్న అనేక సంబంధముల రిండ్‌పపైరస్ చూపినది. అందు $\overline{3} + \overline{6} = \overline{2}$ అని ఉన్నది. ఇది అధునిక సంకేతములలో $1/3 + 1/6 = 1/2$; $\overline{2} + \overline{3} + \overline{6} = 1$. లవము 1 గాలేని $\frac{2}{3}$ అను భిన్నాంకమునుకూడ వారు వాడుకచేసిరి. కనుక, (ఇది ఒక్కటే లవము 1 గా లేని భిన్నాంకము) 2/3 ను మనము $\overline{\overline{3}}$ అను సంకేతముచే సూచింతము. ఇట్లు $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$ అగును. ఇట్టి అనేకములగు సరళసూత్రములను వీరు జ్ఞాపకములో ఉంచుకొని గణింతురు. అట్టి మరి కొన్ని సూత్రములు:

$\overline{\overline{3}} = \overline{4} + \overline{12}$;

$\overline{6} + \overline{12} = \overline{4}$

$\overline{9} + \overline{9} = \overline{6} + \overline{18}$

$2/n$ పట్టిక: వీరి గుణకారము గుణించవలసిన సంఖ్యలో ఒక సంఖ్యను మరల మరల రెట్టించుట, అట్టి రెట్టించబడిన సంఖ్యలలో ఏవి కలిసి కావలసిన గుణకార ఫలమును ఇచ్చునో చూచుటయని ఇదివరకే చెప్పియుంటిమి. వారి భాగహారమునకు సంఖ్యలను రెట్టించు ప్రక్రియయే ఆధారము. ఏకాంకభిన్నాంకమును దేనితోనైన గుణించవలసి వచ్చినపుడు మొదట దానిని రెట్టించిరి. అనగా $1/n$ ను $2/n$ చేసిరి. ఇట్లు n కు అనేక మూల్యముల నిచ్చుచు $2/n$ మూల్యముల పట్టికలను రచించిరి. ఇందు $2/n$ మూల్యములు $1/n$ అను ఏకాంకభిన్నముల సంకలన మూల్యములుగా చూపబడినవి. మూల్యములు 101 వరకు సాగునంత దనుక, ఈ పట్టికలు విస్తరించబడినవి.

n విలువ 12 వలె సరిసంఖ్యయగునపుడు 1/12 రెట్టింపు లేదా 1/6 అగును. అనగా n సరిసంఖ్య అయినచో, $\overline{n}$ యొక్క రెట్టింపుఫలము n ను, దాని అర్ధమూల్యముతో తొలగించిన లబ్ధమగును. వారి పట్టికనుండి ఈ దిగువవి ఉద్ధృతములైనవి :

$2/5 = \overline{3} + \overline{14}$

$2/13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$

$2/37 = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$

$2/101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

ఈజిప్టుగణితములో ఇంకొక సమస్య సాధించవలసి ఉండెను. ఇది ఏమన పెక్కు ఏకాంకలవభిన్నములను చేర్చి వాటి మొత్తమును 1 లో నుండి తీసివేయుట. ఇట్లు $1-(\overline{2}+\overline{20})$ విలువ ఎంత ? దానికి సమాధానము $\overline{4}+\overline{5}$. ఈ సమాధానము సులభముగా స్ఫురించునది కాదు. ఇట్టి ఏకాంక పూరకములు (కాంప్లిమెంటేషన్స్) రిండ్ పపైరస్‌లో ప్రధానముగా ప్రదర్శించబడినవి.

సరళ సమీకరణములు : రిండ్ పపైరస్ $x+\frac{x}{4}=15$ వంటి సమస్యలను సాధించినది. x అనగా నేమి ? ఈ పద్ధతిలో 4 వంటి అనుకొనిన అంకెతో మొదలిడుదురు. 4 తో దాని నాల్గవ భాగమును చేర్చినచో 5 లభించును. కాని మనకు కావలసినది 15. $5 \times 3 = 15$. 3 చే గుణించినచో, $4 \times 3 = 12$ లభించును. ఇదియే సమాధానము.

ఈజిప్టుదేశపు జ్యామితి : ఇది వాస్తవముగ వినియుక్త అంకగణితము. ఇందు వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములు మొదలగువాటిని కొలచుటకు కొన్ని నియమములు ఈయబడినవి. కాని ఎచ్చటను ఆ నియమముల వ్యవస్థితసాధన కానము. వృత్తవైశాల్యమును కొలచుటకు వ్యాసము యొక్క 8/9 భిన్నాంకమునకు వర్గమును కనుగొనిరి. ఇది $\pi = 3{\cdot}1605$గా తీసికొనినట్లు అగును. గణితమందు హెచ్చు సామర్థ్యమును ప్రకటించిన బాబిలోనియన్‌లు తీసికొనిన విలువ $\pi=3$తో సరిపోల్చి చూచినచో, అది చాల యథార్థ పలము. యూదులు, చీనావారు తీసికొనిన π మూల్యముల కన్న కూడ ఇది ఎక్కువ కచ్చితమైనది.

మొత్తముమీద ఈజిప్టుదేశపు అంకగణితమునకు వారి ఏకాంకలవభిన్నముల వాడుక ప్రతిబంధకముగా ఉండెను. వారి జ్యామితి ప్రయోగమును అనుభవముపై ఆధారపడినదై ఉండెను. ఆ. స.

ఉచితప్రతిరూపములు : వ్యక్తి పరిశోధకులకు క్షేత్రమంతయు పర్యవేక్షణముచేయుట సాధ్యముకానిపని. అందువలన్ వారు ఉచితములైన ప్రతిరూపములను ఉపయోగించుట ఆవశ్యకము. ఇట్లు తీసికొనిన ప్రతిరూపములనుండి సాంఖ్యకఫలితములను సాధింపవచ్చును. ఉచిత ప్రతిరూపములను నిర్మించుటకు మార్గమును ఇప్పుడు తెలియజేయుదుము.

భారతీయుల సరాసరి ఎత్తు ఎంతఅని కనుగొనుటకు అందరి ఎత్తులను కొలుచుట సాధ్యముకాదు. కాబట్టి తగిన ప్రతిరూపములను తీసికొనవలయును. ఎట్లు ?

భారతదేశములోకల పట్టణముల, గ్రామముల పేర్లను అకారాదిక్రమమున వ్రాయుము. ప్రతి అక్షరముక్రింద మొదటిదానిని గ్రహింపుము. అది పట్టణముకావచ్చు, గ్రామముకావచ్చును. జనాభా లెక్కలకుగాను ఎంచుకొన్న మొదటి ఇంటిలోని ప్రౌఢవయస్కుల ఎత్తులు కొలిచిన చాలును. పెద్ద పట్టణములలో మొదటి పేటలో మొదటి వీధిలోని మొదటి ఇల్లు తీసికొనుము. ఇట్లు తీసికొన్న ఇండ్లసంఖ్య ఎక్కువగాఉన్నవాటిని మరల వరుసగా ఏర్పరచి, ప్రతి 5 వ ఇంటినిగాని, 10 వ ఇంటినిగాని సమయోచితముగా తీసికొనవచ్చును.

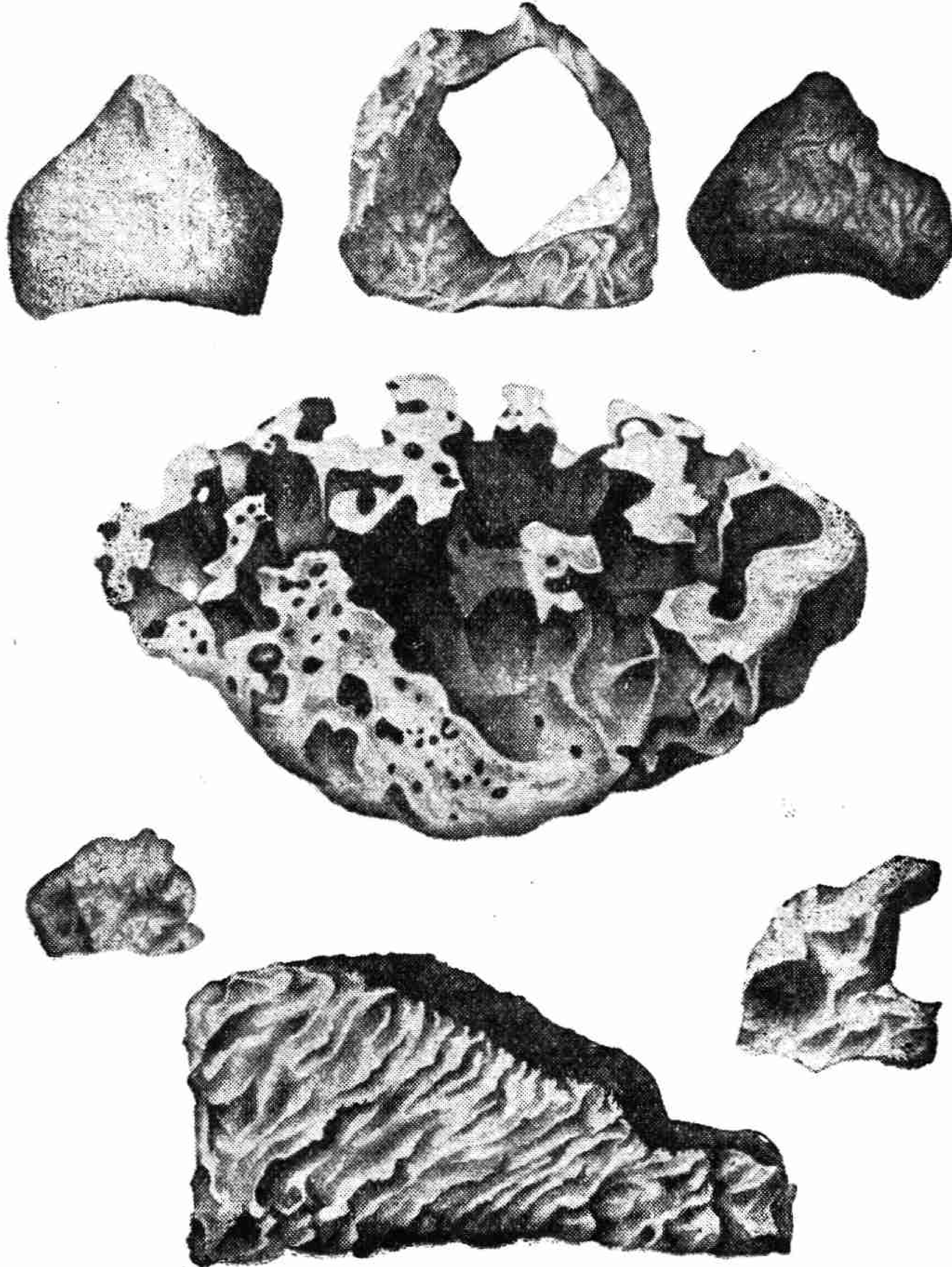
ఇందు ఒక రహస్యముకలదు. ఒక పెద్ద గుంపునుండి మనకు ఇష్టమువచ్చిన 100 లేదా 200 వ్యక్తులను తీసికొనినచో, వారి మధ్యమాన గుణములు, పెద్దగుంపు మధ్యమాన గుణములు ఇంచుమించుగ సమానములై ఉండును. ప్రకృతిలో హెచ్చుతగ్గులు మిశ్రములైఉండును. అందువలన మానవజీవితములో సాధారణముగ లాభనష్టములు మిశ్రితములై కన్పట్టును. కాబట్టి జీవితభీమా సంస్థలకు, చిరకాల అభ్యాసకులగు జూదరులకు మొత్తముమీద నష్టము ఉండదు. ఈ ధర్మమును సాంఖ్యకక్రమనియమము అనియు, పెద్దసంఖ్యల జడత్వము అనియు వ్యవహరింతురు. ఆచార్య.

ఉపసరణత : చూ. గణితసమీక్ష - పు. 13; అనంత పరంపరల ఉపసరణత - పు. 133.

ఉల్కలు : గ్రహముల నడుమ ఉన్న అంతరాళములో లెక్కలేని రాతి, ఇనుపముక్కలు ఉన్నవి. మరికొన్ని సూర్యకుటుంబమునకు ఆవలఉన్న ప్రదేశమునుండి వచ్చి వీనితో కలియుచున్నవి. సాధారణముగా వీని పరిమాణము కొన్ని ఇసుక రేణువుల పరిమాణమునకు సమానముగా ఉండును. కొన్ని వేళలలో అవి కొన్ని మెట్రిక్ టన్నులలో ఉండును. ఇవి సూర్యుని సమీపమున ఉండుటచే అతని ఆకర్షణకులోనై అతని చుట్టు దీర్ఘవృత్తములలో సంచరించుచుండును. ఇవియే ఉల్కలు.

గ్రహములవలె ఉల్కలుకూడ స్వయంప్రకాశములు కావు. అవి అల్పపరిమాణముకలిగి ఉండుటచే గ్రహములవలె సూర్యకాంతి పరావర్తనముచే ప్రకాశింపవు. అవి భూసమీపమునకు వచ్చినప్పుడు భూమ్యాకర్షణముచే భూమివైపు పడును. ఆ పతనములో భూవాతావరణ ఘర్షణచే వాటి తాపక్రమము హెచ్చి కాంతిరేఖలవలె మనకు కనబడుచుండును. వీటినే శరనక్షత్రములు (షూటింగ్ స్టార్స్) అని పిలుతురు.

ఉల్కల వేగము సెకనుకు 16-80 కిలోమీటరుల వరకు ఉండును. ఈ అధిక వేగముతో ఉల్కలు దట్టమైన భూవాతావరణమును ప్రవేశించునపుడు ఘర్షణ తాపమునకు కరగి ఆవిరియగు చున్నవి. ఉల్కలు సాధారణముగా భూతలమునకు 96-128 కిలోమీటరుల ఎత్తులో కానవచ్చును. వాటిలో అల్ప పరిమాణములు గలవి సుమారు 64 కిలోమీటరుల ఎత్తులో క్షీణించిపోవుచుండును. అధిక పరిమాణము గల ఉల్కల ఉపరితలములు మాత్రమే భూవాతావరణఘర్షణ చేతను, వాని గతివేగములచేతను ఆవిరియై శేషించిఉన్న భాగములు భూమిపై కర్ణకఠోరమైన శబ్దముతో పడుచుండును. అవి పడుచోట్ల పెద్ద గోతులేర్పడును. అట్టి ఉల్కలు ఆకాశములో ఉన్నపుడు అగ్నిగోళములు అనియు, భూమిని చేరినపిదప ఉల్కాపిండములు అనియు చెప్పబడును.



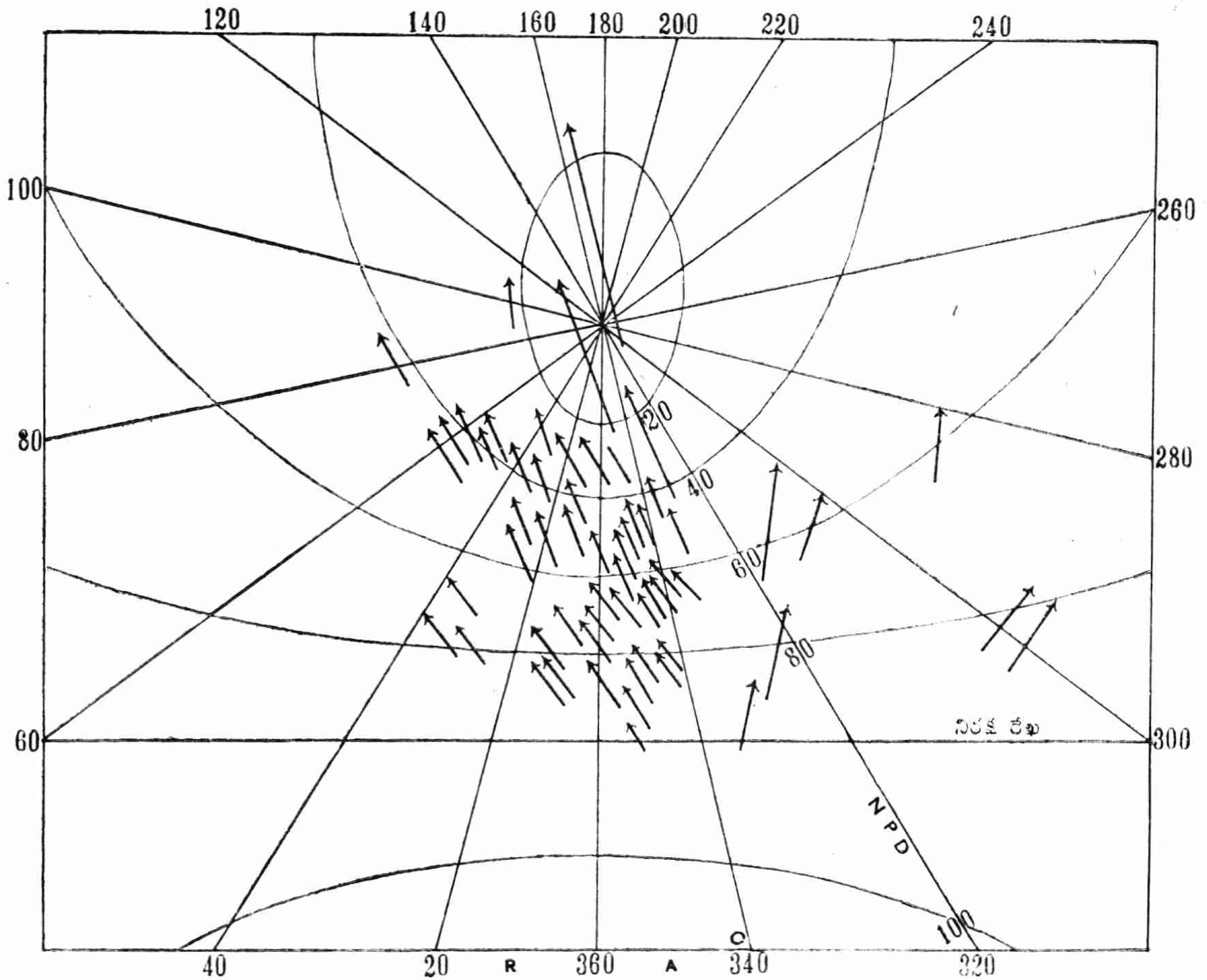
చిత్రము 69 కొన్ని ఉల్కలు

వికిరణబిందువు : భూవాతావరణమును ప్రవేశించిన ఉల్కల సంఖ్య 20, 000, 000 పైగా ఉండునని శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. సగటున గంటకు 10 ఉల్కలను ప్రేక్షకుడు చూడవచ్చును. కొన్ని వేళలలో అధికముగాను చూడవచ్చును. ఈ అధికసంఖ్యనే 'ఉల్కాపాతము' అని చెప్పుదురు. ఉల్కల కక్ష్యలను వెనుకకు పొడిగించినచో అవి ఆకాశములో ఒక చోట చేరునట్లు గోచరమగును. దీనికి వికిరణ బిందువు అని పేరు. ఈ బిందువును అనుసరించియే ఉల్కా పాతములకు పేర్లుపెట్టుదురు.

ఒకే వికిరణ బిందువు గల ఉల్కలకు 'ఉల్కలకూటము' అనిపేరు. ఈ కూటములోని ఉల్కలు భూవాతావరణమును ప్రవేశించునపుడే ఉల్కాపాతములు సంభవించుచున్నవి. ఈ ఉల్కలు సూర్యునిచుట్టు సమానాంతరదీర్ఘ వృత్తములలో సంచరించుచుండును. ఈకక్ష్యలు క్రాంతి వృత్తమును ఖండించు స్థానమును, భూమి చేరినపుడు ప్రతి సంవత్సరమును ఉల్కాపాతములు కానవచ్చును. కొన్ని వికిరణబిందువులు దిగువ పేర్కొనబడినవి :

వికిరణ బిందువు (తారామండలములో)	ఉల్కా పాతము	ఉల్కాపాతము తేది	ఆవర్తన కాలము సం. లు	ధూమకేతువు
పెర్సియస్	పెర్సైడ్స్	ఆగస్టు 10-11	120	1862 III
లైరా	లైరిడ్స్	ఏప్రిల్ 19-21	415	1861 I
లియో	లియొనిడ్స్	నవంబరు 14-15	$33\frac{1}{3}$	1866 I
ఆంద్రోమిడా	బైలిడ్స్	నవంబరు 23	$6\frac{3}{4}$	బైలా

పెర్సైడ్స్: పెర్సియస్ రాశినుండి ఈ ఉల్కాపాతము ఆగస్టు నెలలో సంభవించుచుండును. అందుచే వీనికి పెర్సైడ్స అని పేరు. ఇది 1862 III ధూమకేతువు విచ్ఛిన్నమగుటవలన ఏర్పడినదని షియాపరెల్లి అభిప్రాయపడెను. ధూమకేతువులు విచ్ఛిత్తిపొందగా ఏర్పడు ద్రవ్య



చిత్రము 70 జులై 27-29 ఉల్కల వికిరణ బిందువు

ఖండములు ఉల్కాపాతములుగా ఏర్పడును (చూ. ధూమకేతువులు).

లైరిడ్స్: లైరా రాశినుండి ఏప్రిల్ నెలలో ఇవి సంభవించుచుండును. ఈ ఉల్కా పాతమునకు, 1861 I ధూమకేతువునకు సంబంధముకలదని వైజ్ కనుగొనెను.

లియొనిడ్స్: వీటికి నవంబరు ఉల్కలనికూడ పేరు. ఇవి సింహ (లియో) రాశి నుండి నవంబరు నెలలో సంభవించుచుండును. ఇవి ఉల్కాపాతములందు పెద్దవి. ఈ ఉల్కల కక్ష్యలకును, 1866 I ధూమకేతుకక్ష్యకును పోలికలు కలవని లవెరియా కనుగొనెను. ఆ ధూమకేతువు విచ్ఛిన్నమగుటచే ఈ ఉల్కాపాతము కలిగినదని శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. ఈ ఉల్కాపాతము సుమారు $33\frac{1}{3}$ సంవత్సరముల కొక పర్యాయమే కానవచ్చును. 1833 వ సంవత్సరములో ఈ ఉల్కాపాతము సంభవించినపుడు సుమారు 2,50,000 ఉల్కలను లెక్కించిరి.

బైలిడ్స్: బైలా ధూమకేతువు విచ్ఛిన్నమగుటవలన ఏర్పడినది. కాని, ప్రస్తుతము కనిపించుటలేదు. గ్రహముల పరిక్షోభ ఫలమేమో!

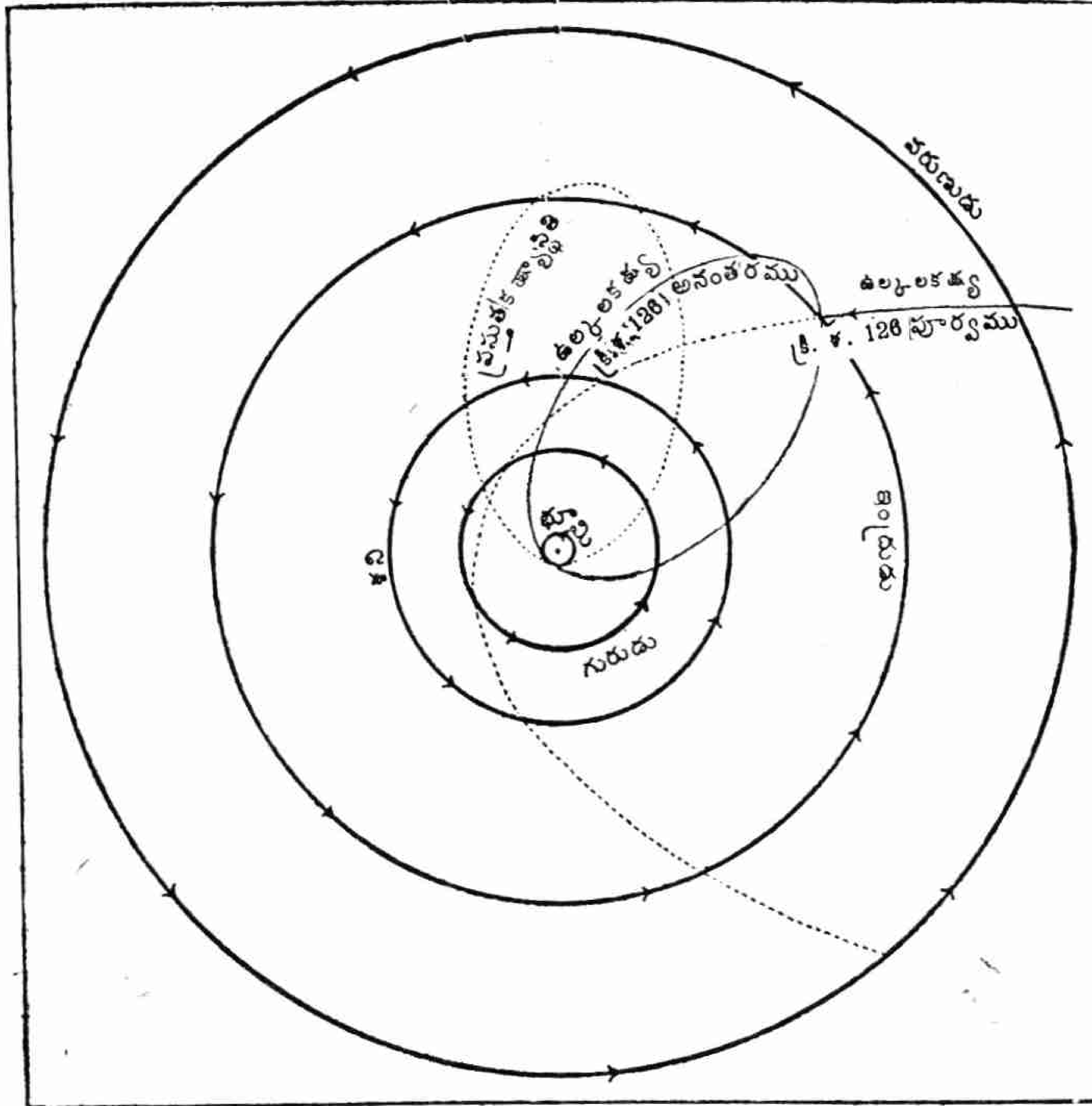
ఉల్కలను, ధూమకేతువులకును సంబంధముకలదని నేడు శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. అక్వారిడ్స ఉల్కాపాతమునకు, హేలీ ధూమకేతువునకు, 1933 వ సంవత్సరము అక్టోబరు ఉల్కాపాతమునకు, 1900 III ధూమకేతువునకు, 7 ఉర్సామేజోరిస్‌లోని వికిరణబిందువునుండి వెలువడు ఉల్కాపాతమునకు, పాన్స్‌విన్కె ధూమకేతువునకు సంబంధముకలదని శాస్త్రజ్ఞులు అభిప్రాయపడిరి.

ఉల్కాపిండములు : ఉల్కాపిండములను మూడు రకములుగా విభజింపవచ్చును :

1. ఇనుప ఉల్కాపిండములు: వీటిలో నికెల్, ఇనుముల మిశ్రలోహము, ఫెర్రిక్ ఫాస్ఫైడ్‌లు, సల్ఫైడ్‌లు ముఖ్యముగా కలవు.

2. రాతి ఉల్కాపిండములు : వీటిలో సిలికేట్ ఖనిజములు ఎక్కువగను, కొద్దిగా మిశ్రధాతువులును ఉండును.

3. రాతి - ఇనుప ఉల్కాపిండములు : ఇవి పై రెండు రకముల ఉల్కాపిండములకు మధ్యమ నిర్మాణమును కలిగి ఉండును.



చిత్రము 71 లియొనిడ్స్ ఉల్కాపాతము

క్రీ. పూ. 126 లో లియొనిడ్స్ ఉల్కాపాతము యురేనస్ గ్రహమునకు మిక్కిలిచేరువగా వచ్చెననియు, ఆ గ్రహముయొక్క గురుత్వాకర్షణము వాటి పైజులోను, సూర్యునిచుట్టు ఉన్న వాటి కక్ష్యలోను పూర్తిమార్పు గొనితెచ్చెననియు గణితమూలముగ తెలియవచ్చినది. క్రీ. శ. 126 నుండి కక్ష్యారూపముగాని, పైజుగాని అంతగామారలేదు; కాని దిశమాత్రము అపసవ్యము అయినది.

ఉల్కాపిండములలో సుమారు 50 మూలద్రవ్యములను కనుగొనిరి. వాటిలో ముఖ్యమైనది ఇనుము. ఉల్కాపిండఖండమును వేడిచేసినచో అందుండి హైడ్రోజన్, నైట్రోజన్, కార్బన్ మోనాక్సైడ్, కార్బన్ డైఆక్సైడ్, మీథేన్ మొదలైన వాయువులు వెలువడును.

ఉల్కాబిలములు : కొన్ని వేళలలో ఒక్కటే ఉల్కాపిండము, మరికొన్ని వేళలలో అనేక ఉల్కాపిండ ఖండములును కనపడవచ్చును. ఖండముల సంఖ్య హెచ్చుగ ఉన్నచో వాటిని ఒక దీర్ఘవృత్త ప్రదేశములో చూడవచ్చును. భారత దేశములో కైరాపురమునందు సుమారు 25 కిలోమీటరుల నిడివియు, 4·8 కిలోమీటరుల వెడల్పును గల దీర్ఘవృత్తప్రదేశములో పెక్కు ఉల్కాఖండములను కనవచ్చెను.

మధ్య ఆరిజోనా లోని బిలము 1 కిలోమీటరు వ్యాసమును కలిగి ఉన్నది. ఈ ప్రాంతములో వందలకొలది ఉల్కాపిండములు లభించినవి. వీటిబరువు 1 గ్రాము మొదలు 454 కిలోగ్రాముల వరకు ఉండెను. 1908 జూన్ 30 వ తారీఖున సైబీరియాలో ఒక ఉల్కాపిండము పడినది. దీనిని 750 కిలోమీటరుల దూరమునుండి కూడ చూడ శక్యమయ్యెను. దీనిమూలమున 10-50 మీటరుల వ్యాసముగల బిలములు అనేకము లేర్పడి, 125 కిలోమీటరుల వ్యాసములోని పరిసరప్రాంతములు నాశనమయ్యెను. మరియొక బిలము (వ్యాసము 3·2 కిలోమీటరులు) క్విబెక్‌లో ఉన్నది.

ఉల్కాపిండముల ఉత్పత్తి అతి వివాదాస్పద విషయమై ఉన్నది. కె.ఎస్.వి.న.

ఋజు రేఖ : యూక్లిడ్ జ్యామితిలో ఋజురేఖ ఒక బిందు సమూహము. ఋజురేఖకు నిడివి ఉన్నది కాని వెడల్పులేదని యూక్లిడ్ నిర్వచనము. అనుభవములో ఇట్టి ఋజురేఖలు దొరకవు. ఈ భావమునకు అతిసన్నిహితముగ గోచరమగునవి : 1. బిగువుగా లాగబడిన సన్నని దారము; 2. ఒక కాంతికిరణము.

యూక్లిడ్ జ్యామితి ఆధారతత్త్వములలో ఏ రెండు బిందువులైనను ఒక ఋజురేఖచే కలపబడుననునది ఒకటి; ఒక ఋజురేఖా ఖండమును రెండు దిక్కులలోను ఇష్టమైనంత దూరము పొడిగించవచ్చుననుట మరియొకటి. యూక్లిడ్ నిర్వచనము ప్రకారము రెండు బిందువులను చేర్చు అనేక పథములలో హ్రస్వతమ మైనది ఋజురేఖ.

ఒక తలములోని రెండు ఋజురేఖాఖండములను అనంతముగా పొడిగించినచో,అవి ఒక ఉమ్మడి బిందువులో ఖండించ

వచ్చును; లేనిచో, పై రెండు ఋజు రేఖలు సమానాంతరము లనెదము. యూక్లిడ్ ఆధారతత్త్వములలో అతి ప్రసిద్ధ మైనది: "ఒక ఋజు రేఖకు దత్త బిందువుద్వారా ఒకే సమానాంతర రేఖ ఉన్నది." ఈ ఆధారతత్త్వమునకు బదులు ఇతర ఆధారతత్త్వములను అవలంబించి యూక్లిడేతర జ్యామితులను సృజించియున్నారు.

తల నిరూపక జ్యామితిలో ఒక ఋజు రేఖ సమీకరణము: $Ax + By + C = 0$ అగును. దీనినే $y = mx + c$ అను రూపములో వ్రాయవచ్చును. రెండు ఋజు రేఖలు, $y = m_1x + c$, $y = m_2x + c$ సమానాంతరము లైనచో $m_1 = m_2$ అగును.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక ఋజు రేఖ సమీకరణము:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$$

ఇచ్చట l, m, n ఆ ఋజు రేఖ యొక్క దిశను చూపు కోటి జీవలు; r అనునది (x_1, y_1, z_1) బిందువునకును (x, y, z) బిందువునకును మధ్యదూరము.

ఋజు రేఖా భావమును వక్రతలమునకు కూడ విస్తరీ కరణించవచ్చును. అపుడు వక్రతలముపై A, B అను రెండు బిందువులనుచేర్చు ఆ తలముపైనుండు అన్ని వక్రములలో హ్రస్వతమ వక్రము సమతలములోని ఋజు రేఖకు అనురూపమైనది. ఉదా: A, B ఒక గోళతలము పైన ఉన్నచో, వాటినిచేర్చు గోళీయ వక్రములలో హ్రస్వతమమైనది మహావృత్తఖండము. ఇటులనే ఏ వక్ర తలముపైన అయినను A, B దూరము మితమైనచో, వాటిని చేర్చు హ్రస్వతమ రేఖ యుండును. ఇట్టి రేఖలనే ఋజు రేఖలని నిర్వచించి ఒక యూక్లిడేతర జ్యామితిని సృజించవచ్చును. రీమాన్ కనిపెట్టిన దీర్ఘవృత్త జ్యామితి ఇటువంటిదే. దీనియందు వక్రతలము ఒక గోళతలము: అయితే దీనిపైన ఉన్న వ్యాస వ్యతిరేకబిందువులను ఒకే బిందువుగా భావించవలెను.

ఇటులనే అతి పరాస జ్యామితిని ఒక వక్రతలమునకు సంబంధమైన జ్యామితిగా భావించవచ్చును (చూ. నిరూపక జ్యామితి).

పా. ల. నా.

ఋజు రేఖాజ్యామితి (లైన్ జ్యామిట్రీ): యూక్లిడ్ నిర్మించిన జ్యామితిలో బిందువునకు ఒక ప్రత్యేక స్థానమున్నది. అదియే మూలవస్తువు. జ్యామితిలోని ఇతర వస్తువులగు ఋజు రేఖలు, వక్ర రేఖలు, సమతలములు, వక్ర తలములు అన్నియు బిందుసమూహములుగా భావించబడుచున్నవి. యూక్లిడ్ జ్యామితికి అనుగుణమైన నిరూపక జ్యామితిలో బిందువులకు నిరూపకములున్నవి. ఇతర జ్యామితీయ వస్తువులకు (రేఖలు, తలములు వీటికి) సమీకరణములున్నవి, కాని, నిరూపకములు లేవు.

ఇటుల బిందువులకు బదులు ఋజు రేఖలకో, వృత్తములకో, గోళములకో మూలస్థానమిచ్చి ఒక జ్యామితిని సృజింపవచ్చును. ఋజు రేఖలను మూలవస్తువులుగా భావించి, ఇతర వస్తువులగు బిందువులు, వక్రములు, ఇవన్నియు ఋజు రేఖాసమూహములుగా భావించినచో, ఏర్పడు జ్యామితికి ఋజు రేఖా జ్యామితి అని పేరు.

తలములోని ఋజురేఖా జ్యామితి: ఒక సమతలములో ఒక రేఖను నిర్ణయించుటకు రెండు సంఖ్యలు కావలెను. ఈ రెండు సంఖ్యలనే ఆ ఋజు రేఖ యొక్క నిరూపకములుగా తీసికొనవచ్చును. ఉదాహరణమునకు నిరూపక జ్యామితిలో ఒక ఋజు రేఖాసమీకరణము $lx + my = 1$ రూపములో ఉండును. ఈ రేఖ యొక్క నిరూపకములు (l, m) గా తీసికొనవచ్చును. (మూలబిందువు 0, 0 ద్వారా వెళ్ళు రేఖల యొక్క నిరూపకముల విషయములలో కొన్ని చిక్కులున్నవి; కాని వాటిని ఇపుడు గమనింప పనిలేదు).

$lx + my = 1$ అను రేఖ, బిందువు $(2, 3)$ ద్వారా వెళ్ళిన ఎడల $2l + 3m = 1$ అను సమీకరణము లభించుచున్నది. కనుక (l, m) నిరూపకములు ఒక మొదటితరగతి సమీకరణమును తృప్తి చేసినట్లయితే, ఆ ఋజు రేఖలు అన్నియు ఒక బిందువుగుండా వెళ్ళును. అనగా ఈ జ్యామితిలో బిందువులకు సమీకరణములున్నవి. అవి మొదటితరగతి సమీకరణములు.

ఋజు రేఖనిరూపకములు ఒక రెండవతరగతి సమీకరణమును తృప్తిచేసినట్లైతే, అవిఅన్నియు ఒక శాంకవమును స్పర్శించును. కనుక ఈజ్యామితిలో రెండవతరగతి సమీకరణములు శాంకవములు. కొన్ని సమయములందు రెండవ తరగతి సమీకరణము రెండు మొదటితరగతి సమీకరణముల గుణకారలబ్ధముగా ఉండవచ్చును. అపుడు అది ఒక శాంకవమునకు బదులు రెండుబిందువులను సూచించును. అనగా (l, m) రేఖ, రెండు స్థిరబిందువులలో ఏదైన ఒకదాని గుండా వెళ్ళును.

$al^2 + 2hlm + bm^2 + 2gl + 2fm + c = 0$ అనునది రెండుబిందువుల సమీకరణముగా ఉండుటకు నిబంధన:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

తలములో బిందువులకు ఋజు రేఖలకును ద్వైత భావమున్నందున బిందుజ్యామితికిని, ఋజు రేఖా జ్యామితికిని ఎక్కువ వ్యత్యాసముండదు. విశేషజ్యామితిలో పూర్ణ

ద్వైతము చూడవచ్చును. (చూ. సమీతు-పు. 46) ఒక్కొక బిందువుతోను ఒక ఋజురేఖను జోడించుటకు, ఒక దత్త శాంకవము తీసికొని, ఆ బిందువుయొక్క ధ్రువరేఖ (పోలార్ లైన్) ను తీసికొనవచ్చును. ఇటుల జోడించుట వలన, బిందువు, ఋజురేఖలుగల ఒక్కొక సిద్ధాంతము నుండి ఋజురేఖ, బిందువులుగల మరియొక సిద్ధాంతమును పొందవచ్చును. "దీనికే పరస్పరత" (రెసిప్రొకేషన్) అని పేరు.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఋజురేఖలు : త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో బిందువులకును, సమతలములకును ద్వైతభావమున్నది. ఒక బిందువునుగాని, ఒకతలమును గాని నిర్ణయించుటకు 3 సంఖ్యలు కావలెను. ఋజురేఖ రెండు బిందువులను చేర్చుటవలననో, రెండు సమతలముల ఛేదనవలననో లభించును, కనుక ఋజురేఖలకు ద్వైతము ఋజురేఖతే.

ఒక ఋజురేఖను నిర్ణయించుటకు 4 సంఖ్యలు కావలెను. ఏలన, ఆ రేఖ రెండు దత్తసమతలములను ఖండించు బిందువులను ఇచ్చినచో, అది నిర్ణీతమగుచున్నది. ఆయాతలము లోని బిందువులను గుర్తించుటకు రెండు సంఖ్యలు కావలెను. కనుక ఋజురేఖను మూలవస్తువుగా తీసికొనుటవలన త్రిపరిమాణికబిందు ఆకాశము చతుఃపరిమాణిక ఋజురేఖా ఆకాశమగుచున్నది! కనుక ఒక రేఖను నిర్ణయించుటకు 4 నిరూపకములైనను కావలెను.

ఋజురేఖయొక్క ప్లూకర్ నిరూపకములు : ఇకమీద మనము త్రిపరిమాణిక ఆకాశమును విక్షేపఆకాశము (ప్రొజెక్టివ్ స్పేస్) గా భావించెదము. ఇచ్చట ఒక బిందువునకు నాలుగు నిరూపకములు (x, y, z, w) ఉన్నవి. ఇవి సమఘాతనిరూపకములు. అనగా అన్నియు ఏకకాలములో శూన్యముగ ఉండకూడదు. k శూన్యముకాని సంఖ్య అయితే, (kx, ky, kz, kw) ను (x, y, z, w) ను ఒకే బిందువును గుర్తించును.

ఇట్లు రెండు బిందువులు $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1, w_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2, w_2)$ తీసికొందము. వీటిని చేర్చు రేఖ యొక్క నిరూపకములుగా

$$p_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1 ; \quad p_{14} = x_1 y_4 - x_4 y_1 ;$$
$$p_{23} = x_2 y_3 - x_3 y_2 ; \quad p_{24} = x_2 y_4 - x_4 y_2 ;$$
$$p_{31} = x_3 y_1 - x_1 y_3 ; \quad p_{34} = x_3 y_4 - x_4 y_3 ;$$
$$\dots \dots (1)$$

అను 6 సంఖ్యలను తీసికొందము. సాధారణముగ $p_{rs} = x_r y_s - x_s y_r = - p_{sr}$ ఇవియే ప్లూకర్ అను జర్మనీ గణితజ్ఞుడు ప్రతిపాదించిన నిరూపకములు. (x, y, z, w) అన్నియు ఏకకాలమున శూన్యముకావు; కనుక, p_{rs} నిరూపకములును, రెండు బిందువులు వేర్వేరైనచో, ఏకకాలమున శూన్యముకావు. మరియు (x, y, z, w) బిందువునే (kx, ky, kz, kw) అని వ్రాయవచ్చును. ఇట్లు వ్రాయుటచే p_{rs} సంఖ్యలన్నియు, kp_{rs} గా మారును. కనుక p_{rs} సంఖ్యలును, kp_{rs} సంఖ్యలును ఒకేరేఖను గుర్తించునని చెప్పవలెను. పై రెండు గుణములనుండి, p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34} ను ఒక 5—పరిమాణిక విక్షేపఆకాశములోని బిందువుయొక్క విక్షేపనిరూపకములు (ప్రొజెక్టివ్ కోఆర్డినేట్స్) గా భావింపవచ్చునని తెలియుచున్నది. అయితే 5—పరిమాణక ఆకాశములో ∞^5 బిందువులున్నవి. త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఉన్న ఋజురేఖలసంఖ్య ∞^4 మాత్రమే. కనుక ఋజురేఖలకు అనుగుణమైన బిందువులు 5-పరిమాణిక విక్షేప ఆకాశమునంతయు నిండిఉండవు. ఈ ఆకాశములోని బిందువులు ఉపసమితిగనే ఉండవలెను.

ఇది యే ఉపసమితి అని కనిపెట్టుటకు p_{rs} సంఖ్యలను పరీక్షించి

$$p_{12}\, p_{34} + p_{23}\, p_{14} + p_{31}\, p_{24} \equiv 0 \qquad \dots \dots (2)$$

అను సర్వసమత్వమును ఉపయోగించెదము. ఇది p_{rs} నిరూపకములలో రెండవతరగతి సమీకరణమగుటచే, ఒక శాంకవమువంటి 5-పరిమాణిక ఆకాశములోని 4 పరిమాణికబిందుసమితి Q ను గుర్తించును. త్రిపరిమాణిక విక్షేప ఆకాశములోని ఋజురేఖలకును, 5-పరిమాణిక ఆకాశములో Q పై ఉన్న బిందువులకును ఒకటికొకటి అనురూపత (వన్ టు వన్ కరెస్పాండెన్స్) ను ఇట్లు స్థాపించవచ్చును.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక ఋజురేఖకు 4 నిరూపకములు చాలును కనుక, వాటిని 4-పరిమాణిక ఆకాశములో ఎందుకు చిత్రించకూడదు? మనమెందుకు 5-పరిమాణిక ఆకాశములో చిత్రించవలెను? అని అడుగవచ్చును. దీనికి జవాబు ఏమనగా, ఋజురేఖలను చిపిట 4-పరిమాణిక ఆకాశములోని బిందువులద్వారా చిత్రించుటకు ప్రయత్నించినచో, ఈచిత్రము ఎచ్చటను ఒకటికొకటిగా నుండదు. కొన్ని వేర్వేరు ఋజురేఖలకు ఒకే ప్రతిరూప బిందువుండును. మరియొకస్థలములో ఒకేరేఖకు పెక్కు అనురూపబిందువులుండును. ఎల్లపుడును ప్రతిరూపము ఒకటికొకటిగా నిస్సందేహముగా ఉండవలెనంటే చిపిట 4-పరిమాణిక ఆకాశమువలన ప్రయోజనములేదు. వక్రీయ 4-పరిమాణిక ఆకాశము కావలెను. ఇది 5-పరిమాణిక ఆకాశములో ఒక 4-పరిమాణిక వక్రీయతలముగా ఉండనిమ్ము. దీని సమీకరణమే (2). ఈ పరిస్థితి ఎటులున్నదనిన

ఒక గోళతలముపై ఉన్న బిందువులకును, ఒక సమతలముపై ఉన్న బిందువులకును ఒకటికొకటి అనురూపతకలిగించు ప్రయత్నమువలెనే ఉన్నది. గోళతలముపైన ఒకబిందువును గుర్తించుటకు రెండు నిరూపకములు (అనగా అక్షాంశము a, రేఖాంశము δ) కావలెను. $(-90^\circ \leq a \leq 90^\circ$, $0 \leq \delta \leq 360^\circ)$. అటులనే సమతలములోను రెండు నిరూపకములు (x, y) కావలెను. అయితే, $x = a$, $y = \delta$ అని అనురూపత ఏర్పరచకపోతే, ధ్రువీయబిందువులందు చిక్కు ఏర్పడుచున్నది. ఏలన వీటికి అక్షాంశవిలువ నిస్సందేహముగా చెప్పజాలము. కనుక ధ్రువీయబిందువులకు అనురూపముగా సమతలములో ఋజురేఖలు $y = 90^\circ$, $y = -90^\circ$ ఉన్నవి. కాని, అనురూపబిందువులు లేవు. కనుక మనకు పూర్ణసౌష్ఠవము (సిమెట్రీ) నిస్సందేహమైన ఒకటికొకటి అనురూపత ఎల్లపుడు కావలెనన్న, మనము 5-పరిమాణిక ఆకాశమునకు ప్రయాణముచేయ తయారుగ ఉండవలెను.

క్లైన్ నిరూపకములు : పైన వివరించిన నిరూపకములకు బదులు ఫెలిక్స్‌క్లైన్ మరియొక విధమైన నిరూపకములను వివరించియున్నాడు.

$$p_{12} = x_1 - x_4; \quad p_{23} = x_2 - x_5; \quad p_{31} = x_3 - x_6$$
$$p_{34} = x_1 + x_4; \quad p_{14} = x_2 + x_5; \quad p_{24} = x_3 + x_6 \quad \dots \dots (3)$$

అని తీసికొనుము. అపుడు p_{rs} నిరూపకములకు బదులు $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ అను 6 నిరూపకములు లభించును. ఇవియు విక్షేపక నిరూపకములు, అనగా ఇవి అన్నియు ఏకకాలమున శూన్యముకావు; $(kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5, kx_6)$, $(x_1, x_2, \dots x_6)$ ఒకే వస్తువును నిరూపించును. ఈ నిరూపకములకు క్లైన్ నిరూపకములని పేరు. వీటిలో Q అను పథము యొక్క సమీకరణము (2) కు బదులు

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0 \quad \dots \dots (4)$$

అగును.

ఇకమీద త్రిపరిమాణిక విక్షేపఆకాశమును [3] అను సంకేతముతోను, 5-పరిమాణిక విక్షేపఆకాశమును [5] అను సంకేతముతోను గుర్తించెదము. [3] లో ఒక బిందువు నిరూపకములు (x, y, z, w). [3] లోని రెండుబిందువులగు $(x_1\ y_1\ z_1\ w_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2\ w_2)$ చేర్చు ఋజురేఖానిరూపకములు $(p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{14}, p_{24}, p_{34})$ లేదా $(x_1, x_2 \dots x_6)$. ఇవియే [5] లో ఒక బిందువుయొక్క నిరూపకములు. ఇవన్నియు [5] లో ఒక వక్రతలము Q పై ఉన్నవి. Q పై ఉన్న ఒక్కొక్కబిందువునకును, [3] లో ఉన్న ఒక్కొక ఋజురేఖకును ఒకటికొకటి అనురూపత ఉన్నది.

ఇకమీద 'రేఖ' అనగా ఋజురేఖఅని అర్థము చేసికొందము.

మొదటితరగతి కాంప్లెక్సెస్ : [3] లో ఒక రేఖయొక్క నిరూపకములగు p_{rs} లేదా x_r, ఒక మొదటితరగతి సమీకరణమును తృప్తిచేసిన ఎడల, అనగా $\Sigma a_{rs} p_{rs} = 0$ లేదా $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_6x_6 = 0$ ఉన్నఎడల, ఇట్టి రేఖలు ఒక ∞^3 సమూహమునకు చేరినవగును. పై సమీకరణములో a_{rs}, $a_1, \dots a_6$ స్థిరసంఖ్యలు. ఇట్టి ∞^3 రేఖాసమూహమునకు మొదటితరగతి కాంప్లెక్స (లీనియర్ కాంప్లెక్స) అని పేరు. [3] లో ఒక స్థిరబిందువు $P(x, y, z, w)$ గుండా వెళ్ళి ఈ కాంప్లెక్సుకు చేరినరేఖలు ∞^1 ఉండును. ఇవన్నియు P గుండావెళ్ళు ఒక తలము ρ పై ఉండును; అనగా P కేంద్రముగాగల ఒక రశ్మిశలాక అగును. అటులనే [3] లోని ఒక సమతలము ρ ఇచ్చినచో, ρ పైనుండి కాంప్లెక్సుకు చేరినరేఖలన్నియు ఒకేబిందువు P గుండా వెళ్ళును. కనుక ఈ కాంప్లెక్స [3] లోని ఒక్కొక్కబిందువు P తో దాని గుండా వెళ్ళు సమతలము ρ ను జతకూర్చుచున్నది.

మొదటితరగతి కాంప్లెక్స కొన్ని సమయములందు, (అనగా దాని గుణకములు a_{rs} లేదా $a_1, \dots a_6$ కొన్ని నిబంధనలను తృప్తిచేయునపుడు) మరింత సరళమైన రూపమును పొందును. అనగా ఒక స్థిరరేఖను ఖండించురేఖాసమూహముగ ఉండును. ఉదా: $p_{12} = 0$ అనునది అటువంటి కాంప్లెక్స అగును.

మొదటి తరగతి రేఖా కాంప్లెక్సుకు మరియొక దృష్టాంతమున్నది. [3] ఏదైన ఒక బలముల సమూహము (సిస్టమ్ ఆవ్ ఫోర్సెస్) ను తీసికొనుము. దీనిలో ఎన్నో బలములుండవచ్చును. ఇపుడు ఒక ఋజురేఖ L తీసికొనినచో, ఒక్కొక్కబలమునకు L చుట్టు ఒక భ్రమకము (మోమెంట్) ఉండును. L చుట్టు అన్నిబలములయొక్క మొత్తము మోమెంట్ శూన్యము అయినచో L ఒక మొదటితరగతి కాంప్లెక్సుకు చెందినదగును.

మొదటితరగతి కాంగ్రుఎన్సెస్ : p_{rs} లేదా x_r రెండు మొదటితరగతి సమీకరణములను తృప్తిచేసినచో, ఈ నిరూపకములుగల రేఖాసంఖ్య ∞^2 అగును. అట్టి రేఖలన్నియు రెండు స్థిరరేఖలను ఛేదించురేఖలని చూపవచ్చును. కనుక రెండు మొదటితరగతి కాంప్లెక్సులకు ఉమ్మడిరేఖలు ఈ రెండు స్థిరరేఖలను సంధించును. ఇట్టి రేఖా సమూహమునకు కాంగ్రుఎన్స అని పేరు. [3] లోని ఏబిందువుద్వారా అయినను వెళ్ళు అట్టిరేఖ ఒకటే ఉండును.

రెగ్యులస్: మూడు మొదటితరగతి కాంప్లెక్స్‌లకు ఉమ్మడి అయిన రేఖలు ఒక ∞^1 సమూహామగును. దీనికి రెగ్యులస్ అనిపేరు. [3] లో ఒక్కొక రెండవతరగతి వక్రతలముపైనను రెండు జాతులరేఖలు (టూ సిస్టమ్స్ ఆవ్ జెనరేటర్స్) కలవు. ఒకే జాతికి చేరిన రెండు రేఖలు సంధింపవు. వేర్వేరు జాతికిచేరిన రేఖలు ఎల్లపుడు సంధించును. ఒక్కొక జాతిరేఖకును ఒక రెగ్యులస్ అనిపేరు.

[5] లోని Q వక్ర 4-పరిమాణిక తలముపై ఋజురేఖలున్నవి. అట్టి ఋజురేఖలోని ఒక్కొకబిందువును [3] లోని ఒక రేఖయొక్క ప్రతిబింబము కదా! ఒక రేఖలోని బిందువులకు అనురూపముగా [3] లో ఒక రశ్మికలాక ఉండును.

రేఖానిరూపకములగు p_{rs}, x_r లోని మొదటి తరగతి సమీకరణములను మాత్రము ఇచ్చట చర్చించితిమి. ఇటులనే రెండవ, మూడవతరగతి కాంప్లెక్స్‌లను చర్చించవచ్చును. అ. స.

ఋతువులు : చూ. మాసములు - ఋతువులు.

ఎడ్డింగ్‌టన్, ఆర్థర్‌స్టాన్లీ (1882 - 1944) : ఎడ్డింగ్‌టన్ ఇంగ్లీషు ఖగోళశాస్త్రవేత్త, ఆధునిక ఆర్కిమిడీజ్ అని ప్రసిద్ధికెక్కిన విజ్ఞాని, సాపేక్షతావాద వివరణకర్తలలో మేటి. ఖగోళశాస్త్రమున ఇటీవల సాధింపబడిన ఘనవిజయములలో ఆతనిపాత్రలేనిది మృగ్యమని చెప్పవచ్చును.

ఎడ్డింగ్‌టన్ 1882 లో ఇంగ్లండులో కెండల్ నగరమున ఒక క్వేకర్ కుటుంబమున జన్మించెను. మాంచెస్టర్‌లో, కేంబ్రిడ్జిలో ఉన్నత విద్యను అభ్యసించి, అతడు కొంత కాలము గ్రీనిచ్ వేధశాలలో సహాయనికునిగా పనిచేసెను; పిదప కేంబ్రిడ్జి యూనివర్సిటీలో ఖగోళశాస్త్రాచార్యునిగను, వేధశాలానియంత్రణాధికారిగను నియుక్తుడయ్యెను.



చిత్రము 72 ఎడ్డింగ్‌టన్

'నాక్షత్ర చలనములు-విశ్వరచన' అను తన మొదటి గ్రంథమును ఆయన 1914 లో ప్రచురించెను; ఆ సంవత్సరమందే రాయల్‌సొసైటీ సభ్యునిగా ఎన్నుకొనబడెను. అతడు 'నక్షత్రప్రవాహాములు-నక్షత్రముల అంతర సంఘట్టనము', 'నక్షత్రములు - పరమాణువులు' మున్నగు మరికొన్ని గ్రంథములనుకూడ ప్రచురించెను. తాను కావించిన 'నక్షత్రములలో హైడ్రోజన్ అంశయొక్క ప్రాధాన్యము' మొదలైన శతాధిక పరిశోధనలను ఆయన ఆ గ్రంథములలో క్రోడీకరించెను; విశ్వము సర్వదా వ్యాకోచించుచున్నది అని సోపపత్తికముగా నిరూపించెను; సూర్యుని ఆయుఃప్రమాణము భూతభవిష్యత్కాలములతో సహా 1500 కోట్ల సంవత్సరములు అని అతడు లెక్కకట్టెను.

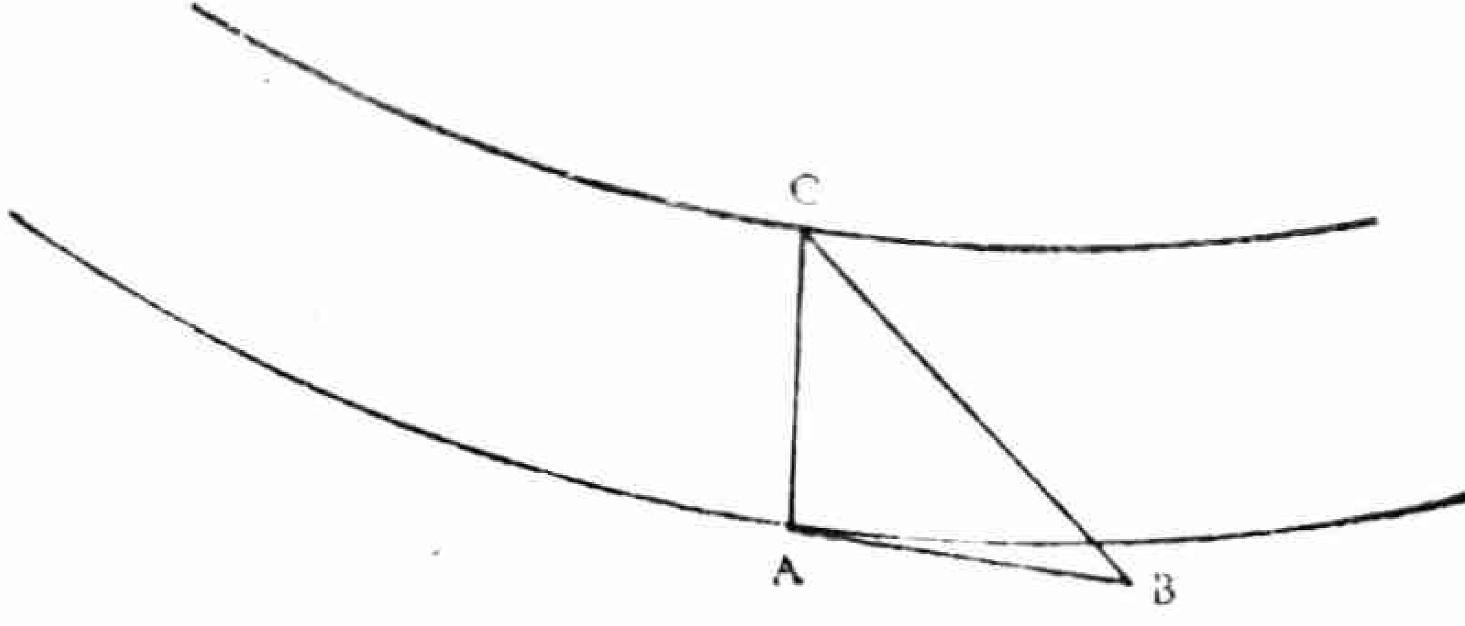
సాపేక్షతావాదమును తన గ్రంథములలో సమర్థించుటయే కాక అతడు ప్రయోగాత్మకముగా మున్ముందు దానికిరాగల అత్యంతప్రాముఖ్యమును విశదీకరించెను. సూర్యుని గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము మూలమున నక్షత్రములనుండి వచ్చు కాంతికిరణములు విచలనము పొందును అను ఐన్‌స్టయిన్ ప్రతిపాదనను పరీక్షించుటకు ప్రిన్సిపీ ద్వీపములో 1919 మే 19 వ తేదీనాడు సంభవించిన సంపూర్ణ సూర్యగ్రహణమును అవేక్షించి, సాపేక్షతావాదమును ధ్రువీకరించిన శాస్త్రజ్ఞులలో ఎడ్డింగ్‌టన్ ప్రముఖుడు. ఐన్‌స్టయిన్‌తో పాటు ఈతడు కూడ ఒక సామాన్యక్షేత్ర సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించెను. ఆ. వెం.

ఎత్తు, దూరము : ఒకవస్తువుయొక్క ఎత్తు (పొడవు) ఎంత ? అది ఎంతదూరములో ఉన్నది ? అను విషయములను కనుగొనుటకు గణితమూలక విమర్శ కావలెనా అనునది చింతనీయము. చిన్నవస్తువులఎత్తు కొలిచి కనుగొనవచ్చును; దగ్గరగ ఉండు వస్తువుల దూరముకూడ అట్లే కొలువ వచ్చును. కాని, అందని వస్తువులకు సంబంధించిన ఈ ప్రశ్నలను సాధించుట ఎట్లు ? అపుడే గణితమూలక విమర్శన ఆవశ్యకము. ఇట్టి ప్రశ్నలు సాధించుటకు అనాదిగ ప్రయత్నములు సాగినవి. చంద్రమండలము భూమికి ఎంత దూరములో ఉన్నది ? దాని వ్యాసమెంత ? అను ప్రశ్నలు మనపూర్వులు సాధించిరి. నైలునదీతీరవాసులు, గ్రీక్‌లు, బాబిలోనియన్‌లు, కాల్డియన్‌లు మొదలగు వారుకూడ ఈ విధమున అందని వస్తువుల దూరము, ఎత్తు కనుగొనిరి.

నదివెడల్పు కనుగొనుట (ప్రాచీన విధానము): దీనికి కావలసిన పరికరము సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము. త్రిభుజము ABC లో $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 45^\circ$. అపుడు $AC = AB$. ఈ త్రిభుజముయొక్క సహాయముతో అనేక సమస్యలను ప్రాచీనులు సాధించిరి.

ఒక నదివెడల్పు కనుగొనుటకు అవతలిగట్టున ఒక చెట్టు C ఎంచుకొనుము. ఇవతలిగట్టున C కి సరిగా ఎదురుగా ఒకచోటు A తీసికొనుము, అప్పుడు AC నది వెడల్పును తెలియజేయును. AC కనుగొనుటకు ఇవతలి

గట్టుపై AC కి లంబముగా ఒక ఆధారరేఖ వెంట ఏ బిందువు (B) వద్ద C బిందువు ఆధారరేఖకు 45° కోణ



చిత్రము 73 నది వెడల్పు నిర్ణయము

ములో ఉండునో ఆ బిందువు వరకు వెళ్ళుము (చూ. చిత్రము 73).

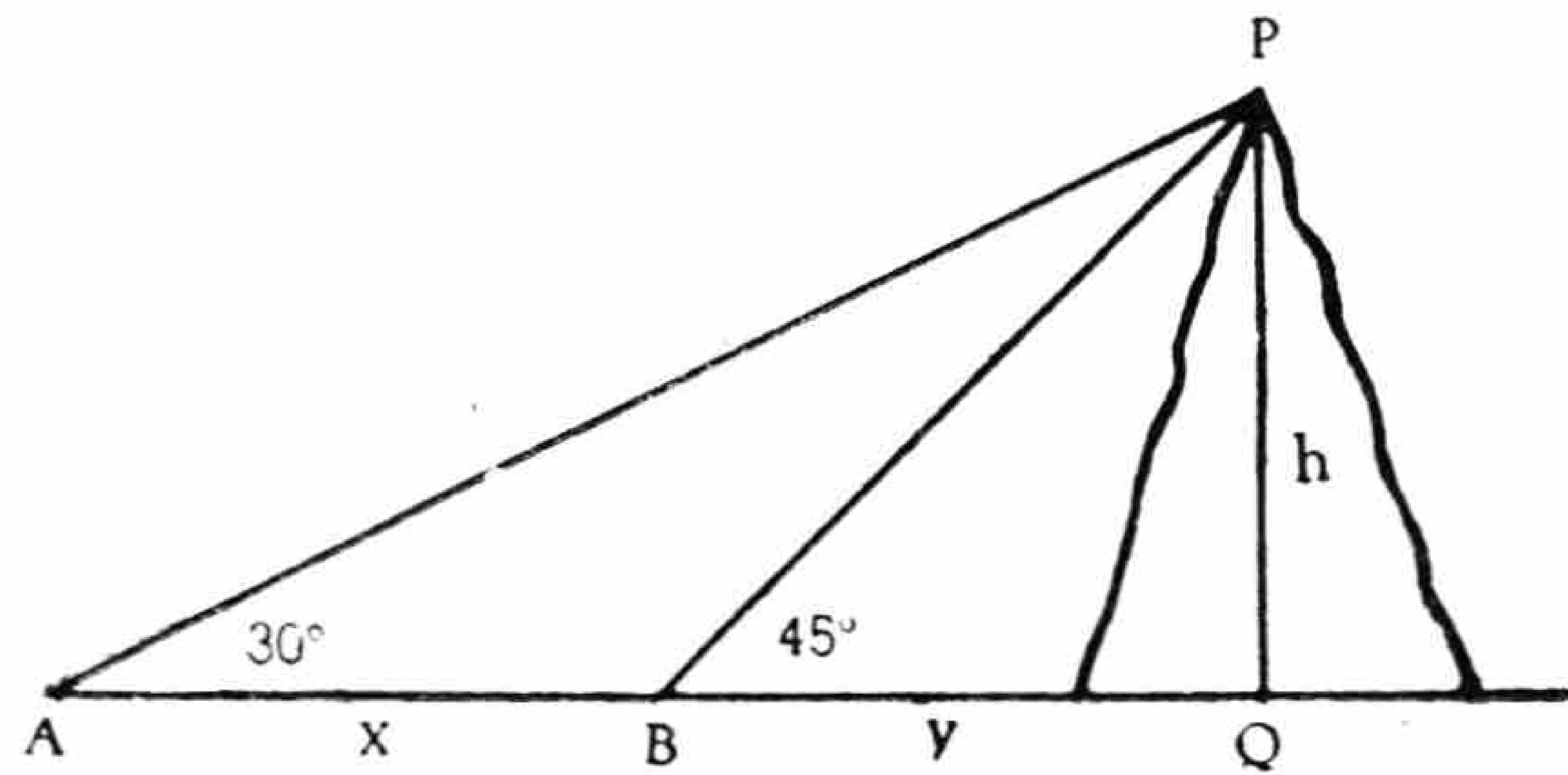
ఇప్పుడు $AB = AC$. AB కొలువవచ్చును. ఇట్లు ఏటిని దాటకయే దాని వెడల్పు AC ని కనుగొనవచ్చును.

గోపురము ఎత్తు : నైలునదీతీరవాసులు పై విధమున పిరమిడ్‌ల (గోపురముల) ఎత్తు కనుగొనిరి.

ఒక శంకువు PM నిలువుగ పాతిపెట్టుము. PM పొడుగుతో సమానమైన వ్యాసార్ధముతో, M కేంద్రముగా ఒక వృత్తము గీయుము.

శంకువు PM యొక్క నీడ వృత్తపరిధిని తాకునపుడు నీడ పొడవు శంకువు ఎత్తునకు సమానము అగును. అదే సమయమందు గోపురము నీడపొడవు S అయినచో గోపురముయొక్క ఎత్తు $S + b/2$ అగును. ఇచట b గోపురముయొక్క భూమి పొడవు. పిరమిడ్‌లు చతుర స్రాకారభూమిపై కట్టబడెను. భూమి తూర్పు - పడమర గాను, ఉత్తర - దక్షిణముగాను ఉండును. మన దేవాలయ గోపురములుకూడ ఇట్లే ఉండును. కనుక గోపురము ఎత్తును ఇటులనే కనిపెట్టవచ్చును.

చిన్నగుట్ట ఎత్తు : PQ ఒక గుట్ట; దాని అడుగుప్రదేశము అగాధమగు పల్లము, అనగా దాని అడుగు బిందువు Q ను



చిత్రము 74 చిన్నగుట్ట ఎత్తు నిర్ణయము

చేరుటకు వీలులేదు. దాని ఎత్తు కనుగొనుట ఎట్లు? గుట్ట ఎత్తు h అనుకొనుము. గుట్టనుండి కొంతదూరములో A వద్ద గుట్ట పై శిఖరము P యొక్క ఊర్ధ్వకోణము 30° కొలువుము. తర్వాత గుట్టవైపు సూటిగా x దూరము వెళ్లి B వద్ద ఊర్ధ్వకోణము 45° కొలువుము. $BQ = y = h$ అగును కదా? లంబకోణ త్రిభుజము PQA నుండి

$$h/AQ = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}. \quad \therefore AQ = h\sqrt{3}.$$

అనగా $x + h = h\sqrt{3}$.

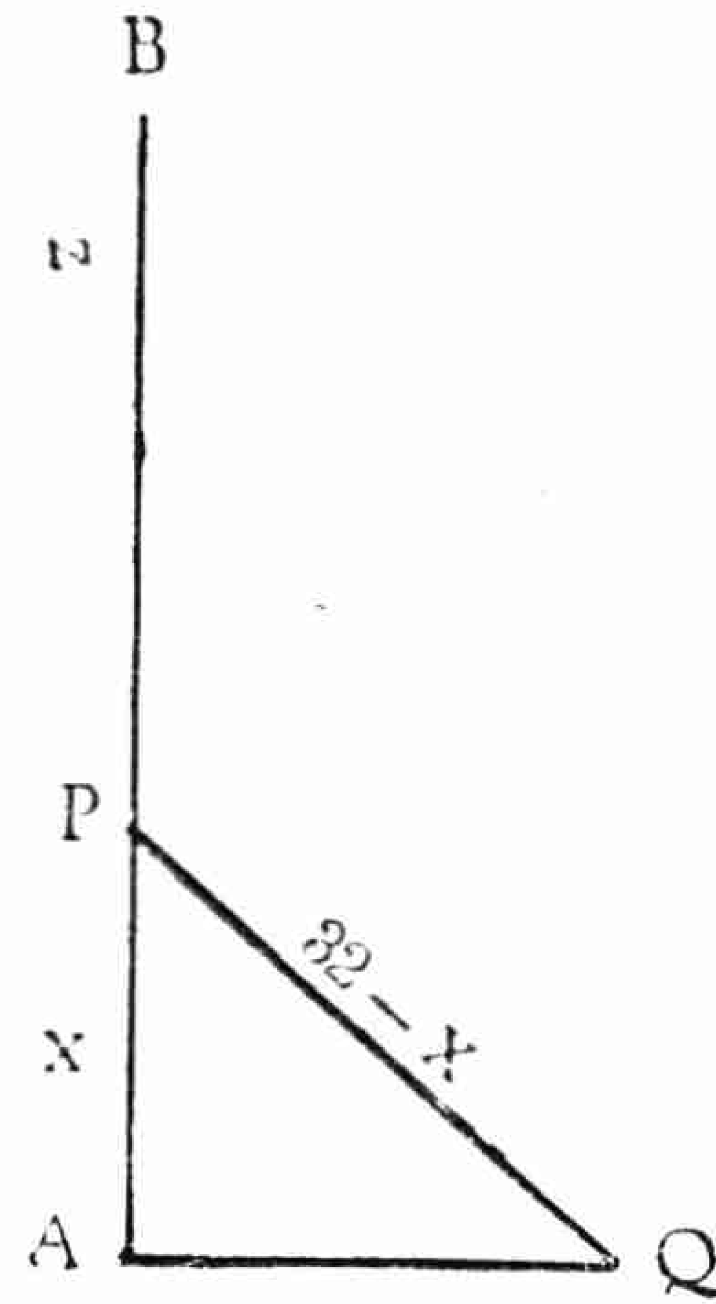
కాబట్టి $x = h\left(\sqrt{3} - 1\right) \quad \therefore h = \dfrac{x}{\left(\sqrt{3} - 1\right)}$. మనకు x తెలియును, కాబట్టి h విలువ లభించును.

గుట్టవద్ద ప్రదేశము మనకు సులభమగు కోణములు (30°, 45° లేదా 60°) కొలుచుటకు అనుకూలముగా ఉండదు. కోణములు A, B ఏవిలువలైన పొందవచ్చును. త్రికోణమితి పట్టికలను ఉపయోగించి h యొక్క విలువ సాధింపవచ్చును.

భాస్కరాచార్య II కృతమగు లీలావతియందు ఎత్తు దూరములగురించి ప్రశ్నలుకొన్ని కలవు. అయితే వాటిని సాధించుటకు కర్ణ వర్గసిద్ధాంతము వాడబడెను.

శ్లో॥ "యది సమభువి వేణు ర్ద్వి త్రిపాణి ప్రమాణో
గణక పవనవేగా దేకదేశే సభగ్నః
భువి నృపమితహస్తే ష్వంగలగ్నం తదగ్రం
కథయ కతిషు మూలా దేషభగ్నః కరేషు"

"సమభువి పై 32 మూరల పొడవుగల వెదురు వాయు వేగమున విరిగి, దాని కొన 16 మూరల దూరములో భూమిని తాకినచో, వెదురు ఎంత ఎత్తులో విరిగినది ?"



చిత్రము 75

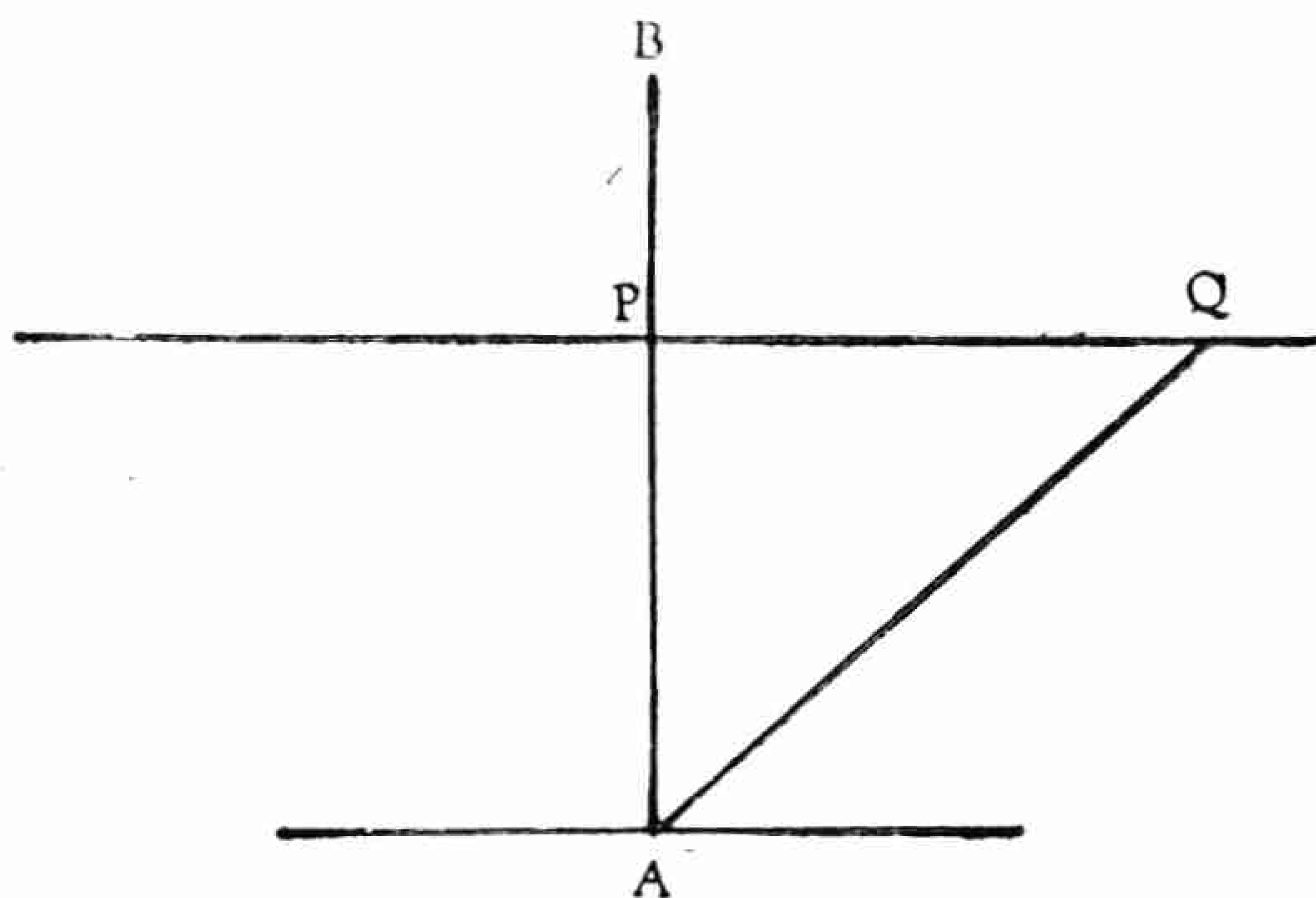
AB వెదురు 32 మూరల ఎత్తు. అది P వద్ద విరిగి, దాని కొన Q వద్ద భూమిని తాకును. AP ఎత్తు ఎంత ?

$AP = x$ మూరలు అయినచో $PQ = BP = 32 - x$, $AQ = 16$ మూరలు. ఇపుడు $(32 - x)^2 - x^2 = 16^2$. కనుక $x = AP = 12$ మూరలు.

శ్లో॥ "చక్రక్రౌంచా కులితసలిలే క్వాపి దృష్టం తటాకే
తోయా దూర్ధ్వం కమలకలికాగ్రం వితస్తిప్రమాణం
మందంమందం చలితమనిలే నాహతం హస్తయుగ్మే
తస్మిన్మగ్నం గణకకథయ క్షిప్ర మంభః ప్రమాణమ్"

"చక్రవాకక్రౌంచ పక్షులచే చెదరిన నీరుగల ఒక తటాకమునందు నీటిపై 1/2 మూర ఎత్తులో ఒక తామర

మొగ్గ గలదు. మందవాతముచే చలించి ఆ తామరమొగ్గ 2 మూరల దూరములో మునిగినచో నీటిలోతు ఎంత ?''



చిత్రము 76

BP నీటిమట్టమునుండి తామరమొగ్గ ఎత్తు $= 1/2$ మూర ;

PA నీటిలోతు $= x$ మూరలు ;

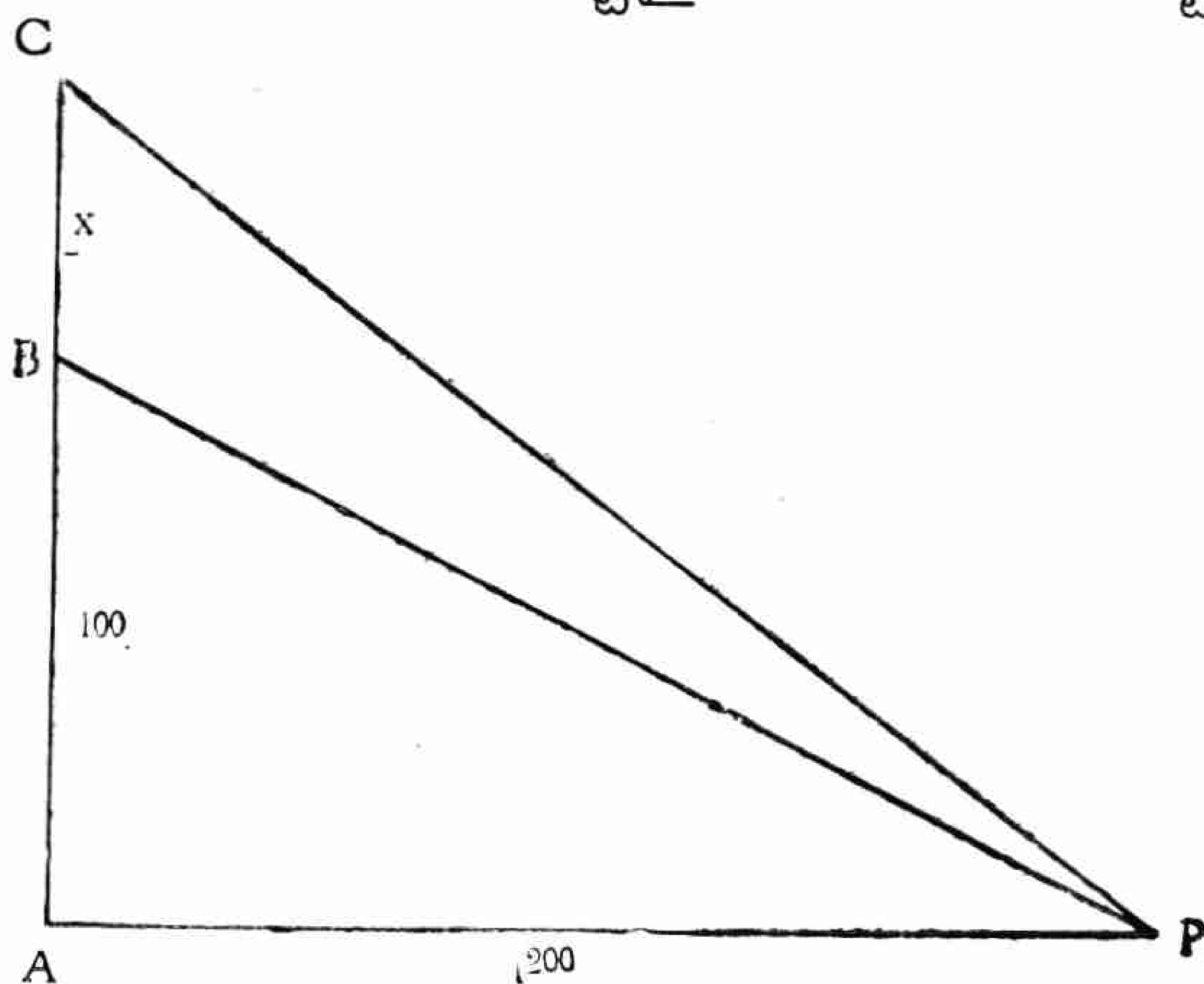
Q తామరమొగ్గ నీటిని తాకుచోటు ;

$$AQ = AB = x + \tfrac{1}{2};$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - x^2 = PQ^2 = 4$$

$$\therefore\ x = 3\tfrac{3}{4} \text{ మూరలు.}$$

ఒక చెట్టు ఎత్తు 100 మూరలు. దానికి 200 మూరలలో ఒక బావి కలదు. చెట్టుపై ఉండు ఒక కోతి చెట్టు



చిత్రము 77

దిగి భూమిపై నడచి బావిని చేరునంతలో రెండవకోతి చెట్టు నుండి పైకి ఎగిరి, వాయుమార్గమున సూటిగా బావిని అదే సమయములో చేరును. రెండవకోతి ఎంతఎత్తు ఎగిరినది ?

AB చెట్టు ఎత్తు $= 100$ మూరలు ;

P బావి ; $AP = 200$ మూరలు.

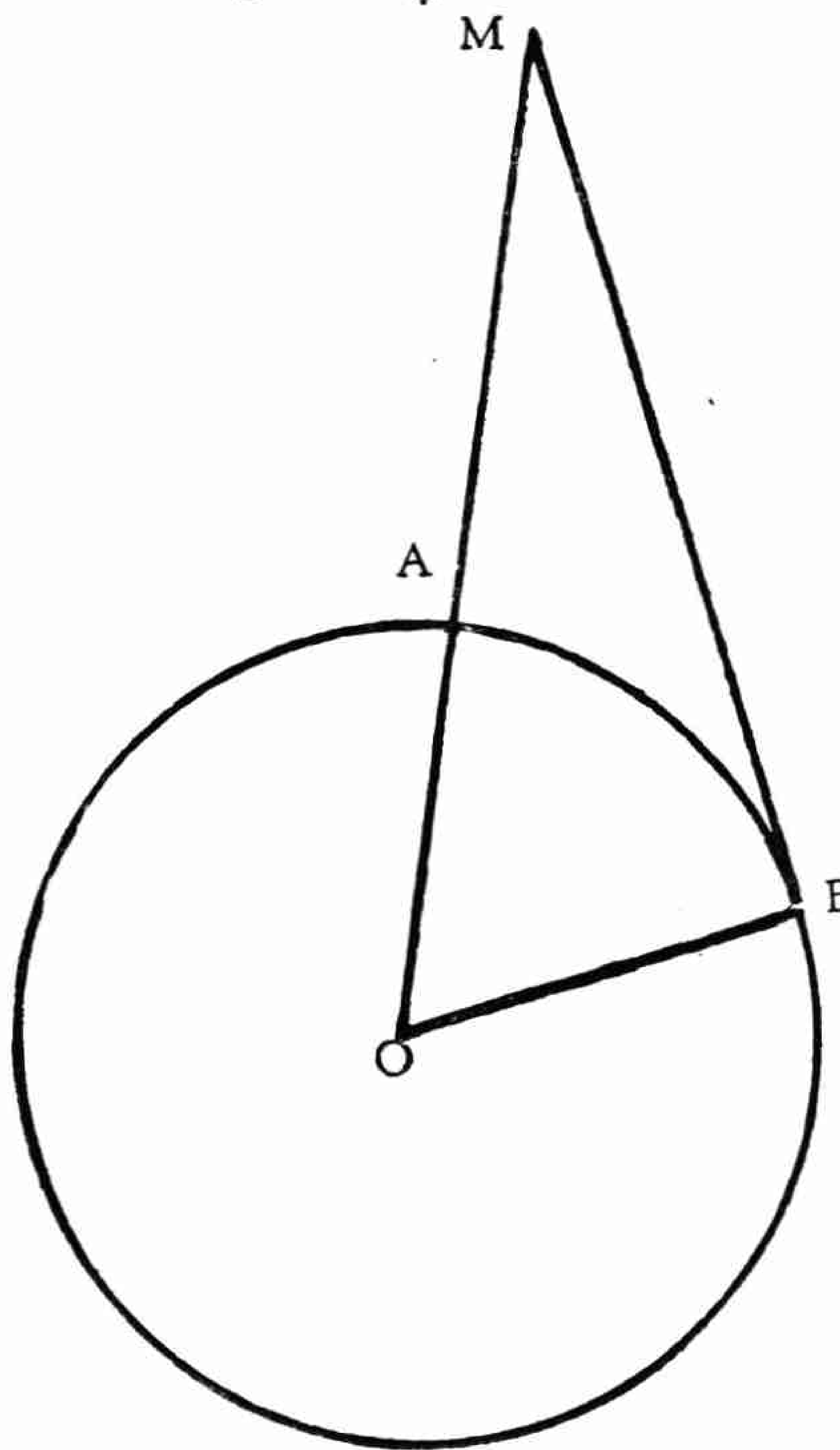
రెండవకోతి $BC = x$ ఎత్తు ఎగిరి CP వెంబడి P ని చేరును. (ఇచట రెండు కోతులు ఒకే వేగముతో పోవునని అనుకొనవలెను).

$AB + AP = BC + CP$; అనగా $300 = x + CP$

కర్ణవర్గ సిద్ధాంతరీత్యా $AC^2 + AP^2 = CP^2$ లేదా $(100 + x)^2 + 200^2 = (300 - x)^2$

$\therefore x = 50$ మూరలు.

ఖగోళశాస్త్రమందు అన్ని సమస్యలను గణితమూలముగ సాధింపవచ్చును. వాటిలో భూమినుండి చంద్రునిదూరము కనుగొను ప్రాచీనపద్ధతిని ఇచ్చట విమర్శింతుము.



చిత్రము 78

భూమండల నిరక్ష రేఖపై రెండు చోట్లు (A, B) తీసికొనవలెను. A, B లమధ్య రేఖాంశము L° అనుకొనుము. చంద్ర బింబ కేంద్రము A వద్ద ఉదగ్రముగ ఉండునపుడు అది B స్థలములో అస్తమించుచుండవలయును. చిత్రము 78లో M చంద్ర బింబము.

O భూకేంద్రము.

$$\angle AOB = L^\circ : \quad \angle OBM = 90^\circ$$

$$\angle OMB = 90^\circ - L^\circ$$

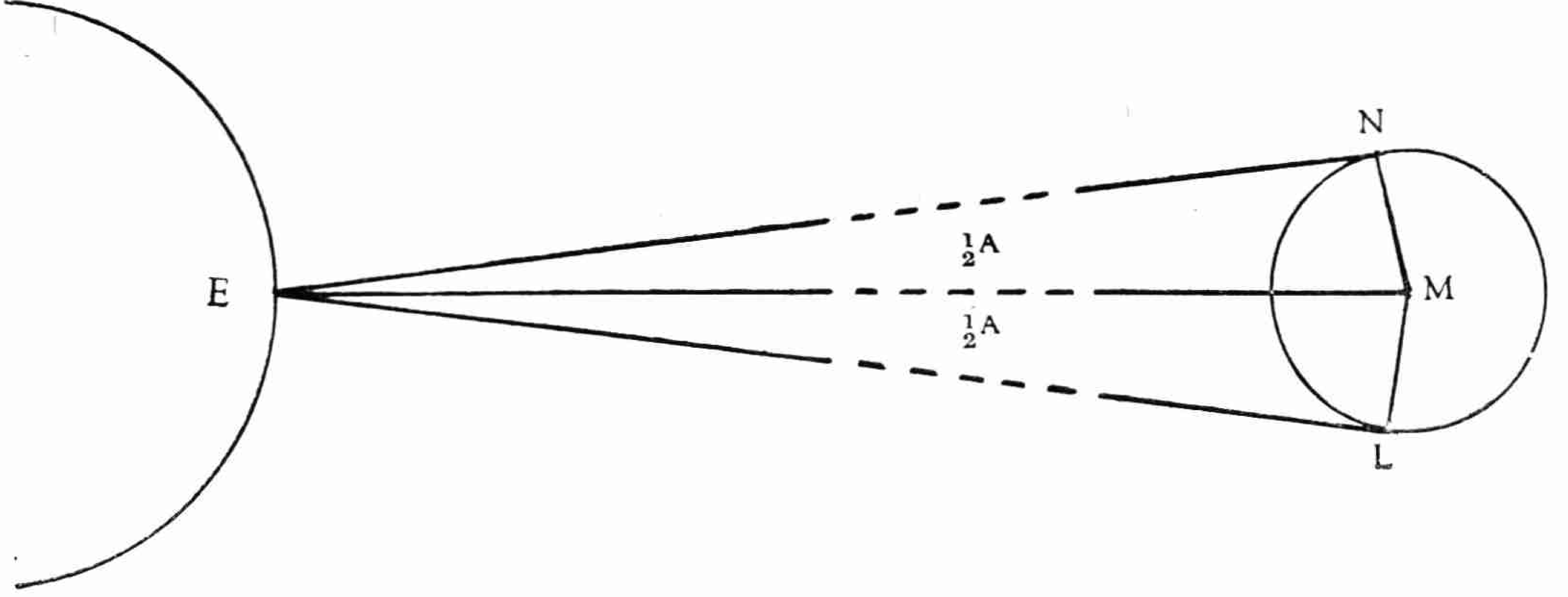
$$\frac{OB}{OM} = \sin\left(90^\circ - L^\circ\right) = \cos L^\circ$$

$$\therefore\ OM = \frac{OB}{\cos L^\circ}$$

ఇచట OB భూమియొక్క వ్యాసార్ధము. ఇట్లు కొలిచి, చంద్రమండల దూరము (OM)ను రమారమి 3,94,000 కిలోమీటరులు అని కనుగొనవచ్చును. ఇట్లే చంద్రమండల వ్యాసార్ధముకూడ క్రిందివిధమున గణింపవచ్చును. 79వ చిత్రములో పూర్ణ చంద్రమండలము యొక్క ఎదుటి బిందువులు L, N లచే భూమిపై ఒక స్థలము E వద్ద ఏర్పడు కోణము $\angle A$ కనుగొనుము. $\angle A$ అతి స్వల్పమైనది. దీని విలువ సుమారు 1°.

M చంద్రబింబకేంద్రము. MN చంద్రబింబవ్యాసార్ధము;
$\angle NEM = \angle A/2$; $\angle MNE = 90^\circ$
$\therefore A/2 = \frac{1}{2}^\circ$ అని తెలియుచున్నది.

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{MN}{EM} = \frac{\text{చంద్రమండలవ్యాసార్ధము}}{3,94,000}$$



చిత్రము 79

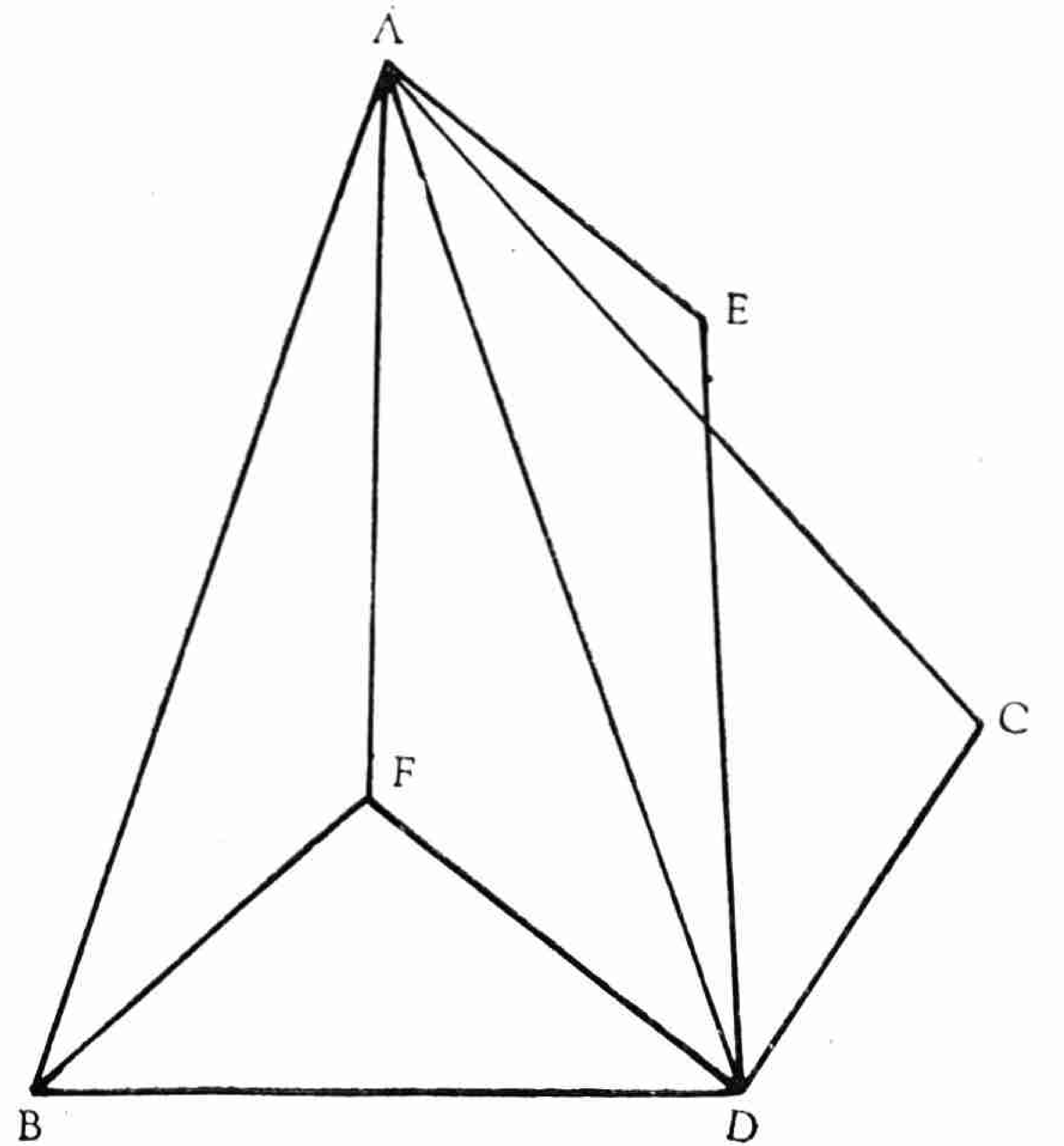
$\therefore$ చంద్రమండలవ్యాసార్ధము $= 3,94,000 \sin \frac{1}{2}^\circ$
= సుమారు 1,770 కిలోమీటరులు.

కటకసంక్రాంతి, విషువు, మకరసంక్రాంతి ఈ మూడు దినములందు ఒక శంకువుయొక్క మధ్యాహ్నఛాయను కనుగొని ప్రాచీనులు ఒక స్థలముయొక్క అక్షాంశమును, క్రాంతివృత్తము యొక్క పరమాపక్రమమును సాధించిరి.

విషుదినమునందు సూర్యుడు భూమధ్యరేఖపై ఉండును. కటక సంక్రాంతినాడు భూమధ్యరేఖకు ఉత్తరమున గరిష్ఠ ఉత్తరక్రాంతి పొందును. మకర సంక్రాంతినాడు గరిష్ఠ దక్షిణ క్రాంతిపొందును. ఈ క్రాంతి విలువ $\omega = 23\frac{1}{2}^\circ$ అని తీసికొనుము.

ఈ మూడుదినములందును శంకుచ్ఛాయాగ్రమును, శంకుశీర్షమును చేర్చు రేఖయొక్క నతిని కనుగొనుము. కటక సంక్రాంతినాడు ఈ నతి $= L^\circ - \omega$, విషు నాడు ఈ నతి $= L^\circ$, మకర సంక్రాంతినాడు ఈ నతి $= L^\circ + \omega$. $(L - \omega)$, $(L + \omega)$ విలువలు మనకు తెలిసినందున L, ω విలువలు ప్రత్యేకముగా కనుగొనవచ్చును. $\omega = 23\frac{1}{2}^\circ$ అని ఏర్పడును. విషుదిన శంకుచ్ఛాయకు 'పలభ' మని పేరు. ఆ దినమునందు 'నతి' స్థలము యొక్క అక్షాంశను తెలుపును.

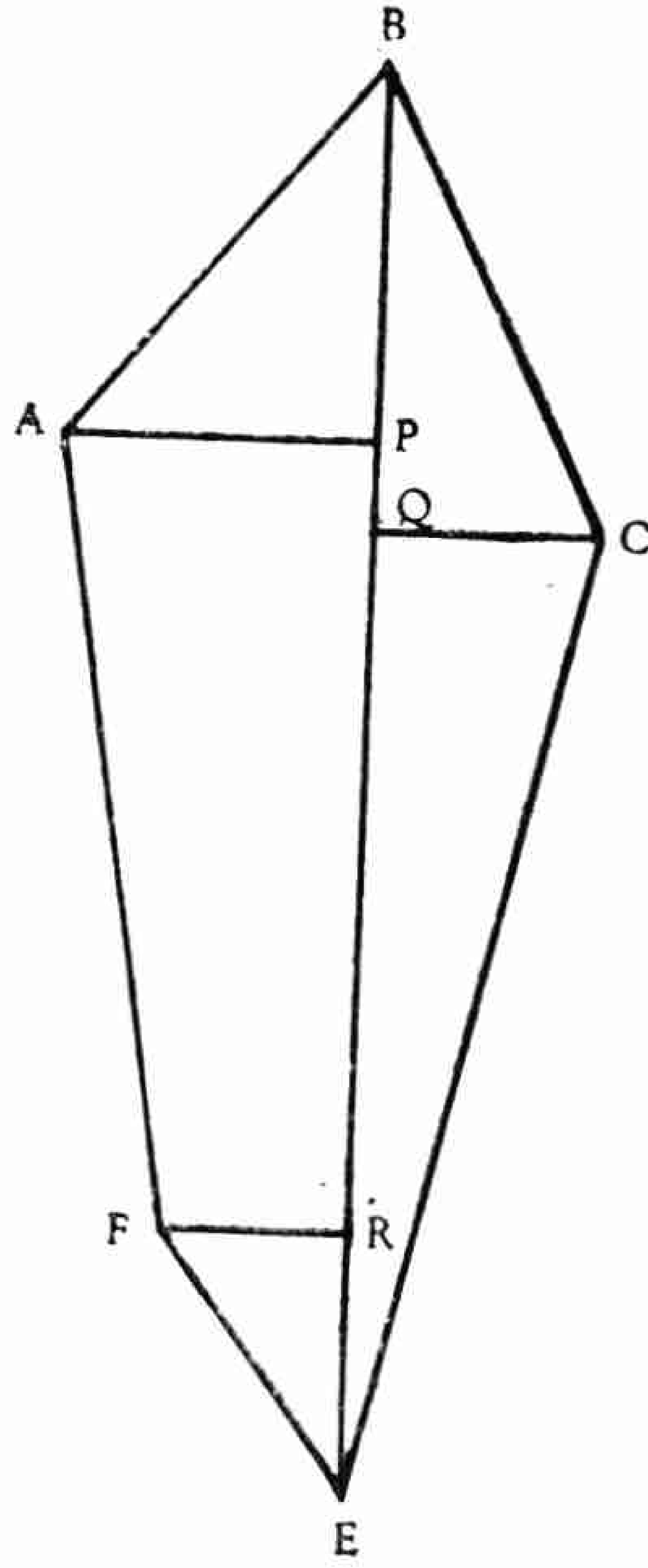
సర్వే: అనాదిగ భూమిని కొలిచి పైరుచేయుటకు రైతులకు పంచిపెట్టుట, అన్ని దేశములందును పరిపాటి. నైలునది వరదలచే పొలములలోని గుర్తులు మరుగు పడినందున ఆ నదీతీరవాసులు ప్రతి సంవత్సరము పొలములను కొలువవలసి వచ్చెను. పొలము కొలుచువారికి రజ్జుగ్రాహకులు అనిపేరు. వారు పొలమును అంతయును త్రిభుజములుగా విభజించి, రైతులకు పంచిపెట్టుచుండెడివారు. నేటికి ఆ మార్గమునే గణకులు (కరణములు) అవలంబించు చున్నారు.



చిత్రము 80

ఒక ప్రదేశమును సర్వే చేయవలెనన్న దానిని త్రిభుజములుగా విభజించుటకు ఏర్పాటు చేయవలయును. మొదట కొన్ని గుర్తులను ఎన్నుకొనవలయును. అవి చెట్లుగాగాని,

ఇంటి మూలలుగాగాని, గుట్టలలో రాళ్లుగాగాని, స్థిర వస్తువులుగా ఉండవలెను. ఒక ప్రదేశమును తీసికొని, చిత్రము 80 లో చూపిన ప్రకారము ఇంటిమూల A, ఒక చెట్టు B అని తీసికొని AB ని మొదటి త్రిభుజమునకు ఆధార భూమిగా అమర్చుము.



చిత్రము 81

వేరొకగుర్తు F ని ఏర్పరచుకొని తియోడలైట్ లో కోణములు FAB, FBA కొలువుము. అపుడు త్రిభుజము ABF నిశ్చయింపబడును. అట్లే త్రిభుజము AFD‹ ADE, CDA ల యొక్క కొలతలను గుర్తించుము. తగిన మానమును ఉపయోగించి ఆ ప్రదేశముయొక్క చిత్రము కాగితముపై లిఖించి వైశాల్యము కనుగొనవచ్చును. ఇటుల ఏర్పడిన రెండు స్థలముల దూరము ఉదా: E F చిత్రములోను ప్రత్యక్ష కొలతలోను ఒకే విలువగ ఉండవలెను. లేనిచో, కొలతలలో తప్పులుండును.

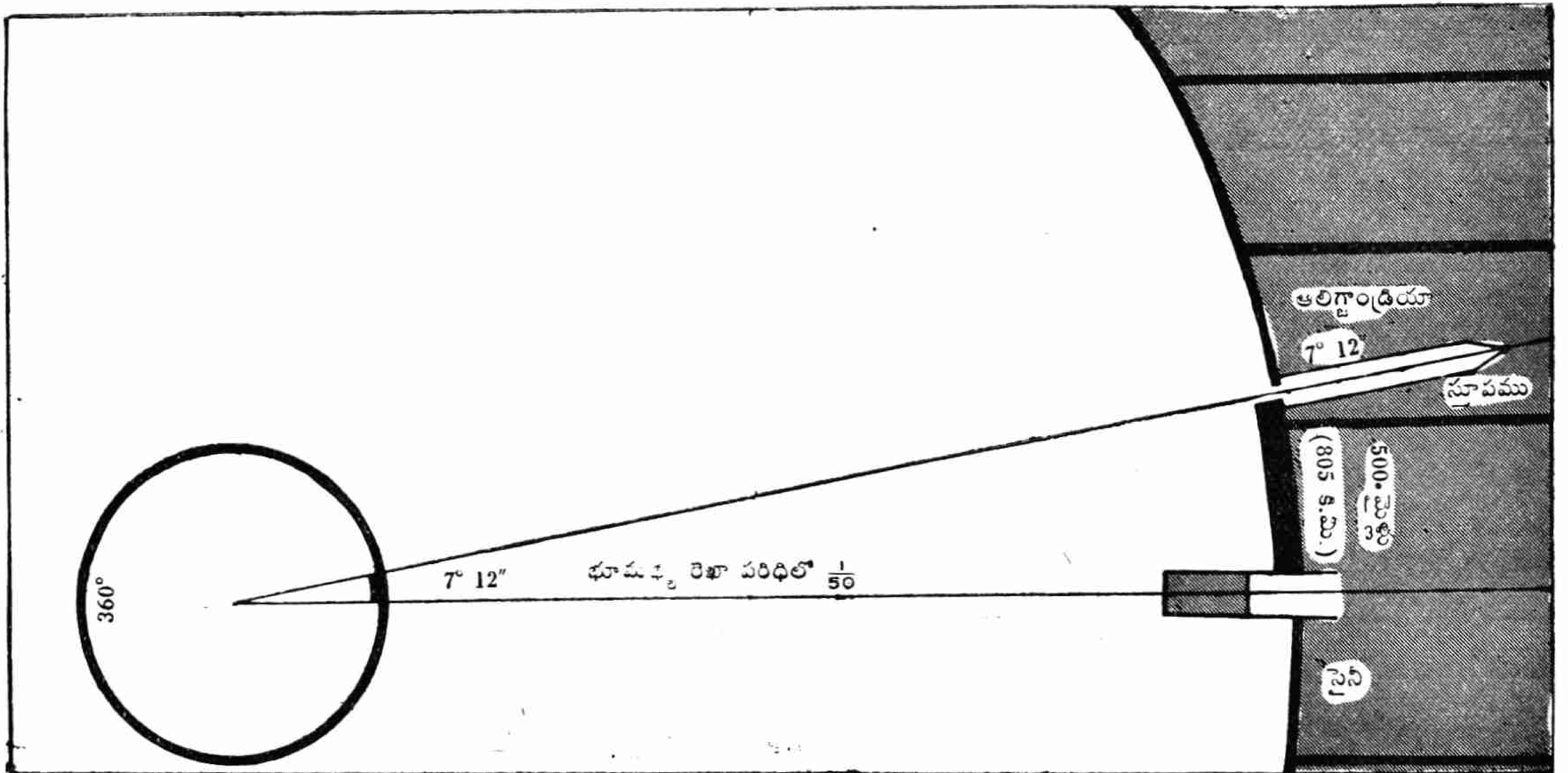
పరిలంబములు : చిత్రము 81 లో B E ప్రధానరేఖగా తీసికొని, దానినుండి A, C, F లకు గల లంబదూరము AP, CQ, FR లను కొలిచి చిత్రము గీయుదుము. కొలతలు గజములలోగాని మీటరులలోగాని ఉండవచ్చును.

APB, CQB, EFR లంబకోణత్రిభుజములు ; APRF ట్రెపీజియమ్. వీని వైశాల్యములను సులభముగా కనుగొనవచ్చుమ.

ఎన్. రా. మూ.

ఎపిసైక్లాయిడ్ : చూ. వక్రములు.

ఎరాటోస్తెనీజ్ (క్రీ. పూ. 276 ? - 196 ?) : ఎరాటోస్తెనీజ్ సుప్రసిద్ధ గ్రీక్ దార్శనికుడు, విద్యావేత్త. అతడు క్రీ. పూ. 276 లో జన్మించెను ; అనేక గ్రీక్ విద్యాసంస్థలలోను, ముఖ్యముగా ఏతెన్స్ నగరములోను ప్రముఖులైన ఆచార్యుల యొద్ద విద్యాభ్యాసము కావించెను. యువకుడుగా ఉన్నప్పుడే శాస్త్రవేత్తగా, భూగోళ శాస్త్రజ్ఞుడుగా అతని ప్రఖ్యాతి దేశము నలుదెశల విస్తరించెను. తత్ఫలితముగా ప్రాచీన గ్రంథాలయములు అన్నిటికంటె మిక్కిలి పెద్దది, ప్రసిద్ధికెక్కినది అయిన ఆలిగ్జాండ్రియా గ్రంథాలయమునకు అతడు నిర్వహణాధికారిగా నియమింపబడెను. అతడు దర్శనములు, గణితము, భూగోళము, కావ్యనాటకములు ఇత్యాది అనేక విషయములపై పెక్కు రచనలు కావించెనని తెలియుచున్నది. దురదృష్టవశాత్తు ఆ రచనలలో కొద్ది మాత్రమే నిలిచినవి.



చిత్రము 82

ఎరాటోస్తెనీజ్ తనకాలమునాటికి తెలిసిన ప్రపంచము యొక్క మొట్టమొదటి భౌగోళిక చిత్రపటమును సమగ్ర

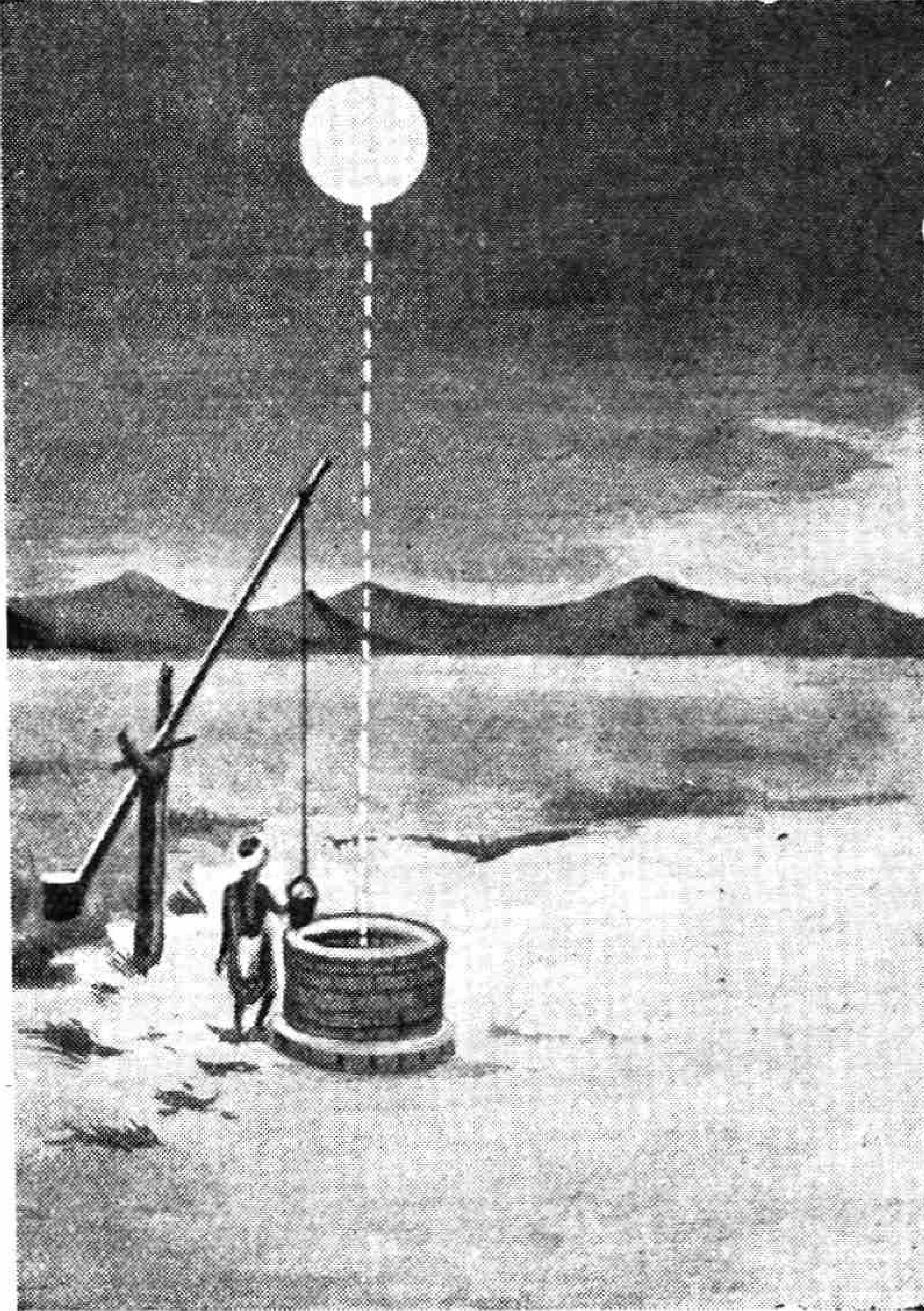
ముగా నిర్మించెను; భూమి గోళాకారముగా ఉన్నదని దృఢముగా విశ్వసించి, స్పెయిన్ దేశమునుండి పడమటి దిశగా సముద్రప్రయాణముచేసి, ఇండియాను చేరుకొనుట సాధ్యమగునని తెలియజేసెను. తన దేశమునకు ఎదురుగా మహాసముద్రమునకు ఆవల మరియొక పెద్ద భూఖండము కలదని అతడు అభిప్రాయపడెను.

రెండువేల ఏండ్లకు పూర్వమే భూపరిధిని కొలుచుటకు మార్గము కనుగొని అందు అతడు కృతకృత్యుడు

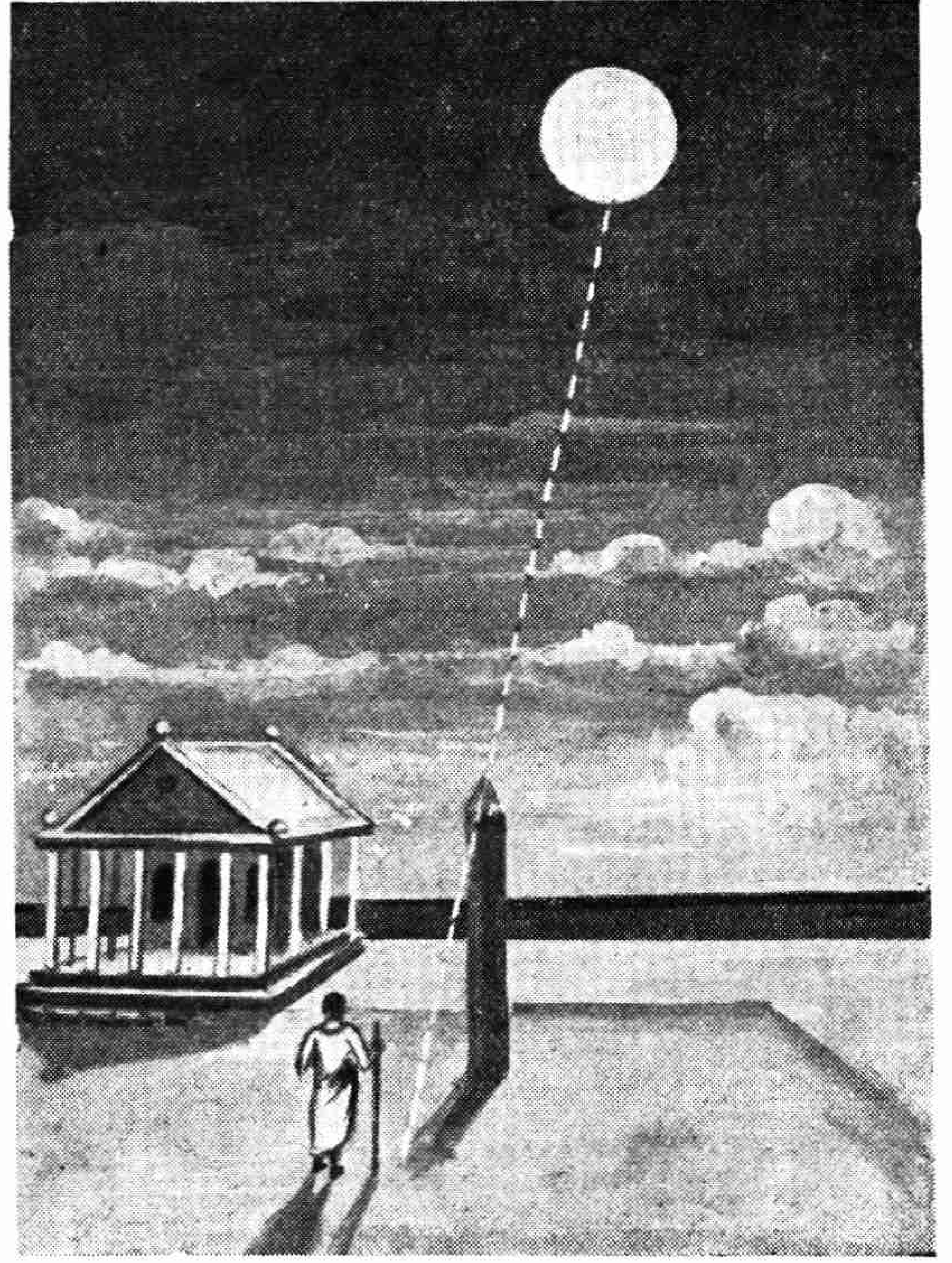
చున్నది. కావున సూర్యకిరణములు భూకేంద్రమువైపు సూటిగా పడును (చూ. చిత్రము 83).

ఆలిగ్జాండ్రియా భూమధ్య రేఖపై లేదు. కాబట్టి సూర్యకిరణములు అచ్చటి భూమిపై ఉదగ్రముగా పడవు (చూ. చిత్రము 84).

నాలుగు ప్రక్కలతో ఎత్తుగా, కూచిగా ఉండు ఒక స్తంభముయొక్క ఎత్తు మనకు తెలిసినచో, దాని నీడల పొడవులను కొలచి, సూర్యకిరణముల నతాంశను సులభ



చిత్రము 83



చిత్రము 84

కాగలిగెను. తనగణనములలో అత్యంత ప్రధానము అయిన ఈ భూపరిధిగణనము అతడు ఎట్లు సాధించెనో ఇప్పుడు వివరింతుము :

ఈజిప్టులో ఆలిగ్జాండ్రియా, సైనీ అనునవి రెండు నగరములు. నేటి ఆస్వాన్ నగరమునకు చేరువగా సైనీ భూమధ్యరేఖపై ఉన్నది. రెండు నగరములు ఒకే రేఖాంశపై ఉన్నవి; రెండింటి మధ్యదూరము రమారమి 805 కిలోమీటరులు (500 మైళ్లు).

సైనీ - జూన్ 21 వ తేదీ మధ్యాహ్నము : సూర్యుడు భూమికి లంబముగా ఉండును. నూతుల నీటిలో సూర్యుని ప్రతిబింబములు కనపడుటవలన ఆ విషయము రుజువగు

ముగా గణింపవచ్చును. దాని విలువ రమారమి $7^\circ\ 12'$ అని కనుగొనవచ్చును (చూ. చిత్రము 82).

సూర్యుని ఒకపూర్తి భ్రమణము (అనగా 360°) నకు, $7^\circ\ 12'$ లకు గల నిష్పత్తి ఆలిగ్జాండ్రియా, సైనీనగరముల మధ్యదూరమునకు, భూమిచుట్టుగల దూరము (పరిధి) నకు అనుపాతములో ఉండును. 360 డిగ్రీలలో $7^\circ 12'$ $\frac{1}{50}$ వ వంతు. అందువలన భూపరిధి $50 \times 805 = 40,250$ కిలోమీటరులు. ఇచ్చట 805 రెండు నగరముల మధ్య దూరము. భూమియొక్క పరిధి 40,170 కిలోమీటరులు అని నేడు లెక్కవేయబడినది. ఎరాటోస్తెనీజ్ గణనము ఈ సంఖ్యకు చాల దగ్గరగా ఉన్నది.

80 వ పేట ఎరాటోస్తెనీజ్ గ్రుడ్డివాడయ్యెను. అందువలన జీవితముపై విసుగుపుట్టి, అతడు ఆమరణ నిరాహారదీక్ష పూని ఆత్మహత్య చేసికొనెను. ఆ. వెం.

ఏకరూప ఉపసరణత (యూనిఫారమ్ కన్వర్జెన్స్): ఒక అనంత పరంపర $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \dots$ (1) తీసికొనుము. దీనియందు మొదటి n పదముల సంకలన సంఖ్య S_n అనుకొందము. ఇది ఉపసరణ పరంపర అయితే, $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు, S_n కు ఒక అవధివిలువ S ఉండును. అనగా n అనంతమగునపుడు $|S - S_n|$ అతి స్వల్పమగును. ఈ భావమునే విస్తరించి, క్రిందివిధముగా వివరించవచ్చును: ఒక దత్త అతిస్వల్ప ధనాత్మకసంఖ్య ε ఇచ్చినచో దానికి అనుగుణముగా ఒక సంఖ్య N_o కనిపెట్టవచ్చును. ఇది ఎటువంటిదనగా, $n > N_o$ అగునపుడు $|S - S_n| < \varepsilon$ గ ఉండవలెను.

ఇపుడు పై పరంపరలోని పదములు $a_1, a_2 \dots \dots \dots$ అన్నియు ఒక చలరాశి x యొక్క ఫలములు కానిమ్ము. అనగా $a_1 = f(x)$, $a_2 = g(x) \dots \dots \dots$ ఈ పరంపర x యొక్క కొన్ని విలువలకు ఉపసరణ పరంపరగా ఉండును. $a \leq x \leq b$, అను అంతరములో అన్ని విలువలకును A ఒక ఉపసరణ పరంపర అనుకొందము. అనగా ఈ అంతరములోని ఒక్కొక్క x విలువకును, S_n, S లకును విలువలు ఉండును. ఇవి x పై ఆధారపడి ఉండును; అనగా $|S - S_n|$ x పై ఆధారపడి ఉండును. కనుక ఒక అతిస్వల్ప ధనాత్మక స్థిరసంఖ్య ఇచ్చినచో, ఒక్కొక x కును దానికి తగిన N_o కనిపెట్టవచ్చును. ఈ N_o సంఖ్య x పై ఆధారపడి ఉండును. $a \leq x \leq b$, అను అంతరములోని అన్ని x విలువలకును అనుగుణమగు ఒకే N_o కనిపెట్ట సాధ్యమైనచో, పరంపర Aను, $a \leq x \leq b$ అంతరములో ఏకరూప ఉపసరణ పరంపర అందుము. దీని అర్థమేమనగా, పై అంతరములోని x యొక్క భిన్నవిలువలకు అనురూపమైన N_o విలువలకును పై హద్దు ఉన్నది. దీనినే అన్ని x విలువలకు ఉమ్మడి N_o గా తీసికొనవచ్చును.

ఈ భావము విశ్లేషణ గణితములో అతి ప్రధానమైనది. ఉదా: $a_1, a_2, a_3, \dots$ అన్నియు, $a \leq x \leq b$ అంతరములో అవిచ్ఛిన్న ఫలములు అనుకొందము. అట్టి ఫలముల పరిమిత పరంపరకూడ అదే అంతరములో ఒక అవిచ్ఛిన్న ఫలము అగును. ఈ గుణము అనంతపరంపరకును అన్వయించునా ? అనునదియే ప్రశ్న. దీనికి జవాబు ఏమనగా, ఆ అంతరములో పరంపర ఏకరూపపరంపర అయినచో, అపుడు దాని సంకలనరాశి ఫలముకూడ అదే అంతరములో x యొక్క అవిచ్ఛిన్న ఫలమగును. ఆ. న.

ఏకాదశి : సూర్యచంద్రులఅంతరము 90°, 45°, 135° ఉండినచో పరస్పర వేధకలుగును. అట్టి అంతరము కలుగు తిథులు చతుర్థి, అష్టమి, ద్వాదశియును.

ఏకాదశికి హరివాసరము అని పర్యాయ నామము. ఒక తిథిలో సూర్యచంద్రాంతరము $12\frac{1}{6}°$ లకు అధికమగును. 11 తిథులలో రమారమి 134° సూర్యచంద్రాంతర అంశలు ఉండును. ద్వాదశి ప్రవేశింపగనే సూర్యచంద్రాంతరము వేధను ఇచ్చు స్థితిలో ఉండును.

ఏకాదశి తిథినాడు ఉదయమునకు పూర్వము 4 గడియలకు దశమి ముగిసి, ఏకాదశి ఆరంభింపవలయునని కొందరి అభిప్రాయము. ఉదయమునకు 6 గడియలకు పూర్వమే ఏకాదశి ప్రారంభింపవలయును అని కొందరి అభిప్రాయము. కాబట్టి కొన్నిసమయములందు ఏకాదశి రెండు దినములలో వచ్చును. ఆచార్య.

ఐన్‌స్టయిన్ : చూ. గ్రహణములు; భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు - పు. 232.

కణగతి శాస్త్రము : అతిసూక్ష్మ ద్రవ్యభాగమును కణము అందురు. ఒక కణమునకు నిరూపకములు కలవు, కాని పరిమాణములేదు. దానికి అంశములే లేవు. కనుక బిందువు, కణము అను రెండుపదములు ఒకే అర్థములో వాడబడును. ఒక బిందువుయొక్క స్థానము వేరువేరు కాలములలో వేరువేరుస్థానములను ఆక్రమించిఉన్నచో, ఆ బిందువునకు చలనము కలదని చెప్పుదుము. ఒక బిందువు వరుసగా తీసికొను స్థానములగుండ వెళ్ళురేఖకు ఆ బిందువుయొక్క పథము అనిపేరు. ఒక చలించు బిందువుయొక్క పథము ఋజురేఖగా కాని, వక్రరేఖగా కాని ఉండవచ్చును.

t_1 అనుక్షణమున బిందువుయొక్క స్థానము దాని పథముపై A అనియు, ఇంకొక t_2 క్షణమున దాని స్థానము B అనియు అనుకొన్నచో, దాని సగటువేగము $AB/(t_2 - t_1)$ అగును. $(t_2 - t_1)$ శూన్యవిలువను సమీపించుకొలది $AB/(t_2 - t_1)$ అను నిష్పత్తి ఒక అవధి మూల్యమును స్వీకరించును. గణితశాస్త్రరీత్యా ఈ నిష్పత్తిని ds/dt అని వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ ds అత్యల్ప దూరము, dt అత్యల్పకాలము. ఈ అవధియే t_1 కాలమునందు ఆ బిందువుయొక్క తాత్కాలికవేగము అనబడును.

వేగమునకు పరిమాణము, దిశ ఇవి రెండును కలవు. అందువలన వేగమును పరిమాణము, దిశ కల ఋజురేఖాఖండముచే సూచింపవచ్చును. ఈకారణముచే వేగము సదిశరాశి (వెక్టార్) అనబడును.

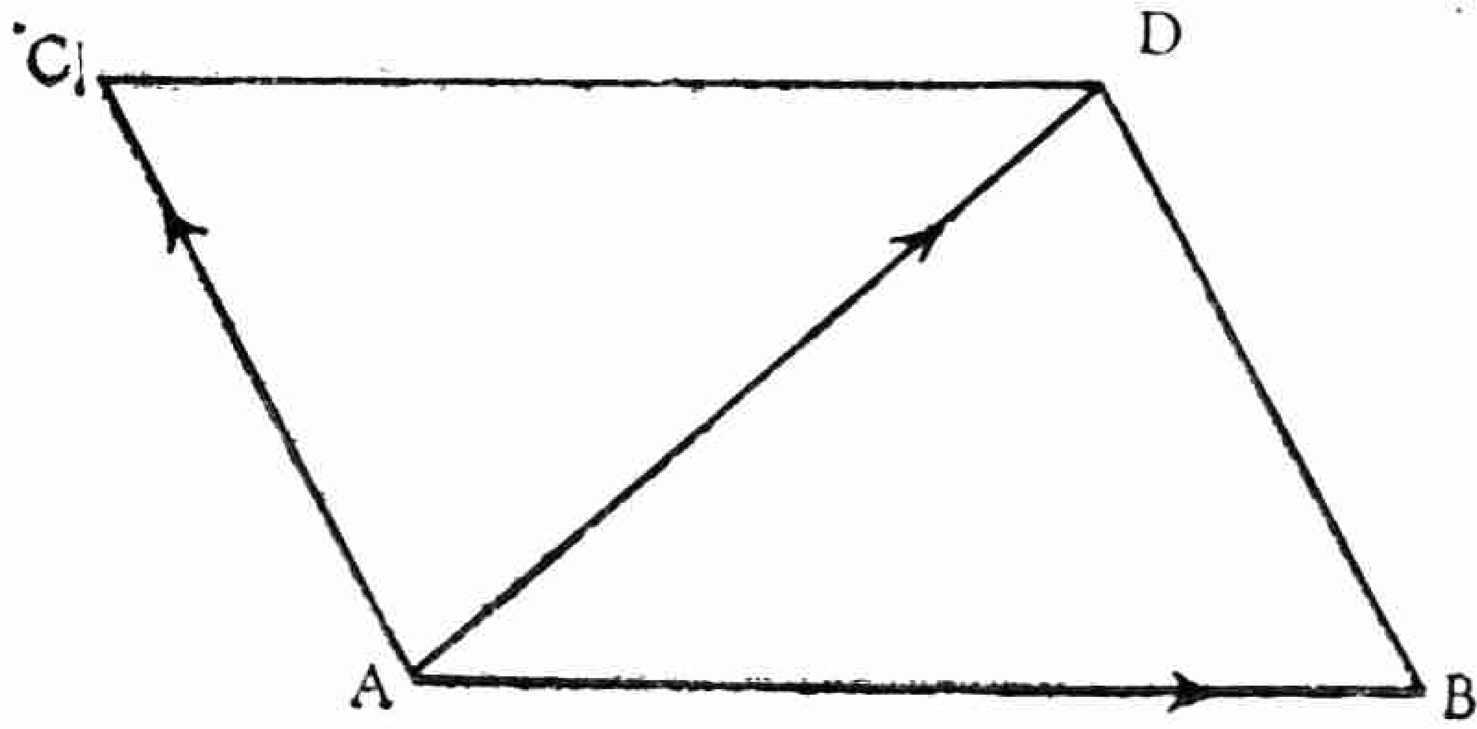
ఒక సదిశరాశిని బాణముగుర్తుకల ఋజురేఖచే సూచింపవచ్చును. బాణము దిశను సూచించును, ఋజురేఖయొక్క

నిడివి దాని పరిమాణమును సూచించును. కాని, ఈగ్రంథమున సదిశ రాశులు దట్టమైన అక్షరములతో సూచింపబడినవి.

వేగముయొక్క దిశను గణింపని పరిమాణము సాధారణముగ ద్రుతి (స్పీడ్) అనబడును. దానిని అదిశరాశి (స్కేలార్) అందురు.

ఒక బిందువు ఒకే దిశగా పోవుచు, దాని పథముమీద సమాన వ్యవధులలో సమానదూరములు వెళ్ళినచో, ఆ బిందువు ఏకరూపవేగముతో చలించుచున్నదని అందురు.

వేగముల సంకలనము : ఒక బిందువు ఒకేకాలమున వేరువేరు దిశలలో రెండు వేగములు కలిగిఉండవచ్చును. ఆ రెండు వేగములను వేగముల సమానాంతర చతుర్భుజ నియమమువలన కలిపి ఒకేవేగముగ మార్చవచ్చును. ఇట్లు మార్చబడినవేగము సంకలితవేగము అనబడును. రెండు



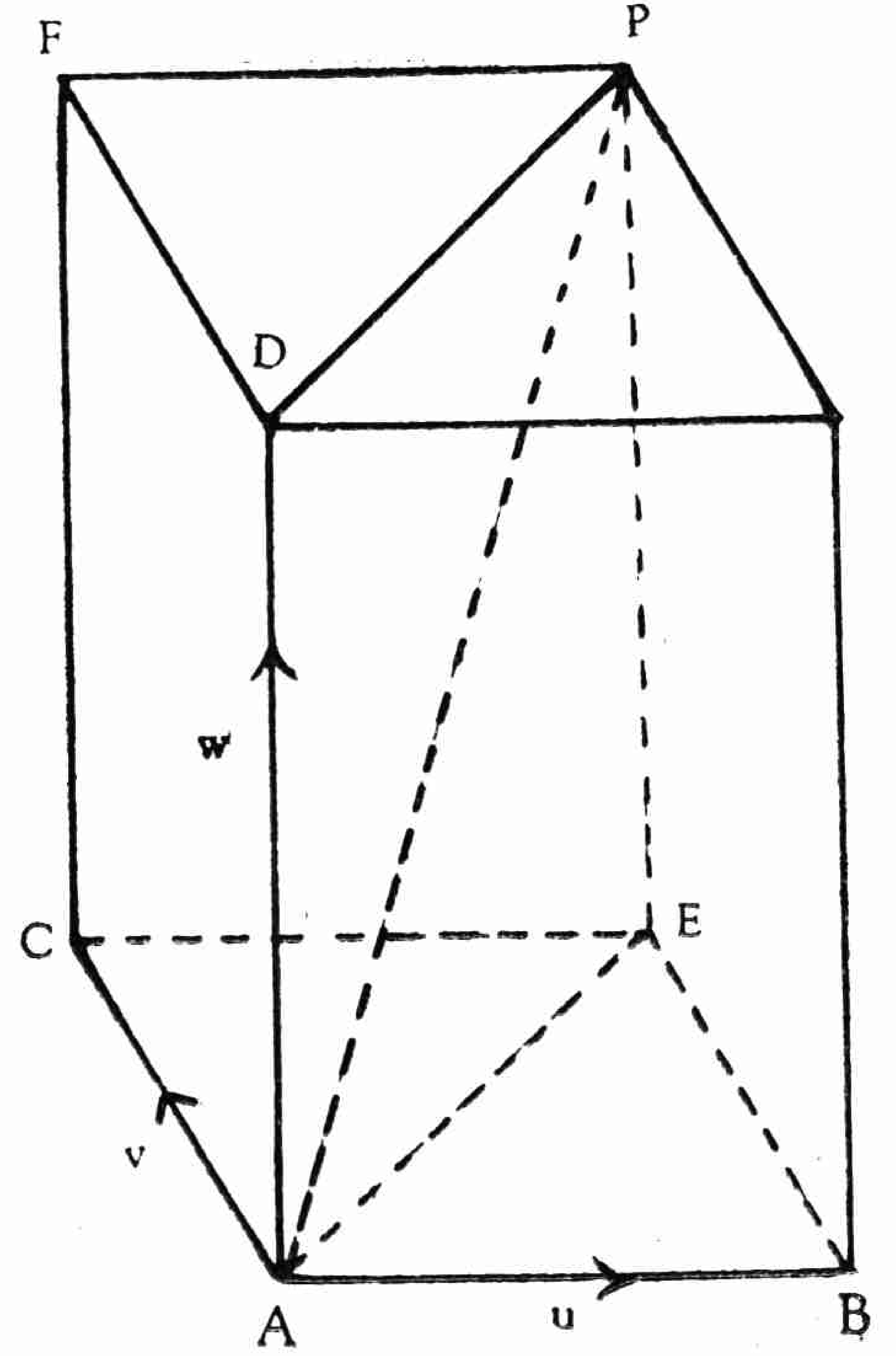
చిత్రము 85

వేగముల పరిమాణములు, దిశలు AB, AC లచే పూర్తిగా గుర్తింపబడినచో, ఆ రెండు బుజురేఖలు సన్నిహిత భుజములుగా గల ఒక సమానాంతర చతుర్భుజము $ABDC$ ని నిర్మించిన, సంకలితవేగమును వికర్ణము AD పూర్తిగా గుర్తించును.

చిత్రము 85లో AC, BD లు ఒకేదిక్కు, పరిమాణమును కల సదిశరాశులు. కనుక మొదటివేగమును AB వలనను, రెండవవేగమును BD వలనను సూచింపవచ్చును. కనుక సమానాంతరచతుర్భుజమునకు బదులు త్రిభుజము ABD తీసికొని, దీనియందు రెండుభుజములు AB, BD లు క్రమముగా రెండు వేగములను పూర్తిగా గుర్తించినచో మూడవ భుజము AD వాటి సంకలితవేగమును పూర్తిగాగుర్తించును. దీనికి త్రిభుజన్యాయము అనిపేరు.

వేగముల వియోజనము : సమానాంతర చతుర్భుజ న్యాయమునో, త్రిభుజన్యాయమునో ఉపయోగించి ఒక దత్తవేగము AD ని రెండువేగములు AB, AC, లేదా AB, BD యొక్క సంకలనముగా విభజింపవచ్చును.

వేగముల సమఘాత నియమము : AB, AC, AD అను మూడు సదిశరాశులు ఒకబిందువుయొక్క వేగములు $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ అను పూర్తిగా సూచించినచో, వాటి సంకలన వేగమును సమానాంతరఘాత నియమముచే కనుగొనవచ్చును. లేదా సమానాంతరచతుర్భుజ న్యాయమును ఉపయోగించి, AB ($\boldsymbol{u}$), AC ($\boldsymbol{v}$) ల సంకలనవేగము AE ను కనిపెట్టి, తరువాత AE, AD ల సంకలనవేగము AP ను అదేవిధమున కనిపెట్టవచ్చును. ఇచట $AEPD$ అను సమానాంతరచతుర్భుజముయొక్క వికర్ణము AP. రెండుమార్లు సమానాంతరచతుర్భుజన్యాయమునకు బదులు సమానాంతరఘనమును ఉపయోగించి AP ను పొందవచ్చును (చూ. చిత్రము 86).



చిత్రము 86

త్వరణము : ఒక కణముయొక్క వేగము t_1 కాలములో $\boldsymbol{u}$ అయిన, t_2 కాలములో $\boldsymbol{v}$ అయిన, (t_2-t_1) కాలములో దాని వేగములోని మార్పును $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ అను సదిశరాశి గుర్తించును.

చిత్రము 85 లో AD భుజమువేగము $\boldsymbol{v}$ ని, భుజము AB వేగము $\boldsymbol{u}$ ను గుర్తించినచో BD లేదా AC వేగములోని మార్పును అనగా $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ ను గుర్తించును. $AC/(t_2-t_1)$ మాధ్యమికవేగము. $(t_2-t_1)\longrightarrow 0$ అగునపుడు దొరకు అవధికి t_1 కాలములో ఆ కణము యొక్క త్వరణము అనిపేరు.

త్వరణము ఒక సదిశ రాశి. త్వరణములను సమాంతర చతుర్భుజనియమరీతిగాగాని, త్రిభుజనియమరీతిగా గాని సంకలనము చేయవచ్చును. అటులనే ఒక త్వరణమును ఈ న్యాయములను ఉపయోగించి, అంశములుగా విభజింప వచ్చును.

ఒక కణముయొక్క నిరూపకములు (x, y, z) అను కొందము. కణము చలించునపుడు నిరూపకములు కాలముపై ఆధారపడియుండును. x, y, z అక్షములు పరస్పరలంబములు అయినచో, ఈమూడు దిక్కులలో ఆ కణముయొక్క వేగము dx/dt, dy/dt, dz/dt అగును. అటులనే దాని త్వరణముయొక్క అంశములు d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 అగును.

సాపేక్షవేగము : రెండు బిందువులు A, B లు చలించు నపుడు A, B ల యొక్క కొలతయు, దిశయు మారు చుండినచో, A, B లకు పరస్పర సాపేక్షవేగము - అనగా A బిందువునుండి దృష్టించిన B బిందువువేగము ఎటుల చూపునో అదియే - కలదని చెప్పుదుము. స్థిరలంబాక్షము లను తీసికొందము. A, B ల నిరూపకములు (a_1, a_2, a_3) ; (b_1, b_2, b_3) అనుకొందము.

A కి సాపేక్షముగా B యొక్క స్థలము $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ అగును. అనగా A నుండి దృష్టించు నప్పుడు B యొక్క నిరూపకములు ఇవియే. కనుక A నుండి దృష్టించునప్పుడు B యొక్క వేగము

$$\frac{db_1}{dt} - \frac{da_1}{dt}, \quad \frac{db_2}{dt} - \frac{da_2}{dt}, \quad \frac{db_3}{dt} - \frac{da_3}{dt}$$

అంశములుగా కలిగియుండును. అనగా B యొక్క వేగమునుండి A యొక్కవేగమును వ్యవకలనము చేసి నట్లయిన లభించువేగమే ఇది. ఇటులనే B అపేక్షయా A వేగముతెలిసికొనుటకు A వేగమునుండి B వేగమును వ్యవకలనము చేయవలెను.

ఒక వేగము u నుండి మరియొకవేగము v ను వ్యవ కలనము చేయుట అనగా u తో $-v$ ను సంకలనము చేయుట. అనగా v దిక్కును ఎదురుగా మార్చి, పరిమాణ మును మార్చక, ఈ క్రొత్త సదిశరాశిని u తో సంకలనము చేయవలయును.

అనగా $u - v = u + (-v)$

కొన్ని కణగతిశాస్త్ర ప్రశ్నలు : ఇపుడు కొన్ని సులభ ప్రశ్నలను పరిశీలించెదము.

(1) ఒక బరువైన కణముయొక్క పతనము: భూమ్యా కర్షణవలన అన్నివస్తువులకు అధరదిక్కులో భూతలము దగ్గర $g = 981$ సెంటీమీటరు / (సెకెను)^2. కనుక t కాల ములో అది పడుదూరము $\frac{1}{2}gt^2$.

(2) ఒక కణమును ఏ దిక్కున విక్షేపించినను దాని పథము ఒక పరాస అగును.

(3) ఒకబిందువు మూలబిందువు O నందు స్థిరముగా ఉన్నదనుకొనెదము. దానిని x అక్షదిక్కులో కొంచెము దూరము a లాగి వదలిపెట్టెదము. అపుడు దానిమీద బలప్రయోగములు ఉన్నవనుకొనెదము. ఈ బలము సాధా రణముగ x కు అనురూపమై ఉండును. కనుక దాని త్వరణము x కు అనురూపముగ ఉండును. దీనిని kx వలన గుర్తించెదము. ఆ కణముయొక్క చలనమును $\frac{d^2x}{dt^2} = kx$ అను సమీకరణము ఇచ్చును. ఇచ్చట k ధనాత్మకమయితే, కొంచెము కొంచెముగ ఆ కణము అనంతదూరమునకు వెళ్ళిపోవును. k ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య ($k = -s^2$) అయితే, పై సమీకరణకు సాధనము $x = a \sin st$ అగును. కనుక ఆ కణము $x = -a$ నుండి $x = +a$ వరకు ఊగులాడుచుండును. ఒకమాటు పూర్తిగా ఊగులాడుకాలము $2\pi/s$ సెకనులు. కె. మ. రా.

కరణపద్ధతి : ఆనాటి కేరళీయ ఖగోళశాస్త్ర విజ్ఞానమునంతటిని సంక్షేపించి వ్రాయబడినగ్రంథము కరణ పద్ధతి. π విలువను వ్యక్తపరచు అనంతపరంపర, దాని మార్పురూపములు, $\sin \theta$, $\cos \theta$ లకు సంకలనపరంపరలు, సంగమగ్రామనివాసియగు మాధవునిచే ఈయబడిన జీవ పట్టికలు (సైన్ టేబుల్స్) మొదలగునవి ఈ గ్రంథములో కలవు. ఇందులోని శ్లోకములు కొన్ని నీలకంఠుని తంత్ర సంగ్రహమందు ఈయబడినవే.

ఈ గ్రంథరచయిత పుటుమన సోమయాజి త్రిచూర్ సమీపమునఉన్న శివపురనివాసి. ఉల్లూర్-యస్. పరమేశ్వర అయ్యర్ గణితసూచికయందు లబ్ధమగు ప్రమాణమును ఆధారముచేసికొని ఈగ్రంథకర్త కాలము శకాబ్దము 1353 అని చెప్పి ఉన్నారు. కాని మద్రాసు ప్రాచ్యలిఖిత పుస్తకభాండాగారాధికారులచే ప్రకటితమైన ఈ గ్రంథము యొక్క ఉపోద్ఘాతములో ఇది ఇంతకన్న తరువాత కాలపు గ్రంథమని చెప్పుటకు కారణములు చూపబడినవి. సి. ఎస్. విష్ అను ఆతడుకూడ 'హిందూ' పత్రికయందు ప్రకటింప బడిన 'వృత్తవర్గకరణము' అను వ్యాసములో ఈ గ్రంథ కర్త మనుమడు 1835లో జీవించిఉండెననియు, ఈగ్రంథము చివరి శ్లోకములోఉన్న "గణితమేతత్సమ్యక్" అను పదసమూహము 1733 వ సంవత్సరము అను అర్థమిచ్చు కాలసూచి అనియు చెప్పిఉన్నాడు.

పుటుమన సోమయాజి ఇతర గ్రంథములు: 1. 'న్యాయరత్న' అను ఖగోళశాస్త్రప్రకరణము ; 2. 'జాతకాదేశమార్గ' అను ఫలజ్యోతిషగ్రంథము, 3. 'స్మార్తప్రాయశ్చిత్తము' అను ధర్మశాస్త్రగ్రంథము. కరణపద్ధతి కేరళ, ద్రావిడ, ఆంధ్రదేశములందు ఖగోళజ్యోతిషవిదుల అత్యంతామోదమును ఆర్జించుకొన్నది. సరస్వతి.

కలనశాస్త్రము : చూ. అంతరీకరణకలనము - పు. 101 ; చయనకలనము.

కలిశకము : ఇది బహుజన చర్చితప్రశ్న. ఇదమిత్థమని తేలలేదు. పాశ్చాత్యపండితులను అనుసరించి భారతీయ పండితులు పెక్కుమంది కలిశకము కల్పితము అనియే తలచుచున్నారు.

కలియుగము క్రీ. పూ. 18-2-3102 అర్ధరాత్రియందు ప్రారంభించినట్లు భారతీయ గణితజ్ఞులు చెప్పుచున్నారు.* ఆర్యభటుని సిద్ధాంతము ఇదియే. గణితాగతముగనో లేదా అతని పూర్వులు వ్రాసిన గ్రంథములనుబట్టియో అతడు అట్టి తీర్మానమునకు వచ్చిఉండును. అప్పుడు సూర్యాది గ్రహములు మేషాదియందు ఉండెను అని మనపూర్వులును, అట్లు లేదని ఇప్పటి పండితులును భిన్నాభిప్రాయులై ఉన్నారు. ఆర్యభటుడు-I వంటి గొప్పగణితజ్ఞుడు గణితమునందు పొరబడెనా లేదా కల్పితకాలమును సృష్టించెనా అని నవీనులసందేహము. అట్టి వాదమునకు ఆధారములు ఎవ్వియు కానరావు. భారతీయజ్యోతిషప్రాచీనతను ఒప్పుకొనుటకు కొందరికి ఇష్టములేకపోవుటయే ఇట్టి వాదములకు ముఖ్యకారణము.

శ్రీ కృష్ణుడు తన భౌతికదేహమును వదలినపుడు కలి ప్రవేశించినదని పురాణములు చెప్పుచున్నవి.

యస్మిన్ కృష్ణో దివంయాత స్తస్మిన్నేవహి వత్సరే
ప్రతిపన్నం కలియుగ మితి ప్రాహుః పురావిదః
యావత్ స భగవాన్ విష్ణుః పస్పర్శేమాం వసుంధరాం
తావత్ పృథ్వీం పరాక్రాంతం సమర్థో నా భవత్ కలిః
—కలియుగరాజ వృత్తాంతము.

యదైవ భగవాన్ విష్ణో రంశో యాతో దివం ద్విజ
వసుదేవ కులోద్భూత స్తదై వ్వాగతః కలిః 108,
—చతుర్థాంశ - విష్ణుపురాణము.

భారతీయ గణితజ్ఞులు శ్రీ కృష్ణనిర్యాణము క్రీ. పూ. 18-2-3102 నాడు జరిగెననియు, ఆ దినమున కలియుగము ప్రారంభించెననియు చెప్పుచున్నారు. ఇందువలన భారతదేశచరిత్ర చాల ప్రాచీనతను చెందుచున్నది. పాశ్చాత్యులును, వారిని అనుసరించిన భారతీయశాస్త్రజ్ఞులును ఇంత ప్రాచీనతకు అవకాశము లేదను నిశ్చితాభిప్రాయమునకు వచ్చి ప్రభుత్వ ఆదరణవలన తమ అభిప్రాయమును అమలులోనికి తెచ్చిరి. లాహిరి గ్రహస్ఫుటముచేసి, గ్రహమధ్యధ్రువకములు ఆదినమునందు సూర్యుడు 0°, శని + 19°, గురు — 17°, కుజుడు + 12°, శుక్రుడు — 33°, బుధుడు + 33° కలవని గణితమూలముగ చూపించి, కలి ప్రారంభము ఆదినమునందు జరిగి యుండదని వాదించిరి. ఇందు ముఖ్యముగా గమనింపవలసిన విషయములు కొన్ని కలవు. ఇప్పటి సూత్రములు అప్పటికి వర్తించునా అనియును, ప్రతిగ్రహమునకు బీజసంస్కారముల విలువలు అపుడెంత అనియును మనము నిష్కర్ష చేయవలయును. సాపేక్షతావాదము ప్రచారమునకు రాకపూర్వము బుధగ్రహచారము గణితజ్ఞులకు గందరగోళమై ఉండెను. కాబట్టి కలియుగము కల్పితగాథ అనువాదము యుక్తియుక్తము కాదు.

భారతీయ గణితజ్ఞులు ఆర్యభటుడు-I, వరాహ మిహిరుడు కలియుగమును గురించి విపులముగ వ్రాసినారు. కలి 25 లో యుధిష్ఠిరుడు పరీక్షిత్తునకు ఇంద్రప్రస్థములో పట్టాభిషేకము చేసి, స్వర్గారోహణము చేసెను. అతని జ్ఞాపకార్థము యుధిష్ఠిరశకము లేదా లౌకికాబ్దము స్థాపింపబడినది. కలియుగరాజ వృత్తాంతమున ఈ క్రింది శ్లోకము కలదు.

శ్లో ॥ పంచవింశతి వర్షేషు ప్రయాతేషు కలౌయుగే ।
యుధిష్ఠిర జ్ఞాపకార్థం లౌకికోఽబ్దః ప్రవర్తితః ॥

కాశ్మీరరాజ చరిత్రయగు 'రాజతరంగిణిలో' కల్హణుడు రాజుల కాలము నిర్ణయించునపుడు లౌకికాబ్దము వాడినాడు. కుతూహల మంజరిలో వరాహ మిహిరుని కాలము కలి 3042 అనియును, జ్యోతిర్విదాభరణమును కాళిదాసుడు కలి 3068 లో వ్రాసినట్లును చెప్పబడినది, ఆల్బరూని పండితుడు కలి 4132 లో తమ శక ప్రారంభమనియు వ్రాసిఉన్నాడు. ఆర్యభటుడు-I తన కాలమును గురించి 'ఆర్యభటీయము' అను గ్రంథములో కాలక్రియావాదము 10 శ్లోకములలో వ్రాసిఉన్నాడు.

శ్లో ॥ షష్ట్యబ్దానాం షడ్భిర్యదా వ్యతీతాస్త్రయశ్చ యుగపాదాః ।
అధికావింశతి రబ్దాస్తదేహ మమజన్మనోఽతీతాః ॥

కలియుగము 360 (60 × 6)లో తన వయస్సు 20 సంవత్సరములని దీనిఅర్థము. ఈ విషయము భారతీయ జ్యోతిషప్రాచీనతను తెలుపుచున్నది. పాశ్చాత్య చారిత్రకులకు భారతీయ జ్యోతిషమునకు ఇంత ప్రాచీనతకలదా అను ఒక ఆవేదన కలిగినది. ప్రపంచ చారిత్రప్రాచీనతకు సంబంధించిన వారి వాదములు అన్నియు వినోదములాయెను. వారు పరిశీలించిన గ్రంథములలోను, వ్రాత

* క్రీ. పూ. 20-2-3102 అర్ధరాత్రియందు కలి ప్రారంభించెనని కొందరి అభిప్రాయము. బీజసంస్కారమున రెండును సరిపోవును.

ప్రతులలోను లేఖక ప్రమాదములు ఉండవచ్చును. వానిని పరిశీలింపకయే ' షడ్భిః ' అను పదమును ' షష్ఠి ' గా మార్చి 60 × 60 = 3600 లో ఆర్యభటుడు-I వయస్సు 20 సంవత్సరములు అని సవరించిరి. ఈ సవరణకు ఆక్షేపణలు రెండు : వ్యాకరణవిరోధము ; ఇతర జ్యోతిష్కులు ఏదో ఒక శకమును వాడిరి. ఇతడు మాత్రము కలియుగము వాడెను. కలి 3600 లో విక్రమ శాలివాహనశకములు ప్రచారమునందుండెను. వానిని వాడనందున ఆర్యభటుడు-I కాలము విక్రమశాలివాహన శకములకు పూర్వము అని తేలుచున్నది. ఇపుడు ప్రచారములోఉన్న పాశ్చాత్య వాదమును అనుసరించినచో ఆర్యభటుడు-I క్రీ. శ. 498లో 20 సంవత్సరముల వయస్సుకలిగినట్లు చెప్పవలయును.

వరాహ మిహిరుడు : కలియుగముపై ఆధారపడిఉండు లౌకికాబ్దమును (ప్రారంభము కలి 3077 లో) గురించి బృహత్సంహితయందు వ్రాసినాడు.

శ్లో ॥ ఆసన్మఘాసు మునయః శాసతిపృథ్వీంయుధిష్ఠిరే నృపతౌ ।
షడ్ద్విక పంచద్వియుతాః శకకాలః తస్య రాజ్ఞస్య ॥

' మఘా నక్షత్రమునందు సప్తర్షులు ఉండునపుడు యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యమేలుచుండెను. అతని కాలమునకు 2526 సంవత్సరములు చేర్చిన శకకాలము ఏర్పడును. '

' మఘానక్షత్రమందు సప్తర్షులు ఉండునపుడు ' అను విషయము వేరుచోట వివరింపబడును. ఇచట వరాహ మిహిరుని శకకాలము ఏది అని విచారింపవలయును. ఇది శాలివాహనశకమని నిశ్చయించి పాశ్చాత్యులును, వారిని అనుసరించిన భారతీయ పండితులును కలియుగారంభ కాలమును నిర్ణయించుట గొప్పపొరబాటు అని చెప్పక తప్పదు.

వరాహ మిహిరుని కాలమున లౌకికకాలము చక్కగా ప్రచారమునందుండి యుండినట్లు, తక్కువ ప్రచారములో ఉన్న అతని శకకాలము కనుగొనుటకు సూత్రమును వివరించినట్లు అతని శ్లోకమునందుండి విశదమగుచున్నది.

పంచ సిద్ధాంతికయందు ఈ శకమునుగురించి మరికొన్ని వివరములు కలవు.

శ్లో ॥ సప్తాశ్వివేద సంఖ్యం శకకాలమపాస్య చైత్ర శుక్లాదౌ ।
అర్ధాస్తమితే భానౌ యవనపురే సౌమ్యదివసాద్యే ॥
(అధ్యా. 1, శ్లో. 8.)

" 427 శకకాల చైత్రశుక్ల ప్రతిపద్దినమునందు యవన పురిలో సూర్యుడు అర్ధాస్తమయ మగునపుడు బుధవారము ప్రారంభించును. ".

యవనపురిలో అర్ధాస్తమయ మగునపుడు ఉజ్జయినిలో అర్ధరాత్రి. అపుడు మంగళవారము ముగిసి బుధవారము ప్రారంభమగును. ఈ శకమును శాలివాహన శకమని పొర బడి గణితమూలముగ సరిచూచినచో వారములో భేదము వచ్చెను. కాబట్టి డా. తీబో ప్రచురించిన పంచ సిద్ధాంతిక ములో బుధవారమునకు మారుగా సోమవారము అని, బాలకృష్ణదీక్షితులు " ఇండియన్ ఆంటిక్విరీ " అను గ్రంథములో భౌమవారము అని వ్రాసిరి. ఆయన ఈ విషయమును చర్చించుచు ఆ పత్రికలో అన్ని విషయములు వివరించుచు భౌమవారమే తగినదని రూఢిపరచిరి.

ప్రచారములో ఉండు శకములను అనుసరించి చైత్ర శుక్ల ప్రతిపదియొక్క వారమును కనుగొందము.

శాలివాహన శకము :

1. 427 (గతము) చైత్ర శుక్లప్రతిపది శుక్రవారము (8-3-506) 10 గ, 10 వి. గ. లకు ప్రారంభము.

2. 427 (ప్రచారము) చైత్ర శుక్లప్రతిపది శనివారము (19-2-505) 4 గ, 2 వి. గ. లకు ఆరంభించి ఆదివారము (20-2-505) నాడు ముగియును. ఇది బాలకృష్ణదీక్షితుల గణితమునకు సరిపోవుచున్నది.

విక్రమ శకము :

3. 427 (గతము) చైత్ర శుక్లప్రతిపది బుధవారము (2-3-371) 49 గ, 50 వి. గ. లకు ప్రారంభము.

కాబట్టి వరాహమిహిరుని శకము విక్రమ శకమై ఉండవచ్చును. శుక్లప్రతిపది బుధవారము రాత్రి 49 గ. 50 వి. గ. లకు ఆరంభమైనందున అది గురువారముతో సంబంధించినదనియే తలచుకొన వలయును. మరియు వరాహ మిహిరుని వ్యాఖ్యాత భట్టోత్పలుడు పేర్కొనిన శకము విక్రమశకమునకు సరిపోనందున ఈ శకమేదియో కనుగొనవలయును. లౌకికాబ్దము 2526 లో తన శక ప్రారంభమని వరాహ మిహిరుడు బృహత్సంహితలో చెప్పినందున, దానిని క్రీస్తుశకములోనికి మార్చుకొందము.

లౌకిక శకము ప్రారంభము : క్రీ. పూ. 3077
ధ్రువము : క్రీ. పూ. 2526

∴ వరాహమిహిరుని శకము = క్రీ. పూ. 551
జ్యోతిష గణితములో క్రీ. పూ. 551 = − 550.

4. 427 (గతము) చైత్ర శుక్లప్రతిపది మంగళవారము రాత్రి 59 గ. 56 వి. గ. లకు ప్రారంభము. కాబట్టి 427 శకములో చైత్ర శుక్లప్రతిపది బుధవారమై ఉన్నది.

భట్టోత్పలుడు : ఇతడు బృహజ్జాతక వ్యాఖ్యలో '

శ్లో ॥ చైత్రమాసస్య పంచమ్యాం సితాయాం గురువాసరే ।
వస్వష్టాష్టమితే శాకే కృతోయం వివృతిర్మయా ॥

" శకము 888 లో చైత్రమాస శుక్లపంచమి గురు వారము పూర్తిచేసితిని " అని వ్రాసి ఉన్నాడు.

ఇపుడు శాలివాహనశకము ప్రయోజనము లేదు.

విక్రమ శకము :

5. 888 (గతము) చైత్ర శుక్లపంచమి ఆదివారము (10-3-832) 10 విగడియలకు ముగియును.

6. 888 (ప్రచారము) చైత్రశుక్లపంచమి ఆదివారము (19-2-831) 56 గ. 43 వి. గ. లకు ముగియును.

క్రీ. పూ. 551 శకము :

7. 888 శకము : 888 — 550 = 338 క్రీ. శ. చైత్ర శుక్ల పంచమి గురువారము 9 గ. 50 వి. గ. లకు 23 - 2 - 338 క్రీ. శ. పూర్తియగును.

8. బ్రహ్మగుప్తుడు ఖండఖాద్యకములో నిర్ణీతకాలము శకము 587 చైత్ర శుక్లపాడ్యమి ఆదివారమని వ్రాసి ఉన్నాడు. అది క్రీ. పూ. 551 శకమునకు సరిపోవుచున్నది. క్రీ. శ. 37 వ సంవత్సరము ఫిబ్రవరి 15 వ తేదీన శని వారము 21 గడియలకు అమావాస్య పూర్తి అగును. 16-2-37 ఆదివారము చైత్ర శుక్ల పాడ్యమి సూర్యో దయమునందు వర్తించును. తక్కిన శకములు సరిపడవు. కాబట్టి బ్రహ్మగుప్తుని కాలము క్రీస్తుతర్వాత ప్రథమ శతాబ్దమని తెలియుచున్నది.

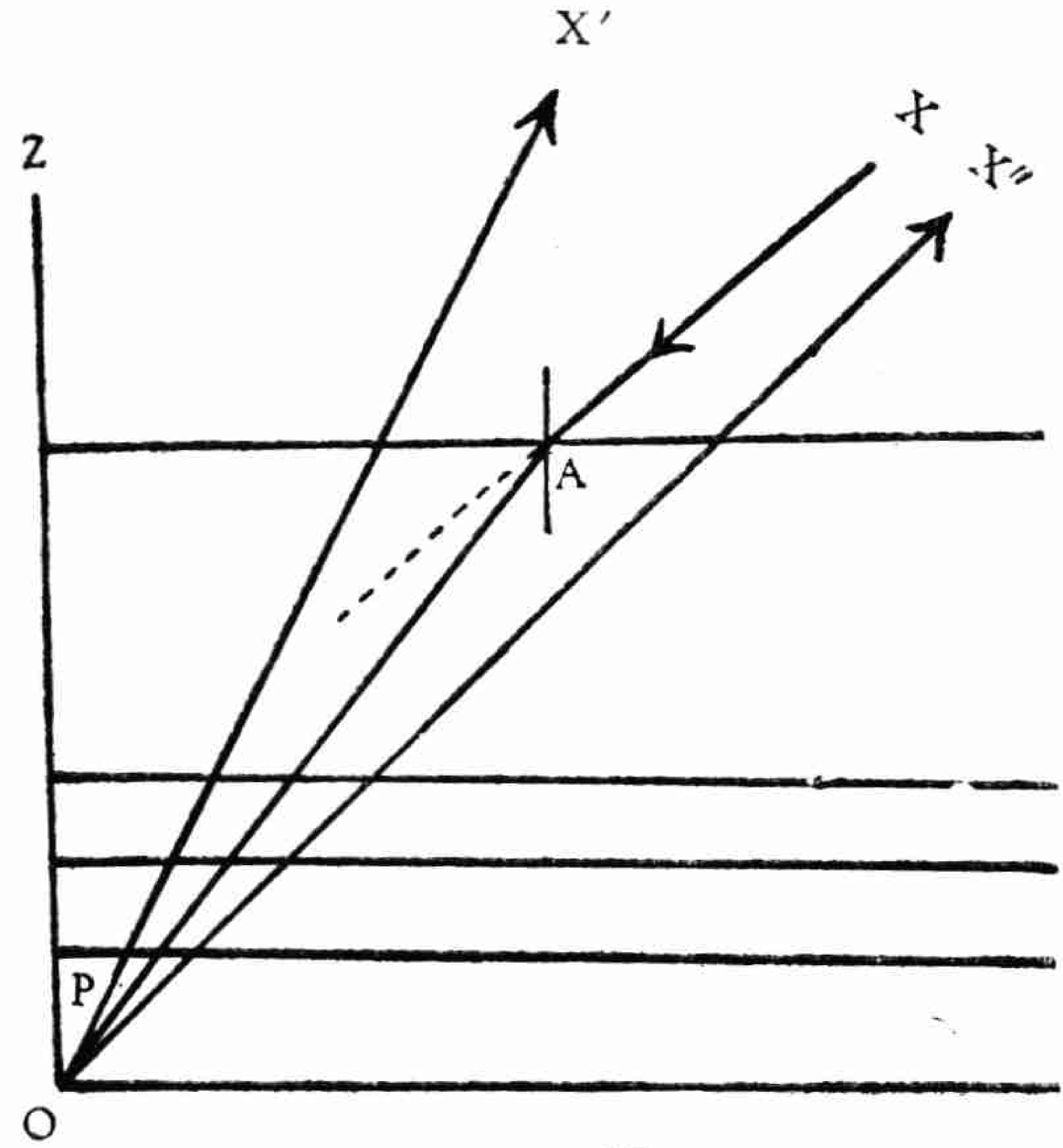
ఇందువలన వరాహ మిహిరుని శకము ఒక ప్రత్యేకశక మని విశదమగుచున్నది. ఇది లౌకికాబ్దము 2526 సంవత్సర ములో ప్రారంభమయ్యెను. కలియుగము, లౌకికాబ్దము, వరాహ మిహిర శకము కల్పితములు కావనియును, ఆచర ణలో ఉండినవనియును రూఢి అగుచున్నవి. **ఆచార్య.**

కాంగ్ కాయిడ్ : చూ. పు. 35 ; వక్రములు.

కాంతికిరణ వక్రీభవనము (భుగ్నత): భూమికిపైన సుమారు 1000 కి.మీ. ఎత్తువరకు వాతావరణముకలదు. దాని సాంద్రత భూమినుండి దూరము ఎక్కువగుకొలది తగ్గుచున్నది. కిరణ వక్రీభవనమునకు సంబంధించినంతవరకు భూమిపై వాతావరణము 500 కిలోమీటరుల ఎత్తువరకే వ్యాపించి ఉన్నదనియు, ఆపైని వాతావరణముయొక్క సాంద్రత సూక్ష్మాతి సూక్ష్మమనియును భావింపవచ్చును.

కావున నక్షత్రములనుండియో, గ్రహముల నుండియో, సూర్యుని నుండియో బయలుదేరు కాంతికిరణము వాతా వరణములో ప్రవేశించినపుడు, వివిధ సాంద్రతలుకల వివిధ వాతావరణ ఫలకముల ద్వారా ప్రయాణముచేసి, వక్రీ భవనము చెంది మనకు గోచరమగుచున్నది.

భూమి వ్యాసార్ధము పెద్దదగుటచే ఏ ప్రదేశము నందైనను స్థూలముగా పైన ఉన్న వాతావరణము వివిధ సాంద్రతలు కల తలఫలకములతో ఏర్పడినదని భావింప వచ్చును. ప్రతి భాగమునందును సాంద్రత స్థిరముగా ఉండుటచే ఆ భాగములో వక్రీభవన సూచన మారదనుకొన వచ్చును. X అనునది దూరమున ఉన్న నక్షత్ర మను కొందము. X నుండి బయలుదేరిన ఒక కాంతికిరణము వక్రీభవనమును కలిగించు వాతావరణమును A వద్ద తాకిన దని అనుకొందము. ఇతఃపూర్వము కాంతికిరణము ఒకే ఋజురేఖ (AX) లో ప్రయాణముచేసినదని భావించ



చిత్రము 87

వచ్చును. భూమికి సమీపమునకు వచ్చుకొలది వాతా వరణము సాంద్రత హెచ్చుచుండుటచే కాంతికిరణము క్రమముగా ప్రతిఫలకమువద్దను వక్రీభవన నియమము ప్రకారము ఉభయ అభిలంబముపైపు వంగుచు చివరకు O ప్రత్యవేక్షకుని చేరును. కాంతికిరణమార్గమునకు O వద్ద OP స్పర్శరేఖగీసినచో, అచ్చట ఉన్న ప్రత్యవేక్షకుడు X నక్షత్రమును OP దిశలో చూడగలడు. OX″ రేఖ AX కు సమానాంతరముగా గీసినచో OX″ దిశలో కన్పించవలసిన నక్షత్రము వక్రీభవన కారణమున OX′ దిశలో కన్పించు చున్నది. కాబట్టి వక్రీభవన నియమము ప్రకారము OX′, OX″, OZ లు (Z మస్తకము) ఒకే తలములో ఉండును. కాన వక్రీభవనమువలన ప్రతినక్షత్రము దాని నిజస్థాన ములోగాక ఆ ప్రదేశముయొక్క మస్తకముపైపున ఉన్నట్లు కన్పించుచుండును. కావున వక్రీభవనమువలన నక్షత్రముల ఉన్నతులు ఎక్కువైనట్లు కన్పించును. నక్షత్రముల నిజ స్థానములను గ్రహించవలయునన్న ప్రత్యవేక్షణ ఫలిత ముగా వచ్చు ఉన్నతులను వక్రీభవనమువలన కలుగు మార్పులతో సవరించవలయును.

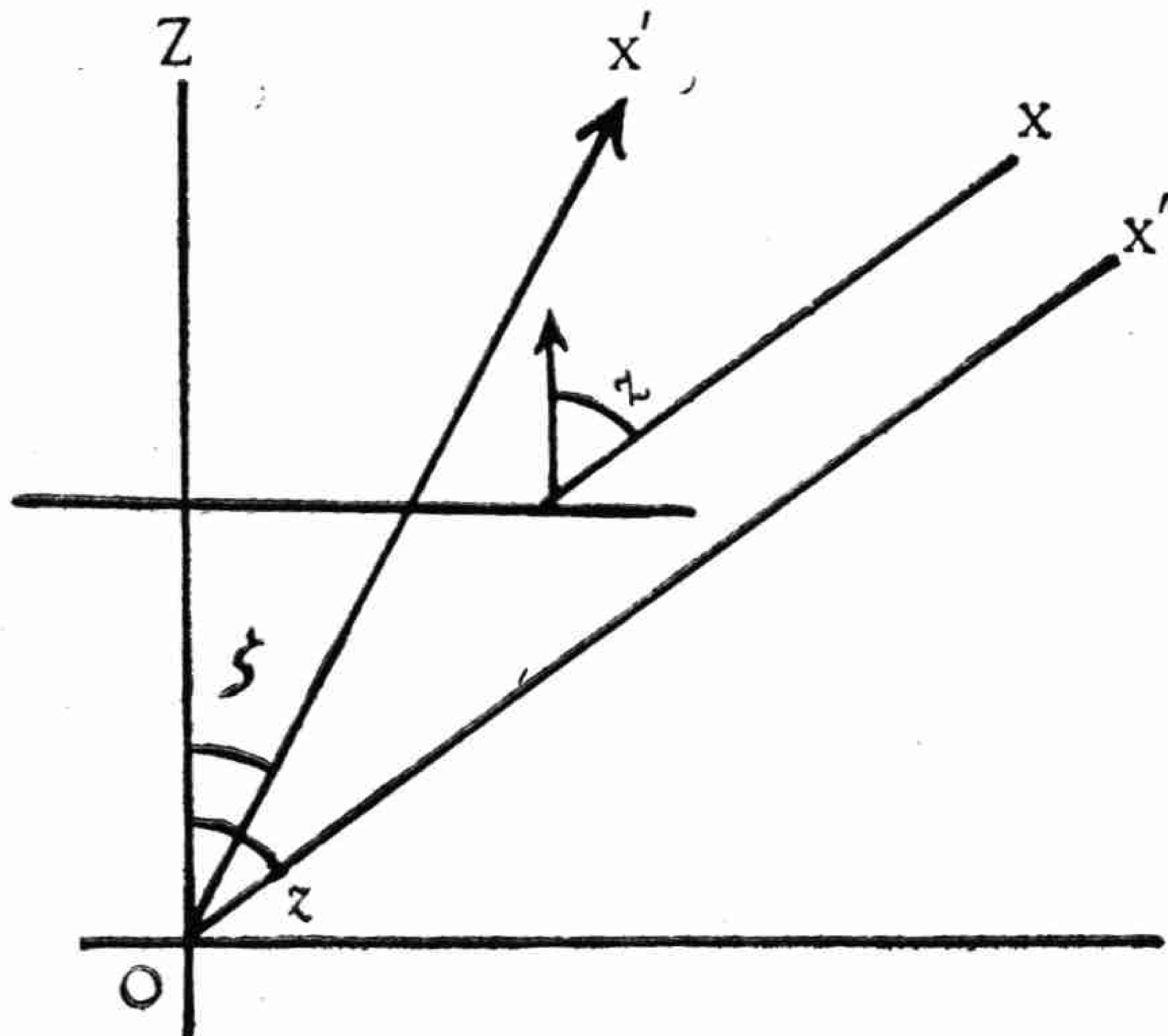
ఒక నక్షత్రముయొక్క వ్యక్తదిశ, నిజదిశల అంతర మును గుర్తించు కోణము (X′OX″) నకు వక్రీభవన

కోణము R అని పేరు. ఒక నక్షత్రము యొక్క నిజ నత కోణము $\angle ZOX'' = z$; ఆ నక్షత్రము యొక్క వ్యక్త నత దూరము $\angle ZOX' = \zeta$; వక్రీభవనకోణము $R = \angle X'OX'' = z - \zeta$. కడపటి ఫలకము యొక్క వక్రీభవన సూచి 'μ' అనుకొందము. ఇప్పుడు 'z' కోణము పతనకోణము, ζ నిర్గమనకోణము అగును. వక్రీభవన ద్వితీయ నియమము ప్రకారము $\frac{\sin z}{\sin \zeta} = \mu$, లేదా $\sin(\zeta + R) = \mu \sin \zeta$; $\sin \zeta + R \cos \zeta = \mu \sin \zeta$ (R అల్పము కావున $\cos R = 1$, $\sin R = R$ అని స్థూలముగా వ్రాయబడినది).

$$\therefore (\mu - 1) \tan \zeta = R$$

$R = K \tan \zeta$; ($K = \mu - 1$, ఒకస్థిరరాశి) K ను వక్రీభవనస్థిరరాశి అందురు.

వాతావరణప్రేషము 76 సెం. మీ. భారమితి ఎత్తు, తాపక్రమము 10° C ఉన్న సమయమున వక్రీభవన స్థిరరాశి (K) విలువ ప్రత్యవేక్షణలవలన 58″.2 అని కనుగొనబడినది.



చిత్రము 88

కావున $R = 58''.2 \tan \zeta$ అని వ్రాయవచ్చును. నతాంశ 50° వరకు ఈ నియమమును వాడవచ్చును. స్థూలముగా నతాంశ 70° వరకు సరిపోవును. కాని ఆపైన ఈ నియమమును వాడకూడదు.

కాసినే అను శాస్త్రజ్ఞుడు వక్రీభవనమును ఆపాదించు వాతావరణము భూమిపై ఒకే సరాసరి వక్రీభవనసూచి కలదిగా భావించి, ప్రస్తుత వాతావరణము భూమిపై ఎంత ప్రేషమును కల్గించుచున్నదో అంత ప్రేషమును కల్గించు ఎత్తువరకు మాత్రమే వ్యాపించి ఉన్నదని భావించి, సరాసరి వక్రీభవనసూచిపరిమాణము భూమికి ఆసన్నముగా ఉన్న వాతావరణ వక్రీభవనసూచిగా గ్రహించి, $R = A \tan \zeta + B \tan^3 \zeta$ అను ఒక సూత్రమును కన్గొనినాడు. ఈ సూత్రము నతాంశ 80° వరకు సరిపోవును. వాతావరణ పరిస్థితులు 76 సెం.మీ. భారమితి ఎత్తుండి, తాపక్రమము 10°C అయినప్పుడు క్రమముగా A, B విలువలు 58″.294, 0″.06682 అగును.

ఏ విధమయిన పరిస్థితులలోను వక్రీభవన పరిమాణము $R = A \tan z + B \tan^3 z$ సూత్రప్రకారము నిర్ణయింపవచ్చుననియు, A, B ల విలువలు ప్రత్యవేక్షణల ద్వారా నిర్ణయింపబడవలయుననియు నిరూపించి ఉన్నారు.

క్షితిజమువద్ద వక్రీభవనపరిమాణము 33′; 30′ ఉన్నతి యందు 28′.4 అని ప్రత్యవేక్షణలవలన తెలియుచున్నది.

వక్రీభవనత వాతావరణ సంబంధమయినది కావున ఖగోళ ప్రత్యవేక్షణలకన్నింటికి ఈ దోషముండును. కాబట్టి ప్రతిప్రత్యవేక్షకుడు ఈ దోషమును సవరించిన తరువాతనే మిగిలిన గణితము చేయవలెను.

వక్రీభవనముచే సూర్యచంద్రుల ఉదయము త్వరగాను, అస్తమయము ఆలస్యముగాను జరుగును. విషువద్దినములలో (మార్చి 21 వ తేదీ, సెప్టెంబరు 23 వ తేదీ) $4\frac{1}{2}$ నిముసములు వ్యత్యాసముండును. ఉదయాస్తమయ కాలములలో సూర్య చంద్ర బింబములు వృత్తాకారములుగా ఉండక దీర్ఘ వృత్తాకారములుకలవై ఉండును. పి. సూ. నా.

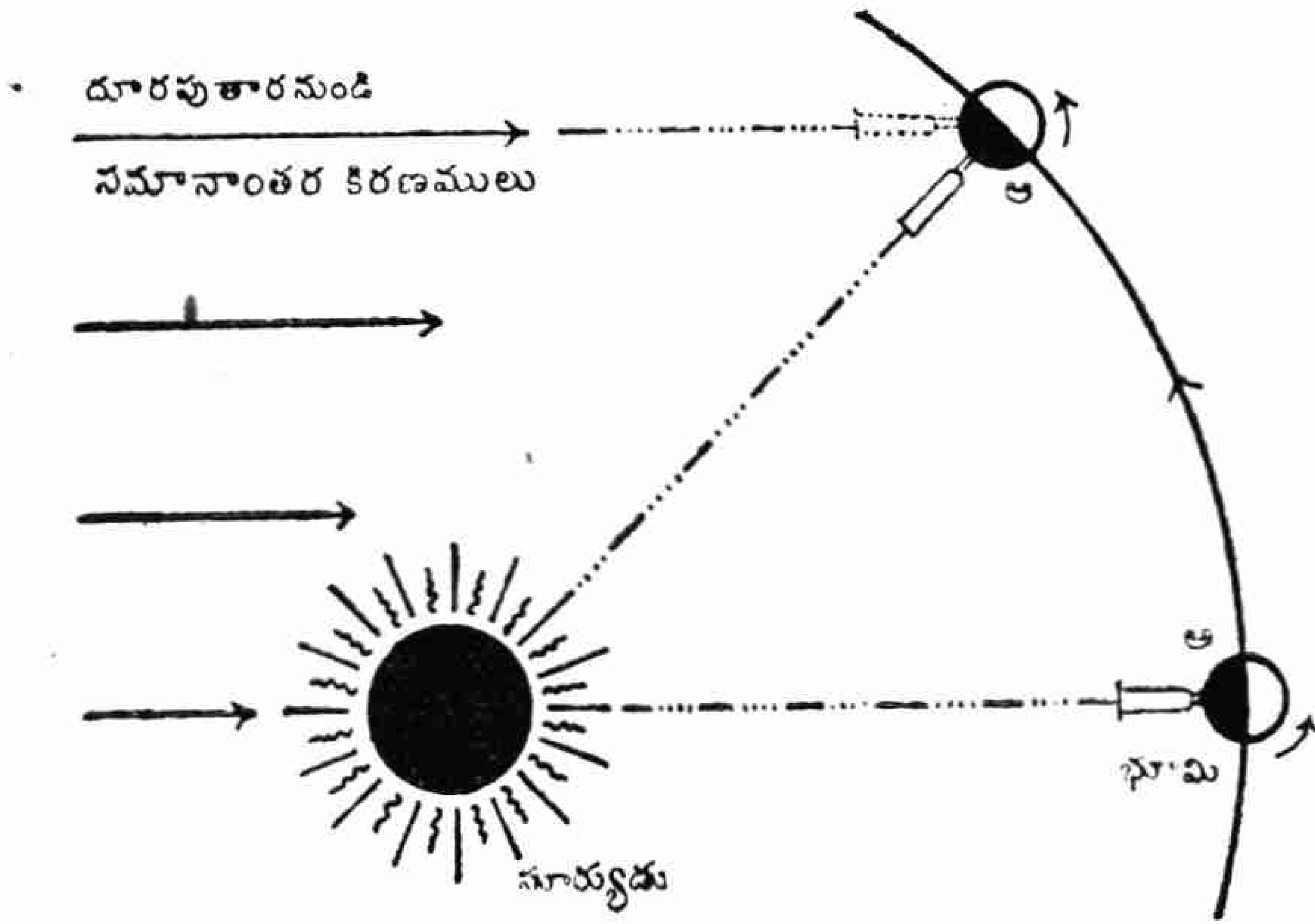
కాటినెరీ : చూ. వక్రములు.

కార్డియాయిడ్ : చూ. వక్రములు.

కాలనిర్ణయము : భూమి యొక్క భ్రమణమువలన మనము కాలనిర్ణయము చేయగల్గుచున్నాము. భూమికి రెండువిధములగు భ్రమణము కలదు. మొదటిది: ఇంచుమించు ఒక ఏడాది కాలములోపల సూర్యుని చుట్టివచ్చుట. రెండవది, ఒకగుండ్రని పూసను దానిలోనుంచి దూర్చిన దారముపైన మనము త్రిప్పిన ఎట్లుతిరుగునో ఆట్లే భూమికూడా తనలోతను తిరుగుచున్నది. మొదటిగతికి పరిక్రమణమనియు, రెండవదానికి పరిభ్రమణమనియును సాంకేతిక నామములు.

మనము సరాసరి దక్షిణదిక్కు కెదురుగానిలబడి, మనకు ఎదురుగా ఉన్న దిఙ్మండల మధ్యనుండి మొదలిడి సరిగా మననెత్తిమీదనుంచి పోవుచు, ఉత్తరమున ధ్రువనక్షత్రమును కలిసి, తిరిగి దిఙ్మండలమున ఉత్తరమున లీనమయిన వర్తుల రేఖకు యామ్యోత్తర (మెరిడియన్) రేఖ అని పేరు. ఇటువంటి రేఖలు దిఙ్మండల పరిధిచుట్టును అనేకముగా ఉన్నవనుకొనవచ్చును. ఏదైన ఒక స్థలమునకు చెందిన యామ్యోత్తరరేఖ ఒక్కసారి సూర్యుని కభిముఖమై,

రెండవసారి తిరిగి సూర్యాభిముఖమగుటకు పట్టుకాలము 'సౌరదిన' మనబడును. సూర్యునకు సంబంధించిన లెక్క గనుక దీనికి సౌరదిన మనుపేరు వచ్చినది. ఇదిగాక ఖగోళ సిద్ధాంతమందలి వాడుకలో నక్షత్రదిన మనునది మరొకటి కలదు. సౌరదిన నిర్వచనమువలెనే దీనిని కూడా క్రింది విధమున నిర్వచించవచ్చును. భూమిమీద ఏదేని స్థలమునకు సంబంధించిన యామ్యోత్తర రేఖ ఆకాశమందొక నియత నక్షత్రమున కభిముఖమై భూపరిభ్రమణమువలన తిరిగి ఆ నక్షత్రమునకు ఆ యామ్యోత్తర రేఖ అభిముఖమగుటకు పట్టు కాలమునకు నక్షత్రదిన మని పేరు. సూర్యునిచుట్టు భూగతి ఒక క్రమములో ఉండదు. అందుచే నేటి ఖగోళ శాస్త్రములో నిశిత కాల నిర్ణయమునకు 'సౌరమానము' కన్న 'నక్షత్రమానము' ఎక్కువ వాడుకలో ఉన్నది. కాని, నక్షత్ర దినము సౌరదినముకన్న నాలుగు నిమిషములు కురుచ. చిత్రము 89 అది ఎందుకట్లున్నదో చూపును.



చిత్రము 89

స్థిరముగా ఉన్న దూరదర్శని సూర్యమండల కేంద్ర బిందువును 'అ' వద్ద లక్ష్యముగా ఉంచుకొనినదని అనుకొందము; మరల మరుచటి దినమున దూరదర్శనికి నక్షత్రము 'ఆ' వద్ద గోచరమగుకాలమునకు భూమి 360 డిగ్రీలకన్న కొంచెమెక్కువ పరిభ్రమణము చేసి యుండవలెను. ఏలన ఆ కాలములో తనలో తను పరిభ్రమించుచున్న భూమి సూర్యునిచుట్టు తనకక్ష్యలో పరిక్రమించును. 'ఆ' వద్ద దూరదర్శని సూర్యమండల కేంద్రబిందువున కభిముఖమగుటకు 360 డిగ్రీలకన్న భూమి పరిభ్రమించవలసిన కోణములోని పెచ్చుకు అగు కాలము నాలుగు నిమిషములు. కాని, అత్యంతదూరములో ఉన్న నక్షత్రము నుండి భూమినిచేరు కాంతికిరణము లన్నియు,సమానాంతరముగ ఉన్నట్లుతోచును. తనకక్ష్యలో భూమి ఎంతదూరమేగినను, నక్షత్ర కాంతి కిరణముల సమానాంతరత్వమునకు భంగములేదు. అందుచే స్థిరగ్రథితమైన దూరదర్శని దృగ్రేఖను 'అ' వద్దనక్షత్రముపై నిలిపిన, భూమి 360 డిగ్రీల సంపూర్ణపరిభ్రమణమును ముగించిన ఉత్తరక్షణముననే మరల నక్షత్రకాంతి దూరదర్శని దృగ్రేఖను తాకును. అందువలననే నక్షత్రమానము సౌరమానము కన్న ఎక్కువ క్రమయుతమైనది.

వ్యవహారములో సౌరదినమునకు ప్రాముఖ్యమెక్కువ. ఏలన, మానవుడు తన దైనందిన వ్యాపారములను సూర్యుని గతినిబట్టి అనగా, దివారాత్రముల వ్యత్యాసమును బట్టి చక్కబెట్టుకొనుచుండును. ఇట్టి సౌరదినమును 24 భాగములుగా విభజించి గంటలనియు, గంటను 60 భాగములుగ విభజించి నిమిషములనియు, నిమిషమును 60 భాగములుగ విభజించి సెకనులనియు వాడుకొనుచున్నాము.

భూమి సూర్యుని ఒకసారి చుట్టివచ్చుటకు 365·2425 సౌరదినములును, లేదా 366·2425 నక్షత్రదినములును పట్టును.

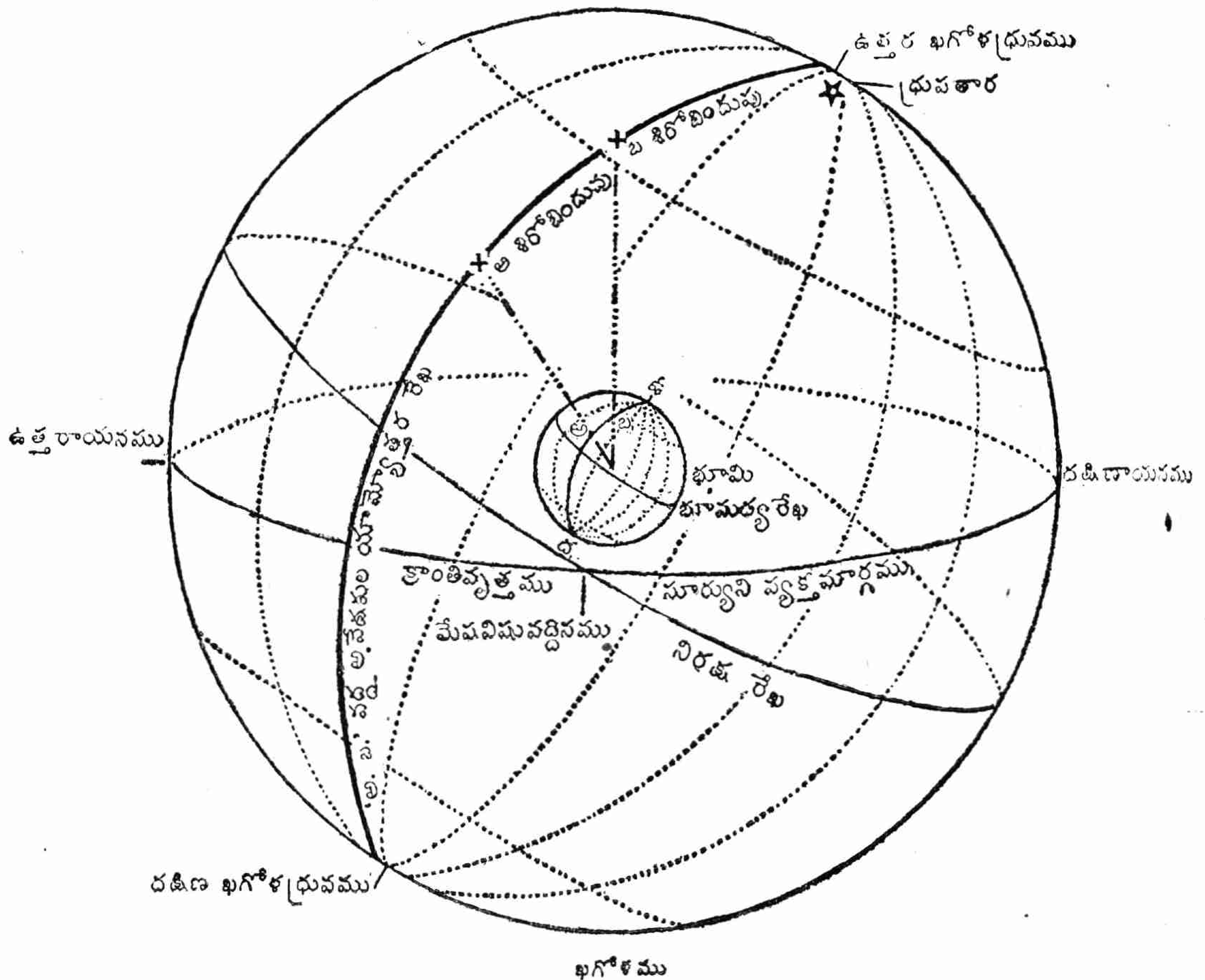
ఈ కాలమును ఒక్కసంవత్సర మందుము. సూర్య సిద్ధాంతములో ఒక మహాయుగము 43,20,000 సంవత్సరములనియు, అనగా 158,22,37,828 నక్షత్ర దినములనియు,లేదా 157,79,17,828 సౌరదినములనియు చెప్పబడియున్నది.

సౌరమానకాలమును తెలుపుటకు మనము వాచీలను, గడియారములను వాడుకచేయుచున్నాము. నక్షత్రమాన కాలము మామూలువాడుకలో లేదు. ఖగోళశాస్త్రజ్ఞుల పరిశోధనలయందే దాని ప్రాముఖ్యము. ఖగోళశాస్త్ర వేధశాలలయందు ఈ కాలమునుతెలుపు గడియారములు నక్షత్రగడియారము (సైడీరియల్ క్లాక్స్) లనుపేర ప్రత్యేకముగ కలవు.

ఏదేని ఒక పట్టణమున కాలనిర్ణయమును ఎట్లు చేయుచున్నాము ? ఆ పట్టణముయొక్క యామ్యోత్తర రేఖ సరిగా సూర్యుని క్రింద ఉన్నప్పుడు అది మిట్టమధ్యాహ్నమనియు, లేదా పగలు 12 గంటలనియు, దీనికి పూర్వకాలము పూర్వాహ్ణమనియు. పిదపకాలము అపరాహ్ణమనియు వాడుచున్నాము. ఈ కాలనిర్ణయము మన గడియారపు గంటలకు సమముగా నుండదు. ఏల ?

భూమి సూర్యునిచుట్టు తిరుగుటలో సమగతిలేని హేతువుచేతను, ఖగోళమధ్య రేఖాతలమునకు ఒకప్పుడు పైని, మరొకప్పుడు క్రిందను భూకక్ష్య ఉండుటచేతను, గడియారము చూపు 24 గంటలలో ప్రతిదినమును సూర్యుడు యామ్యోత్తర రేఖపైకి సరిగా రాజాలడు.

ముందు అయిన వచ్చును, లేదా వెనుక నైన వచ్చును. ఇట్టి తేడాలు కొన్ని దినములలో కనబడినను, సంవత్సర మొత్తపు కాలమునకు సరిగా సరిపోవును. ప్రతి సంవత్సరము ఏప్రిల్ 16, జూన్ 14, సెప్టెంబర్ 1, డిసెంబర్ 25 తేదీలను గడియారము చూపు కాలమునకు, సూర్యుని వలన మనము తెలిసికొను కాలమునకును భేదములేదు. అందుచే, యున్నది. దానికి ప్రమాణకాలమని పేరు. ప్రమాణకాల స్వీకరణకు కారణమేమన సూర్యాస్తమయ సూర్యోదయములు భూమిచుట్టు ఉన్న స్థలములలో వివిధ కాలములలో సంభవించుటయే. ఉదా : మనకు సాయంకాలము 5 గంటలు అయినప్పుడు లండన్ నగరవాసులకు 1½ గంటలు అగును. అందుచే స్థలస్థలమునకు కాలము మారుచున్నను ఒక రాజ్య



ఖగోళము

గడియారముచూపు కాలము ప్రత్యక్షసౌరదినమును అనుసరించదు. గడియారము చూపు కాలము నిజముగా మధ్యమానసౌర కాలము (మీన్ సోలార్ టైమ్). అనగా, భూమి సూర్యునిచుట్టు సమగతిలో తిరుగుచున్నదనుకొని నిర్ణయించిన కాలము. ఇదివరకు మనము రెండువిధములగు కాలమానముల నెరుగుదుము. అందొకటి ప్రత్యక్షసౌర కాలము. (ఎపరెంట్ సోలార్ టైమ్). రెండవది మధ్యమాన సౌర కాలము. మొదటిది సమగతిలో నుండకపోవుటచే సమగతిలోనికి తేబడిన రెండవది వాడుకలో ఉన్నది.

ఈ రెండువిధములగు కాలములుగాక వ్యవహార సౌకర్యముల కొరకు ఒక రాజ్యమునకు సంబంధించిన కాలమొకటి మున కొక ప్రమాణకాల మేర్పరచుకొనవలెను. ఇంగ్లండు దేశస్థులు గ్రీనిచ్ నగరముయొక్కయు. ఫ్రాన్స్‌వారు పారిస్ నగరము యొక్కయు, జర్మనీవారు బెర్లిన్ యొక్కయు, కాలమును ప్రమాణముగా పర్పరచుకొనిరి. భారత రాజ్యాంగములో పశ్చిమతీరమున ఉన్న బొంబాయి నగరమునకును, తూర్పుగా ఉన్న కలకత్తా పట్టణమునకును మధ్యనున్న 82½ డిగ్రీలు రేఖాంశలు గల రేఖ తూర్పుగోదావరిజిల్లాలోని తునిగ్రామము మీదుగా పోవుచున్నది. ఇచ్చటి కాలమే భారత రాజ్యాంగ కాలము. ఇది గ్రీనిచ్ ప్రమాణకాలమునకు 5½ గంటలు ముందే యున్నది.

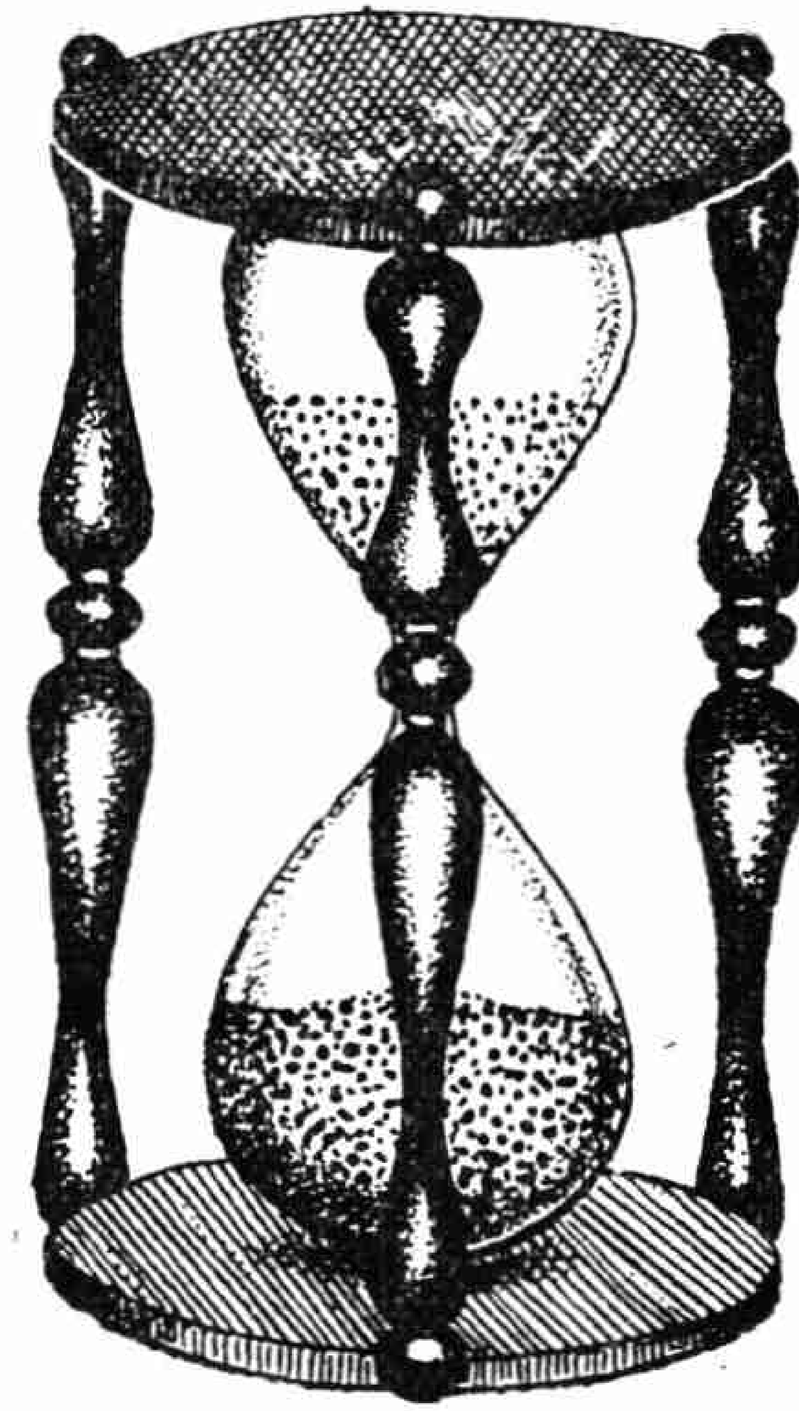
యునైటెడ్ స్టేట్స్ తూర్పుపడమరలకు వ్యాపించి యుండుటచే నాల్గుభాగములుగా విభజించి వారు నాలుగు ప్రమాణకాలములను ఏర్పరచుకొనిరి. ఒకస్థలమునకు, మరియొకస్థలమునకు యామ్యోత్తరరేఖ భిన్నముగా నుండుటవలన, గడియారములు ఒకేకాలమునందు వేరు గంటలు చూపకమానవు.

ఆ కారణమునుబట్టి మద్రాసులో మనము 5గం-20 నిమిషములకు బయలుదేరి రంగూన్ వెళ్లుటకు నిజముగా ప్రయాణ మొకగంట పట్టినప్పటికిని, రంగూన్‌లో దిగిన వెంటనే గడియారమును చూచిన అది 7గం-20 నిమిషములను తెలుపును. మద్రాసుగడియారము, రంగూన్ గడియారము, సమానమైనఎడల 6 గం- 20 నిమిషములు చూపవలెను. కాని, ఒకగంట ఎక్కువచూపినది. ఈగంట అనగా 60 నిమిషములు రంగూన్ మద్రాసునకు తూర్పుగా 15 డిగ్రీలుండుటచే 15 × 4 = 60 నిమిషముల తేడాఉన్నది. ఇట్లు ప్రతి 15 డిగ్రీల ప్రయాణమునకు తూర్పునకు పోవునపుడు ఒకగంట హెచ్చు ప్రయాణముచేసినట్లు కనిపించును. ఇట్లు భూమిచుట్టి మద్రాసుచేరుసరికి ఒకరోజు హెచ్చు పట్టినదని అనుకొందము. అటులనే పడమరగా బయలుదేరి వచ్చిన, ఒకరోజు తక్కువపట్టినదని అనుకొందము. ఇట్టి భ్రమలు లేకుండచేయుటకు, అన్ని దేశములవారు ఫిజీ ద్వీపములమీదుగా పోవు 180 డిగ్రీల రేఖాంశరేఖవద్ద తూర్పునకు ప్రయాణముచేయు ఓడలకు ఒకరోజు తగ్గించియును, పడమరగాపోవు ఓడలకు ఒకరోజు కలుపుకొనియును తారీఖులు లెక్కచూచుకొనుటకు నిర్ణయించుకొనిరి.

వే. రా.

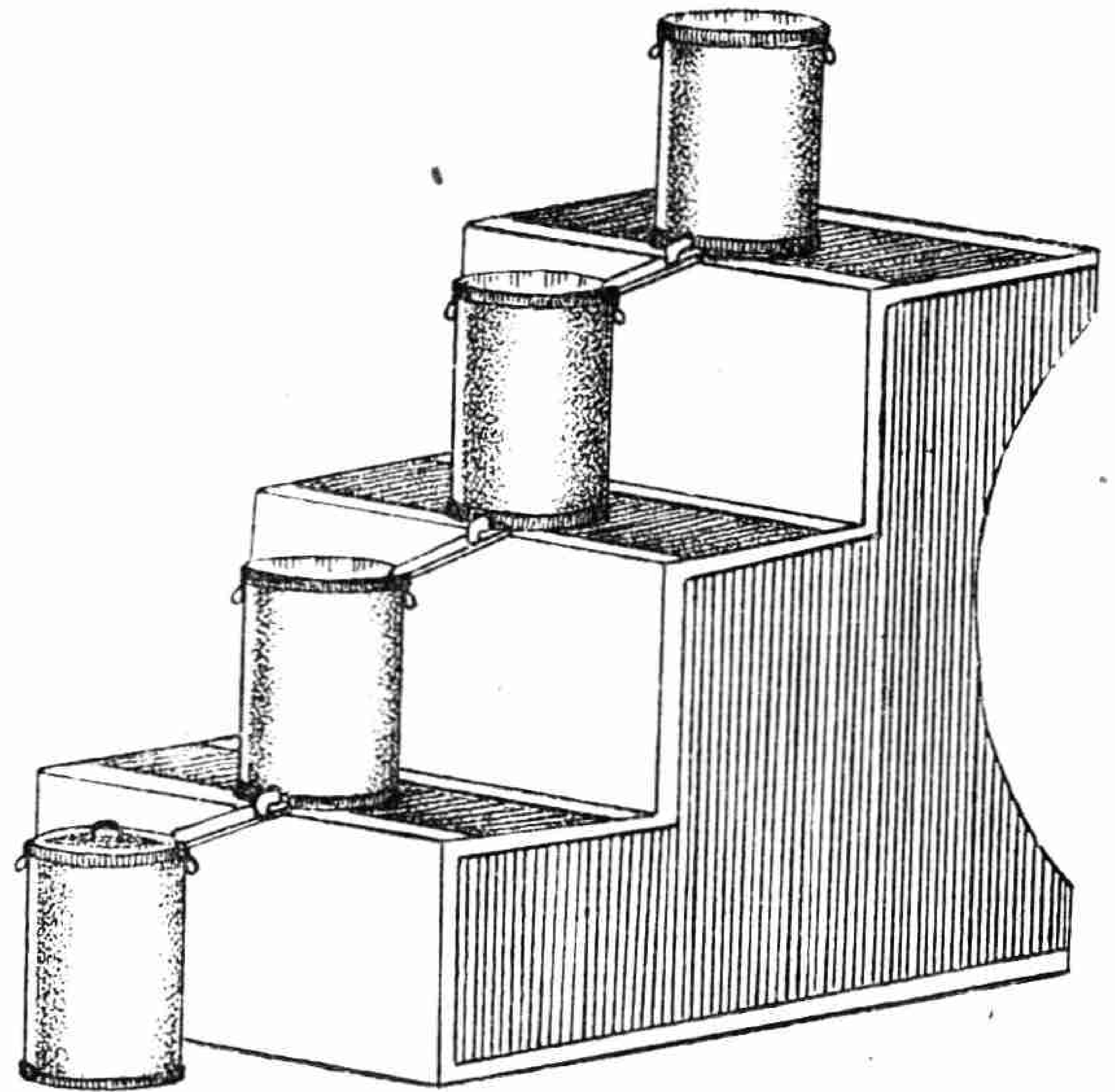
కాలమునుకొలుచు పరికరములు : కాలమును కొలుచుటకై అనాదినుండియు మానవుడు ప్రయత్నించుచున్నాడు. ప్రారంభమున పగటికాలము ఆకాశమందు సూర్యుడు స్వీకరించిన స్థలమునుబట్టియు, రాత్రి కొన్ని నక్షత్రముల ఉనికినిబట్టియు కాలనిర్ణయమును మానవుడు చేయుచుండెడివాడు. తరువాత ఆకసము వంక చూడ నక్కరలేకుండగనే కాలగతిని తెలుసుకొనుటకు అనువగు పరికరముల నిర్మించెను. అట్టి పరికకములలో మొదటిది నీడగడియారము లేదా ఛాయాఘటి (సన్‌డయల్), తర్వాత ఇసుకగళాసు (సాండ్‌గ్లాస్), నీటిగడియారము (వాటర్‌క్లాక్), గడియారయంత్రములు బయలుదేరినవి. తరువాత ఖగోళప్రత్యవేక్షణ కుపయోగించు క్రోనోమీటరులు వెలుగుచూచినవి.

ఇసుక గళాసు : ఇందు రెండుబల్బులుగల సీసా ఒక చట్రములో అమర్చబడియుండును. ఈ రెండు బల్బులను కలుపుచు ఒక సన్నని మార్గముండును. పైబల్బునుండి క్రిందిబల్బునకు ఇసుక పూర్తిగా జారుటకు ఒక గంట కాలము పట్టునటుల పైబల్బులో ఇసుకను ఉంచెదరు. ఆ ఇసుక క్రమక్రమముగా పై బల్బునుండి అడుగుబల్బులోనికి జారును. అప్పటికి ఒక గంట అయినదన్నమాట. ఇసుక పూర్తిగా అడుగు బల్బులోనికి వచ్చినతక్షణమే ఆపనిముట్టును తలక్రిందు చేయుదురు. అప్పుడు ఇసుకగల క్రింది బల్బు పైకి, ఖాళీయైన పై బల్బు క్రిందికి వచ్చును. తిరిగి ఇసుకజారును. ఈ విధముగా దీనితో గంటలను కొలుతురు.



చిత్రము 91

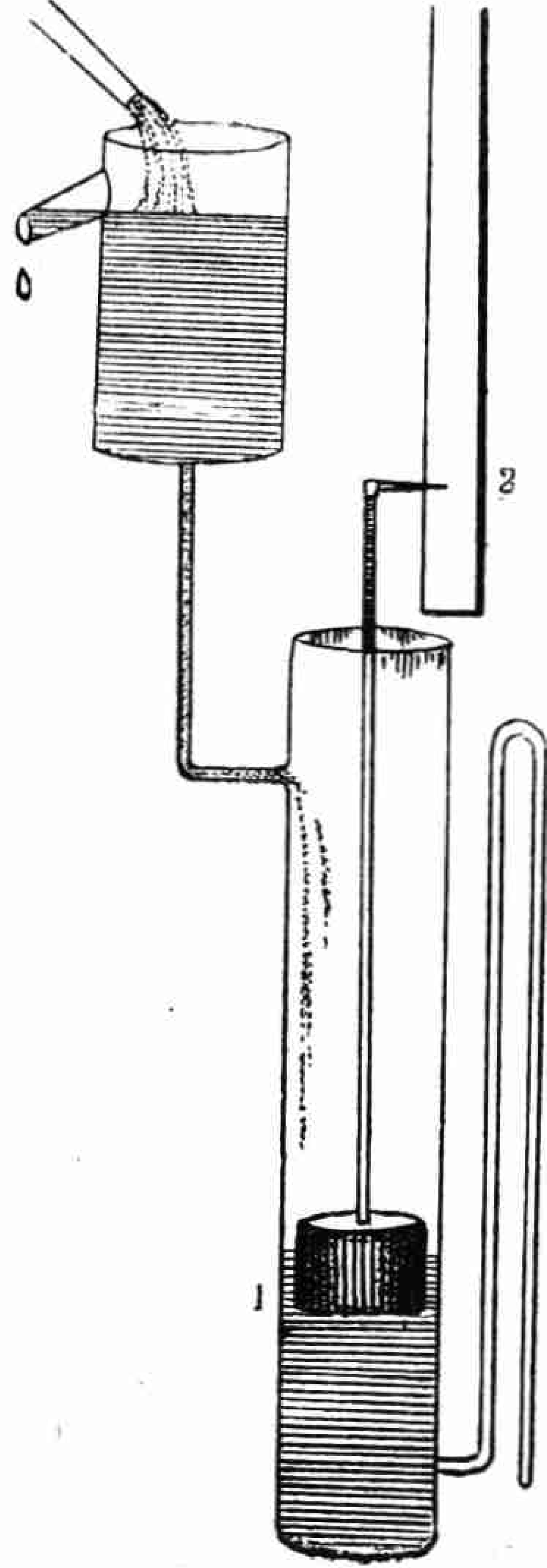
నీటిగడియారము : ఈ పనిముట్టులో కాలమును కొలుచుటకు నీరు ఉపయోగపడుటచే దీనికి నీటిగడియారము అను పేరు వచ్చినది. నీటిగడియారములలో పెక్కు రకములు కలవు.



చిత్రము 92 చీనాదేశపు నీటిగడియారము

ఒకరకమైన నీటిగడియారములో ఒక నియమితమైన పరిమాణముగల పాత్రను ఉపయోగింతురు. దాని

అడుగు భాగమున సరిగా మధ్యనొక సన్నని బెజ్జముండును. ఆ పాత్రను నీటనుంచిన బెజ్జముగుండా నీరు క్రమక్రమముగా పాత్రలోనికి ప్రవేశించి, సరిగా ఒకగంటయగుసరికి దానిని ముంచును. ఈ విధముగా దీనితో గంటలను కొలువవచ్చును.



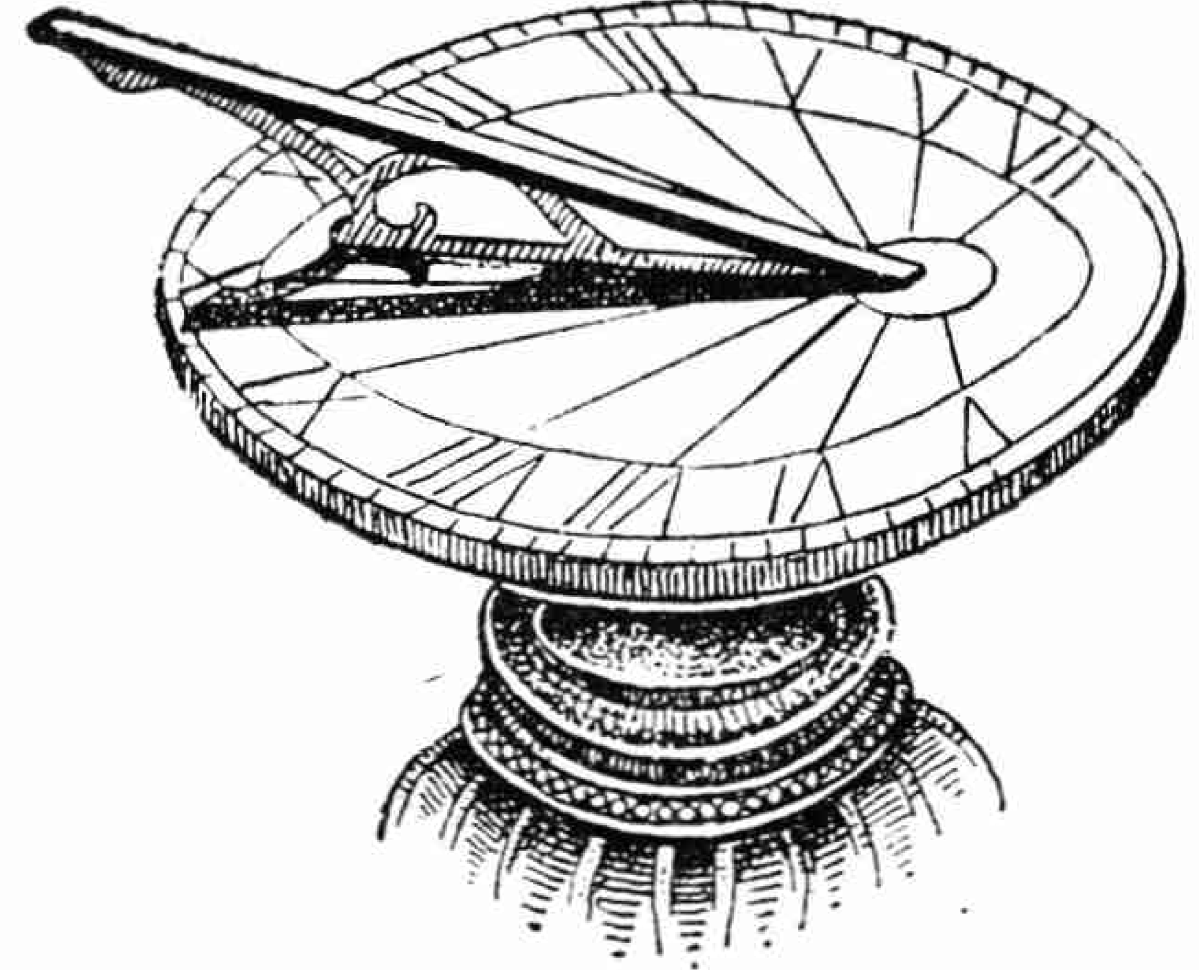
చిత్రము 93
నీటిగడియారము

వేరొకరకపు నీటిగడియారమునందు ఒక స్తూపాకారముగల గాజుపాత్ర నుపయోగింతురు. దాని యడుగున సరిగా మధ్యగా ఒక సన్నని బెజ్జముండును. పాత్రను పూర్తిగా నీటితో నింపుదురు. అపుడానీరు సన్నని బెజ్జముగుండా బయటికిపోవును. నీరు పోయిన కొలది నీటిమట్టము దిగుచుండును. గాజుపాత్ర ప్రక్కనే గంటలు గుర్తింపబడిన స్కేలు ఉండును. స్కేలుపై నీటిమట్టమునకెదురుగా ఉన్న సంఖ్య పాత్రను నింపినప్పటినుండి, గడచిన గంటలను తెలుపును.

మరియొకరకపు నీటి గడియారమునందు రెండు గాజుపాత్రలు, ఒకటి పెద్దది, రెండవది చిన్నది ఉండును. అందు చిన్నపాత్రనుండి నీరు దాని అడుగుననున్న ఒక సన్నని రంధ్రముగుండా పెద్దపాత్రలోనికి కారుచుండును. పెద్దపాత్ర ప్రక్కనే గంటలు గుర్తింపబడిన ఒక స్కేలు ఉండును. పెద్దపాత్రలోని నీటిలో తేలుచు ఒక ముల్లు ఉండును. ఆ ముల్లునకెదురుగా స్కేలుపైనున్న సంఖ్య పెద్దపాత్రను నింపుటకు మొదలిడినప్పటినుండి గడచిన గంటలను తెల్పును.

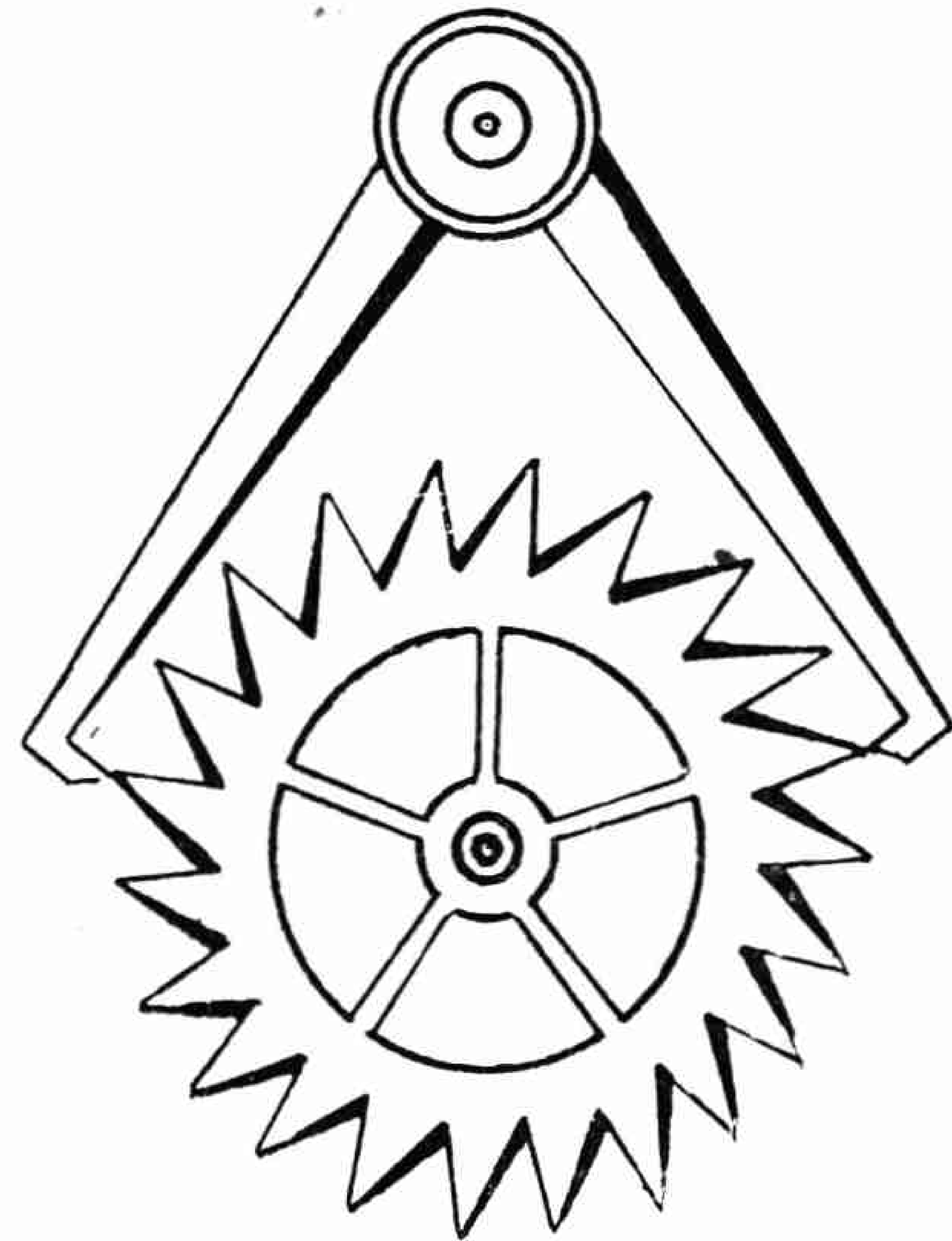
ఛాయాఘటి: దీనిని సాధారణముగా ఒక యింటి డాబాపైగాని, ఆరుబయట ఒక తిన్నెపైగాని ఏర్పాటు చేయుదురు. ఇందు వృత్తాకారముగా గంటలుగుర్తింపబడిన ఒక స్కేలు ఉండును. అందు మధ్యగా ఒక ముల్లు (శంకు) నిలిచియుండును. సూర్యునికాంతి ఆ ముల్లుపై పడినపుడు ఆ ముల్లునీడ స్కేలుపైపడును. అచటి సంఖ్య ఎన్నిగంటలైనది తెలుపును.

పెద్దగడియారము: ఇందు గంటలను తెలుపు 12 సంఖ్యలు, నిమిషములను తెలుపు చుక్కలు గుర్తింపబడిన గుండ్రని ఒక


చిత్రము 94 నీడగడియారము

అట్టగాని, రేకుగాని యుండును. దీనినే డయల్ అందురు. దానిమీద గంటలనుచూపు ముల్లొకటియు, నిముషములను చూపు ముల్లొకటియు తిరుగుచుండును. గంటలముల్లు, నిమిషములముల్లుకంటె పొట్టిగా ఉండును. డయల్ వెనుక చక్రములు ఉండును. ఆ చక్రముల ఇరుసులకు ఈ ముళ్ళు అతుకబడియుండును.

చక్రములు తిరుగునపుడీ ముళ్ళు డయల్ మీద తిరిగి కాలమును చూపును. చక్రములు తిరుగుటకు కావలసిన శక్తి కొన్ని గడియారములలో నొక పెద్ద భారము దిగుచుండుట వలన ఏర్పడుచున్నది. వెక్కు గడియారములలో ఈ శక్తి ఒక స్ప్రింగ్ చుట్ట విప్పుకొనుటవలన లభించుచున్నది. స్ప్రింగ్ చుట్టపూర్తిగా విప్పుకొన్నప్పుడు గడియారమాగిపోవును. ఆ స్ప్రింగ్‌ను తిరిగి చుట్టియుంచిన గడియారము తిరుగును. స్ప్రింగ్‌ను చుట్టుకొనునట్లు చేయుటనే 'కీ' ఇచ్చుట అందురు. 'కీ' ఇచ్చిన స్ప్రింగ్ ఒకటేవేగముతో విప్పుకొనదు;


చిత్రము 95
గడియారపు చక్రపు పల్లు తిరుగుట

మొదట ఎక్కువ వేగముతోను, క్రమముగా వదులగుచున్నకొలది తక్కువవేగముతోను విప్పుకొనును. ఇట్లు జరుగనిచ్చిన దీని కతుకబడిన చక్రములును, వాని ఇరుసుల కతుకబడినముళ్ళును సమాన వేగముతోగాక మొదట శీఘ్రముగను, పిమ్మట మందముగను తిరుగుట తటస్థించును. ఇట్లు జరుగకుండ స్ప్రింగ్‌కు అతుకబడియున్న చక్రము సమానవేగముతో తిరుగుటకు ఏర్పాటొకటి అవశ్యకము. ఆ యేర్పాటు చిత్రము 95లో చూపబడినది. అందొక లోలకము కలదు. అది ఒక ఫోర్కు భుజములమధ్య ఇటునటు ఆడును. ఒకదండము ఈ ఫోర్కు నొకయిరుసుతో కలుపును. ఆ యిరుసుచివర నొక ధనురాకారముగల లంగరు అను సాధనముండును. లంగరు రెండు కొనలందును చెరియొక మెత్తయు కలవు. ఈ లంగరుకు దిగువగా పళ్ళుగలచక్రము ఉండును. ఈ చక్రము స్ప్రింగ్‌న కతుకబడియున్నందున అది విప్పుకొనునపుడు ఈ చక్రము తిరుగును. లోలకము కదలక ఆగియున్నపుడు లంగరుచివర ఉన్న ఒక మెత్త చక్రముయొక్క ఒకపంటి కెదురుగాజేరి దానిని తిరుగకుండ అరికట్టును. అపుడు గడియారమాగిపోయి యుండును. లోలకము ఊగుచున్నప్పుడు ఈ లంగరుచివర ఉన్న మెత్తలు ఒకదానివెంబడినొకటిపనిచేసి ఈ చక్రముయొక్క ఒక్కొక్కపంటిని ఆపి వదలుచు, లోలకము యొక్క ఒక్కొక్కఊపునకు చక్రముయొక్క ఒక్కొక్క పంటిని జరుగనిచ్చి, చక్రమును సమానవేగముతో పోవునటుల చేయును. ఈ విధముగా పంటిచక్రము సమానవేగముతో తిరుగుటకు లోలకము ఉపయోగపడుచున్నది.

ఈ నిర్మాణములో మరియొక ప్రయోజనముకూడ సిద్ధించుచున్నది. సాధారణముగా గాలిలో ఊగుచున్న లోలకము గాలిచే నిరోధింపబడుటవలన కొన్ని ఊపులు ఊగి అనతికాలములోనే ఆగును. కాని, గడియారములలో లోలకము ఇట్లు ఆగిపోవుటలేదు. పంటిచక్రముయొక్క ప్రతిపల్లు లంగరుచివర ఉన్న మెత్తను దాటిపోవునపుడు దాని నొకత్రోపు త్రోయును. ఈ త్రోపు ఫోర్కుద్వారా లోలకమునకుపోయి అది ఆగిపోక ఎల్లప్పుడును ఊగుచునే యుండుటకు తోడ్పడుచున్నది.

లోలకము పొడుగు హెచ్చినకొలది ఊపునకు పట్టుకాలము హెచ్చుటయు, దానిపొడుగు తగ్గినకొలది ఊపునకుపట్టుకాలము తగ్గుటయు తటస్థించును. కనుక, లోలకముయొక్క పొడవు హెచ్చునపుడు గడియారము మందముగా తిరుగుట, పొడవు తగ్గినపుడు వేగముగా తిరుగుట తటస్థించును. కొద్దిపాటిమార్పులు కలిగినచో దాని చివరనుండు నొకమరను అవసరమునుబట్టి పైకిగాని, క్రిందికిగాని త్రిప్పి కావలసినపొడవునకు లోలకమును సర్దుబాటు చేసికొనవచ్చును.

క్రోనోమీటరు: సముద్రముపై ప్రయాణముచేయునపుడు రేఖాంశమును తెలిసికొనుటకు ఉపయోగించు గడియారములకు 'క్రోనోమీటరులు' అని పేరు. ఇవి ఓడపై ప్రయాణముచేయునపుడు ఓడయొక్క కదలిక, శీతోష్ణస్థితులలో కలుగుభేదము, గాలియందలి నీటి యావిరియొక్క హెచ్చుతగ్గులు, అక్షాంశ భేదమునుబట్టి కలుగు భూమ్యాకర్షణశక్తిలోని హెచ్చుతగ్గులు - వీనివలన మార్పునొందక సరియగు కాలమునుసూచించునవై యుండవలెను. ఇట్టి గడియారములను తయారుచేయుటకై జాన్‌హారిసన్, జాన్‌ఆర్నాల్డ్ మొదలగు వారు ఎందరో పూనుకొని కృతార్థులైనారు.

శీతోష్ణస్థితి భేదమువలన పొడుగుమారని లోలకము నొకదానిని జాన్‌హారిసన్ కనిపెట్టినాడు. దీనిని 'గ్రిడ్ ఐరన్ పెండ్యులమ్' అందురు. ఇందు పెక్కులు ఉక్కు కడ్డీలు, ఇత్తడికడ్డీలు ఉండును. ఉష్ణతాభేదమువలన, ఉక్కు కడ్డీలు క్రిందిపైపునకు ఎంతదూరము వ్యాపించునో ఇత్తడి కడ్డీలు అంతేదూరము పైకి వ్యాకోచించుట వలన లోలకముపొడవు మారదు. గడియారమునకు 'కీ' ఇచ్చునప్పుడుకూడ ఆగిపోక తిరుగుచునే యుండుటకు మరియొక స్ప్రింగ్ ఏర్పాటును కూడ ఇతడు కనిపెట్టినాడు. ఇట్టి యేర్పాటులతో అతడు 1761 సంవత్సరములో ఒక క్రోనోమీటరును తయారుచేసి లాంగిట్యూడ్ బోర్డు వారి యొద్దనుండి 20,000 పౌనుల బహుమతిని పొందియున్నాడు. ఈ క్రోనోమీటరు దినమునకు ఐదుసెకనుల తేడాతో సరియగుకాలమును సూచించెను. హారిసన్ క్రోనోమీటరుకంటెను చిన్న క్రోనోమీటరును తయారుచేయుటకు ఆర్నాల్డ్ పూనుకొనెను. ఈతడు 1776 లో స్తూపాకారముగల స్ప్రింగ్‌ను (కంపెన్‌సేషన్ బేలన్సును) ఉపయోగించి, చిన్నదైన ఒక క్రొత్త రకపు క్రోనోమీటరును తయారుచేసి బ్రిటిషు గవర్నమెంటు వారివలన మూడువేల పౌనులు బహుమానమును అందుకొనెను.

చార్లెస్ ఫ్రాడ్‌హామ్ 1830 లో మిక్కిలి సున్నితములైన రెండు క్రోనోమీటరులను తయారుచేసి గ్రీనిచ్ పరిశీలనాకేంద్రమునకు ఇచ్చెను. అందొకటి దినమునకు 0·86 సెకను తేడాను, రెండవది 0·57 సెకను తేడాను మాత్రమే చూపెను.

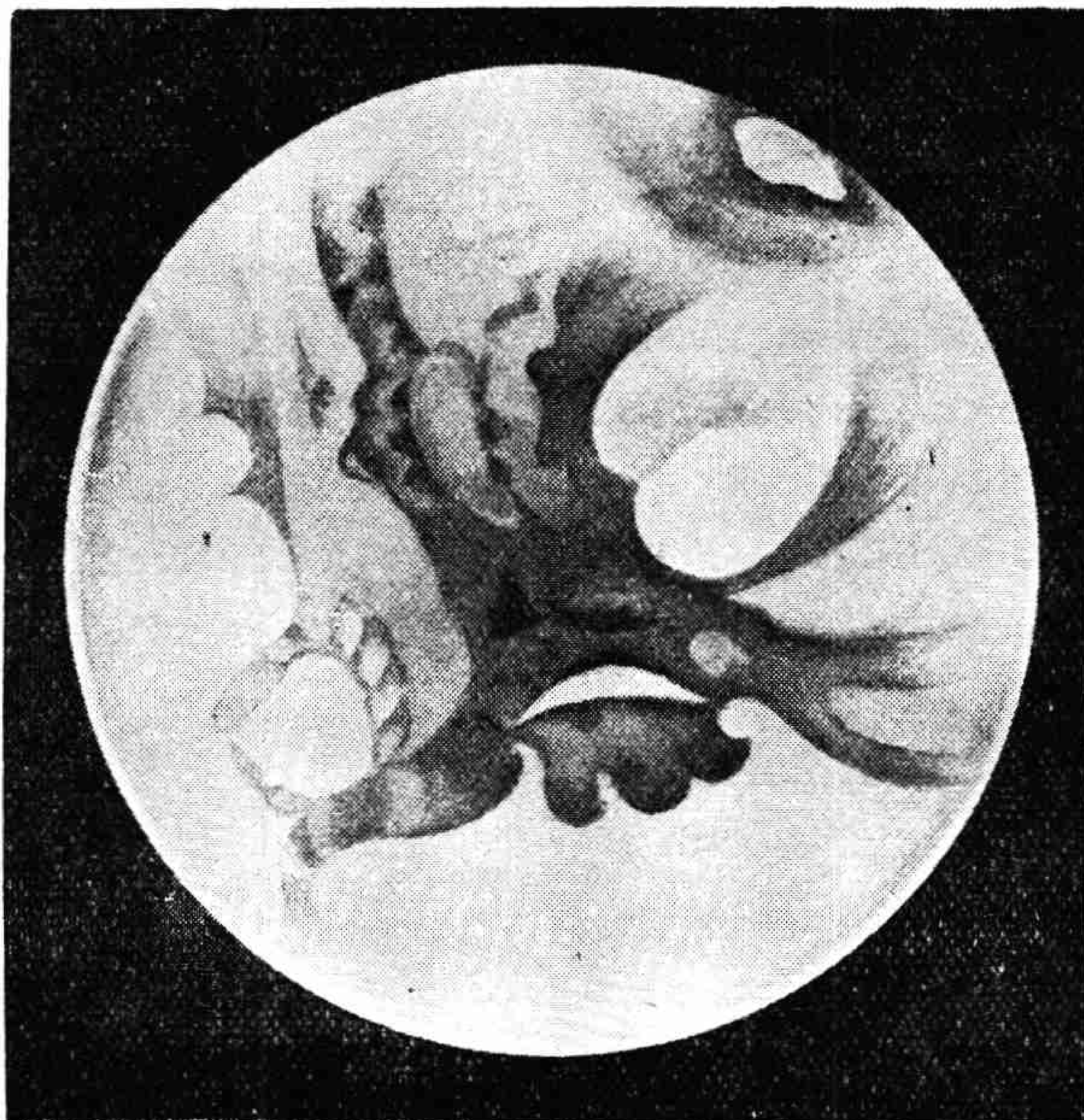
క్రోనోమీటరులను అతిభద్రముగావాడుకొనవలయును. వానిని పొడిచోటను, సమానోష్ణతగల వాతావరణము

లోను, జాగ్రత్త పెట్టవలయును. ఓడలు ప్రయాణముచేయు నపుడు క్రోనోమీటరులు కదలి పాడుకాకుండ వానిని 'జింబల్సు' అను నొక యేర్పాటులో అమర్తురు. ఆ యేర్పాటువలన ఓడ అటునిటు కదలుచున్నను క్రోనోమీటరుమాత్రము ఎల్లప్పుడును క్షితిజ సమానాంతరము గానే యుండును.

పి. వి. సూ.

కుజుడు (మార్స్): భూకక్ష్యకు వెలుపల ఉన్న గ్రహములలో భూమికి అతి సమీపములో కుజుడు (అంగారకుడు) కలడు. గ్రహసామ్రాజ్యములో సేనాధిపతి కుజుడని గ్రీకుల విశ్వాసము.

భూమినుండి కుజుని సరాసరి దూరము 6574 లక్షల కిలోమీటరులు. ఆగస్టు నెల సుమారు 23 వ తారీఖున గ్రహము షడ్భాంతరములో ఉన్నప్పుడు భూమికి సమీపమున ఉండును. కుజుని కక్ష్య భూకక్ష్యకు వెలుపల ఉండుటచే అది భూ సూర్యుల మధ్య రాదు. కనుక చంద్రరేఖ వలె కనబడదు. గ్రహము షడ్భాంతరము లోను, ఉత్తమ యోగములోను ఉన్నప్పుడు ప్రకాశవంతమైన అర్ధ చంద్రాకార బింబమును, చతుర్థ కేంద్రములో ఉన్నప్పుడు న్యుబ్జ బింబమును చూడవచ్చును.



చిత్రము 96 కుజుడు

దూరదర్శనితో కుజుని పరిశీలించినచో దాని శరీరమందు స్పష్టమైన గుర్తులు కానవచ్చుటచే దాని పరిభ్రమణ కాలమును కనుగొనుట సులభము. దాని పరిభ్రమణకాలము 24 గం. 37 ని. 22·7 సెకనులు. కుజుని నిరక్షరేఖ దాని కక్ష్యాతలమునకు సుమారు 24° ఏటవాలుగ ఉండుటచే కొన్ని వేళలలో మనవైపు తిరిగిఉండు ధ్రువమునకు 24° ఆవల చూడ వీలగుచున్నది. భూమికి సమీపములో ఉన్నప్పుడు కుజుని దక్షిణధ్రువము మనవైపు ఉండుటచే దక్షిణార్ధగోళమును (ఉత్తరార్ధగోళము కంటె) సులభముగ పరీక్షింప శక్యమగుచున్నది.

కుజుని కాంతిపరావర్తనశక్తి సుమారు 0.15. కుజలోకములో వాతావరణము భూమియొక్క వాతావరణముకంటె చాల పలుచగ ఉండును. కుజగ్రహము యొక్క ధ్రువములచుట్టు ధ్రువముకుటములు అను తెల్లని ప్రదేశములను చూడవచ్చును. ఇవి నీటిఆవిరి ఘనీభవించుటచే ఏర్పడినందున, కుజలోకములో వాతావరణము కలదని రూఢి అగుచున్నది. మరియు వేరువేరు రంగుల ద్వారా తీయబడిన ఛాయాచిత్రములనుండియు కుజలోకములో వాతావరణము ఉన్నదని రూఢిగ వక్కాణింప శక్యమగును. కుజుని వాతావరణములో కొద్దిగ నీటిఆవిరి, అత్యల్పముగ ఆక్సిజన్ ఉన్నట్లు తెలియవచ్చుచున్నది. కాని, కార్బన్ డై ఆక్సైడ్ మాత్రము మన వాతావరణములో ఉన్నదానికి రెండు రెట్లున్నదని క్విపర్ కనుగొనెను (1947). ధ్రువముకుటముల పరశ్శోణ పరావర్తనవర్ణమాలలు మంచు, మంచుగడ్డల వర్ణమాలలను పోలిఉండుటచే కుజలోకములో నీటిజాడ కొద్దిగ ఉండవలెనని అతడు ఊహించెను. కాని, గ్రహముయొక్క సాధారణ వర్ణమాలలో నీటిఆవిరి యొక్క విచూషణపట్టికములు కనబడవు.

వికిరణమాపక సహాయమున పరశ్శోణవర్ణమాలా క్షేత్ర పరిశీలనలనుండి కుజుని తాపక్రమమును కనుగొని ఉన్నారు సూర్యోదయ భాగము (అంచు)లో తాపక్రమము −10°C నుండి −20°C వరకును, సూర్యాస్త ప్రదేశములలో −10°C నుండి +10°C వరకును, కేంద్ర ప్రదేశములలో 20°C నుండి 30°C వరకును, ధ్రువముకుట ప్రదేశములలో, −70°C ను ఉండును.

కుజతలములో స్పష్టముగ కనబడు చిహ్నములు ధ్రువ ప్రాంతములచుట్టు ఉండు తెల్లని ప్రదేశములే. ఈ ధ్రువ ముకుటముల విస్తీర్ణము ఋతువులతో మారుచుండును. ఉత్తరార్ధగోళములోని వసంత, గ్రీష్మ ఋతువులలో ఉత్తరధ్రువ ముకుటము శీఘ్రముగ సంకోచించుచుండును, కాని దక్షిణధ్రువముకుటము వ్యాకోచించుచుండును అల్లే దక్షిణార్ధగోళములోని గ్రీష్మఋతువులో పై సంఘటనలు తలక్రిందులుగ సంభవించుచుండును. ఉత్తర, దక్షిణధ్రువ

ముకుటముల గరిష్ఠ వ్యాసములు వరుసగ 4988, 5954 కిలో మీటరులు. దక్షిణ ధ్రువ ముకుటములో మార్పులు అధికముగ ఉండును.

ధ్రువముకుటములే గాక కొన్ని నీలపీతవర్ణప్రదేశములను దక్షిణార్ధగోళములో నిరక్ష రేఖ సమీపములోను, అరుణ వర్ణప్రదేశములను ఉత్తరార్ధగోళములోను చూడవచ్చును. కొందరు శాస్త్రజ్ఞులు నీల పీతవర్ణప్రదేశములు జలప్రదేశములు అనియు, వానిలో అధమరూపస్థావరములు జీవింపవచ్చుననియు, అరుణవర్ణ భాగములు ఎడారులు అనియు వాదించుచున్నారు. కుజుని అరుణ వర్ణతలములో పెక్కుసన్నని రేఖలను షియాపరెల్లి చూచి అవి నీటిపారుదలకైన కాలువలని ప్రతిపాదించెను. ఈ కాలువల లక్షణము అనేకవాదములను, ఊహలను పురికొల్పినది. ఎండ కాలములో ధ్రువముకుటములలోని మంచుగడ్డ కరగుటవలన కలుగు నీరే కాలువలుగ నిరక్ష రేఖాప్రాంతము వైపు పారుచున్నదనియు, ఇవి బుద్ధిమంతులైన వ్యక్తులచే నిర్మింపబడి ఉండవలెననియు లోవెల్ వాదించెను. కాని, అతని వాదమునకు అనేక ప్రతిబంధకములు కలవు.

కుజునకు రెండు ఉపగ్రహములు కలవు. వాటిని గురించిన విషయములు దిగువ పేర్కొనబడినవి:

ఉపగ్రహము	ఆవిష్కర్త	కుజునినుండి దూరము (కిలో మీటరులలో)	భ్రమణ కాలము ది. గం. ని.	వ్యాసము (కిలో మీటరు) లలో
డైమాస్	హాల్ (1877)	23,496	1-6-18	8
ఫొబాస్	,,	9,334	0-7-39	16

పై రెండు ఉపగ్రహములు చాలచిన్నవి. వాని దీప్తియు అత్యల్పము. సౌరకుటుంబములో మూలగ్రహము యొక్క పరిభ్రమణకాలముకంటె తక్కువ కాలములో దాని చుట్టు తిరుగు ఉపగ్రహము ఫొబాస్ ఒక్కటే. పరిభ్రమణ వేగఫలితముగ అది పడమట ఉదయించి తూర్పుదిశలో అస్తమించుచుండును. ఇది సౌరకుటుంబములో ఒక విచిత్రమైన సంభవము. రెండవ ఉపగ్రహముగు డైమాక్ తూర్పుదిశలో 30 గంటల 18 ని. కు ఒక పర్యాయము ఉదయించు చుండును.

కుజుడు భూమి యొక్క పుత్రుడని ప్రాచీనభారతీయులు తలచిరి. ఇది తగునా ? నవీన పరిశోధనవలన ఇది తగునని తోచుచున్నది. కుజభ్రమణకాలము భూభ్రమణ కాలమునకు రమారమి సరిపోవుచున్నది. భూమి యొక్క అక్షమును, కుజుని అక్షమును, వాని కక్ష్యాతలములకు సమానముగు నిమ్నతకలవై ఉన్నవి. భూవాతావరణము కుజవాతావరణమును కొంతవరకు పోలియున్నది. కాబట్టి కుజునికి భూసుతుడనియు, భౌముడనియు, భారతీయ వాఙ్మయములో పర్యాయనామములు కలవు. కుజగ్రహము కూడ తక్కిన గ్రహములతోపాటు తాపవికిరణరూపమున రేడియో తరంగములు అంతరాళములోనికి ప్రసరించుచున్నది. ఈ తాపవికిరణము రేలే - జీన్స్ నియమమును అనుసరించుచున్నది ; అనగా వికిరణతరంగముల ప్రవాహసాంద్రత తరంగ దైర్ఘ్యవర్గముతో విలోమసంబంధములో ఉండును. కుజుడు 3 సెం. మీ. అలపొడవుగల తాపవికిరణ తరంగములను పంపుచున్నాడు. ఈ తాపతరంగముల నుండి నిర్ధరించబడిన కుజతాపక్రమము పరమతాపక్రమమానములో 218 ± 76. సరళోష్ణ రేడియో తాపక్రమములమధ్య కన్పట్టు సాధారణ సంవాదము రేడియో ఖగోళశాస్త్ర ప్రయోగముల వైశిత్యమునందు శాస్త్రజ్ఞులకు నమ్మకమును జనింపచేయుచున్నది. కె. ఎస్. వి. స.

కుట్టకములు : ఈ విషయము భాస్కరాచార్య II చే విమర్శింపబడినది. ఆధునికగణితములో కుట్టకములను సందిగ్ధసమీకరణములతో సరిపోల్చవచ్చును.

భాస్కరాచార్య-II ఇందు మూడుపదములు ఉపయోగించిరి. అవి భాజ్యము, హారము, క్షేపము అనునవి. క్షేపము మరల యుతి, విశుద్ధి అని రెండువిధములు. అపవర్తనాంకము అనగా గరిష్ఠసామాన్యభాజకము. భాజ్య, హార క్షేపములను మొట్టమొదట అపవర్తనము చేయవలయును. అట్లు లభించిన రాశులకు 'దృఢరాశులు' అని పేరు.

భాజ్యహారముల అపవర్తనాంకము క్షేపమునకు అపవర్తనము కానిచో కుట్టకము లభింపదు.

దృఢ భాజ్యహారములను పరస్పరము భాగించి అవి చ్ఛిన్న (శృంఖలిత) భిన్నము ఏర్పరుచవలయును. వచ్చు లబ్ధములను ఒకటి క్రింద ఒకటి వల్లీరూపమున వ్రాయవలయును. కొన్ని ఉదాహరణములు తీసికొందము :

శ్లో ॥ ఏకవింశతియుతం శతద్వయం,
యద్గుణం గణక పంచ షష్టియన్
పంచవర్జిత శతద్వయోద్ధృతం
శుద్ధిమేతి గుణకం వదాశు తమ్

తాత్పర్యము : 221 సంఖ్యను ఏరాశితో గుణించి, 65 సంకలనముచేసి, 195 చే భాగించిన నిశ్శేష మగునో ఆ రాశిని కనుగొనుము.

ఆధునిక గణితములో రాశిని x అనియు లబ్ధమును y అనియు తీసికొనిన

$$\frac{221x+65}{195}=y$$

అనగా $195y-221x=65$

13 చే అపవర్తనము చేయగా, $15y-17x=5$ లభించును.

అవిచ్ఛిన్న (శృంఖలిత) భిన్నము $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{2}$.

దీనిని వల్లిగా వ్రాసిన లభించు రూపము
1
7
2

ఉపాంత ఉపసరణ $=\frac{7}{8}$;

ఇపుడు $15\times 8-17\times 7=1$

$15y-17x=5$

కాబట్టి $15(40-y)-17(35-x)=0$

$$\frac{40-y}{17}=\frac{35-x}{15}=t$$

ఈ సమీకరణములు y, x ల యొక్క వివిధ పూర్ణాంకములను ఇచ్చును.

$x=35-15t$; $y=40-17t$.

$t=0$ అయినప్పుడు $x=35$; $y=40$.

x, y ల కనిష్ఠ పూర్ణాంకపు విలువలు $t=2$ అయినపుడు $x=5$, $y=6$ లభించును.

x రాశిని గుణము అనియు, y రాశిని లబ్ధి అనియు భాస్కరాచార్య II పరిభాష. అతని విధానము క్రింద ఈయబడినది :

వల్లిలో కడపటి సంఖ్య 2 కు బదులు యుతి 5 వ్రాయుము :

అపుడు లభించు వల్లి
1
7
5
0

(1) x కనుగొనుటకు :

వల్లి 1 ఉపాంత్యము $=5$

7 స్వోర్ధ్వము $=7$

5

0 తద్గుణలబ్ధము $=5\times 7=35$

అంత్యయుతము $=35+0=35$

$x=35$. ఇది $t=0$ అగునపుడు లభించును.

(2) y కనుగొనుటకు :

వల్లి 1 ఉపాంత్యము $=35$

35 స్వోర్ధ్వము $=1$

5 తద్గుణలబ్ధము $=35\times 1=35$

అంత్యయుతము $=35+5=40$

$y=40$. ఇది $t=0$ అగునపుడు లభించును.

35, 40 సంఖ్యలను దృఢహార (15), భాజ్యము (17) లచే భాగించిన లభించు శేషములు :

$35-15\times 2=5$ (గుణము)

$40-17\times 2=6$ (లబ్ధి) ఏర్పడును.

రుజువు చేయుట :

$221\times 5+65=1105+65=1170=195\times 6$.

భాస్కరాచార్య II సమస్యలలో ఒకటి ఉదాహరణముగా క్రింద ఈయబడును :

శ్లో॥ యేన పంచ గుణితాః ఖ సంయుతాః
పంచ షష్టి సహితాశ్చ తేఽథవా
స్యుస్త్రయోదశ హృతా నిరగ్రకా
స్తం గుణం గణక కీర్తయాఽఽశు మే.

తా॥ 5 చే గుణించి, శూన్యమును చేర్చి, 13 చే భాగించిన శూన్యలబ్ధమును ఇచ్చు రాశి ఏది? లేదా 5 చే గుణించి, 65 చేర్చి, 13 చే భాగించిన శూన్యలబ్ధమును ఇచ్చు రాశి ఏది? శీఘ్రముగ చెప్పుము.

కుట్టకములు గ్రహ గణితమునందు చాల ఉపయోగించును. గణేశ గంగాధరుల కల్పిత గ్రహ గణితముచే గ్రహస్థానము, గత గ్రహ దినములను సాధించు విధి క్రింద ఈయబడినది. కల్పమునందలి కుదినములు 19, గ్రహ భగణములు 10, గత దినములు 12 అని తీసికొందము. ఇందుండి త్రైరాశిక విధానమున గ్రహము యొక్క గత భగణములు సాధింపవచ్చును.

ఇందు స్మరణకు తెచ్చుకొనవలసిన విషయములు :

60 వికలలు $=1$ కల; 60 కలలు $=1$ భాగ; 30 భాగలు $=1$ రాశి; 12 రాశులు $=1$ భగణము.

గ్రహగతభగణములు x అనుకొని, త్రైరాశిక విధానమున $19:12=10:x$, కాబట్టి $19x=120$; $x=\frac{120}{19}=6$ భగణములు, 3 రాశులు, 23 భాగలు, 41 కలలు, $3\frac{3}{19}$ వికలలు. వికలావశేషము అగు 3 మాత్రము ఈయబడిన తక్కిన వానిని (రాశులు, భాగలు, కలలు, వికలలు) కనుగొనుటకు కుట్టక విధిని వాడవచ్చును.

ఏ. క = వికలలు, క = కలలు, భా = భాగలు, రా = రాశులు అను సంకేతములు వాడుచు, క్రింది విధమున సాధింపవచ్చును.

19 చే ఎన్ని వికలల భాగించిన 3 శేషము వచ్చును ?

క — కలలు, 60 క — వికలలు. కాబట్టి $\frac{60\text{ క} - 3}{19}$ = పూర్ణ సంఖ్య. క = 1, పూర్ణసంఖ్య = పూర్ణవికలలు = 3. 19 చే ఎన్నికలలను భాగించిన 1 కల శేషము లభించును ?

భా — భాగలకు 60 భా — కలలు, $\frac{60\text{ భా} - 1}{19}$ = పూర్ణ సంఖ్య (కలలు). ఇందు భా = 13, క = 41, రా = రాశు లయిన $\frac{30\text{ రా} - 13}{19}$ = పూర్ణసంఖ్య (భాగలు).

రా = 15, భాగలు = 23 ; 15 రాశులు = 1 భగణము 3 రాశులు. మనకు కావలసిన ఫలితము ; 3 రాశులు ; 23 భాగలు; 41 కలలు; $3\frac{3}{19}$ వికలలు. వికలావశేషము ఇచ్చిన గ్రహస్ఫుటము చేయవచ్చును.

లీలావతి నుండి మరియొక ఉదాహరణము తీసికొందము. ఒక మహాయుగమున సూర్యభగణములు 43,20,000, భూదినములు 1577917500. ఇవి బ్రహ్మగుప్త సిద్ధాంతము నుండి స్వీకరింపబడినవి. వికలావశేషము = 155519 శుద్ధి, సూర్యస్ఫుటము కనుగొనుము :

$$\frac{60\text{ కలలు} - 155519}{1577917500} = \text{పూర్ణసంఖ్య (వికలలు)}$$

అనగా $\frac{60\,x - 155519}{1577917500} = y$

x, y లకు కనిష్ఠ ధన పూర్ణాంక విలువలు కనుగొనవలయును. ఇచ్చట సంఖ్యలు పెద్దవగుటచే వానిని అపవర్తనము చేయగా,

దృఢ సూర్యభగణములు	= 576
దృఢ భూదినములు	= 210389
అపవర్తన సంఖ్య	= 7500

అపుడు $\frac{60x - 155519}{210389} = y$ అని తీసికొని x, y ల విలువలను కనుగొనవలయును.

భాజ్యములు 60, 60, 30, 12, 576 (దృఢ సూర్య భగణములు) క్రమముగా తీసికొని కుట్టకములు సాధించినచో మధ్యసూర్యుడు 4955-11-28-0-29 ; వికలావశేషము 155519.

ఇవియే చాలు భాస్కరాచార్య-II గణిత మేధాశక్తిని మన స్మరణకు తెచ్చుటకు. ఇట్టి మేధాశక్తి మన పూర్వులకు ఉండినందులకు మనము గర్వపడవలసినదే. ఆచార్య.

కూర్పులు (పుంజములు) : నిర్వచనము : పరిమిత ఘటకములు కాని, అపరిమిత ఘటకములుకాని కల ఒక సమూహములో ఏ రెండు a, b ఘటకములపై పరికర్మచే ab లభించిన, అది ఆ సమూహములో ఒక ఘటకమై ఉండిన, ఆ సమూహమునకు కూర్పు లేదా పుంజము అని పేరు.

(ఏ) ఆ పరికర్మకు సంయోజనన్యాయము $a(b\ c) = (a\ b)\ c$ అనువర్తించును.

(బి) a, b లు రెండు ఘటకములయిన, ఆ కూర్పులో $ax = b$; $ya = b$ సమీకరణములగునట్లు ఘటకములు x, y ఉండవలయును.

ఏవరణ : (1) ధనపూర్ణాంకముల పుంజములోని ఘటకములకు సంకలన, గుణకారములు అన్వయించిన, ఆ కూర్పు సంకలనమునకు మాత్రము నిర్వచింపబడును. కూర్పులోని ఘటకములన్నియు పూర్ణాంకములయినందున, రెండవ నియమము $ax = b$, $ya = b$ అన్వయింపదు. భిన్నాంకములుకూడ ఉండిన ఈ నియమము అన్వయించును. కాబట్టి, శూన్యము (0) తప్ప తక్కిన సంఖ్యలు గల క్షేత్రమునకు సంకలన, గుణకారములు అన్వయించును.

పుంజములో ఒక ఘటకము x_0 తో కూడిన ఘటకము a మారకుండిన, అనగా $ax_0 = a$ అయిన x_0 ఒక సర్వసమ ఘటకము. అట్టిది ఒక కూర్పులో ఒకటే ఉండునని నిరూపింపవచ్చును.

(2) ప్రయోగాత్మకముగా ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము. 1, 2, 3 సంఖ్యలతో గుర్తింపబడిన మూడు వస్తువుల తీసికొని వానిలో పరివర్తనము వలన కలిగిన కూర్పును విమర్శింతము. అందు ఏర్పడు ఆరు ఘటకములు క్రింద నీయబడినవి.

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ మొదటి రెండు వస్తువుల పరివర్తన

$x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ మొదటి వస్తువు, కడపటి వస్తువు పరివర్తన

$x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ కడపటి రెండు వస్తువుల పరివర్తన.

$x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ మొదటి రెండు వస్తువుల పరివర్తన. తర్వాత కడపటి రెండువస్తువుల పరివర్తన;

$x_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ మొదటి రెండువస్తువులపరివర్తన, తర్వాత మొదటి, మూడవ వస్తువుల పరివర్తన.

ఇందు కొన్ని పరికర్మల విమర్శింతము t

(a) x_2, x_3 పరికర్మల x_1 పై క్రమముగా ప్రయోగించిన

$$x_3 \cdot x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $x_3 \cdot x_2 = x_6$

(b) $$x_4 \cdot x_3 \cdot x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_4 \; x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $x_4 \cdot x_3 \cdot x_2 = x_3$

(c) $$x_2 \cdot x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1$$

కాబట్టి $x_2 \cdot x_2 = x_1$

(d) $x_2 \cdot x_2 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1 = x_2$

అనగా $x_2^3 = x_2$

ఈ ఫలితములన్నిటిని ఒక పట్టికలో వ్రాయవచ్చును.

వరుసలు	వంశములు					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	x_2	x_1	x_5	x_6	x_3	x_4
x_3	x_3	x_6	x_1	x_5	x_4	x_2
x_4	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_4	x_2	x_3	x_6	x_1
x_6	x_6	x_3	x_4	x_2	x_1	x_5

ఇందు సర్వసమఘటకము x_1.

ఉపకూర్పులు (సబ్ గ్రూప్స్) :

x_1, x_5, x_6 మూడును చేరి ఒక ఉపకూర్పు అగును.

$x_1 \cdot x_5 = x_5$; $x_1 \cdot x_6 = x_6$; $x_5 \cdot x_6 = x_1$;

$x_1 \cdot x_1 = x_1$; $x_5 \cdot x_5 = x_6$; $x_6 \cdot x_6 = x_5$

మరియొక ఉదా : x_5, x_5^2, x_5^3 లేదా x_5, x_5^2, x_1

ఇట్టి కూర్పులకు క్రమచయ కూర్పులు (పర్మ్యుటేషన్ గ్రూప్) అని పేరు. ఇందు మూడు వస్తువులు కలవు; కాబట్టి దీని అంశమూడు; ఈ మూడు వస్తువులచే 6 ఘటకములు గల కూర్పు ఏర్పడును. దాని క్రమసంఖ్య 6. ఒక ఘటకముచే ఏర్పడిన కూర్పునకు $[x_5, x_5^2, x_5^3]$ చక్రీయ (సైక్లిక్) కూర్పు అని పేరు.

సారాంశము : ఒక కూర్పులో పరిమిత లేదా అనంత ఘటకము లుండును. పైన పరిమిత ఘటకములను గురించి చర్చించితిమి. అనంతకూర్పునకు ఉదాహరణముగా ధన పూర్ణ సంఖ్యలను తీసికొందము. వీనికి అన్వయించు పరికర్మలు సంకలనగుణకారములు. సంకలనములో వ్యవకలనముకూడ ఇమిడిఉండునట్లు తలచుకొనిన ధనపూర్ణ సంఖ్యల సంకలన పరికర్మప్రకారము ఒక కూర్పుగా ఏర్పడదు. ఏలన సంకలన పరికర్మలో ఋణసంఖ్య లభించిన అది కూర్పులోచేరి ఉండదు. కాబట్టి ధన పూర్ణసంఖ్య లన్నియుచేరి సంకలన పరికర్మలో ఒక కూర్పుగా తీసికొనుటకు వీలులేదు.

కాని, ధన ఋణ పూర్ణసంఖ్యలు, శూన్యరాశితోకూడ సంకలన పరికర్మప్రకారము ఒక కూర్పుఅగును. కాబట్టి ఈ కూర్పు సంకలన వ్యవకలన పరికర్మల ప్రకారము సంవృతము అని చెప్పుదురు. భాగహారమును గుణకారము యొక్క విలోమ కర్మయని తీసికొనిన, ధన, ఋణ శూన్య సంఖ్యలు చేరి ఈ పరికర్మ ప్రకారము ఒక కూర్పుగా ఏర్పడదు. ఏలన భాగహారము వలన భిన్నాంకములు లభించును. శూన్యము కాని వాస్తవిక సంఖ్యలన్నియు ఈ పరికర్మల ప్రకారము ఒక కూర్పుగా ఏర్పడును.

సామాన్యపరిశీలన : సజాతి రాశులచే ఏర్పడు కూర్పుల గురించి పరిశీలించితిమి. కూర్పు ధర్మములు విజాతిరాశుల మధ్య కొన్నిసమయములందు కనబడును.

ఉదా : $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$: ఈ నాలుగు సంఖ్యలుచేరి గుణకార పరికర్మ క్రింద ఒక కూర్పుగా ఏర్పడును.

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = +1; \; (1) \times (-1) = -1$$

ఇట్లే అన్నిటికి సరిచూడవచ్చును. దీనిని G కూర్పు అందురు.

నాలుగు భ్రమణములచే ఏర్పడు ఒక కూర్పును తీసికొందము ఒక సమతలములో ఒక ఋజురేఖ OX, 0°, 90°, 180°, 270° కోణములగుండ భ్రమణము చేసిన ఏర్పడు కూర్పును G′ అని తీసికొందము. ఏ రెండు భ్రమణముల చేర్చినను ఈ కూర్పులో ఉండు మరియొక భ్రమణము లభించును. మొదట OX ఋజురేఖ 90° కోణము గుండను తర్వాత 270° గుండను భ్రమణము చేసిన, భ్రమణము 360 లేదా 0° లభించును. G, G′ కూర్పులో ఉండు నాలుగు ఘటకములకు పరస్పర అనురూపత ఏర్పరుప వచ్చును.

1 కి అనురూపభ్రమణము 0° గుండ

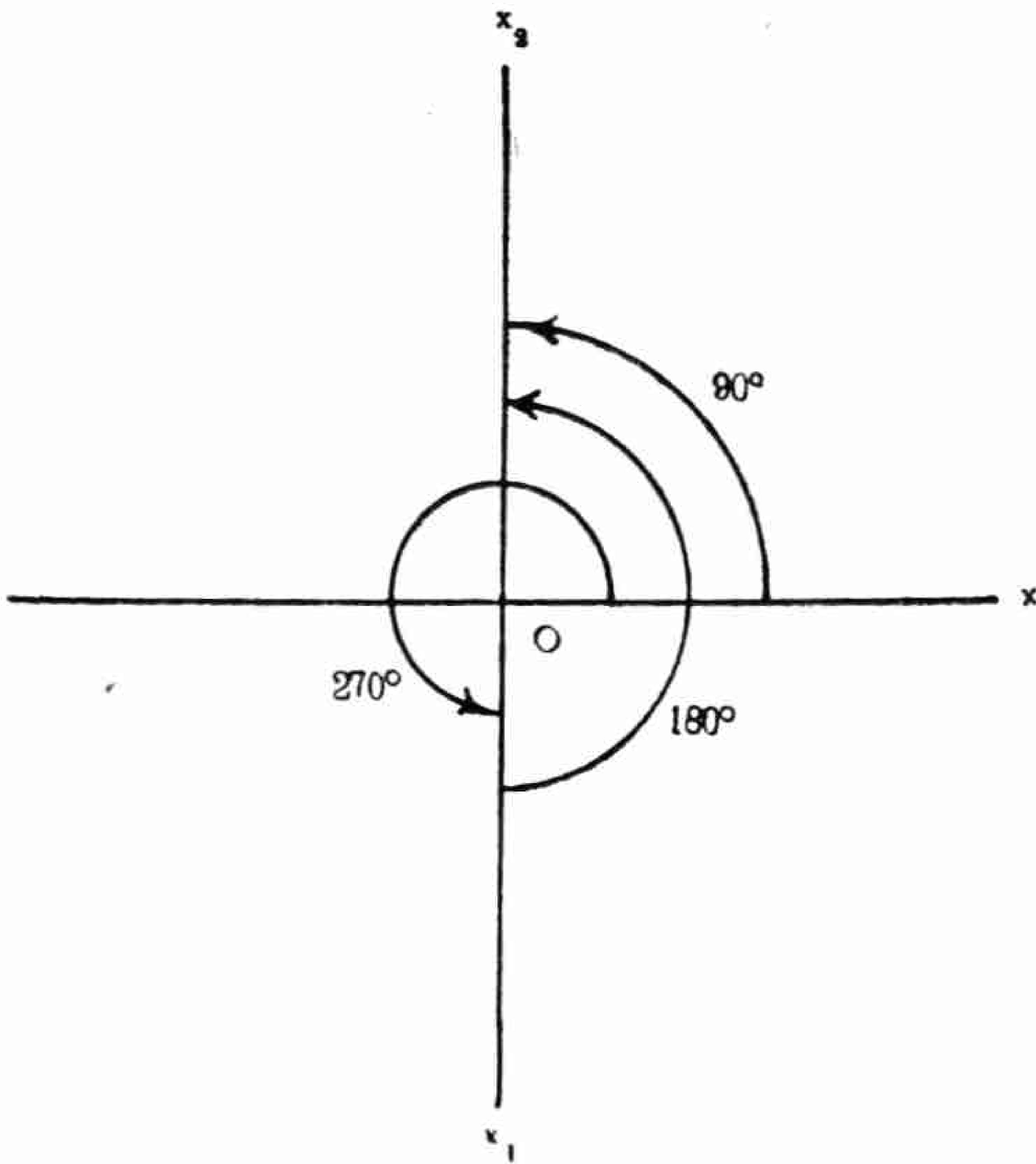
$\sqrt{-1}$ అనురూపభ్రమణము 90° గుండ

-1 అనురూపభ్రమణము 180° గుండ

$-\sqrt{-1}$ అనురూపభ్రమణము 270° గుండ

వాని వాని గుణముల ననుసరించి G లో రెండు ఘటకముల చేర్చిన, అట్లే G′ లో వానికి అనురూప ఘటకముల చేర్చిన లభించు ఘటకములు అను రూపములై యుండును. G లో నుండు ఘటకములు $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ చేర్చినచో ఘటకము 1 లభించును గదా! G′ లో ఉండు అనురూప భ్రమణములు 90°, 270° చేర్చిన భ్రమణము 360° లేదా 0° లభించును. అది 1 కి అనురూపఘటకము. ఈ ధర్మము ప్రతి జతకు అన్వయించును. చిత్రము 97 ను గమనించుము. G, G′ కూర్పుల గురించి ఈ క్రింది ధర్మములు బోధపడుచున్నవి :

1. రెండింటిలోను ఫలకములు సమానములు. 2. G లో నుండు ప్రతి ఘటకమునకు G′ లో ఒక ఘటకము మాత్రము



చిత్రము 97

అనురూపముగా ఉండును. 3. G లో రెండు ఘటకముల చేరికవలన ఘటకము x లభించిన, G′ లో వానికి అనురూప ఘటకముల చేరికవలన x' ఘటకము లభించిన x, x' ఘటకములు అనురూపములు.

కూర్పుల ప్రాశస్త్యము : కాబట్టి విజాతీయ కూర్పుల లోని మార్పులను సరిపోల్చవచ్చును. ఇందుచే ప్రౌఢ గణితమునందును, భౌతికశాస్త్రమునందును గల నికెత ప్రశ్నలు సులభసాధ్యములు కావు. ప్రత్యక్ష జగత్తులోని కఠిన సమస్యలను కల్పిత జగత్తులో వానికి అనురూప సమస్యల మూలమున సాధింపవచ్చును. కొన్ని సమయములందు గణితవేత్తలు దార్శనికులైరి. దానికి ఉదాహరణము డేకార్ట్ అను ఫ్రెంచ్ దార్శనికుడు. పితాగొరస్ సంఖ్యను ఈశ్వరుడని తలచెను. అతని ధ్యానమంత్రము "దేవతలకు, మానవులకును జనకుడగు హేదివ్య సంఖ్యా! మమ్ము కాపాడుము". "భగవంతుడు ఎల్లప్పుడు జ్యామితి శాస్త్రవిదుడగుచున్నాడు" అని ప్లేటో ప్రకటించెను.

కొన్ని సంవత్సరములకు పూర్వము భౌతిక సంఘటనములను ప్రతికృతుల మూలమున విమర్శించుచుండిరి. ఉదాహరణమునకు వెలుతురు ఆకాశములో తరంగరూపమున ప్రసరించుచుండునని ఒక సిద్ధాంతము ప్రతిపాదింపబడెను. కాని పరమాణు ఉపపరమాణు ధర్మముల వివరించుపట్ల ప్రతికృతులు పనికిరాలేదు. పరమాణువులలో సంభవించు సంఘటనలు ప్రత్యక్షగోచరములుగావు. వాటినుండి వెలువడు వికిరణముల మూలమున అంతయును కనుగొనవలసి ఉన్నది. కాబట్టి భౌతికప్రపంచము గణిత సమీకరణములచే బంధింపబడిన అమూర్తమాపక సంకేతములనియు అవి ఏదో వింతరూపమున ప్రత్యక్ష జగత్తును ఆవరించి ఉన్నవనియు శాస్త్రజ్ఞులు వివరించి ఉన్నారు. అది మన ప్రత్యక్ష జగత్తునకు భిన్నమైనది. ప్రచారములో ఉండు గణితము అచట వాడుటకు వీలుకాదు, దానికి ఒక నూతన గణితము కావలయును. అదియే కూర్పువాదము అని ఎడ్డింగ్‌టన్ ప్రతిపాదించెను. ఐన్‌స్టయిన్ భౌతిక శాస్త్రమును జ్యామితిగా మార్చెను. అది చతుః పరిమాణిక ఆకాశజ్యామితి. కాని ద్విపరిమాణిక ఆకాశజ్యామితి మూలమున ఆ జ్యామితిలోని అంశములను వివరింపవచ్చును. ద్విపరిమాణిక ఆకాశ జ్యామితిని సమతల జ్యామితి అని చెప్పుదురు,

సమతలములో అనంత సంఖ్యాకబిందువులు కలవు. నిరూపకముల మూలమున వానిని సామాన్యముగా (x, y) చే గుర్తింపవచ్చును. ఒక బిందువు (x', y') యొక్క ధర్మములను మరియొక బిందువు (x, y) నుండి కనుగొనుటకు సూత్రములను ప్రతిపాదింపవలయును. ఆ సూత్రములు పరివర్తన సూత్రములను పేరుతో వ్యవహరింపబడును. వాని సమీకరణములు $x' = \phi(x, y)$; $y' = f(x, y)$: వీనికి మిక్కిలి సులభరూపములు :

$$x' = a_1 x + b_1 y$$
$$y' = a_2 x + b_2 y$$

వీనికి రేఖీయ పరివర్తనసూత్రములు అనిపేరు. ఇందు a_1, b_1, a_2, b_2 రాశులు ముఖ్యరాశులు.

సాంకేతికముగా వానిని

$$\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| = A$$

అని గుర్తింపవచ్చును. A ను మాత్రిక (మాట్రిక్స్) అందురు.

మరల $x'' = a_1' x' + b_1' y'$

$y'' = a_2' x' + b_2' y'$ పరివర్తన సూత్రములచే మార్చిన లభించు నూతన మాత్రిక :

$$A' = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}$$

x, y రాశులను x'', y'' రాశులగా మార్చునపుడు x', y' పరివర్తనముల వాడకఉండిన, లభించు పరివర్తనముల మాత్రిక ఏది? ఈ కడపటి మాత్రికను A'' అనిన, పరివర్తన A తర్వాత పరివర్తన A' తీసికొనిన లభించు పరివర్తన మాత్రికను $A'' = A' \cdot A$ అని గుర్తింతుము. దీనికి మాత్రిక గుణకారము అనిపేరు. ఇందు వరుసక్రమము మారకూడదు.

మాత్రికల మూలమున పరమాణువాదములోని సమస్య లన్నియు సాధింపవలయును. వేరుమార్గములేదు. కూర్పువాదము బహుగణితశాఖావలంబితము. ప్రత్యక్ష భౌతిక జగత్తులోని సమస్యలను కల్పిత జగత్తులోని అంశముల పరిశోధనవలన సాధింపవచ్చునని కూర్పు (పుంజ) వాదము వలన తెలియుచున్నది.

ప్రయోగము : కూర్పువాదము అంతరీకరణ సమీకరణ సాధనలలో ఎక్కువ ఉపయోగకరము. ప్రయోగాత్మక గణితములో అంతరీకరణసమీకరణములు కేంద్రస్థితిని వహించి ఉన్నవి. ప్రయోగాత్మక గణితములోని సమస్య లన్నిటిని అంతరీకరణ సమీకరణములుగా మార్చవచ్చును. ఈ సమీకరణముల సాధనపై పై సమస్యల సాధన ఆధారపడి యున్నది. భౌతికశాస్త్ర పరిశోధనలో కొన్ని అంతరీకరణ సమీకరణములు లభించును. వాని సాధించుట సాధారణ మార్గములో వీలుకాదు. కాని కూర్పువాదమును అనుసరించి వాటిని సాధింపవచ్చును.

ఒక కూర్పు (పుంజము)లో పరిమితఘటకములుండవచ్చును. లేదా అనంతఘటకము లుండవచ్చును. ఒక గోళమును దాని వ్యాసమును అక్షముగా ఉంచి భ్రమణము చేసిన, గోళతలముపై ఉండు బిందువులు అనంత కూర్పునకు తగిన ఉదాహరణము. తర్వాత పొడుగువంటి ఒక భౌతిక మహత్వమును కొలుచుటకు పలువిధములగు కొలతల వాడవచ్చును. ఈ కొలతల యూనిట్‌లు అన్నియుచేరి ఒక అనంతకూర్పు అగును. ఆ కొలతలు కిలోమీటరులు, మీటరులు, సెంటీమీటరులు, మిల్లీమీటరులు మొదలగు వాని గుణకములుగాని భాగములుగాని కావచ్చును. ఒక ఏకాంకమునుండి మరియొక ఏకాంకమునకు మార్చుటకు తగిన గుణకము ఒకటి వాడవలయును.

అడుగులలో నుండు ఒక కొలతను S పరివర్తనము సెంటిమీటరలుగా మార్చనిమ్ము. d అడుగులు, d' సెంటిమీటరులుగా మారినపుడు, ఉపయోగపడు పరివర్తన గుణకము a అని తీసికొనుము. ఇపుడు పరివర్తన సంబంధము $d' = ad$ అని లభించును. S' పరివర్తనముచే దీనిని క్రోసులుగా మార్చుటకు గుణకము a' అయిన d'' క్రోసులు, $a' d'$ సెంటిమీటరులు. ఇట్లే అనంతమగు పరివర్తనలు S, S', S'' ఏర్పరుపవచ్చును. వాని గుణకములు క్రమముగా a, a', a'' అని తీసికొందము. పరివర్తనలు $S, S', S'' \ldots$ అన్నియు ఒక కూర్పు అని తీసికొనిన పరివర్తనలు S, S'ల కలిపిన లభించు పరివర్తనము $S'S$. కాబట్టి $d'' = a'd' = a'ad = a''d$ అని తీసికొనవచ్చును. a', a వాస్తవికసంఖ్యలు, వానిలబ్ధము ఒక వాస్తవికసంఖ్య a'' అని తీసికొనవచ్చును. ఈ పరివర్తనము, నిర్వచనము ప్రకారము కూర్పులో చేరినది. $x' = ax$ లో ఉండు a కు ప్రాచలము (పెరామీటర్) అనిపేరు. కాబట్టి $x' = ax$ ఒక అనంత, అవిచ్ఛిన్న ఏకప్రాచల కూర్పు. భౌతికపదార్థములకు అన్నిటికి పరిమాణము కలదు. పరివర్తనము వలన విలువలు మారును. కాని పరస్పర నిష్పత్తి మారదు. ఇది ఒక ముఖ్యసిద్ధాంతము. పొడవు డుగు L, కాలము T, అయిన, వేగము $= L/T = LT^{-1}$ ఘాతమాపకముల మూలమున నిష్పత్తిని కనుగొనుట సులభము.

త్వరణము = వేగము / కాలము $= L/T^2 = LT^{-2}$;

మూర పరివర్తన గుణకము a. అనగా $L = aL'$

కాలపరివర్తన గుణకము b, అనగా $T = bT'$; అయిన వేగమునకు నూతనసూత్రము $= ab^{-1} LT^{-1}$;

త్వరణమునకు $ab^{-2} LT^{-2}$

ఫోరియర్ ఏకాంకము సాధారణ పరివర్తనచే వేడివలన భూగోళములో కలుగు మార్పులు చిన్నగోళములలో కలుగు మార్పులనుండి కనుగొనవచ్చును. ఇతర శాస్త్రజ్ఞులు ఈ సిద్ధాంతమును చక్కపరచిరి. ఈ విధానమును విమా (పరిమాణిక) విశ్లేషణము (డైమెన్షనల్ ఎనాలిసిస్) అని చెప్పుదురు.

ఇందు ముఖ్యతత్త్వము : ఒక భౌతిక సమీకరణము తీసికొందము. అది బీజగణిత సమీకరణముగా గాని, అంతరీకరణ సమీకరణముగా గాని ఉండవచ్చును. దాని విమా (పరిమాణము) సమఘాతములో ఉండవలయును. అనగా భౌతిక పదార్థముల యూనిట్‌లలో ఏ పరివర్తన కలిగినను, ఆ సమీకరణము యథార్థముగా ఉండవలయును.

అనగా కూర్పువాదరీత్యా భౌతిక పదార్థముల యూనిట్లలో ఎట్టి పరివర్తన కలిగినను, భౌతిక సమీకరణము అచలత లేదా నిర్వికృతికలదై ఉండవలయును, అనగా మారకూడదు. ఒక లోలకము యొక్క అంతరీకరణ సమీకరణమును ఉదాహరణముగా తీసికొందము :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{l} \qquad \ldots \ldots (1)$$

దీనికి $x' = ax$, $t' = bt$ అను పరివర్తనను ఉపయోగించిన, లభించు సమీకరణము యొక్క ఆకారము మారకూడదు.

నూతన సమీకరణము :

$$\frac{1}{ab^{-2}} \cdot \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{-g'}{ab^{-2}} \cdot \frac{x'}{a} \cdot \frac{a}{l'}$$

$$\therefore \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{g'x'}{l'} \qquad \ldots \ldots (2)$$

పై రెండు సమీకరణములు ఒకే విధముగా ఉన్నవి. (1) లో ఉండు రాశులు : x, t, g, l; (2) లో ఉండు అనురూప రాశులు : x', t', g', l'. భౌతిక సమీకరణములో కూర్పు పరివర్తనచే కలుగునిర్వికృతి లేదా అచలతవలన అనేక విధములగు అనుకొనని ఆనుకూల్యములు ఏర్పడుచున్నవి. సమీకరణము (1) ని సాధించిన ఆవర్తనకాలము p యొక్క విలువ లభించును. అది g, l రాశులపై ఆధారపడియుండును. అని అందరికిని తెలిసిన విషయము.

కూర్పు వాదమును ఉపయోగించి (1)వ సమీకరణమును సాధింపకయే p యొక్క విలువ సాధింపవచ్చును.

ఇపుడు $p = kg^m l^n \qquad \ldots \ldots (3)$

అని తీసికొని k ఒక స్థిరరాశియనుకొందము. ఇపుడు m, n యొక్క విలువల కనుగొనవలయును.

కూర్పు సిద్ధాంతరీత్యా $x' = ax$, $t' = bt$ పరివర్తనవలన (1) యొక్క ఆకారము మారకూడదు. p యొక్క విలువ కాలము t పై ఆధారపడి ఉండుటచే కొత్త రాశులను (′) చే గుర్తించిన, లభించు సమీకరణములు :

$$p' = bp\,;\; g' = \frac{a}{b^2}\,g\,;\; l' = al$$

(3) లో ఈ విలువల ప్రతిక్షేపించిన లభించు సమీకరణము :

$$\frac{p'}{b} = k\left[\frac{b^2 g'}{a}\right]^m \left[\frac{l'}{a}\right]^n$$

$$\therefore\; p' = k\,(g')^m\,(l')^n \cdot \frac{b^{2m+1}}{a^{m+n}}$$

సాధనము యొక్క ఆకారము అచలము (మారనిది) అయినందున, $p' = k\,(g')^m\,(l')^n$

కాబట్టి $\frac{b^{2m+1}}{a^{m+n}}$ యొక్క విలువ ఎల్లప్పుడు ఒకటిగా ఉండవలయును. అందుచే a, b ల ఘాతములు శూన్యము కావలయును. అనగా,

$$2m + 1 = 0\,;\; m + n = 0 \text{ లేదా}$$

$$m = -n = -\tfrac{1}{2}.$$

∴ ఆవర్తనకాలము $p = k\sqrt{l/g}$ ఇచ్చట k ఒక స్థిర రాశి. దాని విలువ ప్రయోగాత్మకముగా కనుగొనవచ్చును.

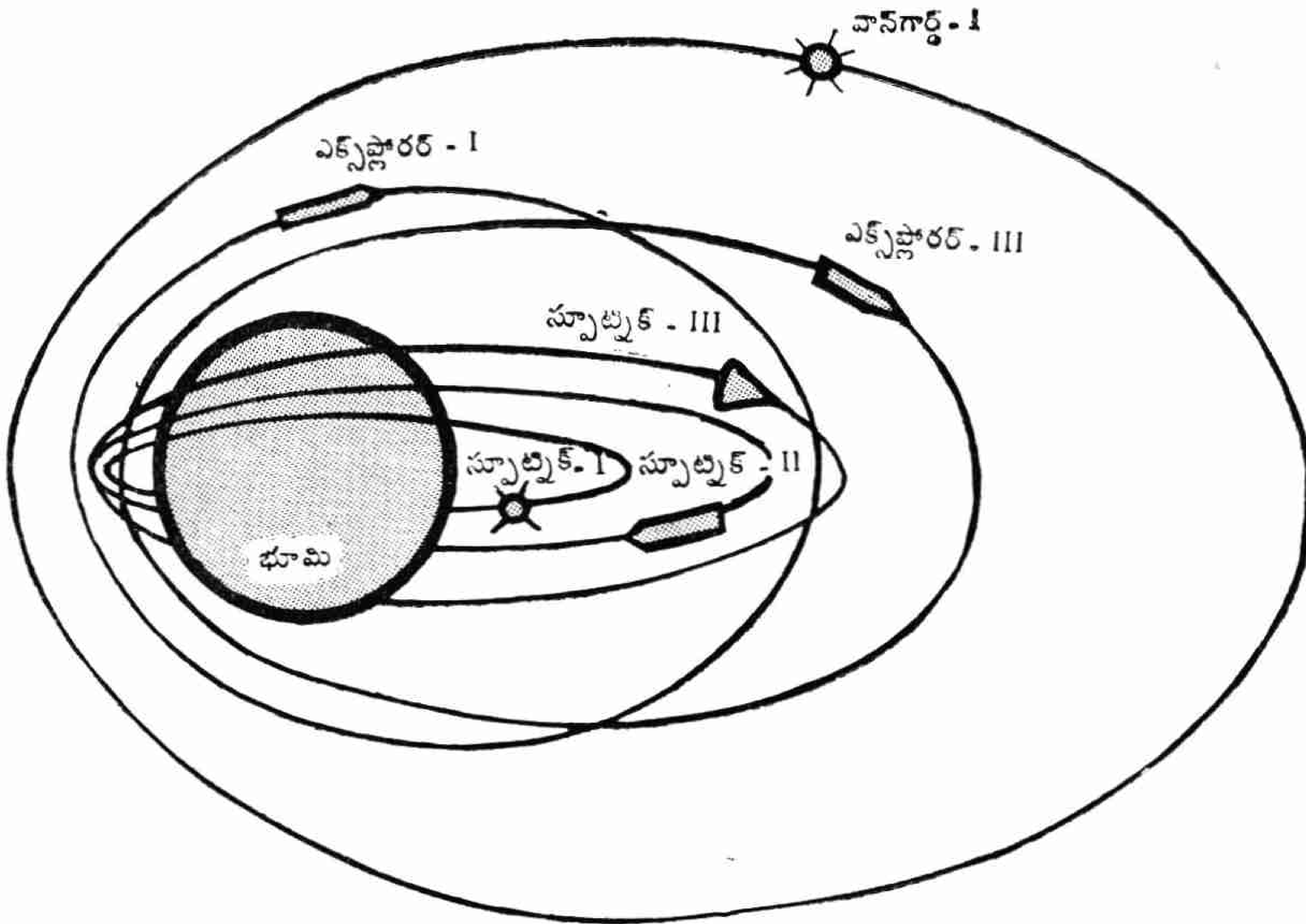
ద్రవగతులను విమర్శించునపుడు కూర్పువాదము చాల ఉపయోగము, ద్రవగతి సమీకరణములు అన్నివిధములగు పరివర్తనములకును, అనగా భ్రమణము, స్థానాంతరత గుర్తించు పరివర్తనలలో కూడ అచలత కలిగి ఉండును. కాబట్టి భౌతిక శాస్త్రములో ఒక శాఖలో లభించు ద్రవగతి సమీకరణములు ఇతర శాఖలలో కూడ వాడవచ్చును.

ఆచార్య.

కృత్రిమ ఉపగ్రహములు : ఇటీవల ఖగోళ యాంత్రికశాస్త్రము ఒక విశిష్ట వస్తువుయొక్క చలనము విషయమై చర్చింపవలసివచ్చినది. ఆ వస్తువే మానవనిర్మితమైన కృత్రిమ ఉపగ్రహము. 1957 అక్టోబరు 4 వ తేదీని సోవియట్ రష్యా మొట్టమొదటి కృత్రిమ ఉపగ్రహమును విడుదలచేసినది. దానిబరువు 83.6 కిలోగ్రాములు. 500 కిలోగ్రాములు తూకముగల రెండవ కృత్రిమ ఉపగ్రహమును సోవియట్ రష్యా 1957 నవంబరు 3 వ తేదీనాడు కక్ష్యలో ప్రవేశపెట్టెను. తరువాత యునైటెడ్ స్టేట్స్ కూడ 1958 ఫిబ్రవరి నుండి 1.5 – 67.5 కిలోగ్రాములు బరువుగల అనేక కృత్రిమ ఉపగ్రహములను కక్ష్యలలోనికి పంపెను.

ఒకసారి భూమిచుట్టు కక్ష్యలోనికి ఒక ఉపగ్రహమును పంపితిమేని తరువాత చంద్రుడు తిరుగుచున్నట్లే అదికూడ భూగురుత్వాకర్షణ వశమున భూమిచుట్టు తిరుగ ఆరంభించును. తొలిని, ఇది ఒక దీర్ఘవృత్త (విలుప్త) పథమును చేపట్టును. ఈదీర్ఘవృత్తమునకు ఒక నాభిస్థానమందు భూమి ఉండును. ఆ దీర్ఘవృత్తస్థానము ఆకసమందు తొలిని మారదు, కాని ఎంతకాలమో మారకుండ ఉండదు. ఏలన శీఘ్రముగా అది భూవాతావరణ బలమునకు వశమై దాని పథము మార్పుచెందును. కాని, భూమి సంపూర్ణగోళముగా ఉండక గోళాభరూపమునకు అదుమబడుటచేత, దాని సాంద్రత దానిలోపల ఏకరూపముగా ఉండకపోవుటచేత, న్యూటన్ నియమము సూచించునట్లు సరిగా భూకేంద్రము వైపు ఆ ఉపగ్రహము ఆకర్షించబడదు.

ఆ సంశుద్ధ దీర్ఘవృత్తచలనము యొక్క స్వభావమును గణితమూలమున నిర్ణయించి, ఉపగ్రహమును కక్ష్యలోనికి ఎక్కింతురు. ఆకసములో ఆ ఉపగ్రహముయొక్క కక్ష్యను భూతలమునుండి అపజ్యా, పరిజ్యా స్థానములను నిర్ణయించుటకై తొలిగణనమును చేయుదురు. దానిని పైకి పంపు రాకెట్టు మొదట ఊర్ధ్వ ముఖముగ పైకి లేచును; తరువాత నియంత్రణ యాంత్రిక సాధనముల సహాయమున ఆ రాకెట్టు ఊర్ధ్వ దిక్కునుండి క్రమముగా తిరిగి, ఒక నియత పూర్వనిర్దిష్ట క్షణమందు ఇంచుమించు క్షైతిజ తలములో చలించ ఆరంభించినతరువాత దానినుండి ఉపగ్రహము నిర్దిష్టవేగముతో విడుదలచేయబడును. విడుదల చేయబడిన క్షణమందు ఉపగ్రహమునకు ఈయబడినవేగము దాని కక్ష్య ఆకారమును నియమించును. రాకెట్టుయొక్క చివరి చలనతలము ఉపగ్రహముయొక్క కక్ష్యాతల మగును.



చిత్రము 98 కృత్రిమ ఉపగ్రహముల కక్ష్యలు

భూకేంద్ర బిందువునుండి r_0 దూరములో ఉన్న ఉపగ్రహమునకు $V_0 = \sqrt{\frac{fm}{r_0}}$ అను వేగమును ఇచ్చిన ఎడల (ఇచ్చట f గురుత్వాకర్షణ గుణకము, m భూమిద్రవ్యరాశి) అది r_0 అర్ధవ్యాసముగాకలిగి, భూకేంద్రము కేంద్రముగాగల వృత్తకక్ష్యలో భూమిచుట్టు తిరుగును. ఈ వేగమునకు వృత్తీయవేగము అని పేరు f, m ల విలువలు $6{\cdot}67 \times 10^{-8}$, $5{\cdot}974 \times 10^{27}$. కాబట్టి $\sqrt{(fm)} = 1{\cdot}99 \times 10^{10}$. ఇంతకన్న నిశితమయిన గణనరీతులను ఉపయోగించగా $\sqrt{(fm)} = 1{\cdot}99654 \times 10^{10}$ అను విలువ లభించును. ఈ విలువను తీసికొనినచో ఆ వస్తువు వృత్తీయ వేగమునకు క్రింది సూత్రము లభ్యమగును.

V_0 సెం. మీ./ సెకను $= 1{\cdot}99654/r_0$

ఇచ్చట r_0 (దూరము) సెంటీమీరులలో తెలుపబడినది. ఉపగ్రహపు వృత్తీయవేగము r_0 అధికమగుకొలది తగ్గుచుండును. దృష్టాంతమునకు భూతలమునుండి 100 కి. మీ.ల ఎత్తులో భూమధ్యరేఖవద్ద (అనగా r_0=6, 478 కి, మీ.) V_0 = 7,845 మీటరులు/సెకను ; 300 కిలో మీటరుల ఎత్తులో (r_0= 6,678 కి. మీ.) V_0=7727 మీటరులు / సెకను. ఉపగ్రహము యొక్క ప్రారంభ వేగము V_0 వృత్తీయ వేగముకన్న ఎక్కువై పరాసీయ వేగముకన్న తక్కువైనచో ఆ ఉపగ్రహపు కక్ష్య దీర్ఘవృత్త రూపమును తాల్చును. నేటివరకు ఉపగ్రహముల ప్రవేశపెట్టుటలో ఈ సందర్భమే జరిగినది. కక్ష్యయొక్క ఉత్కేంద్రత v, v_0లపై ఆధారపడి ఉండును. ఈ క్రిందిసమీకరణము ఉత్కేంద్రతను తెలుపుచున్నది :

$$e = \left[\frac{v}{v_0}\right]^2 - 1$$

కక్ష్యయొక్క అర్ధదీర్ఘాక్షము (లేదా భూకేంద్రము నుండి ఉపగ్రహపు మధ్యమాన దూరము): $a = \frac{r_0}{1-e}$.

ఈ పక్షమునందు దానిపరిజ్యా (అనగా భూకేంద్రమునకు అందుచే అనగా భూతలమునకు సమీపబిందువు) ఉపగ్రహమును పైకి విసరినచోటునకు సూటిగా మీదఉండును. ఆకక్ష్య అపజ్యా(అనగా భూకేంద్రమునకు అటులనే భూతలమునకు దూరబిందువు) భూగోళమునకు సూటిగా అవతల ప్రక్క ఉండును. ఈ బిందువులు, అది విడుదల చేయబడిన క్షణమందు భూతలమునకు, పైన దాని సాపేక్షస్థానములకు అన్వయించునవి. కాలము కడచుకొద్ది ఆపరిశుద్ధ కక్ష్యయొక్క పరిజ్యా, అపజ్యాబిందువులు ఆకాశమందు తొలిస్థానములనే అంటుకొనును. కాని భూతలముపై ఉన్న

స్థానములకు సాపేక్షముగ చలించుచుండును. ఏలనన భూమి తన అక్షముపై తానుతిరుగగా ఆకాశమందు అక్షుబ్ధ ఉపగ్రహము యొక్క కక్ష్య దానిస్థానమును మార్చుకొనదు. ఉపగ్రహము భూమిని ఒకసారి చుట్టివచ్చినతర్వాత భూమి తన భ్రమణకారణమున ఒక నియత భ్రమణకోణమును రచించును. అందువలన ఉపగ్రహముయొక్క కక్ష్య వేరు వేరు భూభాగములపై కనబడును.

భూకేంద్రమునుండి ఉపగ్రహము యొక్క అపజ్యా దూరము $r_A = a\ (1 + e)$ అగును. పరిజ్యా ఎత్తు $h_A = r_A - 6{,}378$. భూకేంద్రమునుండి పరిజ్యాదూరము r_p, భూతలమునుండి పరిజ్యాఎత్తు h_p ఈ క్రిందివిధమున సంబద్ధములై ఉన్నవి.

$$r_p = a\ (1 - e)\ ;\ h_p = r_p - 6{,}378$$

ఇచ్చట a కిలోమీటరులలో తెలుపబడినది. ఇచట ఒక విషయము జ్ఞాపకముంచుకొనవలెను. భూతలమునుండి ఎత్తు (r — 6,378 కి. మీ.) అను భేదముచే తెలుపబడినది. ఇందు r భూకేంద్రమునుండి ఉపగ్రహముయొక్క దూరము. వాస్తవికముగ ఈ ఎత్తు భూమధ్య రేఖనుండి లెక్కింపబడినది. భూమి ధ్రువములవద్ద అదుమబడి ఉండుటచే భూతలముపై తక్కినస్థానముల విషయమై వ్యత్యాసము గోచరించును.

భూమి కేంద్రమునకు 6,378 కి. మీ. దూరములో వృత్తాకార కక్ష్యలో చలించుచున్నది అనుకొన్న ఉపగ్రహముయొక్క కక్ష్యా ఆవృత్తికాలము T_0 క్రింది సమీకరణము సహాయమున లెక్కించవచ్చును :

$$T_0 = \frac{2\pi R}{V_{00}} = \frac{2\pi\ .\ 6{,}378}{7{,}906} = 84{\cdot}48 \text{ నిమిషములు}$$

కెప్లర్ 3 వ నియమము ప్రకారము (చూ. సమీక-పు. 80) అర్ధదీర్ఘాక్షముతో దీర్ఘవృత్త కక్ష్యయందు చలించుచున్న ఉపగ్రహము యొక్క కక్ష్యావృత్తి కాలము క్రింది సంబంధములో ఉండవలయును :

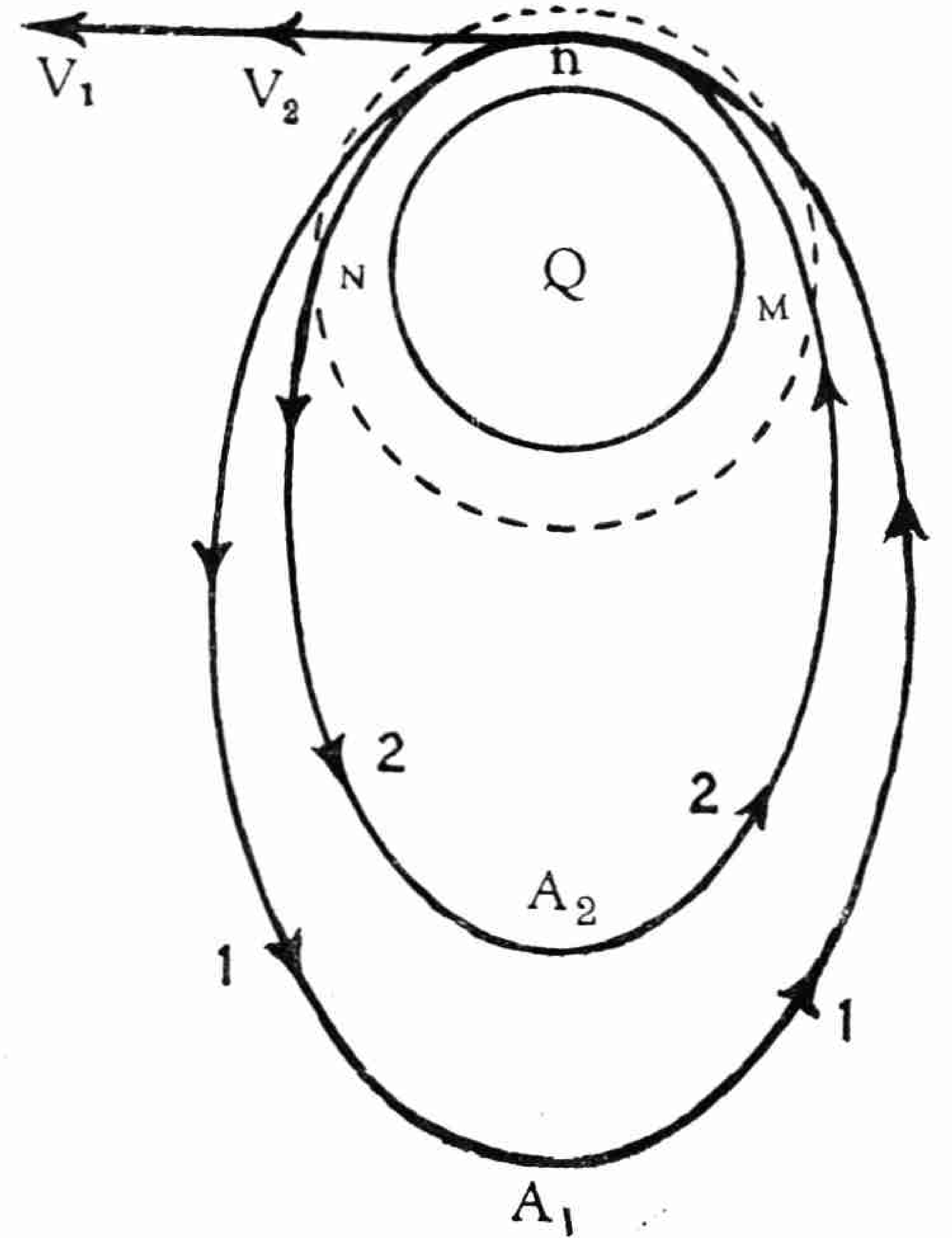
$$\frac{T^2}{T_0^{\ 2}} = \frac{a^3}{R^3} \text{ లేదా, } \frac{T^2}{(84{\cdot}48)^2} = \frac{a^3}{(6{,}378)^3}$$

ఇచ్చట a కిలోమీటరులలోను, T నిమిషములలోను ఈయబడినవి. ఉపగ్రహమును విడుదలచేసిన రెండు మూడు రోజులలో కావించబడిన ప్రత్యవేక్షణల వలన దానికి కక్ష్యాంశములను గణించి, దానికి మన మాకాంక్షించిన కక్ష్యకును, అది వాస్తవముగా స్వీకరించిన కక్ష్యకును వ్యత్యాసము ఎంత ఉన్నదో నిర్ణయించవచ్చును.

భూ వాతావరణము కృత్రిమ ఉపగ్రహముల గతిని నియమించుటలో ప్రధానమయిన పాత్రను వహించుచున్నది. వాతనిరోధమువలన ఉపగ్రహము వేగము తగ్గి క్రమముగా భూమికి దగ్గరగా చేరును. 100-150 కి. మీ. ఎత్తులలో ఉపగ్రహము వేడెక్కి, ఛిన్నా భిన్నమై మామూలు ఉల్కలవలె భూతలముపై బడునంతటి నిరోధము గాలివలన కలుగును.

కృత్రిమ ఉపగ్రహములు దీర్ఘీకృత కక్ష్యలలో చలించును. కనుక వాతావరణ సాంద్రత భూతలము నుండి ఎత్తు ఎక్కువగుకొలది వడిగా పడిపోవును. కాబట్టి గాలి వలన ఉపగ్రహమునకు కలుగు నిరోధము కక్ష్యయొక్క అపజ్యావద్ద, అనగా ఉపగ్రహము భూమికి సన్నికృష్టతముగా వచ్చినపుడు, గరిష్ఠ విలువలో ఉండును. అపజ్యా వద్ద ఉపగ్రహముల వేగము ఏ మాత్రము తగ్గదు.

ఒక పథకము ననుసరించి ఉపగ్రహగతిని క్రింది విధమున తెలియజేయవచ్చును. చిత్రము 99లో తొలికక్ష్య 1 అను దీర్ఘవృత్తము కానిమ్ము. శిథిలరేఖ Q ఒక సరిహద్దు. దీని మీద వాతావరణ నిరోధము గణించ తగినంతగా ఉండదు. వాతావరణ నిరోధము పరిజ్యాకి దగ్గరగా ఉన్న కక్ష్యాఖండమందు వ్యక్తమగును.



చిత్రము 99
వాతావరణమందు ఉపగ్రహముయొక్క వేగక్షీణత

దీర్ఘవృత్తము 1 లో చలించుటకు ఆవశ్యకము పరిజ్యా నుండి ఉద్గమించు ఉపగ్రహము యొక్క వేగము V_1 అనుకొందము. పరిజ్యానుండి ఉపగ్రహము దూరమగుకొలది

దాని వేగము తగ్గి అపజ్యావద్ద కనిష్ఠ విలువ స్వీకరించును.

$$V_1 = \frac{\sqrt{fm} \times \sqrt{1-e_1}}{\sqrt{a_1\,(1+e_1)}}$$

ఇచ్చట a_1 = అర్ధదీర్ఘాక్షము, e_1 = దీర్ఘవృత్తము1 యొక్క ఉత్కేంద్రత. కక్ష్య 1 లో ఉపగ్రహము పరిజ్యాకి మరలి వచ్చినప్పుడు దాని వేగమునందు హ్రాసము కన్పట్టును. పరిజ్యావద్దనే వేగమందు హ్రాసము సంభవించునని (చూ. చిత్రము 99)మనము తలంచినచో, అది పరిజ్యానుండి ఉద్గమించునపుడు దాని గమన దిశలో మార్పు ఉండదు ; కాని, వేగము మట్టుకు తగ్గును. ఈ క్రొత్త వేగము V_2 చే $(V_2 < V_1)$ తెలుపుదము. తరువాతి పరిపథము 2 వ కక్ష్యలో ఉండును. ఈ కక్ష్య యొక్క అపజ్యాదూరము h_a, అర్ధదీర్ఘాక్షము a_2 తక్కువ విలువలు కలిగియుండును. పరిజ్యావద్ద వాతావరణ సాంద్రత ఎక్కువగుకొలది ఉపగ్రహము వేగము తగ్గుటయే కాక h_a, a లు కూడ తగ్గును.

భూమి యొక్క ఆకర్షణబలమును ఎదిరించి, ఉపగ్రహము A_1 బిందువును వెనుకకు చేరునట్లు చేయుటకు V_2 వేగము చాలదు. కక్ష్య 2 తక్కువ దీర్ఘీకృతము. దాని ఉత్కేంద్రత e_2 కూడ 1వ దీర్ఘవృత్తపు e_1 కన్న తక్కువ. 2 వ కక్ష్య అపజ్యావద్ద ఉపగ్రహపు వేగము :

$$V_2' = \frac{\sqrt{fm} \times \sqrt{1-e_2}}{\sqrt{a_2\,(1+e_2)}}$$

$a_2 < a_1$; $e_2 < e_1$. కనుక V_2', V_1' కన్న ఎక్కువ. కెప్లర్ మూడవ నియమము నుండి రెండవ కక్ష్యలో ఉపగ్రహావృత్తి మొదటి దానిలో కన్న తక్కువ.

ఇట్లు పరిజ్యావద్ద ఉపగ్రహము వేగము తగ్గి, అపజ్యావద్ద ఎక్కువగును. దీనికి కారణమిది. అపజ్యావద్ద ఉపగ్రహము భూమికి దగ్గరగా చేరుటవలన భూమ్యాకర్షణ బలము ఎక్కువగును. ఎక్కువగుచున్న గురుత్వబలము ఉపగ్రహము యొక్క వేగమును, త్వరణమును కూడ ఎక్కువచేయును. పరిజ్యావద్ద సంభవించు గతినిరోధ ఫలము అపజ్యావద్ద ఎక్కువైన గురుత్వాకర్షణ బలముచే సమతులితము చేయబడి, కక్ష్యలో ఉపగ్రహము యొక్క ఫలిత మధ్యమానవేగము ఎక్కువగును.

ఇట్లు వాతావరణము ఉపగ్రహగతిలో తెచ్చిపెట్టు క్షోభమును కనుగొంటిమి. ఈ క్షోభము వలన ఫలించు మార్పులు ఒక ఆవృత్తిని అనుసరించవు. a, T, e అను కక్ష్యాంశల మూల్యహ్రాసముగాని, వృద్ధిగాని ఒకే దిశలో జరుగునట్టివి. ఈ సంక్షోభముల అనుశీలన భూతలముపై మిక్కిలి ఎత్తులలో వాతసాంద్రతను కనుగొనుటకు మిక్కిలి ఉపయోగించుచున్నది. గతినిరోధము ఎక్కువగుకొలది ఉపగ్రహము ఎత్తు తగ్గుచు అపజ్యావద్ద వాతసాంద్రత కూడ (తొలిదశలలో) ఎక్కువగుచుండును. ఉపగ్రహము దిగుమొగము బట్టురేటు దానిని ఎదిరించు వాతనిరోధమునకు, దీనికి కారణమగు వాతసాంద్రతలోని హెచ్చుదలకు మానము.

ఇట్లు పంపబడిన మొదటి రెండు సోవియట్ ఉపగ్రహములపై కావింపబడిన ప్రత్యవేక్షణల పర్యవసానముగ 200 కి. మీ. ఎత్తులో వాతసాంద్రత ఇదివరకు ఊహించబడిన దానికన్న 5 నుండి 10 రెట్లు ఎక్కువని నిర్ణయింపబడినది.

మే. ప. స.

కృష్ణనీహారికలు, విశ్వధూళి : సూర్య కుటుంబము నుండి రెండు, మూడు వేల కాంతివత్సరముల దూరము వరకుగల ద్రవ్యసంచయము రెండుపాళ్లు నక్షత్రములుగాను, ఒకపాలు వాయు, లేదా ధూళి రూపముగాను ఉన్నది.

నక్షత్రాంతర ద్రవ్య సంచయములో 99% వాయు రూపముగాను, మిగిలినభాగము అతి సూక్ష్మ గుళికలు ఘన రూపముగాను ఉండును. వీని నిర్మాణ విధానమును సులభముగా కనుగొనవచ్చును. విశ్వధూళి అనేక విధములుగా ఆవిష్కరింపబడు చున్నది. కొన్ని సమయములందు అది కాంతిమంతములగు నీహారికలు (నెబ్యులాలు) గా ప్రకాశించు చున్నది ; మరికొన్ని సమయములందు కాంతిహీననక్షత్రములను మరుగుపరచు ఖాళీస్థలమువలె ఉండును. దూరపు నక్షత్రములనుండి వచ్చు వెలుతురు ఈ ధూళిచే ఎర్రబడుచున్నది.

నీహారికలుఅన్నియు కాంతిరేఖావర్ణమాలను ప్రదర్శించునని నమ్మకము కలదు. మృగశిరా నక్షత్రవర్ణమాల అట్టిదే. కాని కృత్తికా నక్షత్రవర్ణమాల శోషణ రేఖలను చూపుచున్నది. కాంతిరేఖా వర్ణమాలలుగల నీహారికలు అత్యధిక ఉష్ణతారల దగ్గర ఉండుననియు, శోషణరేఖా వర్ణమాలలు గల నీహారికలు ఉష్ణహీన నక్షత్రముల పరిసరములోనివి అనియు తెలియుచున్నది. ఇట్టి నీహారికలు నక్షత్రకాంతి పూరిత విశ్వమేఘములని నిశ్చయముగా చెప్పవచ్చును.

నక్షత్రాంతర ప్రదేశములో ఉండు మేఘరూప విశ్వవాయువుగాని, విశ్వధూళి కాని విస్తరీకృత నీహారికగా కనబడుటకు సన్నిహితనక్షత్రకాంతిచే ప్రకాశింపబడవలయును.

అనేక నక్షత్రాంతర మేఘములు తగినట్టి కాంతిగల నక్షత్రముల సమీపమున లేనందున కృష్ణనీహారికలుగా

కనపడుచున్నవి. అవి మన మందాకినిలో కాంతిమంత ప్రదేశములను మరుగుపరచి కృష్ణవర్ణ రంధ్రములుగా కనబడును; వానికి అవతలవైపున ఉండు దూరనక్షత్రములను కాంతిరహితములుగా చేయును. నక్షత్ర సంఖ్యలను కనుగొని, కృష్ణనీహారికల దూరము కనుగొనుట వాడుక. అదియుగాక, నక్షత్ర కాంతి ఈ మేఘములగుండ వచ్చుటచే ఎంతవరకు ఎరుపుగా మారుచున్నదో దానిని బట్టి కూడ దూరమును నిర్దేశింపవచ్చును. 0.0000254 సెం. మీ. వ్యాసముగల కణములు ఎక్కువగా శోషణము చేయును. నక్షత్రాంతరకణములు కార్బన్, నైట్రోజన్, ఆక్సిజన్, హైడ్రోజన్ మిశ్రమని నిరూపింపబడినది.

ఈ నీహారికలకు దూరముగానుండు నభోమూర్తులు కూడ అరుణవర్ణమును దాల్చును. దానికి కారణము ఏదో విశ్వద్రవ్యమై ఉండవలయును. మందాకినీ మండలమునకు 25° ల దూరములో సర్పిల నీహారికలు, విలుప్త నీహారికలును ఉండునట్లు ఛాయాచిత్రములు చూపుచున్నవి. అవి అన్నియు మందాకినీ మండలములు. అట్టివి మన మందాకిని వైపుతీయు ఫోటోలలో కనబడవు. మందాకినీ ప్రపంచము 500,000,000 కాంతివత్సరముల వరకు పరిశోధింపబడినది. అవి అన్నియు అన్నిచోట్ల ఏకరూపముగా ప్రసరించి ఉండవలయును గదా ? మన మందాకినియందుండు విశ్వద్రవ్యముతో అవి మరుగుపడి మనకు కనబడుటలేదు.

మన మందాకిని అంచులందుండు వస్తువులచే ఇట్టి శోషణము జరుగును. ఇట్లు జరుగుచోటు సౌర కుటుంబమునకు చాల దగ్గరగ ఉండును. మనకు 6000 జ్యోతి (కాంతి) ర్వత్సరముల దూరములోపుననే శోషణములో 2/3 భాగము జరుగును. మందాకినీ కేంద్రమునుండి మిగత 20000 కాంతి వత్సరముల ప్రదేశములో విశ్వధూళి ఎక్కువగా ఉండుటకు అవకాశము లేదు. ఆచార్య.

కృష్ణరావు, తడకమళ్ల : ఈయన 19వ శతాబ్దము ఉత్తరార్ధమున జీవించియుండెను. ఆంధ్ర బ్రాహ్మణులలో గోలుకొండ వ్యాపారులశాఖకు చెందిన ఇతని నివాస స్థలము మద్రాసు. ఇతడు 'లీలావతీ గణితము'ను ఆంధ్రీకరించెను; జ్యామితిని, బీజగణితమును నూతనపద్ధతులను అనుసరించి వ్రాసెను. ప్రాచీనగణితశాస్త్రములను తెనిగించిన ఆంధ్రులలో ఈయనయే కడపటివాడు. ఆ. వెం.

కెప్లర్, యోహాన్ (1571 - 1630) : ప్రసిద్ధ గ్రహగతి సూత్రముల నిర్మాత ; జర్మనీ ఖగోళశాస్త్రవేత్త ; గణిత శాస్త్రవేత్త ; జర్మనీలోని వైల్ నగరము జన్మస్థానము ; 1571 డిశంబర్ 27 జన్మదినము. తండ్రి హైన్‌రిఖ్ కెప్లర్, వర్ట్సబర్గ్ రాజసైనికుడు. తల్లి కాతరిన్ గుల్డెన్‌మాన్.

కెప్లర్ బాల్యము కష్టములతో గడచినది. తండ్రి సదా త్రాగుబోతు; తల్లి అతికోపిష్ఠి ; నిరక్షరాశి ; మతిస్థిమితము లేనిది. నాలుగుఏండ్ల ప్రాయములో మసూచికము వచ్చి కెప్లర్‌కు దృష్టిలోపము, వికలహస్తములు సంభవించినవి. ఐదు ఏండ్ల వయస్సులో తండ్రి తన ఆస్తిని, ఉద్యోగమును కోలుపోయి వసతి గృహమును ప్రారంభించగా, కెప్లర్ విద్యవిరమించుకొని ఆ వసతి గృహములో సర్వర్‌గ పనిచేసెను.



చిత్రము 100 కెప్లర్

కాని, హైన్‌రిఖ్ తన కుమారుని ప్రజ్ఞను గుర్తించి 1586 నవంబర్ 26న అనగా కెప్లర్‌కు 15 ఏండ్ల వయస్సున టూబింజన్ యూనివర్సిటీ ప్రవేశార్హతను పొందుటకు శిక్షణనిచ్చు మోల్‌బ్రాన్ స్కూలులో కెప్లర్‌ను ప్రవేశపెట్టెను. దృష్టిలోపము, వికలహస్తములు, ఆర్థికఇబ్బందులు, కుటుంబ అంతఃకలహములు ఇత్యాది అనేక ప్రతిబంధకములు ఉన్నప్పటికి, 20 ఏండ్ల వయస్సు నిండకపూర్వమే కెప్లర్ టూబింజన్ యూనివర్సిటీలో ఎమ్. ఏ పట్టభద్రుడయ్యెను.

క్రైస్తవ మతబోధకుడు కావలెననే ఉద్దేశ్యముతో మొదట టూబింజన్ యూనివర్సిటీలో అతడు ప్రవేశించెను. కాని, కాలక్రమేణ మతవాతావరణము తన స్వభావమునకు అనువైనది కాదని గుర్తించెను; మతప్రవక్తల స్థిర దృక్పథాలు, పిడివాదము కూడ అతనికి నచ్చలేదు. మరియొక ప్రక్కన కోపర్నికస్ సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతమును పరోక్షముగ సమర్థించు తన ప్రొఫెసర్ మైఖేల్ మాస్ట్లిన్ బోధనలు ఇతనిని ఆకర్షించినవి. ఆనాటినుండి ఖగోళశాస్త్రముపై ఆతనికి జిజ్ఞాస అధికమైనది.

1594 లో గ్రాట్స యూనివర్సిటీలో ఖగోళశాస్త్ర లెక్చరర్‌గా చేరెను. బార్బారా ముల్లర్ వాన్ ములేఖ్‌ను 1597 లో కెప్లర్ వివాహమాడెను. 1598 లో గ్రాట్స యూనివర్సిటీ అధికారము రోమన్ కేతలిక్‌ల హస్తగతమైనది. ఆ మతాధికారులు యూనివర్సిటీ అధ్యాపకులందరు అవశ్యముగ రోమన్-కేతలిక్ మతమును స్వీకరింప

వలెనని నిర్బంధించుటచే కెప్లర్ తన ప్రొఫెసర్ పదవికి రాజీనామా ఇచ్చెను. వేరొక ఉద్యోగమునకు ప్రయత్నించుచుండగ, సుప్రసిద్ధ ఖగోళ అవేక్షకుడు టైకోబ్రాహితో పరిచయము ఏర్పడి అతనికి సహాయకుడుగ ప్రేగ్ వేధశాలలో చేరెను.

టైకోబ్రాహి శీఘ్రకోపిష్ఠి ; భూకేంద్రవాది : సూర్య కేంద్రవాదవ్యతిరేకి. సూర్యుడు విశ్వమునకు కేంద్రములో ఉన్నాడనుట భగవంతుని, భౌతికశాస్త్ర నియమములను ఉల్లంఘించుట అని అతని భావము. కెప్లర్ కోపర్నికస్ వాది ; అతిగర్విష్ఠి ; సునిశితహృదయుడు ; అయినప్పటికి వీరిరువురి సాహచర్యము అతిమృదువుగా కొనసాగుట ఆశ్చర్యకరమైనది. టైకోబ్రాహి తన వాదములో దోషము ఉన్నదనియు, కెప్లర్ ప్రజ్ఞను గుర్తించినవాడును అగుటచేతనే మరణశయ్యపైనుండి తానుచేసిన వేలాది ఖగోళ పర్యవేక్షణలను పరిశీలించి, క్రమపరచి, 'రుడాల్ఫ టేబుల్స్' అను పేరుతో ప్రచురింపవలయునని కెప్లర్‌ను కోరెను.

టైకోబ్రాహి మరణానంతరము (1601) అతని స్థానములో, రోమన్ చక్రవర్తి రెండవ రుడాల్ఫ తమ ఆస్థాన గణితశాస్త్రవేత్తగా కెప్లర్‌ను నియమించెను. అప్పటినుండి చనిపోవువరకు కెప్లర్ ఆ పదవియందుండెను.

ఆ తరువాత 8 ఏండ్ల అవిరళపరిశోధనల ఫలితముగా 1609 లో 'కుజగ్రహచలనముల విమర్శన' (కామెన్టెరీస్ ఆన్ ది మోషన్స్ ఆవ్ మార్స్) అను గ్రంథమును ప్రచురింపగల్గెను. ఈ గ్రంథములోనే గ్రహగతి సూత్రములలో మొదటి రెండింటిని ప్రచురించెను. అవి : 1. ప్రతిగ్రహము దీర్ఘవృత్తకక్ష్యలో సూర్యునిచుట్టు తిరుగుచుండును. ఆ దీర్ఘవృత్తముయొక్క ఒక నాభిలో సూర్యుడు ఉండును. 2. సూర్యునితో గ్రహమును కలుపురేఖ సమానకాలములలో కక్ష్యావృత్తములో సమాన వైశాల్యములను ఏర్పరచును. (అనగా గ్రహములు సూర్యునికి దగ్గరగు కొలది వాని వేగములు అధికమగును).

ఆ తరువాత 10 ఏండ్లకు 1680 లో 'హార్మొనీ ఆవ్ ది వరల్డ్' అను గ్రంథములో గ్రహగతి సూత్రములలో మూడవ దానిని ఆవిష్కరించెను. అది : వివిధగ్రహముల భ్రమణ ఆవర్తకాలముల వర్గములు, సూర్యునినుండి వాటి సగటుదూరముల ఘనములతో స్థిర అనుపాతములో ఉండును.

ఆస్థాన గణితశాస్త్రవేత్తగా నియమింపబడినప్పటినుండి అధికారులు అతనిని సరిగా గౌరవించలేదు ; అతనికి ఇచ్చు స్వల్ప జీతము కూడా సకాలములో ఎప్పుడు చెల్లించ బడలేదు. అందుచేత కెప్లర్ నిత్యదారిద్ర్యమును అనుభవించ వలసివచ్చెను. 1610 లో అతనిభార్య, పుత్రుడు మరణించిరి. దారిద్ర్యమునుండి విముక్తిని పొందవలెనని 1612 లో ఆస్ట్రియాలోని లింట్స్ యూనివర్శిటీలో గణితశాస్త్ర ప్రొఫెసర్‌గా చేరెను. అయితే ఈ సమయములో ఆస్థాన గణితశాస్త్ర పదవిని కూడా అతడు నిర్వహించుచుండెను. 1612 లో తిరిగి ద్వితీయ వివాహము చేసికొనెను.

ప్రొటెస్టెంట్ మతప్రియుడు అగుటచేత లింట్స్‌లో ఇతని ప్రొఫెసర్ పదవి 1626 లో పోయినది. అచ్చటనుండి ఉల్మ్ నగరముచేరి 3 ఏండ్లు ఉండెను. ఈ సమయములో రోమన్ ప్రభుత్వము నుండి సకాలములో ఇతని జీతము అందినది. ఆ ధనముతో 1627 లో టైకోబ్రాహి పర్యవేక్షణల ఆధారముగా రుడాల్ఫ టేబుల్స్ ప్రచురించెను.

1629 లో ఫ్రిడ్‌లాండ్ రాజు ఇతనిని రాస్టాక్ యూనివర్శిటీలో ప్రొఫెసర్‌గా చేరవలసినదిగా ఆహ్వానించెను. కెప్లర్ ఈ ఆహ్వానమును అంగీకరించెను. భవిష్యత్తు ప్రకాశవంతముగ కనిపించినది. కాని, ప్రభుత్వ ఖజానానుండి తనకు రావలసిన బకాయిని స్వయంగా అధికారులకు విన్నవించుకొని వసూలు చేసుకొనే నిమిత్తము కెప్లర్ రాటిస్‌బాన్ నగరము వెళ్లెను. అతని ఆశ నిరాశ అయినది. అధికారులు అతని మొర ఆలకించలేదు. ఈ ప్రయాణములో అతని ఆరోగ్యము పూర్తిగా చెడిపోయినది. నిరాశ, నిస్పృహలకు చలిజ్వరము తోడై రాటిస్‌బాన్‌లో కెప్లర్ 1630 నవంబర్ 15వ తేదీన మరణించెను. అతని దేహము రాటిస్‌బాన్‌లోని సెయింట్ పీటర్స్ చర్చి యార్డ్‌లో పూడ్చబడినది.

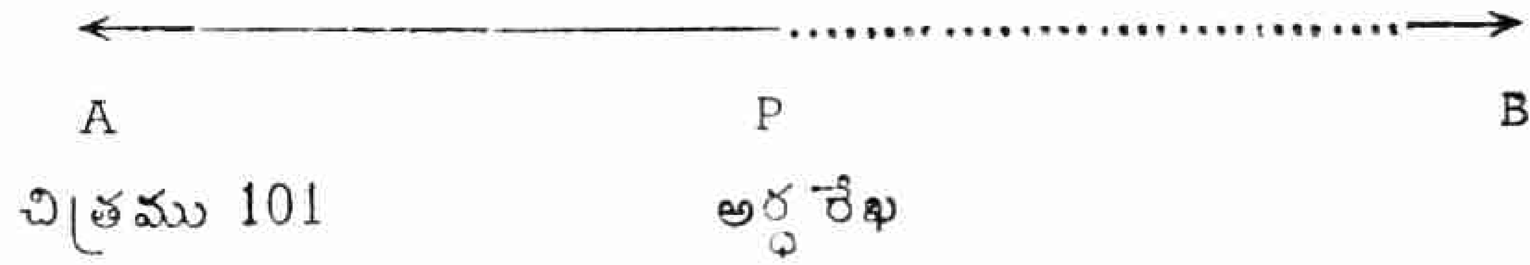
ఖగోళశాస్త్రములోనే కాక ఖగోళశాస్త్ర సంబంధ శాస్త్రములలోకూడ కొన్ని ముఖ్యభావములను కెప్లర్ ప్రవేశపెట్టెను. చాక్షుషశాస్త్రములో కాంతి వక్రీభవనముపై కొన్ని ముఖ్యభావములను, ఖగోళ దూరదర్శని సూత్రమును ఇతడు వివరించెను. ఇతని గణితజ్ఞానము కలనశాస్త్రము దరిదాపువరకు వెళ్ళెను. గురుత్వాకర్షణము, సముద్రముల స్రోతస్సులయందు కూడా ఇతనికి కొంత ప్రవేశముండెను.

పా. ల. నా.

కోణములు : ఒకేబిందువునుండి నిర్గమించు రెండు అర్ధరేఖలచే ఏర్పడు చిత్రమును కోణము అందురు. ఆ బిందువును కోణశీర్షము అని, ఆ అర్ధరేఖలను కోణబాహువు లని అందురు.

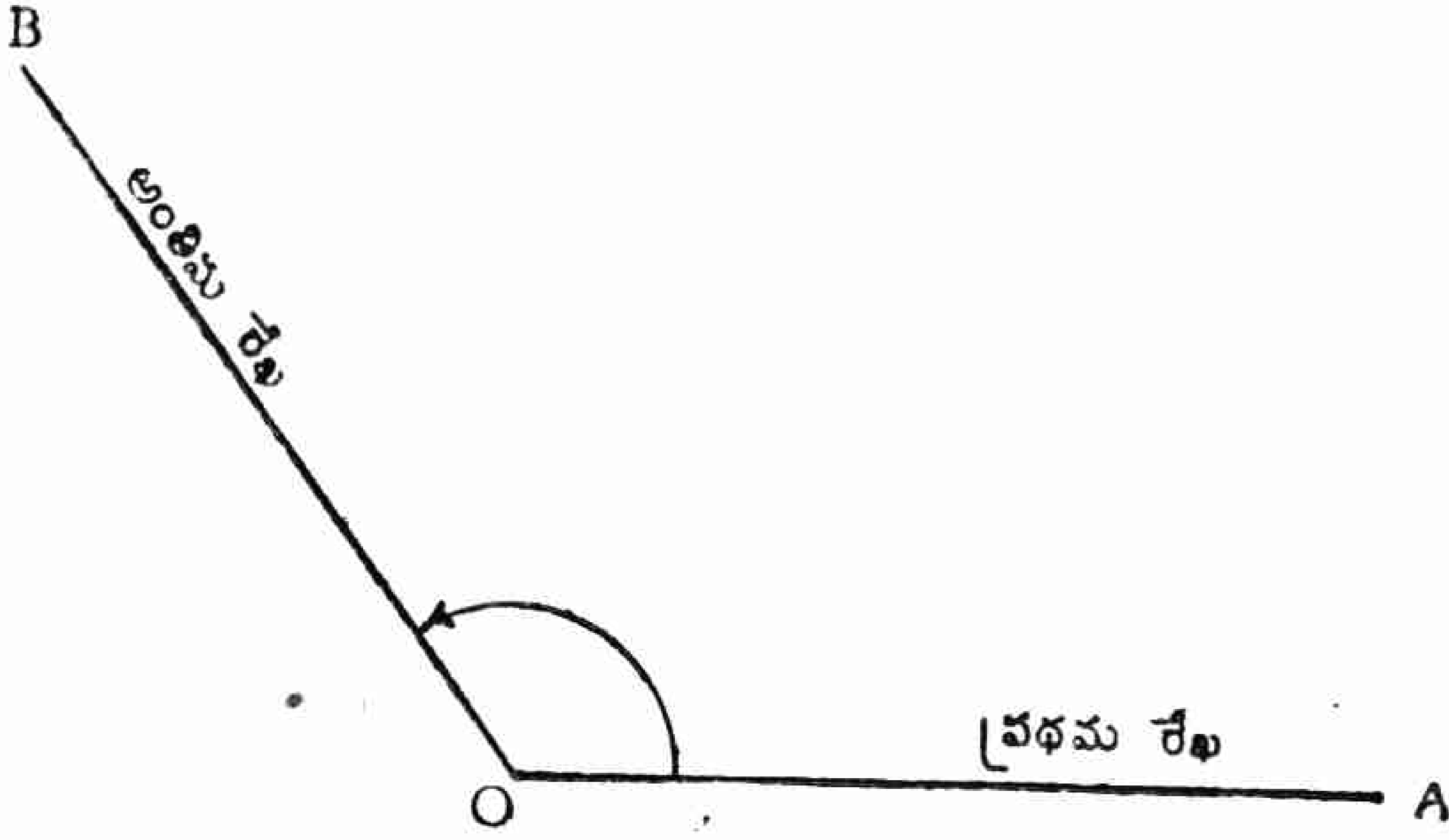
ఒక దత్తబిందువునుండి ఒకే దిశలో అనంతముగ వ్యాపించు ఋజురేఖా ఖండము అర్ధరేఖ.

ఉదా : చిత్రము 101 లో P బిందువు AB ఋజురేఖను PA, PB అను రెండు అర్ధరేఖలుగ విభజించినది. PA, PB లకు P ఉమ్మడి శీర్షము.



చిత్రము 101 అర్ధరేఖ

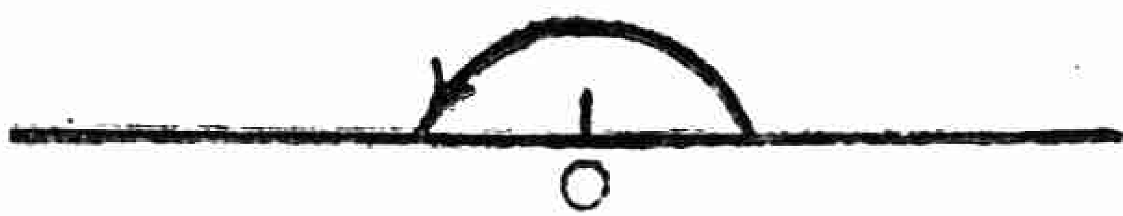
కోణబాహువుల పొడవులపై కోణపరిమాణము ఆధారపడి ఉండదు. ఆ రెండు బాహువులలో ఒకటి ప్రథమరేఖ. మరియొకటి అంతిమరేఖ. అంతిమరేఖ స్థానమును పొందు



చిత్రము 102 కోణము

టకు ప్రథమరేఖ చేయు భ్రమణపరిమాణమే కోణపరిమాణము. భ్రమణపరిమాణమును, దిశను సాధారణముగ బాణపుగుర్తుచే సూచించుదురు. భ్రమణదిశ సవ్యదిశ (క్లాక్ వైజ్) అయిన కోణము ఋణాత్మకమని, అపసవ్యదిశ (ఆంటీ క్లాక్ వైజ్) అయిన ధనాత్మకమని అందురు. 102 వ చిత్రములోని కోణమును ∠ AOB అని వ్రాయుట వాడుక. ఇచ్చట OA ప్రథమరేఖ; OB అంతిమరేఖ. ∠ AOB ఇచ్చట ధనాత్మకము. ∠ BOA ఋణాత్మకము. ∠ AOB = − ∠ BOA.

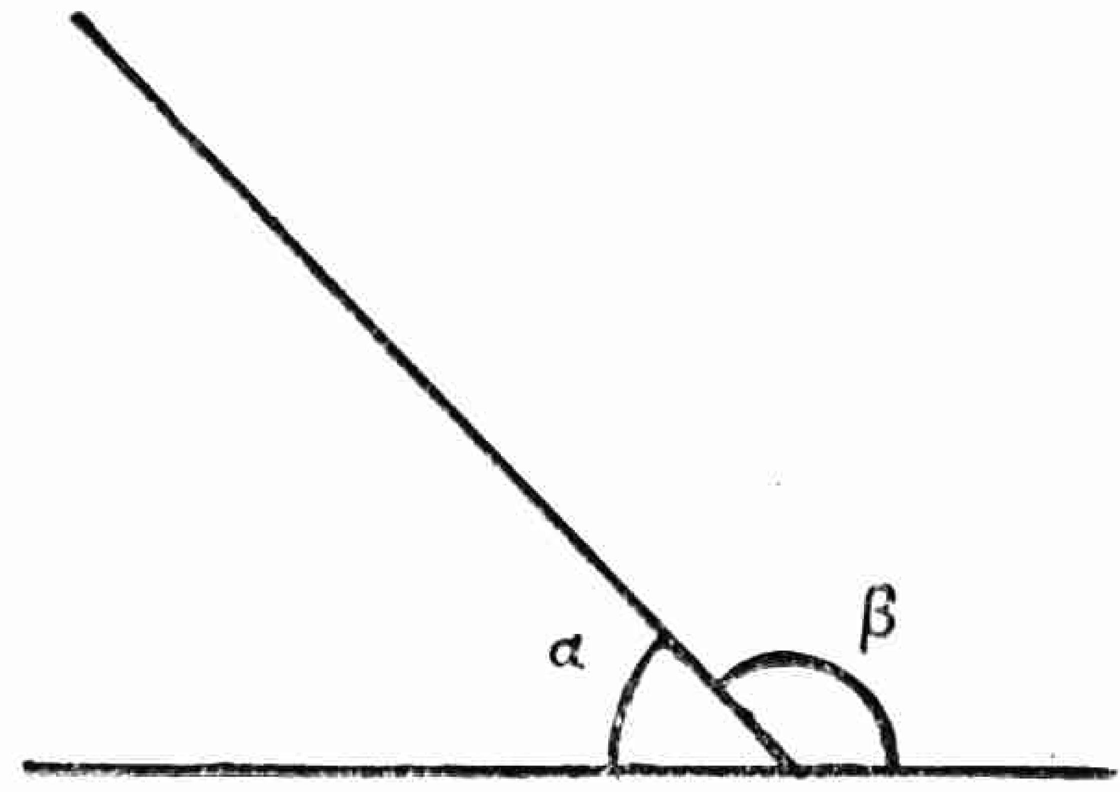
ఋజుకోణము (స్ట్రైట్ ఆంగెల్) : కోణము యొక్క బాహువులు శీర్షబిందువు నుండి వ్యతిరేఖ దిక్కులలో



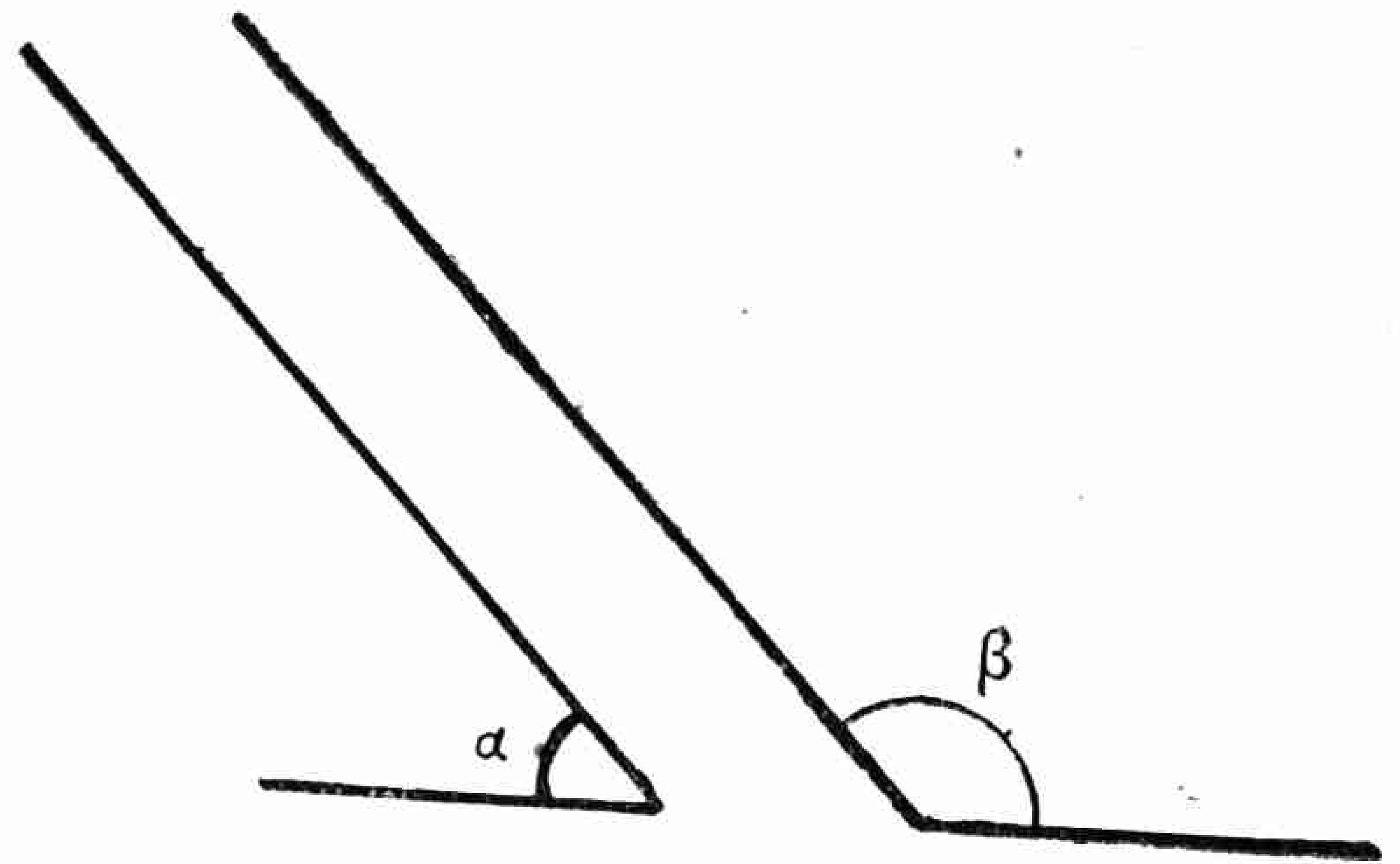
చిత్రము 103 ఋజుకోణము

విస్తరింపబడి ఏక ఋజురేఖగా ఏర్పడిన కోణమును ఋజుకోణము అందురు. ఋజుకోణము అర్ధభ్రమణము (180°) ను చూపును. అన్ని ఋజుకోణములు సమానములు (చూ. చిత్రము 103).

సంపూరకకోణములు (సప్లిమెంటరీ ఆంగెల్స్) : రెండు కోణముల మొత్తము ఒక ఋజుకోణమైనచో ($\alpha + \beta = 180^\circ$) వానిని సంపూరకకోణములు అందురు. α ని β యొక్క సంపూరకకోణమని అట్లే β ని, α యొక్క



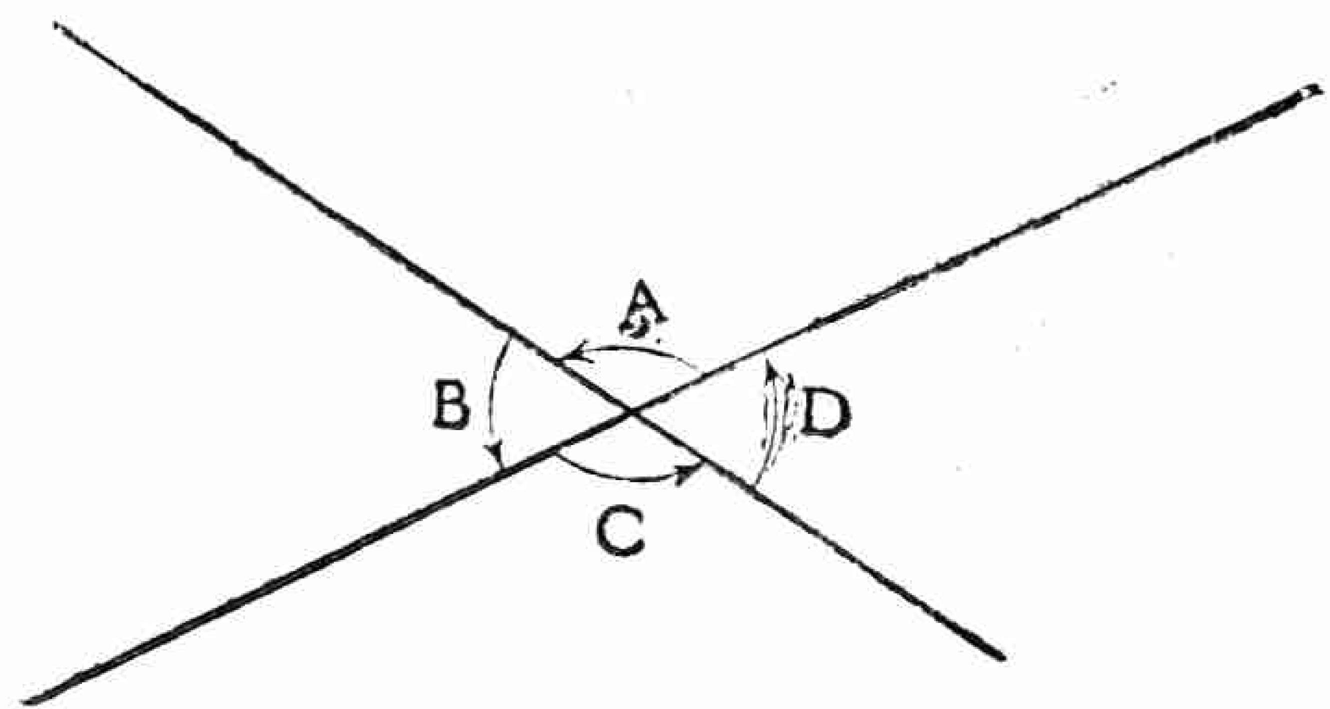
చిత్రము 104 a సంపూరక కోణములు



చిత్రము 104 b సంపూరక కోణములు

సంపూరకకోణమని అందురు (చూ. చిత్రము 104a, 104b).

శీర్షకోణములు (వర్టికల్ ఆంగెల్స్) : రెండు ఋజురేఖలు ఖండించుకొనునప్పుడు ఖండన బిందువుకు ఎదుటివైపు బాహువులచే రెండు జతల కోణములు (A, C ఒక జత ; B, D రెండవజత) ఏర్పడును. ఒక్కొక్కజతను



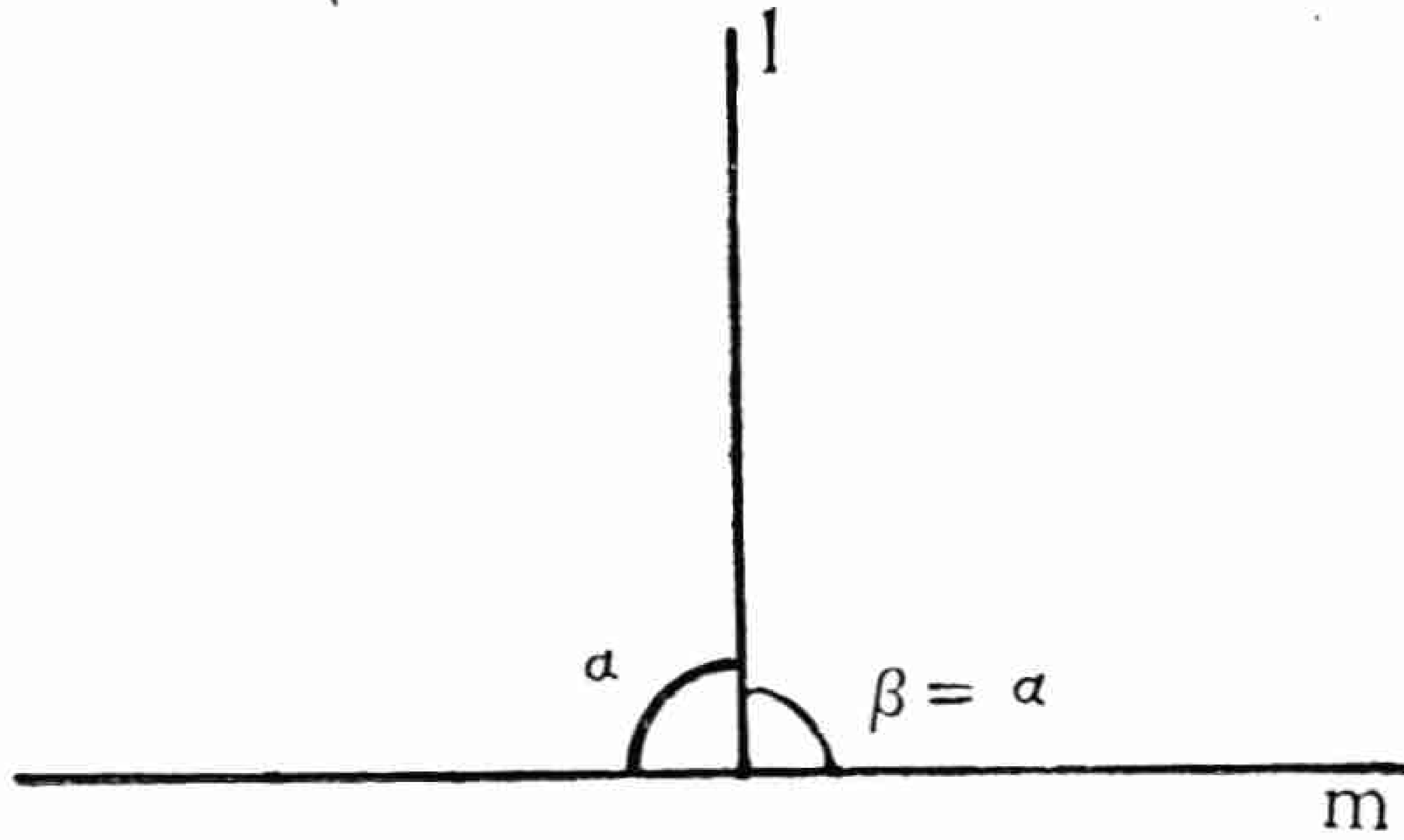
చిత్రము 105 శీర్షకోణములు

శీర్షకోణములు అందురు. శీర్షకోణములు సమానములు అనగా A = C ; B = D (చూ. చిత్రము 105).

చిత్రము 105 లోని A, D కోణములు ఆసన్నకోణములు. అట్లే A, B లు, B, C లు, C, D లు కూడ ఆసన్నకోణములు. అవి సంపూరక కోణములు కూడ.

లంబకోణము (రైట్ ఆంగెల్) : సమానమైన ఆసన్న కోణములు ఏర్పడునట్లు రెండు ఋజురేఖలు కలిసినప్పుడు

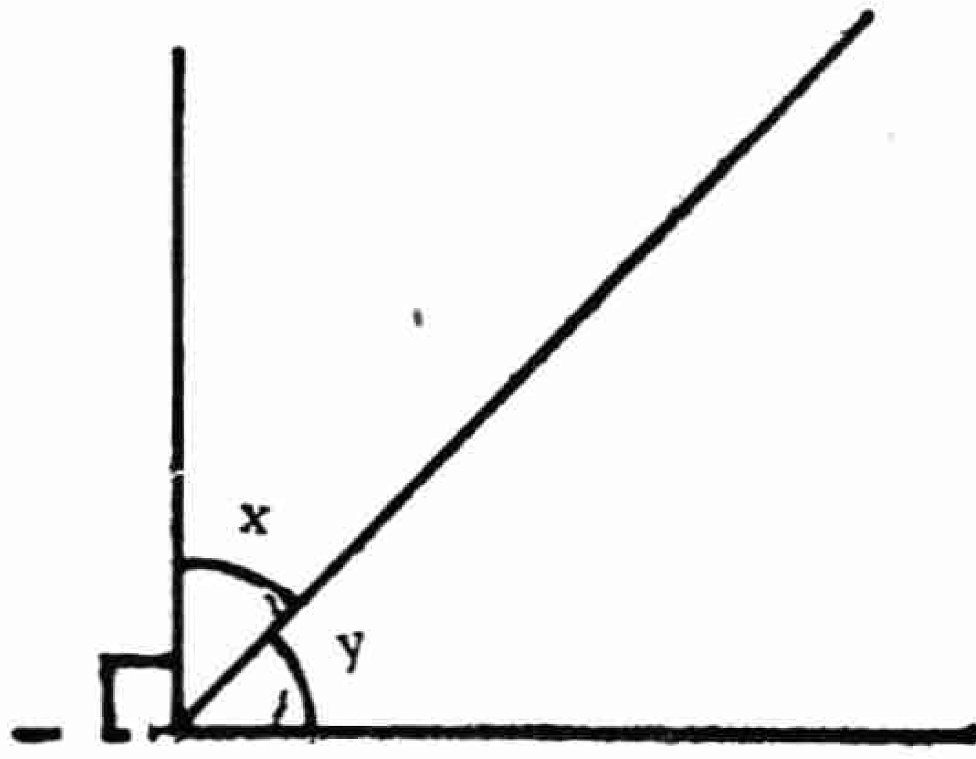
అవి ఒకదానికొకటి లంబముగ ఉన్నవని అందురు. బాహువులు లంబము (90°) గ ఉండు కోణములు లంబకోణములు.



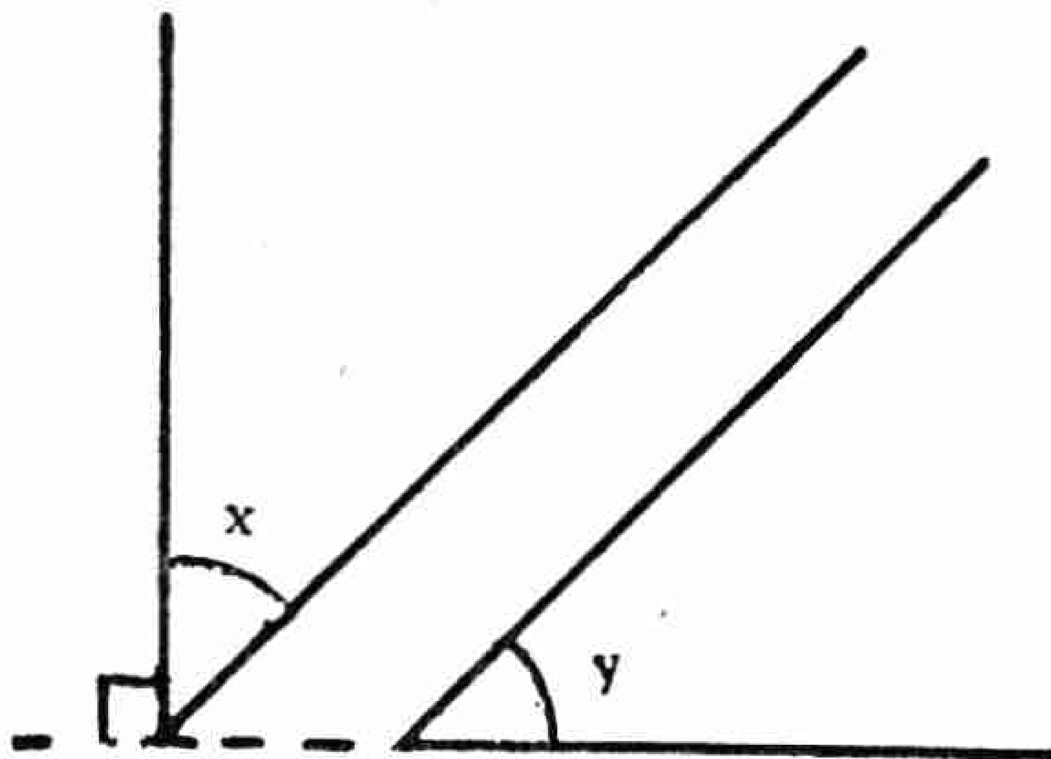
చిత్రము 106 లంబకోణము

'అన్ని లంబకోణములు సమానము' అనునది యూక్లిడ్ ఆధారతత్త్వములలో ఒకటి (చూ. చిత్రము 106).

పూరక కోణములు (కాంప్లిమెంటరీ ఆంగెల్స్): రెండు కోణము (x, y)ల మొత్తము ఒక లంబకోణము ($x + y = 90°$) అయిన చో వానిని పూరక కోణములు అందురు. x ని y యొక్క పూరక కోణమని, అదే విధముగ y ని x యొక్క పూరక కోణము అని అందురు (చూ. చిత్రములు 107a, 107 b).

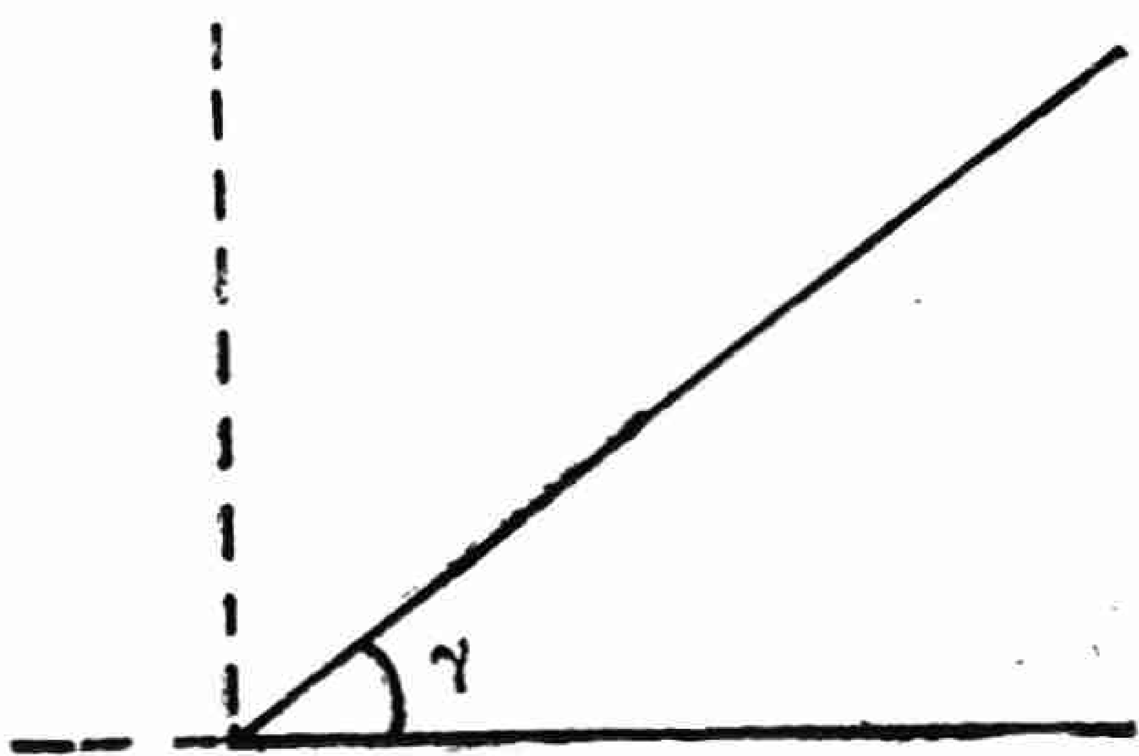


చిత్రము 107 a పూరకకోణములు



చిత్రము 107b పూరకకోణములు

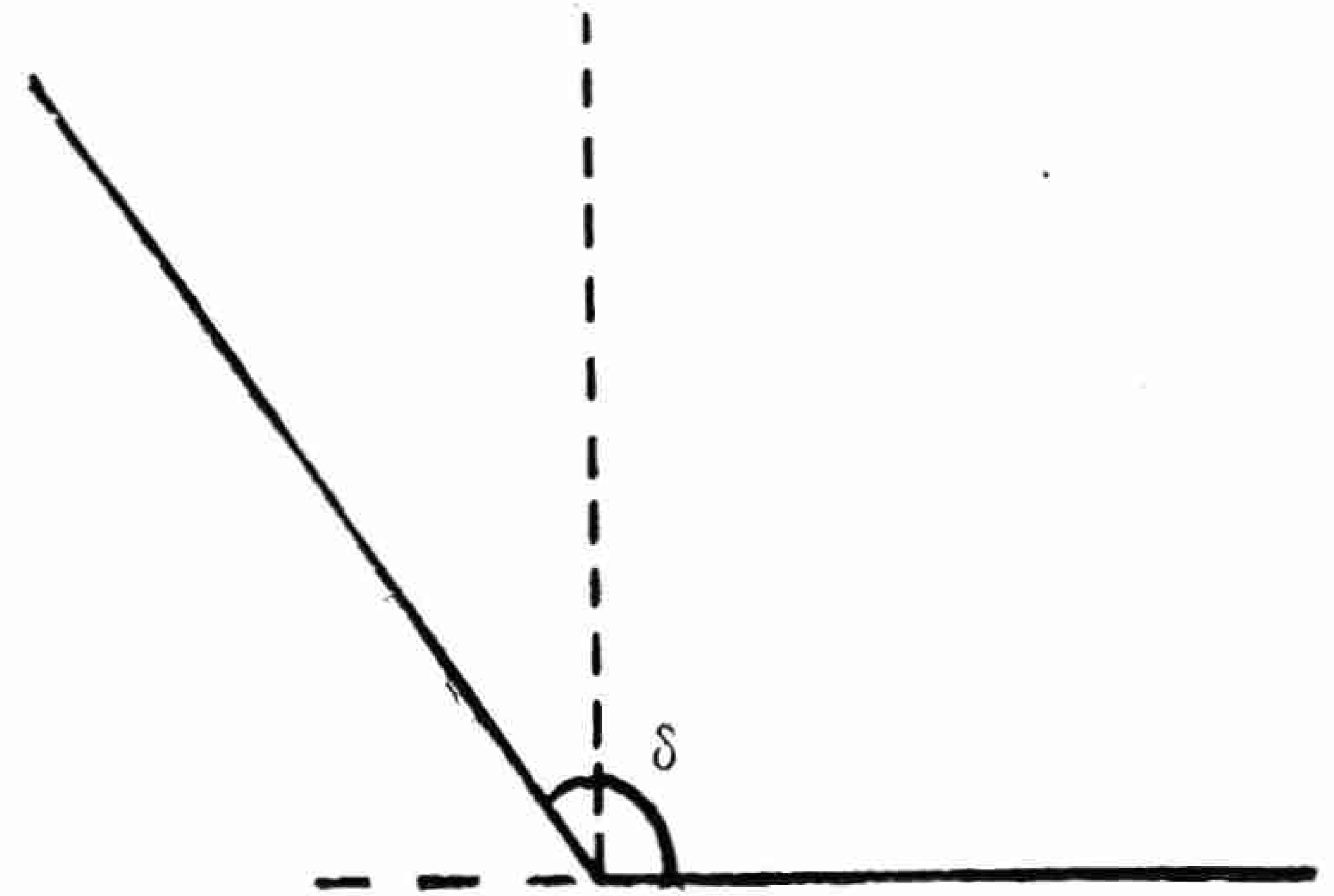
లఘుకోణము (అక్యూట్ ఆంగెల్): లంబకోణము



చిత్రము 108 లఘుకోణము

కన్న చిన్నకోణమును లఘుకోణము (అనగా 0° కి 90° కి మధ్యకోణము) అందురు (చూ. చిత్రము 108).

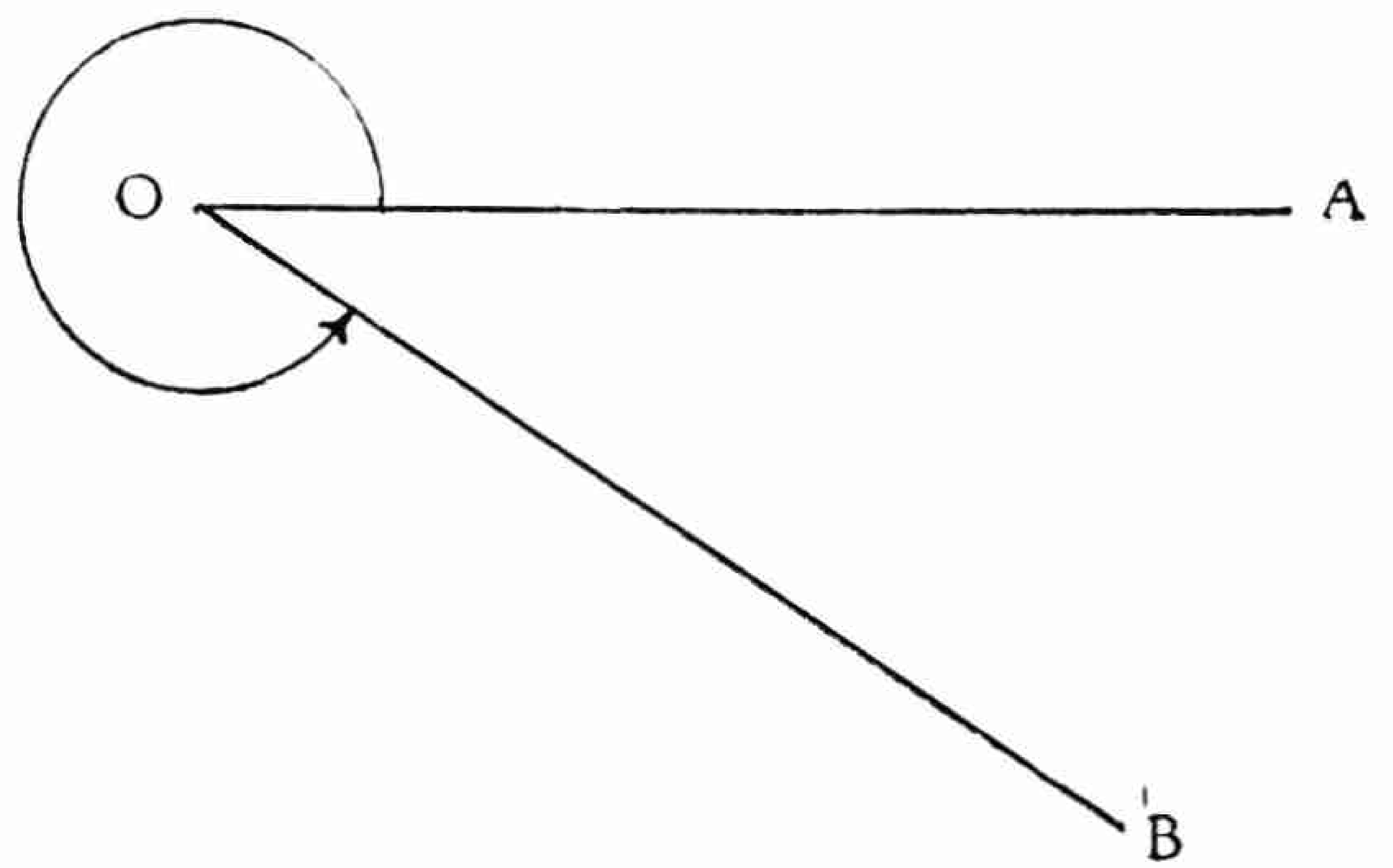
గురుకోణము (అబ్ ట్యూజ్ ఆంగెల్): లంబకోణము కన్న పెద్దది, ఋజుకోణము కన్న చిన్నకోణమును గురు



చిత్రము 109 గురుకోణము ($90° < \delta < 180°$)

కోణము అందురు. కొన్ని సందర్భములలో లంబకోణము కన్న పెద్దకోణము లన్నింటిని గురుకోణము అందురు (చూ. చిత్రము 109).

పరావృత కోణము (రిఫ్లెక్స్ ఆంగెల్): అర్ధభ్రమణము కన్న ఎక్కువ, పూర్ణభ్రమణము కన్న తక్కువ భ్రమణము



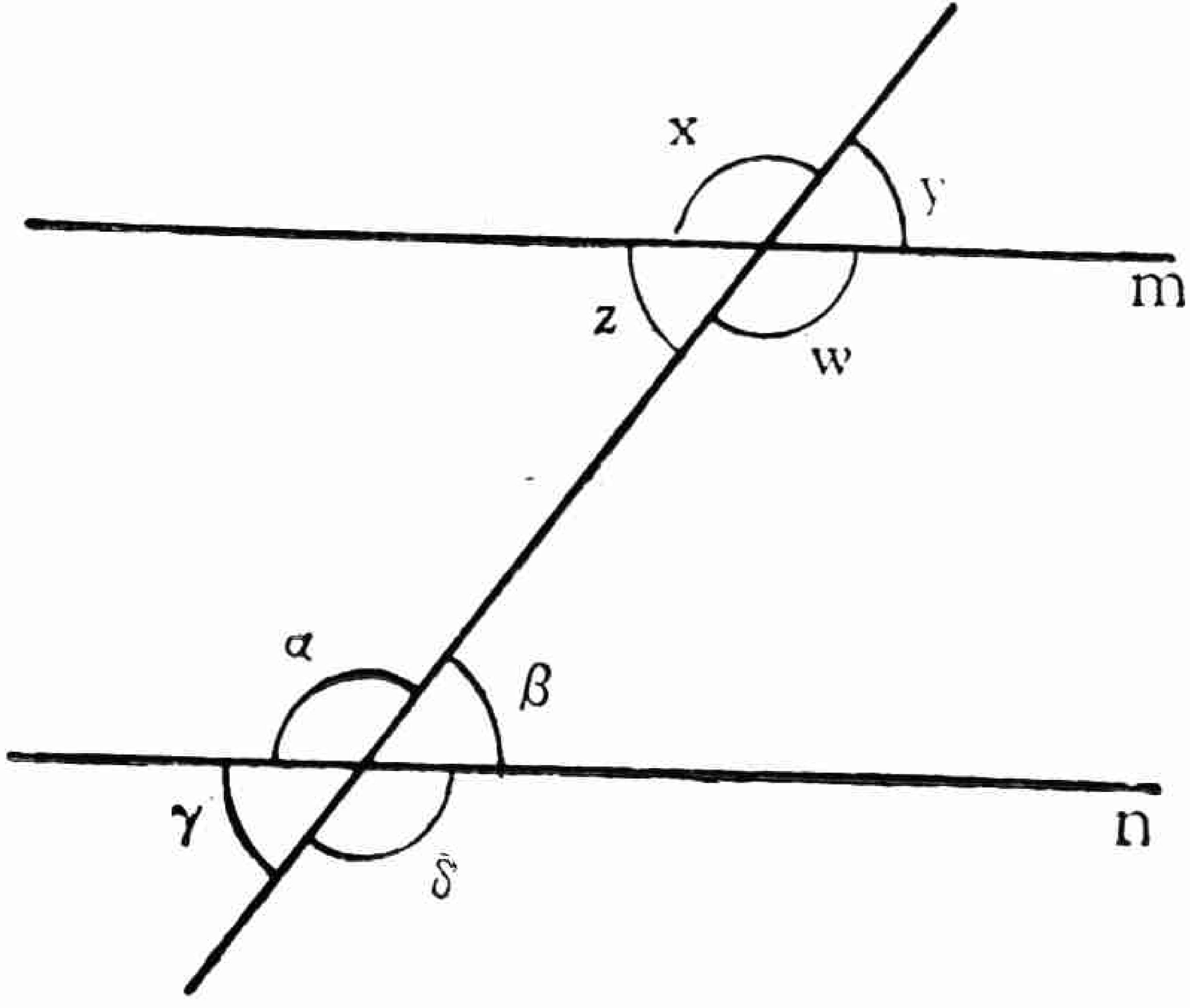
చిత్రము 110 పరావృతకోణము

($> 180° < 360°$) ను సూచించు బాహువుల మధ్యకోణమును పరావృత కోణము అందురు (చూ. చిత్రము 110).

ఛేదన రేఖలు - కోణములు: రెండుగాని అంతకన్న ఎక్కువగాని ఋజురేఖలను ఖండించు ఋజురేఖను ఛేదన రేఖ అందురు. చిత్రము 111 లో l అను ఋజురేఖ, m, n ఋజురేఖల ఛేదన రేఖ. ఛేదనరేఖ రెండు సమానాంతర రేఖలను ఖండించునప్పుడు ఏర్పడు కోణములను ఈ క్రింది విధముగ వర్గీకరింతురు:

w, α జత; z, β జత ... ... అంతర ఏకాంతర కోణములు (ఆల్టర్ నేట్ ఇంటీరియర్ ఆంగెల్).

x, δ జత ; y, γ జత ... ... బాహ్య ఏకాంతర కోణములు (ఆల్టర్‌నేట్ ఎక్స్‌టీరియర్ ఆంగెల్స్).

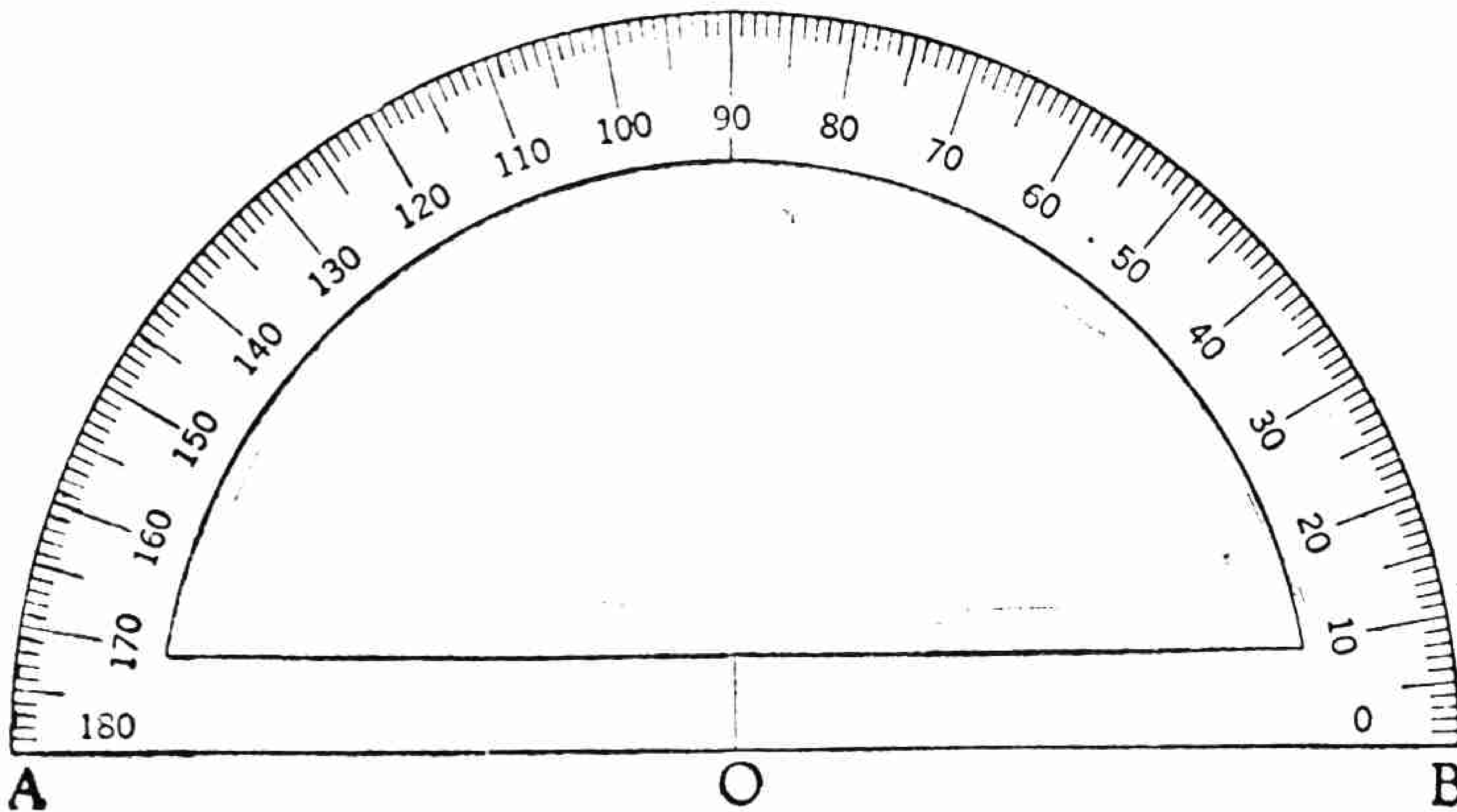


చిత్రము 111

x, α జత ; y, β జత ; z, γ జత ; w, δ జత ... ... అనురూప కోణములు (కరెస్పాండింగ్ ఆంగెల్స్).

ఈ కోణములలో :

1. $x=w$; $y=z$; $\alpha=\delta$; $\beta=\gamma$ (శీర్ష కోణములు).
2. అంతర ఏకాంతర కోణములు సమానములు ; అనగా $w=\alpha$; $z=\beta$.
3. బాహ్య ఏకాంతర కోణములు సమానములు ; అనగా $x=\delta$; $y=\gamma$.
4. అనురూప కోణములు సమానములు : అనగా $x=\alpha$; $y=\beta$; $z=\gamma$; $w=\delta$.
5. ఛేదన రేఖకు ఒకే వైపున ఉన్న జత అంతరకోణములు సంపూరకములు ; అనగా $w+\beta=180^\circ$; $z+\alpha=180^\circ$.
6. ఛేదనరేఖకు ఒకే వైపున ఉన్న జత బాహ్యకోణములు సంపూరకములు ; అనగా $x+\gamma=180^\circ$; $y+\delta=180^\circ$.



చిత్రము 112 ప్రొట్రాక్టర్

కోణముల కొలత : ఏ పరిమాణమును కొలుచుటకైన ఏదో ఒక యూనిట్‌ను ప్రమాణముగ తీసికొనవలెను. పొడవును మీటరులలో కొలచినట్లే కోణములను కొలుచుటకు డిగ్రీ (వ్రాయు విధము °) ని యూనిట్‌గా నిర్ణయించినారు. పూర్ణభ్రమణములో 1/360 భాగము లేదా లంబకోణములో 1/90 భాగము డిగ్రీ అని నిర్వచింపబడినది. డిగ్రీని 60 సమభాగములుగ విభజించి దానిని మినిట్ (వ్రాయు విధము ′) అనిరి. తిరిగి మినిట్‌ను 60 సమభాగములుగ విభజించి దానిని సెకండ్ (వ్రాయు విధము ″) అనిరి. ఆ విధముగ $47^\circ\ 25'\ 39''$ ను 47 డిగ్రీల 25 మినిట్ల 39 సెకండ్లు అని చదువవలెను. ఈ డిగ్రీ - మినిట్ - సెకండ్ కోణపు యూనిట్ ప్రాచీన బాబిలోనియన్ల నుండి వచ్చినవి.

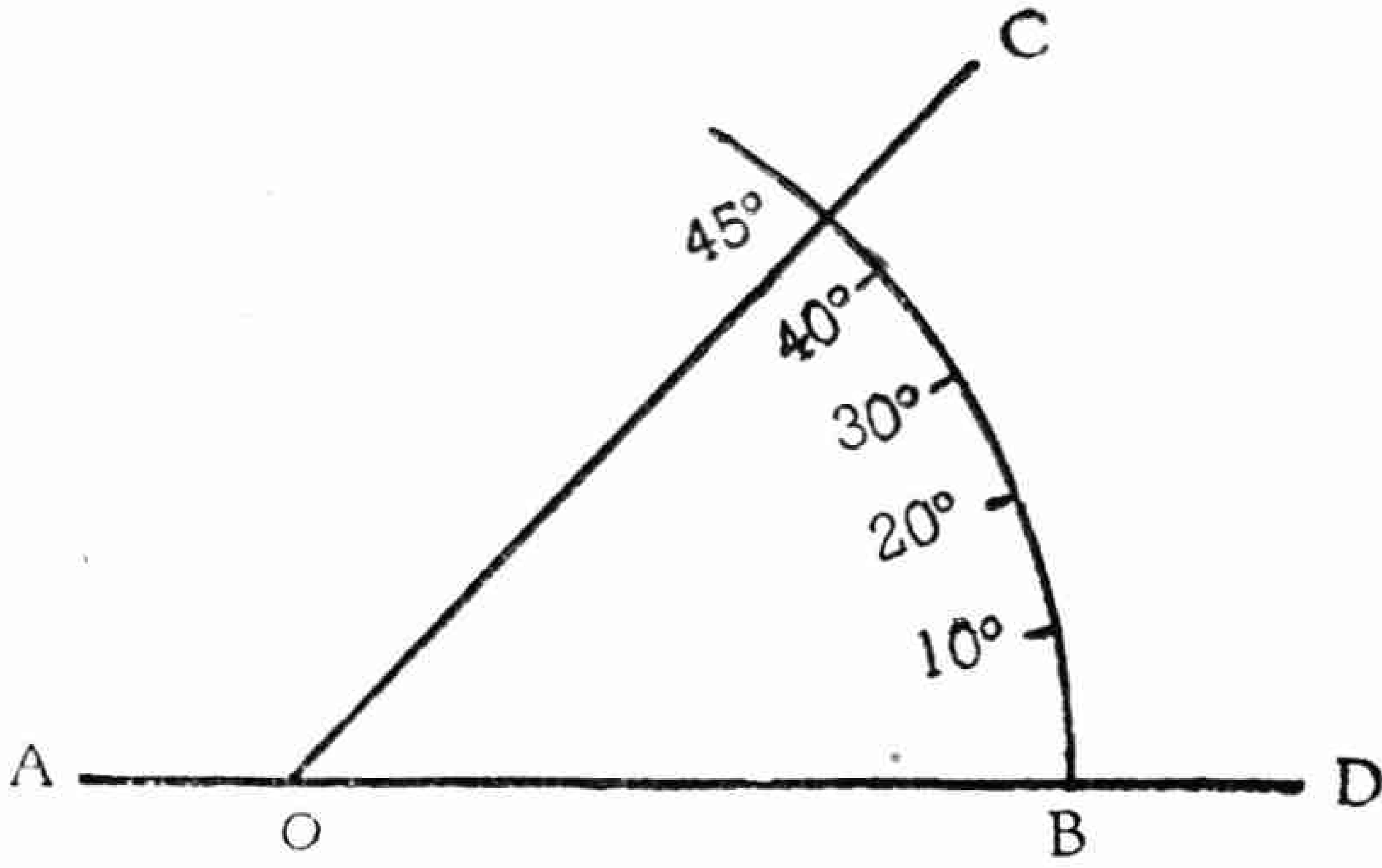
అయితే ఫ్రాన్స్ దేశములో ఒక లంబకోణమును 100 సమభాగములుగ విభజించియున్నారు. ఆ ఒక్కొక్క భాగమునకు గ్రేడ్ అని పేరు. కోణములను కొలుచుటకు ఉపయోగించు మరియొక యూనిట్ ‘ రేడియన్ ’. వృత్త కేంద్రము వద్ద, ఆ వృత్త వ్యాసార్ధమంత పొడవు గల చాపము చేయు కోణమును రేడియన్ అందురు. ఇది స్థిరకోణము. దీని విలువ $\frac{360}{2\pi}=57^\circ\ 17'\ 45''$; అట్లే ఒక డిగ్రీ $=\frac{2\pi}{360}$ రేడియన్‌లు.

అందుచేత డిగ్రీలను రేడియన్‌లలోనికి మార్చుటకు ఆ డిగ్రీలను $\frac{\pi}{180}$ చేత, అదే విధముగ రేడియన్‌లను డిగ్రీలలోనికి మార్చుటకు వానిని $\frac{180}{\pi}$ చేత గుణించవలెను.

ప్రొట్రాక్టర్ : కోణములను కొలుచుటకు ఉపయోగించు పరికరమును ప్రొట్రాక్టర్ అందురు. ఇది లోహముతో గాని, ప్లాస్టిక్‌తో గాని చేయబడిన అర్ధవృత్తాకార ప్లేటు. దీనియందు వ్యాసము యొక్క ఒక చివర నుండి రెండవ చివరవరకు అంచు వెంబడి 180 సమ భాగములు గుర్తింపబడి ఉండును. అనగా ఋజుకోణము AOB, 180సమ భాగములుగ విభజింపబడినది. ఒక్కొక్క భాగము ఒక డిగ్రీని సూచించును. దీనిని దత్తకోణమును కొలచుటకు

గాని లేదా దత్తపరిమాణము గల ఒక కోణమును గీయుటకుగాని ఉపయోగింతురు (చూ. చిత్రము 112).

1. DOC అను కోణమును కొలచుటకు ప్రొట్రాక్టర్ కేంద్రము 'O' ను, కోణశీర్షమగు O పై ఉంచి ప్రొట్రాక్టర్ బుజు అంచు OB ని కోణ బాహువు OD వెంట ఉంచవలయును. కోణ రెండవ బాహువు OC ప్రొట్రాక్టర్ స్కేలుపై ఏ బిందువు ద్వారా పోవుచున్నదో పరీక్షించి ఆ కోణ పరిమాణమును ప్రొట్రాక్టర్‌లో చదువ వచ్చును.



చిత్రము 113 కోణపుకొలత

2. దత్తపరిమాణము గల ఒక కోణమును గీయుటకు కోణ ఒక బాహువును మొదట గీచి దానిపై అనువైన చోట శీర్షము 'O' ను తీసికొని పైన వివరించిన విధముగ ప్రొట్రాక్టర్ నుంచి ఆ కోణమును గీయవచ్చును (చూ. చిత్రము 113).

పా. ల. నా.

కోపర్నికస్, నికొలాస్ (1473-1543) : క్రీ. పూ. 3 వ శతాబ్దములో గ్రీక్ ఖగోళ శాస్త్రవేత్త అరిస్టార్కస్ చెప్పిన 'విశ్వమునకు కేంద్రస్థానమున సూర్యుడు ఉన్నాడు' అను వాదమును తిరుగతోడి, దానిని సహేతుకముగ నిరూపించి, భూకేంద్ర సిద్ధాంతమును పూర్తిగా ఖండించి, ఆధునిక విజ్ఞాన సాధమునకు పునాదివేసిన విజ్ఞానవేత్త నికొలాస్ కోపర్నికస్; సుప్రసిద్ధ పోలిష్ ఖగోళశాస్త్రవేత్త; గణితశాస్త్రవేత్త, వైద్యశాస్త్రజ్ఞుడు, మతబోధకుడు, రాజకీయవేత్త.


చిత్రము 114 కోపర్నికస్

పోలిష్ ప్రష్యాలోని తార్న్ నగరమందు క్రీ. శ. 1473 ఫిబ్రవరి 19 వ తేదీన కోపర్నికస్ జన్మించెను. ఆయన తండ్రి జర్మనీ దేశీయుడు. పోలిష్ ప్రష్యాలోని ఒక జమీందారున కాయన గృహవైద్యుడుగ నియమితుడై జర్మనీ దేశమునుండి ప్రష్యాకు తరలి, తుదకు తార్న్ నగరమున గొప్పవ్యాపారిగా స్థిరపడెను. కోపర్నికస్‌నకు పది సంవత్సర ప్రాయములో అతని తండ్రి మరణించెను. అప్పటి నుండి అతని పోషణభారము అతని పినతండ్రిపై పడినది. కోపర్నికస్ పినతండ్రి లూకస్ క్రైస్తవ మత సంస్థయందు బిషప్‌గా ఉండెను. కోపర్నికస్‌నకు ఉన్నత విద్య చెప్పించి మతాధికారి పదవిలో ప్రవేశపెట్టవలెనని లూకస్ తలంచెను.

18 సంవత్సరముల ప్రాయమున క్రాకో యూనివర్సిటీలో విద్యార్థిగా చేరి, కోపర్నికస్ దర్శనశాస్త్రము, ఖగోళశాస్త్రము, జ్యామితి, భూగోళశాస్త్రము అధ్యయనము చేసెను. క్రాకో యూనివర్సిటీనుండి బోలోన్యా వెళ్ళి అచ్చట లా స్కూల్‌లో కొంతకాలమును, ఆతరువాత పాడువా యూనివర్సిటీలో మరికొంత కాలము అధ్యయనముచేసి, తుదకు ఫెర్రా యూనివర్సిటీనుండి 1503 లో 'డాక్టర్ ఆవ్ లాస్' పట్టమును పొందెను. ఆ కాలములో విద్యార్థులు ఒక యూనివర్సిటీనుండి మరియొక యూనివర్సిటీకి అధ్యయనకాలమధ్యలో వెళ్ళుటకు అవకాశము ఉండెడిది. మతసేవలో వైద్యము యొక్క విలువను తన పినతండ్రికి నచ్చచెప్పి తిరిగి 30 ఏండ్ల ప్రాయములో పాడువా యూనివర్సిటీ మెడికల్ కాలేజీలో చేరి మూడు ఏండ్లు వైద్యశాస్త్రమును అధ్యయనము చేసెను.

ఇట్లు కోపర్నికస్ బహు వ్యాపకుడైనప్పటికిని ఖగోళశాస్త్రమునందు ఆయనకుగల ఆసక్తి సన్నగిల్లలేదు. ఆ రోజులలో విద్యార్థులకు సాధారణముగా భూకేంద్ర సిద్ధాంతమును మాత్రము బోధించుచుండెడివారు. బోలోన్యా యూనివర్సిటీలో కోపర్నికస్‌నకు గణిత, ఖగోళ శాస్త్రముల ప్రొఫెసర్ 'నొవారో' భూకేంద్ర సిద్ధాంతమును శంకించుచు యొనర్చిన బోధనలు కోపర్నికస్ హృదయ ఫలకములో స్థావరమేర్పరచుకొనినవి.

ఫ్రాయిన్‌బర్గ్‌లో మతోద్యోగమున ప్రవేశించిన తరువాత కోపర్నికస్‌నకు కొంతతీరిక లభించినది. అప్పటి నుండియు అతడు భూకేంద్రసిద్ధాంత సత్యాసత్యములను పరిశీలించుటకు పూనుకొనెను. తనగృహమందు గోడలో ఒక రంధ్రముచేసి, దానినే శాస్త్రపరికరముగా ఉపయోగించి ఏ గ్రహము ఎప్పుడు ఏ నక్షత్రమువద్ద ఉండునో అని అనేక సంవత్సరముల కాలము అవేక్షించెను.

గగన అవేక్షణ పూర్తి అయిన వెంటనే గ్రహములను గూర్చిన తన ఫలితములలో భూకేంద్రసిద్ధాంతము ఎంత వరకు సమన్వయము చెందుచున్నదో అతడు పరిశీలించెను. కాని, వాని మధ్య ఎట్టి పొందికయు కోపర్నికస్‌నకు గోచరము కాలేదు. మరియొక ప్రక్కన సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతము తనపరిశీలనా ఫలితములతో చాలవరకు ఏకీభవించెను. అందుచే భూకేంద్రసిద్ధాంతము తప్పని సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతము ఒప్పు అనే నిశ్చితాభిప్రాయమునకు వచ్చెను.

"సూర్యుడు మొదలగు గ్రహములవలెనే భూమి, విశ్వములుకూడ గోళాకారముగ ఉన్నవి. విశ్వకేంద్రస్థానమున సూర్యుడు స్థిరముగ ఉన్నాడు. సూర్యునిచుట్టు నియమిత వృత్తీయ కక్ష్యలలో బుధుడు, శుక్రుడు, చంద్రునితో కూడిన భూమి, కుజుడు, గురుడు, శని, క్రమముగా పరిభ్రమించుచున్నవి. విశ్వమునంతటిని ఇముడ్చుకొని ఉన్న గోళములో నక్షత్రములు పొదగబడియున్నవి."

౧ కోపర్నికస్ ప్రతిపాదించిన సూర్యకేంద్రసిద్ధాంతనాంశము.

న సూర్యకేంద్రసిద్ధాంత ప్రామాణ్యమును సహేతుకముగా నిరూపించుచు 'నభోమూర్తుల పరిభ్రమణములు' అను ఉద్గ్రంథమును కోపర్నికస్ రచించెను. గ్రంథరచన పూర్తి అయినవెంటనే కోపర్నికస్ దానిని ప్రచురించలేదు. క్రైస్తవమతము ఆమోదించిన భూకేంద్ర సిద్ధాంతమును పూర్వపక్ష మొనర్చునట్టి తనపరిశోధనా ఫలితములను ప్రచురించుటకు అతడు వెనుకంజవేసెను. కాని మతసంస్థలో ఉన్నతోద్యోగులలో నలుగురు మిత్రులు, వారిలో ప్రధానముగ రేటికస్ పట్టుదలపై తుదకు దానిని అతడు ప్రచురించుటకు అంగీకరించెను. ముద్రణబాధ్యతను రేటికస్ స్వీకరించెను. ముద్రణ ప్రారంభించిన అనతికాలములోనే కోపర్నికస్ పక్షవాత వ్యాధిగ్రస్తుడయ్యెను. తన సర్వ జీవితకృషియైన 'నభోమూర్తుల పరిబ్రమణముల' ప్రథమ ప్రతిని జీవిత తుదిగడియలలో ఒకసారి తిలకించి 1543 మే 23వ తేదీన కోపర్నికస్ కనుమూసెను.

కోపర్నికస్ వివేకముతో తన గ్రంథమును క్రైస్తవ మతసర్వాధికారి అయిన పోప్‌నకు అంకితమిచ్చెను. అందుచే ఈ గ్రంథమునందలి మతవ్యతిరిక్త భావములు వెంటనే జనసామాన్యమునకు పొక్కలేదు.

కోపర్నికస్ సిద్ధాంతము కూడా సమగ్రమైనది గాదు. అందుకూడ కొన్నిలోపములు ఉన్నవి. కాని ఖగోళశాస్త్ర ప్రపంచములో భూమికి ఏర్పడిన అతిశయ ప్రాముఖ్యమును తొలగించి సూర్యునిచుట్టు పరిభ్రమించుచున్న నభోమూర్తులలో ఒకటిగా దాని నిజరూపమును బయటపెట్టుటయందే ఆయనప్రతిభ వెల్లడియగుచున్నది. పా. ల. నా.

కోషీ (1789 - 1857) : అగస్టిన్ లూయీ కోషీ 19వ శతాబ్దమునందలి ఫ్రాన్స్‌దేశపు గణితవేత్తలలో ముఖ్యుడు; ప్రారంభములో ఇకోలి పాలిటెక్నిక్ సంస్థకు, కడపట పారిస్ యూనివర్శిటీకి అధ్యక్షుడు అయ్యెను. ఇతడు 700 లకు తక్కువ కాకుండ గణితవ్యాసములను ప్రచురించినాడు. వీటిలో చర్చించిన విషయములు : సంకలన పరంపరల ఉపసరణతావిధానము, అంతరీకరణసమీకరణములు, నిర్ధారకములు, బహుతలకములు, సంఖ్యావాదము మొదలైనవి.

ముఖ్యముగా ఆధునిక విశ్లేషణగణితముయొక్క నిష్ఠురతను గణితములో ప్రవేశపెట్టినవానిగా కోషీని, అతనితో గౌస్‌ను, ఆబెల్‌నుకూడ చెప్పవచ్చును. గణితమునకు కోషీ చేసిన సేవలలో రెండు ముఖ్యములైనవి : (i) ఇతడు పరికర్మముల ప్రాముఖ్యమును, వాటి ధర్మములను గుర్తించి, కూర్పువాదము అను క్రొత్త గణితశాఖను నిర్మించెను; (ii) కోషీ సిద్ధాంతమునుకనిపెట్టి, సంకీర్ణ చలనఫలవాదమునకు పునాదులు వేసెను. ఈ సిద్ధాంతము ప్రకారము $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \Sigma R$. ఇచ్చట C ఒక సంవృత వక్రము, ΣR అనునది ఈ వక్రములో $f(z)$ ఫలముయొక్క అసాధారణ బిందువులలోని అవశేషముల సంకలనము. అ. స.

క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలు : ప్రత్యేక వస్తువులు గల ఒక సమూహమునకు సమితి అని పేరు. ఒక వస్తువు a, ఒక సమితి Aకు చేరినదైతే $a \in A$ అని వ్రాయుదుము. A అను సమితిలోని అన్ని వస్తువులును B అను సమితిలో ఉన్నచో, A సమితి B యొక్క ఉపసమితి అందుము. దీనినే $A \subset B$ లేదా $B \supset A$, అని వ్రాయుదుము. పై నిర్వచనము ప్రకారము $A \subset A$. A, B వేర్వేరు సమితులై, $A \subset B$ అయితే, A సమితి B యొక్క 'సరియైన ఉపసమితి' అనెదము.

A, B రెండు సమితులైతే. $A \cup B$ అనునది, A లోని అన్ని వస్తువులను, B లోని అన్ని వస్తువులను గల మరియొక సమితి. దీనిలో A, B రెండు సమితులలోను లేని వస్తువులేవియు ఉండకూడదు. ఉదా :

$A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, d, e\}$ సమితులను చేర్చు సమితి $A \cup B=\{a, b, c, d, e\}$ సమితి యగును. సమితులలో క్రమమునకు ముఖ్యత్వము లేదు. కనుక దీనినే $(b, a. d, e, c)$ అని వ్రాయవచ్చును.

అటులనే $A \cap B$ అనునది A లోను B లోను ఉన్న ఉమ్మడి వస్తువులుగల సమితి. A, B రెండింటిలోను ఉన్న వస్తువుల నన్నిటిని $A \cap B$ లో తీసికొనవలెను. ఉదా : పైన వివరించిన A, B సమితుల గుణకారసమితియగు $A \cap B = \{b, d\}$.

ఏ వస్తువులును లేని సమితిని శూన్యసమితి అనెదము. దీనినే 0 అని వ్రాయుదుము. కనుక $A \cap B = 0$ అనగా A, B సమితులలో ఏ వస్తువును రెండింటిలోను లేదని తెలియజేయును. ఇటులనే రెండుకన్న ఎక్కువ సమితుల సంకలనమును, గుణకారమును నిర్ణయించవచ్చును. ఇక్కడ మనము చర్చించు సమితులలో పరిమిత సంఖ్యగల సమూహములుగాని, అనంత సంఖ్యగల వస్తువులు గాని ఉండవచ్చును.

$A - B$ అనగా, A సమితిలోనుండి, A, B రెండు సమితులకు ఉమ్మడియైన వస్తువులను మాత్రము తీసివేసిన కలుగు సమితి అనెదము. కనుక $A = (A - B) \cup \{A \cap B\}$. ఉదా: $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{b, d, f, g\}$ అయితే $A - B = \{a, c, e\}$.

A, B రెండు సమితులైతే, మరియొక లబ్ధమును నిర్వచించెదము. దీనికి A, B ల కార్టీసియన్ లబ్ధము అని పేరు. దీనిని వ్రాయువిధము $A \times B$. దీనిలో వస్తువులన్నియు సమితులు. Aలోని ఒక వస్తువును, Bలోని ఒక వస్తువును తీసికొని, వాటిని ఒక విధముగా క్రమపరచిన కలుగు ద్వివస్తుసమితులే, $A \times B$ సమితియొక్క వస్తువులు. అనగా $a \in A$, $b \in B$, అయితే $(a, b) \in A \times B$.

ఉదా : $A = (p, q, r)$, $B = (l, m)$ అయితే

$A \times B = (pl, pm, ql, qm, rl, rm)$

$B \times A = (lp, lq, lr, mp, mq, mr)$

A సమితిలో m వస్తువులును B సమితిలో n వస్తువులును ఉన్నచో $A \times B$ లోను $B \times A$ లోను mn వస్తువులున్నవని సరిచూడవచ్చును. పై నిర్వచనము నుండి క్రింది ప్రమేయమును నిరూపించవచ్చును. A, B, C ఏ సమితులైనను

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

అటులనే $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

ఒకటి కొకటి అనురూపత : A, B రెండు సమితులు. A లోని ఏ వస్తువు a ఇచ్చినను దానికి అనురూపముగా B లో ఒకే వస్తువు b యును ఈ అనురూప ప్రకారము B లోని ఒక్కొక్క వస్తువునకును Aలో ఒకేఒక వస్తువును ఉన్నచో, A, B ను 'అనురూపసమితు' లనెదము. ఉదా: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = (p, q, r)$ అనురూప సమితులు. అటులనే $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $B = \{10, 20, 30, 40, \dots\}$ అనురూప సమితులు. ఇచ్చట A, B రెండును అపరిమిత వస్తువులు కలవి. A లోని a సంఖ్యకు అనురూపమైనది. Bలో $b = 10\ a$. A, B లు అనురూపసమితులనుటను $A \sim B$ అని వ్రాసెదము. అనురూపత నిర్వచనమునుండి క్రింది ధర్మములు '$\sim$' సంకేతమునకున్నవని సరిచూపవచ్చును. (i) $A \sim A$, (ii) $A \sim B$ అయితే, $B \sim A$, (iii) $A \sim B$, $B \sim C$ రెండు నిజమైతే $A \sim C$ నిజము. కనుక '$\sim$' సంకేతము, '$=$' సంకేతముయొక్క గుణములన్నియు కలిగినది (చూ. సమీకరణ - పు. 21).

పై నిర్వచనములనుండి క్రింది ప్రమేయములను నిరూపించవచ్చును.

ప్రమేయము 1 : A, B, A_1, B_1 నాలుగు సమితులు. $A \cap B = 0$, $A_1 \cap B_1 = 0$, $A \sim A_1$, $B \sim B_1$ అన్నియు నిజమైతే $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$.

ప్రమేయము 2 : A, B, A_1, B_1 నాలుగు సమితులు ; $A \sim A_1$, $B \sim B_1$ ఇవి రెండు నిజమయిన $(A \times B) \sim (A_1 \times B_1)$

ప్రమేయము 3 (కాంటార్ బెర్న్‌స్టీన్ ప్రమేయము) : A, B, A_1, B_1, నాలుగు సమితులు. వీటియందు $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A \sim B_1$, $B \sim A_1$ ఇవన్నియు నిజమైతే, అప్పుడు $A \sim B$ అగును. ఇది ఒక ముఖ్యమైన ప్రమేయము. అనగా రెండు సమితులలో ఒక్కొకటి మరియొకదాని ఉపసమితికి అనురూపమైతే, అవి రెండును అనురూప సమితులు. ఈ పరిస్థితి అనంతవస్తు సమితుల లోనే ఏర్పడును.

సంఖ్యల నిర్వచనము : ఏదో ఒక సమితిని తీసికొనెదము. దీనికి అనురూపమైన అన్ని సమితులను తీసికొనెదము. ఇవి అన్నియు పరస్పర అనురూపమైనవి. ఇవి అన్నిటికిని ఉమ్మడియైన గుణమే సమితి సంఖ్య అనవచ్చును. ఉదా : (a, b, c), (l, m, n), (రూపాయి, అణా పైస), (వెండి, బంగారము, ఇత్తడి) ... ఇవన్నియు అనురూప సమితులు. వీటికి అన్నిటికిని ఉమ్మడి గుణము వాటి సంఖ్య అగు 3. అయితే ఇట్లు సంఖ్యను నిర్వచించుటకు ఒక ఆక్షేపము ఉన్నది. వీటికన్నిటికి ఒక ఉమ్మడి గుణమున్నదని అనుకొనుటయే ! ఈ సంకటమును తప్పించుకొనుటకై, గణితజ్ఞులు, పరస్పర అనురూప సమితుల సమితికే ఒక సంఖ్యయని పేరు పెట్టెదరు. 1 అను సంఖ్య, ఒకే వస్తువుకల అన్ని సమితుల సమూహమే. 2 అను సంఖ్య (సూర్యుడు, చంద్రుడు) అను సమితియు, దీనికి అనురూపమైన సమితుల సమూహమే, అనగా ఒక్కొక్క

అనురూప సమితుల సమూహమును ఒక సంఖ్య అగుచున్నది. ఈ నిర్వచనము పరిమిత సంఖ్యలకేకాక అనంత సంఖ్యలకును స్థలమిచ్చుచున్నది. ఉదా: (1, 2, 3, 4......) అను ధన పూర్ణసంఖ్యలు గల సమితిని తీసికొనుము. దీనితో ఒకటి కొకటి అనురూపత గల సమితులెన్నియో ఉన్నవి. ఇవన్నియు పరస్పర అనురూప సమితులు. ఇట్లు (1, 2, 3, 4......) దానితో అనురూపమైన సమితుల సమూహము ఒక సంఖ్య. దీనిని $\aleph_0$ అను యూదు భాషలో ప్రథమాక్షరమగు ఆలెఫ్‌తో గుర్తించెదము. ఆలెఫ్ క్రింద 0 (శూన్యము) వ్రాసినది ఏలన, మనము ఇకమీద $\aleph_1$, $\aleph_2$... అను సంఖ్యలను ఉపయోగింపవలసియుండును.

పరిమిత సమితులు : మనము ఇంతవరకు పరిమిత సమితులను, అపరిమిత సమితులను ఒకే దృష్టిలో వీక్షించితిమి. వీటికి ముఖ్యమైన వ్యత్యాసమేమి ? పరిమిత సమితులను మాత్రము ఎట్లు నిర్వచించుట ? దీనికి ప్రత్యుత్తరము : అపరిమిత అనగా అనంత వస్తువులు గల సమితులకును వాటి ఉప సమితులకును ఒకటి కొకటి అనురూపము సాధ్యము. పరిమిత వస్తు సమితులకు ఇది సాధ్యము కాదు. కనుక ఏ సమితికి తన ఉప సమితితో అనురూపత కలదో అది అనంతవస్తువులు గల సమితి అనెదము. ఈ గుణము లేని సమితి పరిమిత సమితి అనవచ్చును. ఉదా: $A = (1, 2, 3, \dots \dots)$ ఒక సమితి. $B = (2, 3, 4, \dots \dots)$ దానిలోని ఒక ఉపసమితి. $A \sim B$. ఏలన A లోని n అను వస్తువునకు B లోని $n+1$ అను వస్తువును జోడింపుము. ఇది ఒకటి కొకటి అనురూపత. కనుక A, B రెండును అనంతవస్తు సమితులు. $A = \{p, q, r\}$ కును $B = \{p, q\}$ సమితికిని అనురూపత సాధ్యము కాదు. కనుక A, B పరిమిత సమితులు.

మరియొక విధమేమనగా, సూర్యుడు అని ఏదో వస్తువు తీసికొనెదము. దీనికి అనురూపత కల సమితులన్నియు చేరిన సమూహమే ఒక సంఖ్య. ఈ సంఖ్య పేరు 1 (ఒకటి). ఈ సమితులకు ఉన్న గుణమేమనగా వీటి సరియైన ఉప సమితి శూన్య ఉపసమితియే.

A, B ఒకటి అను సంఖ్యకు చేరిన ఏక వస్తు సమితులైనచో $A \cup B$ అను సమితికిని A కును అనురూపత అసాధ్యమని చూపవచ్చును. కనుక $A \cup A$, దానికి అనురూపసమితులును చేరి మరియొక సంఖ్య అగుచున్నది. దీనికి 2 (రెండు) అనిపేరు. 2 కు చేరిన సమితి C యు, 1 కి చేరిన సమితి D యు అయినచో $C \cup D$ సమితికిని 1 లేదా 2 కు చేరిన సమితులకును అనురూపములేదని చూపవచ్చును. కనుక ఇది క్రొత్త సంఖ్య. దీనికి 3 (మూడు)అను నామధేయమిచ్చెదము. ఇటులనే 4, 5, 6... సంఖ్యలను నిర్మించవచ్చును. కనుక ఒక వరుస దొరకుచున్నది. ఈ వరుసలోని సంఖ్యలను పరిమిత సంఖ్యలనెదము.

సంఖ్యల సంకలనము : m, n రెండు సంఖ్యలు. అనగా m ఒక అనురూప సమితుల సమూహము. అటులనే n మరియొక సమితుల సమూహము. ఈ సమూహములకు చేరిన A, B సమితులను తీసికొనెదము. వాటి నుండి $A \cup B$ అను క్రొత్త సమితిని సృజించెదము. దీనికి అనురూపమైన సమితుల సమూహమునకు $m+n$ అని పేరు పెట్టెదము. ఇది న్యాయము. ఏలన A, B పై రెండు సమూహముల నుండి ఎట్లు ఏరుకొనినను, అట్లు దొరకు అన్ని $A \cup B$ సమితులును అనురూప సమితులే. కనుక ఇవి ఒక సంఖ్యకు చేరినవి. ఈ విధానము పరిమిత సంఖ్యలకును అపరిమిత సంఖ్యలకును అన్వయించును. సంఖ్యా సంకలనమునకు $m+n = n+m$ అను ధర్మమున్నదని సరిచూపవచ్చును.

సంఖ్యలలో చిన్నపెద్ద భావము : A ఒక సమితి. దానికి అనురూప సమితుల సమూహమునకు ఒక సంఖ్య a అని పేరు. అటులనే B సమితి, దాని అనురూప సమితుల సమూహము b అను సంఖ్య. $A \sim B$ అయినచో, ఈ రెండు సమూహములు ఒకటే. అనగా $a = b$, అట్లు లేక B యొక్క ఉపసమితియగు B_1 $(B_1 \subset B)$ తో A కు అనురూపత ఉన్నచో $(A \sim B_1)$, $a \leq b$ లేదా $b \geq a$ అని వ్రాసెదము. దీనిని చదువు విధము 'a సంఖ్య కంటె b ఎక్కువ, లేదా అవి సమ సంఖ్యలు'. $a \geq b$, $b \geq a$ రెండు నిజమైతే ప్రమేయము 3 ప్రకారము $a = b$ అగుచున్నది. అట్లుకాక $B_1 \subset B$, $A \sim B_1$ నిజమై $B \sim A$ లేదా, $B \sim A_1$ $(A_1 \subset A)$ ఏ విధముగనైనను అసాధ్యమైతే, $a > b$ అనెదము. ఈ సంకేతమునకు, $a > b$, $b > c$ అయితే $a > c$ అను గుణము ఉన్నది. a సంఖ్య b కంటె ఎక్కువ అనెదము. లేదా b సంఖ్య a కంటె తక్కువ అనెదము. $b < a$, ఈ విషయములు పరిమిత సంఖ్యలకు, అపరిమిత సంఖ్యలకు అన్వయించును. పరిమిత సంఖ్యలగు

$$1, 2, 3, 4, \dots \text{ లో } 1 < 2 < 3 < 4 \dots \dots$$

అని చూపవచ్చును.

సంఖ్యల గుణకారము : A, B రెండు సమితులు. అవి పరమితములుగనో అపరిమితములుగనో ఉండవచ్చును. ఇప్పుడు $A \times B$ యొక్క కార్టీసియన్ గుణకార సమితిని సృజింపుము.

$A \sim A_1$, $B \sim B_1$, అయితే $A \times B \sim A_1 \times B_1$ అని సులభముగా చూడవచ్చును. కనుక A కు అన్వయించు సంఖ్య a అని B కు అన్వయించు సంఖ్య b అనియు ఉన్నచో, a సమితి సమూహములోని ఏ సమితి $A, A_1 \dots$ ను, b సమితి సమూహములోని ఏ సమితి $B, B_1, \dots$ తీసికొనినను $A \times B$ సమితులు అనురూప సమితులు. అవన్నియు చేరి ఒక సంఖ్య అగుచున్నది. దీనికే $a \times b$ అని పేరు.

క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలు : అనంత వస్తువులు గల సమితులకు అన్వయించు సంఖ్యలను క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలు అనెదము. దీనిలో చాలా చిన్నదయినది 1, 2, 3, ... అగు పూర్ణసంఖ్యలన్నియును చేరిన సమితి. కనుక పూర్ణసంఖ్యలగు 1, 2, 3, ... ను దీనికి అనురూపమైన సమితులును గల సమూహమే $\aleph_0$. దీని ధర్మము లేమనగా :

(i) $\aleph_0 > 1$, $\aleph_0 > 2$, ... $\aleph_0 > m$, ...
(m ఏ పరిమిత సంఖ్య అయినను)

(ii) $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$; $\aleph_0 + 2 = \aleph_0$; ... ...
$\aleph_0 + m = \aleph_0$
(m ఏ పరిమిత సంఖ్య అయినను)

(iii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, అనగా $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
$\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 3\,\aleph_0 = \aleph_0 \dots \dots$;
$m\,\aleph_0 = \aleph_0$
(m ఏ పరిమిత సంఖ్య అయినను)

(iv) $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ అనగా $\aleph_0^2 = \aleph_0$
$\aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ అనగా
$\aleph_0^3 = \aleph_0$; ... ... $\aleph_0^m = \aleph_0$
(m ఏ పరిమిత సంఖ్య అయినను)

వీటిని సరిచూచుటకు (ii) ను తీసికొనెదము. A సమితి $a_1, a_2, a_3, \dots \dots$ అనెదము. దాని సంఖ్య $\aleph_0$. B సమితి (b_1, b_2, b_3) అనెదము. దీని సంఖ్య 3. ఇప్పుడు $A \cup B$ ను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును :

$$b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3, \dots \dots$$

అనగా ఒక మొదటి వస్తువు, తరువాత వచ్చు ప్రతి వస్తువునకు తరువాత ఒక నిర్ణీత వస్తువు వచ్చునట్లు వ్రాసియున్నాము. కనుక దీనికిని 1, 2, 3 ... వరుసకును అనురూపము ఉన్నది. కనుకనే $\aleph_0 + 3 = \aleph_0$.

(iii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ అని చూపుటకు $a_1, a_2, \dots \dots$; $b_1, b_2, \dots \dots$ అను రెండు అనంతవరుసలను తీసికొనెదము. వాటిసంఖ్య $\aleph_0$. ఈ రెండు సమితులను చేర్చి, సంకలన లబ్ధసమితిని

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \quad \dots \quad \dots$$

అని వ్రాయవచ్చును. దీనికిని 1, 2, 3, ... సమితికిని అనురూపత ఉన్నది. కనుక $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

(iv) $\aleph_0 \times \aleph_0$ అనగా 1, 2, 3, ... సమితిలోని (1, 1), (1, 2), (1. 3), (2, 3), ..., (m, n) అగు పూర్ణాంకముల అన్ని జతలను తీసికొనవలయును. అనగా ఈ సమితి

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)... ...
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)... ...
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3. 4)... ...
... ...
$(n, 1)$, $(n, 2)$, $(n, 3)$, $(n, 4)$... ...
... ...

ఈ సమితి $\aleph_0 \times \aleph_0$ సంఖ్యకు చేరిన సమితి. దీనిని ఒక వరుస d_1, d_2, d_3, d_4 ... ... అని వ్రాసితిమేని, $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ అని తేలుచున్నది. ఇటులు ఒక వరుసగా వ్రాయువిధము క్రింద చూపితిమి :

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (1, 6), (2, 5), ...

ఈ విధానములో (m, n) జతలో $(m+n)$ ఒకే విలువ గల జతలన్నిటిని ప్రక్కన ప్రక్కన వ్రాసియున్నాము.

ఇది పరిమిత సంఖ్యలలో సాధారణ గుణకారమేయగుచున్నది. ఉదా : $A = (p, q, r)$ అను సమితి 3 అను సంఖ్యకు చేరినది. $B = (a, b)$ అనునది 2 అను సంఖ్యకు చేరినది. $A \times B$ అను కార్టీసియన్ గుణకార సమితిలోని వస్తువులు $\begin{pmatrix} pa, & pb, \\ qa, & qb, \\ rc, & rb, \end{pmatrix}$ అగువస్తువుల జతలను కలది. ఒక్కొక్క జతను ఒక క్రొత్త వస్తువుగా ఆలోచించవలెను. అటులనే $B \times A$ అను కార్టీసియన్ గుణకారసమితిలోని వస్తువులు $\begin{bmatrix} ap, & aq, & ar \\ bp, & bq, & br \end{bmatrix}$ అగు జతలు. పై రెండు గుణకారసమితులలోని జతలు వేర్వేరు సమితులు కాదనియు, వీటిని $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ సమితిలోని వస్తువులకు ఒకటికొకటి అనురూపత కల్పించవచ్చుననియు మనము సరిచూచెదము. కనుక $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$.

సమితులలో ఘాతభావము : A, B రెండు వస్తు సమితులు. వీటికి సంబంధించిన కొన్ని ఫలములను తీసికొనెదము. ఇవి A లోని వస్తువుల ఫలములు. అనగా $f(x)$ ఒక ఫలమైతే $x \in A$. దీని విలువ Bలో ఒక వస్తువుగా ఉండవలెను. అనగా $f(x) = y$ అయితే $y \in B$. అటువంటి ఫలములన్నియు చేరి ఒక ఫలసమితి అగును. ఈ సమితిని, దీనికి అనురూప సమితులును ఒక సంఖ్య అగుచున్నవి.

దీనిపేరు B^A. ఉదా: $A=(a_1, a_2, a_3)$ $B=(b_1, b_2)$ అయితే A యొక్క సంఖ్య 3, B యొక్క సంఖ్య 2. B^A లో 8 ఫలములున్నవి. ఇవి యేమనగా: $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_1$, $f(a_3)=b_1$ అనునది ఒక ఫలము; $g(a_1)=b_1$, $g(a_2)=b_1$, $g(a_3)=b_3$ అను విలువలను తీసికొనునది మరియొకఫలము. $h(a_1)=b_1$, $h(a_2)=b_2$, $h(a_3)=b_3$ అనునది మూడవది ... ... $p(a_1)=b_2$, $p(a_2)=b_2$, $p(a_3)=b_2$, ఇట్లు ఫలములు $f, g, h, \ldots \ldots p$ ఎనిమిది ఉన్నవి. ఈ ఫల సమూహాముల సంఖ్య B^A యొక్క సంఖ్య అనగా $2^3=8$. ఇదే నిర్వచనము క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలకు కూడ చెందును.

ప్రమేయము: ఒక సమితి A యొక్క సంఖ్య a అయితే, దాని ఉపసమితుల సంఖ్య 2^a అగును.

మొదట A పరిమిత సంఖ్య అనుకొందము ఉదా: $A=(a, b, c, d)$ దీని సంఖ్య 4. దీని ఉపసమితులు $(\ )$, (a), (b), (c), (d), (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd), (abc), (abd), (bcd), (acd), $(abcd)$. ఇచ్చట $(\ )$ అనునది శూన్యసమితి. వీటి మొత్తము $2^4=16$. మరియొక విధమున చూచెదము. సమితిలోని ఏ వస్తువును (ఉదా: a ను) రెండు విధములుగా ఉపయోగపరచ వచ్చును. ఒక విధము దానిని ఉపసమితితో తీసికొనుట, రెండవ విధము దానిని విడిచిపెట్టుట. ఇట్లు ఒక్కొక్క వస్తువుకును రెండువిధము లున్నందున మనకు మొత్తము $2\times 2\times 2\times 2=2^4$ ఏరుకొనుట లున్నవి. ఒక్కొక ఏరుకొనుటయు ఒక ఉపసమితి నిచ్చును. కనుక మొత్తము ఉపసమితులు 2^a. ఈసంఖ్యలో దత్తసమితి A ను శూన్యసమితి 0 యు (అనగా వస్తువులేవియు లేని సమితియు) చేరియున్నవి.

ఇపుడు A సమితి అనంతవస్తుసమితి అని అనుకొందము $A=(1, 2, 3, 4, \ldots \ldots)$ అను పూర్ణాంక సమితి అయితే, పై ప్రమేయము ప్రకారము దీని ఉపసమితులు $2^{\aleph_0}$ అగుచున్నవి.

ప్రమేయము: a పరిమితసంఖ్యయైనను క్రాంత పరిమిత సంఖ్యయైనను, $2^a > a$. ఇది చాలా ముఖ్యమైన ప్రమేయము. ఇది చెప్పునది ఏమనగా, a సంఖ్యగల ఒక వస్తు సమూహామునకును, 2^a సంఖ్యగల ఆ సమూహాము యొక్క ఉప సమూహాములకును ఒక అనురూపత సాధ్యము కాదనుటయే. ఒకటి కొకటి అను రూపత ఎట్లు ఆమర్చినను 2^a సంఖ్యగల ఉప సమితి సమూహాములో కొన్ని వస్తువులు మిగిలిపోవును.

$a=\aleph_0$ అని తీసికొనినచో, పూర్ణాంకములలోని ఉప సమితులసంఖ్య అగు $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ అని తేలుచున్నది కనుక. $2^{\aleph_0}$ అగు క్రాంతపరిమిత సంఖ్యగల వస్తువులను ఒక వరుసగా ఏర్పరచుట అసాధ్యము.

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ అని వ్రాసితిమేని, $2^c = d > \aleph_0$. అటులనే $2^{\aleph_2} = \aleph_3 > \aleph_2$. కనుక ప్రమేయము క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలు అనంతములు ఉన్నవి.

ఎంచతగిన సమితులు: ఒక అనంత సమితిలోని వస్తువుల సంఖ్య $\aleph_0$ అయినచో, ఆ సమితి 'ఎంచతగినది' అనెదము. ఎంచతగిన సమితులకును $(1, 2, 3, 4, \ldots \ldots)$ అనంత సమితికిని ఒకటికొకటి అనురూపత ఉన్నది. కనుక అట్టి సమితులలోని వస్తువుల నన్నిటిని ఒక మొదటి వస్తువుతో ఆరంభించి, ఒక క్రమవరుసగా పెట్టవచ్చును. ఉదా: అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు ఎంచతగినవి. ఏలన అవి p/q అను రూపమును కలవి. ఇచ్చట p, q పూర్ణాంకములు. p/q అని వ్రాయుటకు బదులు (p, q) అని వ్రాసెదము. p యొక్క సంఖ్య $\aleph_0$, q యొక్క సంఖ్యను $\aleph_0$ కనుక (p, q) యొక్క సంఖ్య $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$: దీనిని ఒక వరుసగా మునుపే క్రమపరచితిమి. $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, \ldots \ldots$ దీనిలో కొన్నిటిని తీసివేసితే, మిగిలినవి అకరణీయసంఖ్యలన్నియు ఒక్కొక్క సారి వచ్చును. పై వరుసలో 2/2 తీసివేయవలెను. ఏలన అదియే 1/1. అటులనే $2/4, 3/3, 4/2, 2/6, 4/4, \ldots \ldots$ ను తీసివేయవలెను. అపుడు మిగిలిన వరుసలో అకరణీయ సంఖ్యలు ఒకేఒకసారి వచ్చును.

ధన అకరణీయ సంఖ్యలేకాక, ధన ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలన్నిటిని కూడ ఒక వరుసగా క్రమపరచవచ్చును. ఇట్లు చేయుటకు '0'ను మొదటిపదముగా తీసికొని ఒక్కొక్క ధన అకరణీయ సంఖ్య తరువాత దాని ఋణ సంఖ్యను వ్రాయవచ్చును. ఇట్లు

$0, 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 3/1, -3/1, 1/4, -1/4, 2/3, -2/3, 3/2, -3/2, 4/1, -4/1, 1/5, -1/5, 5/1, -5/1, 1/6, -1/6, 2/5, -2/5, 3/4, -3/4, \ldots \ldots$ కనుక

ఒక అకరణీయ సంఖ్యాసమితి ఎంచతగినది. అనగా ఈ సమితి సంఖ్య $\aleph_0$.

వాస్తవ సంఖ్యాసమితి: ఈ సమితిలో అకరణీయ సంఖ్యలేకాక $\sqrt{2}$ వంటి కరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నవి. ఇది ఒక అనంతవస్తు సమితి. దీని క్రాంత పరిమిత సంఖ్యను c అను సంకేతముతో గుర్తించెదరు. దీనిలో అన్ని పూర్ణాంకములు ఒక అంశమైనందున $c \geq \aleph_0$ అగుచున్నది.

ఇప్పుడు $c > \aleph_0$ అని చూపుదుము. అనగా వాస్తవ సంఖ్యలకును అకరణీయ సంఖ్యలకును ఒకటికొకటి అను

రూపత సాధ్యముకాదు. ఎటుల అనురూపత అమర్చినను వాస్తవ సంఖ్యలలో కొన్ని మిగిలిపోవును. ఇది చూపుటకు వాస్తవ సంఖ్యలలో ఒక అంశమగు $0 < x < 1$ అగు వాస్తవ సంఖ్యలను మాత్రము తీసికొనెదము. ఇవియే $> \aleph_0$ అయితే, వాస్తవ సంఖ్య సమితి మొత్తము యొక సంఖ్య $c > \aleph_0$ అని రుజువగుచున్నది.

$0 < x < 1$ అగు ఒక్కొక్క వాస్తవసంఖ్యను దశాంశ రీతిగా వ్రాయుము. దీని రూపము $0 \cdot a\, b\, c\, d \dots \dots$ ఇచ్చట $a, b, c, d, \dots \dots$ అంకెలు $0, 1, 2, \dots \dots 9$లో ఏదో ఒకటి. కొన్ని సంఖ్యలు ఇట్లు వ్రాయగా అనంతపరంపర అగును. ఉదా: $1/3 = 0{\cdot}333 \dots \dots$; $1/7 = 0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$. కొన్ని పరిమితపదములు కలిగియుండును. ఉదా: $\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$; $1/5 = 0{\cdot}2$; $1/25 = 0{\cdot}04$; వీటినికూడా అనంతపరంపరలుగా వ్రాయవచ్చును. $1/2 = 0{\cdot}5 = 0{\cdot}4999 \dots \dots$ $1/5 = 0{\cdot}1999 \dots \dots$ $1/25 = 0.039999 \dots \dots$ ఇట్లు వ్రాయుటవలన ఒక్కొక అకరణీయ సంఖ్యకును ఒకే వ్రాయువిధముండును.

ఇప్పుడు $0 < x < 1$ వాస్తవసంఖ్యలన్నియు ఎంచతగినవి అనుకొందము. అనగా వాని నన్నిటిని ఒకవరుసగా

$$\begin{array}{l} 0 \cdot a_1\, a_2\, a_3 \quad \dots \quad \dots \\ 0 \cdot b_1\, b_2\, b_3 \quad \dots \quad \dots \\ 0 \cdot c_1\, c_2\, c_3 \quad \dots \quad \dots \\ 0 \,.\, d_1\, d_2\, d_3 \quad \dots \quad \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

వ్రాయసాధ్యమని అనుకొందము. ఇది తప్పు అని చూపుటకు, వాని నన్నిటిని ఏవిధముగా పైచూపిన వరుసగా వ్రాసినను కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను విడిచిపెట్టితిమి అని చూపుదుము.

ఇప్పుడు ఒక క్రొత్త సంఖ్యను నిర్మింపుము. దాని రూపము $0 \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \dots$ అనునది. a_1 శూన్యమైతే $x_1 = 1$ అని తీసికొనుము. a_1 శూన్యము కాకపోతే $x_1 = 0$ అని తీసికొనుము. ఇటులనే b_2 శూన్యమైతే, $x_2 = 1$, b_2 శూన్యము కాకపోతే $x_2 = 0$ అని తీసికొనుము. ఇటులనే c_3 శూన్యమైతే $x_3 = 1$, c_3 శూన్యము కాకపోతే $x_3 = 0 \dots \dots$ ఇట్లు నిర్మించిన సంఖ్య $0, 1$ అంతరాళములోనున్న వాస్తవసంఖ్య. కాని పై వరుసలో అది లేదు. ఏలన అటులుండుటకు దాని అంకెలన్నియు, ఏదో ఒక వరుసలోని అంకెలుగా ఉండవలెను. అయితే $x_1 \neq a_1$ కనుక అది వరుసలోని మొదటి సంఖ్య కాదు. దాని రెండవ అంకె $x_2 \neq b_2$; కనుక $0 . x_1 x_2 x_3 \dots \dots$ అనునది వరుసలోని రెండవ సంఖ్య కాదు. $x_3 \neq c_3$ కనుక $0 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots \dots$ వరుసలోని మూడవ సంఖ్య $0 \cdot c_1 c_2 c_3 \dots \dots$ కాదు. అటులనే x_n, వరుసలోని n వ సంఖ్యయొక్క n వ పదము వేరు. కనుక $0 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots$ వరుసలోని n వ సంఖ్య కాదు. కనుక $0 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots$ వరుసలోని ఏ సంఖ్యను కాదు. కనుక పై వరుసలో అది రానే రాలేదు. అయితే మనము ప్రారంభములో అన్ని $0 < x < 1$ వాస్తవ సంఖ్యలను ఒక వరుసగా వ్రాయవచ్చునంటిమి. ఇది తప్పు. దీని నుండి కలుగు ప్రమేయము ఏమనగా $c > \aleph_0$. వాస్తవ సంఖ్యల క్రాంతపరిమిత సంఖ్య $\aleph_0$ కంటె పెద్దది. లేదా వాస్తవ సంఖ్యా సమూహము ఎంచ తగినది కాదు.

c యొక్క ధర్మములు :

(i) $c + 1 = c$, $c + n = c$, $c + \aleph_0 = c$, $c + c = c$

(ii) $m \times c = c$, $\aleph_0 \times c = c$, $c \times c = c$

(iii) ఒక ఋజురేఖమీద ఉన్న అన్ని వాస్తవ బిందు సమూహము యొక్క సంఖ్య c. ఒక తలములోని అన్ని వాస్తవ బిందువుల సంఖ్య c. ఒక ఋజురేఖమీదనో ఒక తలముమీదనో ఉన్న సంకీర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య c.

(iv) అన్ని కరణీయ సంఖ్యల సంఖ్య c.

(v) $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \dots\ m^{\aleph_0} = c$.

నిర్వచనము ప్రకారము $2^{\aleph_0}$ అనగా $\aleph_0$ సంఖ్య గల సమితి $A = (1, 2, 3, \dots \dots)$ తీసికొనవలెను. 2 సంఖ్యగా గల మరియొక సమితి $B = (0, 1)$ తీసికొనవలెను. $2^{\aleph_0}$ అనునది B^A ఘాతము యొక్క సంఖ్య మన నిర్వచనము ప్రకారము $f(x)$ అను ఫలములన్నియు తీసికొనవలెను, $x \in A$, $f(x)$ విలువ $y \in B$ అనగా $x = 1, 2, 3 \dots \dots$ అగునపుడు $f(x) = 0$ లేదా 1 గ నుండవలెను.

$x = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$ అనివ్రాసి దాని క్రింద

$f(x) = 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \dots \dots \dots$

అను విలువలను వ్రాసినచో 0 లేదా 1 గల ఒక వరుస అగుచున్నది. ఇది ఒక ఫలము $f(x)$. ఇట్లు అన్ని వరుసలు వ్రాయవలెను. ఒక్కొక ఫలమును ఒక్కొక వరుస అగుటవలన ఫలముల సంఖ్యను ఇట్టి వరుసల సంఖ్యయు ఒకటే. అయితే మనము సాధారణముగా వ్రాయు 10 వ సంకేతము (10 స్కేల్ ఆవ్ నొటేషన్) నకు బదులుగా 2 వ సంకేతము ఉపయోగించినచో 0, 1 మాత్రము వచ్చును. కనుక 0 అని మొదట వ్రాసిన తరువాత 0, 1 వరుస (అనగా $0{\cdot}001010111 \dots$) వ్రాసినచో, అది 2 వ సంకేతములో ఒక సంఖ్య అగును. అది 0, 1 మధ్యన

ఉండును. కనుక ఇట్టి వరుసలు $0 < x < 1$ అను వాస్తవ సంఖ్యను గుర్తించును. విలోమముగా $0 < x < 1$ అను ఒక్కొక్క సంఖ్యను 2 వ సంకేతములో దశాంశ బిందువు తరువాత ఒక 0, 1 కలిగిన వరుసగా ఉండును. కనుక ఇట్టి వరుసల సంఖ్యను $0 < x < 1$ వాస్తవ సంఖ్యను సమము. అనగా ఆ సంఖ్య c. కనుక $2^{\aleph_0} = c$.

3 వ సంకేత విధానము ప్రకారము $3^{\aleph_0} = c$.

కొన్ని ప్రశ్నలు : (1) $c > \aleph_0$ అని చూపితిమి. c కంటె పెద్ద క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలు ఉన్నవా ?

జవాబు : ఉన్నవి. a ఏ సంఖ్య అయినను $2^a > a$ అని చూపియున్నాము. కనుక $2^c > c$, $2^c = d$ అనెదము. $2^d > d$; $2^d = e$ అని వ్రాయుదుము. $2^e > e$ దీని పేరు f అందుము. $2^f > f$ ఇట్లు ఎన్నో పెద్ద పెద్ద క్రాంత పరిమిత సంఖ్యలను నిర్మించవచ్చును.

(2) c^c అను క్రాంతపరిమిత సంఖ్య విలువ ఏమి ?

$c = 2^{\aleph_0}$. $c^c = (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \times c}$

అయితే $\aleph_0 \times c = c$ కనుక $c^c = 2^c = d$

(3) $c - \aleph_0$ విలువ ఏమి ?

$c + \aleph_0 = c$ అని చెప్పితిమి. కనుక $c - N_0 = c$

(4) c కును $\aleph_0$ కును మధ్య క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలు ఉన్నవా ?

ఇంతవరకు ఈ ప్రశ్నకు సమాధానము లభింపలేదు.

వరణస్వీకృత తత్త్వము : పై ప్రమేయముల ఉపపత్తిలో ఈ స్వీకృత తత్త్వమును ఉపయోగించితిమి. ఇది చెప్పునది ఏమనగా : ఒక అనంత సమితుల సమూహము ఈయబడిన ఒక్కొక్క సమితిలోను వస్తువుల సంఖ్య పరిమిత సంఖ్యగనో క్రాంత పరిమిత సంఖ్యగనో ఉండవచ్చును. అటులున్నచో మనము ఒక్కొక్క సమితిలోను ఒక వస్తువును తీసికొని ఒక క్రొత్త సమితిని నిర్మించవచ్చును. ఆ. స.

క్రాంతి వృత్తము : భూగోళము తనచుట్టుతాను దినమునకు ఒకసారి తిరుగుచు, సూర్యునిచుట్టు సంవత్సరమునకు ఒకసారి తిరిగివచ్చును.

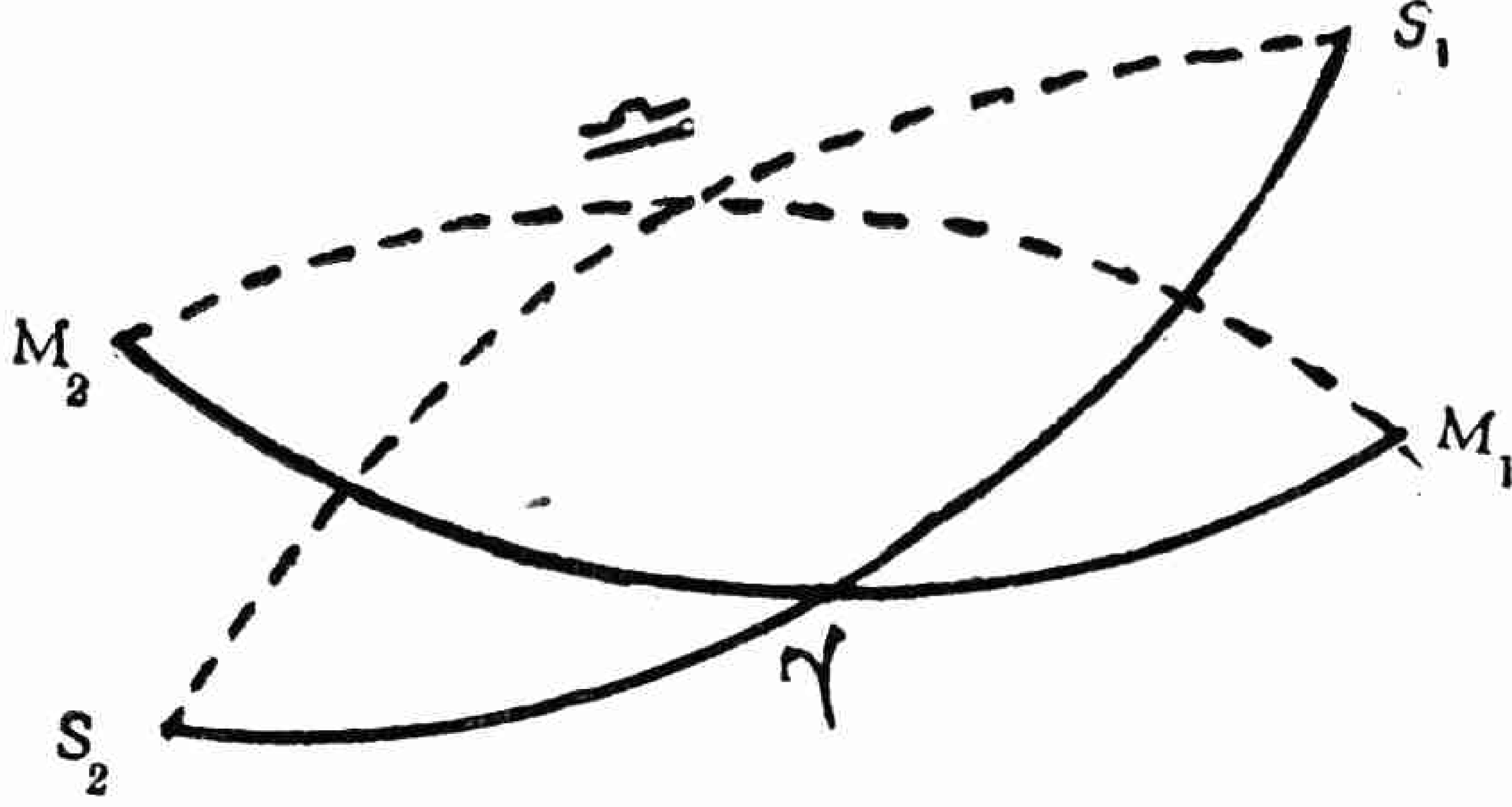
భూమి సంవత్సరమునకు ఒకసారి సూర్యునిచుట్టు తిరుగుటచేత మనకు సూర్యుడే సంవత్సరమునకు ఒకసారి నక్షత్రచక్రములో తిరిగివచ్చునట్లు కనబడుచున్నాడు. ఈ సూర్యభ్రమణమును సాంవత్సరికభ్రమణము అందుము. సూర్యుడు భ్రమణముచేయు మార్గమునకు క్రాంతివృత్తము (ఎక్లిప్టిక్) అని పేరు. గ్రహములు, చంద్రుడుకూడ ఇంచుమించుగా ఈ క్రాంతి వృత్తమందే తిరుగుచుండును. కాని, వాటికి ఒకప్పుడు క్రాంతి వృత్తమునకు ఉత్తరముగను, ఒకప్పుడు దక్షిణముగను విక్షేపముండును. ఈ క్రాంతి వృత్తమునకే రాశిచక్రమని పేరు. (దీనిని శింశుమారచక్రమని పౌరాణికులందురు.) సౌకర్యార్థము, మానజ్ఞానముకొరకు ఈ క్రాంతివృత్తమును 12 రాశులుగా మనపూర్వులు విభజించిరి. వాటిపేర్లు: మేషము, వృషభము, మిథునము, కర్కాటకము, సింహము, కన్య, తుల, వృశ్చికము, ధనస్సు, మకరము, కుంభము, మీనము. ఆయారాశులలోని నక్షత్రముల గుంపులు ఆ యా ఆకారములు కలిగిఉండును. కాబట్టి అట్లు పేర్లు పెట్టిరి. రాశిచక్రమును చంద్రగతిని పురస్కరించుకొని 27 నక్షత్రభాగములుగ విభజించి, ఆ యా భాగములలోని నక్షత్రములకు పేర్లు పెట్టిరి. 'తురగముఖా అశ్వినీ త్రీణి' అని ఈ ప్రకారముగా ఏ నక్షత్రభాగములో ఎన్ని నక్షత్రములున్నవో, ఏ ఆకారముగా ఉన్నవో చెప్పుచు ఆ నక్షత్రములలోని పెద్ద నక్షత్రమునకు యోగతార అని పేరు పెట్టిరి. చంద్రుడు రోజునకు ఒక నక్షత్రభాగములో ఉండును. సూర్యుడు మాసమునకొక రాశిలో ఉండును. ఒక రాశి ప్రమాణము 30°, ఒక నక్షత్రప్రమాణము 13° 20′.

క్రాంతివృత్తము ఖగోళీయ విషువద్వృత్తమును $23\frac{1}{2}$ డిగ్రీలలో ఖండించుచున్నది. ఈ కోణమునకు పరమ క్రాంతి అని పేరు. క్రాంతి విషువన్మండలముల సంపాత బిందువుకు క్రాంతిపాతము అని పేరు.

విషువన్మండలము క్రాంతి మండలముమీద వెనుకకు మెల్లగా తిరుగుచున్నది. అట్లు తిరుగుటచేత క్రాంతిపాతము లేదా విషుబిందువు క్రాంతివృత్తముమీద వెనుకకు తిరుగుచున్నది. అట్లు ఒకసారి చక్రముచుట్టి వచ్చుటకు దాదాపు 27 వేల సంవత్సరములు పట్టును. అనగా 72 సంవత్సరముల కొక డిగ్రీచొప్పున చాల మెల్లగా తిరుగుచుండును. ఈ చలనమునకు విషుచలనమని పేరు. రెండు వృత్తములు ఖండించుకొనునప్పుడు రెండు సంపాత బిందువులు ఉండును కాన, ఒక సంపాత బిందువునకు వసంత విషువద్బిందువు అనియు, రెండవ సంపాతబిందువునకు శరద్విషువద్బిందువు అనియు పేర్లు. విషుబిందువుకు సూర్యుడు చేరునపుడు పగలు రాత్రి సమానముగా ఉండును. ఒకానొకప్పుడు అనగా వరాహమిహిరాచార్యుని కాలమున ఈ విషుబిందువు అశ్విన్యాదిలో ఉండినట్లు అతని గ్రంథము వలన తెలియవచ్చుచున్నది. అది ఇపుడు ఉత్తరాభాద్రలో ఉన్నది. 1958 సంవత్సరమునకు అయనాంశ = 23° 16′. విషుబిందువు వెనుకకు జరిగిన భాగలు, సాయనరీత్యా సూర్యప్రవేశ కాలములు 206 పుటలో ఇవ్వడమైనది.

మేషాది - వసంతవిషువు — మార్చి 21 వ తేది.
కటకాది - కటకాయనము — జూన్ 22 వ తేది.
తులాది - శరద్విషువు — సెప్టెంబరు 23 వ తేది.
మకరాది - మకరాయనము — డిసెంబరు 22 వ తేది.

చిత్రము 115 లో ♈ = మేషవిషువు. క్రాంతివృత్తము ఆ బిందువువద్ద విషువృత్తము యొక్క దక్షిణమునుండి ఉత్తరమునకు పోవును. మేషవిషువునకు వసంతవిషువు అని పేరు. ♎ = తులావిషువు. క్రాంతివృత్తము ఆ బిందువు వద్ద విషువృత్తము యొక్క ఉత్తరమునుండి దక్షిణమునకు పోవును. తులావిషువునకు శరద్విషువు అని పేరు.



చిత్రము 115 క్రాంతివృత్తము

విషుబిందునిర్ణయము : ఇక విషుబిందువును ఎట్లు గుర్తించుట అను విషయమునుగూర్చి తెలిసికొందము. ఇది క్రాంతి విషువద్వృత్తముల సంపాతబిందువగుటచేత ఒక అదృశ్యబిందువు. పాశ్చాత్యశాస్త్రజ్ఞులందరు చక్రమున కాది బిందువుగా దీనిని గ్రహించియున్నారు. మన సిద్ధాంతులు నేటికిగూడ నక్షత్రములనే ప్రధానముగా జేసి కొన్నవారగుటచేత అశ్విన్యాదినే చక్రాదిగా గ్రహించుచున్నారు. వారి స్ఫుటగ్రహములలో అయనాంశము తీసి వేయగా మనస్ఫుటగ్రహములు వచ్చును. అందుచేత వారి మానమునకు సాయనమానమనియు, మన మానమునకు నిరయనమానమనియు పేరు. '♈' అను విషుబిందువును వేధించుటకు ఫ్లామ్‌స్టీడ్ మార్గమును సూచించి యున్నాడు. కటకాయన వేధచేతను కూడ విషుబిందువును కనుగొనవచ్చును. ఖగోళశాస్త్ర గ్రంథములందు విధాన వివరములు ఈయబడినవి.

నక్షత్రముల పేర్లు : 1. అశ్విని; 2. భరణి ; 3. కృత్తిక; 4. రోహిణి ; 5. మృగశిర ; 6. ఆరుద్ర ; 7. పునర్వసు ; 8. పుష్యమి ; 9. ఆశ్లేష ; 10. మఖ ; 11. పుబ్బ ; 12. ఉత్తర; 13. హస్త; 14. చిత్త ; 15. స్వాతి ; 16. విశాఖ ; 17. అనూరాధ ; 18. జ్యేష్ఠ ; 19. మూల ; 20. పూర్వాషాఢ ; 21. ఉత్తరాషాఢ ; 22. శ్రవణము ; 23. ధనిష్ఠ ; 24. శతభిషము ; 25. పూర్వాభాద్ర ; 26. ఉత్తరాభాద్ర ; 27. రేవతి.

ఒకరాశికి $2\frac{1}{4}$ నక్షత్రములు, లేదా 9 పాదములు. ఒక నక్షత్రము యొక్క వ్యాప్తి $13° 20'$ లేదా $800'$; ఒక పాదమునకు $3° 20' = 200'$; డిగ్రీ లేదా అంశ యొక్క గుర్తు °. నిమిషము యొక్క గుర్తు ′. సెకను యొక్క గుర్తు ″. 60 సెకనులు = 1 నిమిషము ; 60 నిమిషములు = 1 డిగ్రీ లేదా అంశ.

ఇది అంతయు ధనుర్మానము. కాలమానమునకుకూడ అట్టి గుర్తులే వాడుదురని జ్ఞప్తియందు ఉంచుకొనవలయును.

డి. ఏ. సో.

క్రియాక్రమకరి : ఇది భాస్కరాచార్య-II చే విరచితమైన లీలావతి పై రచింపబడిన విస్తృతవ్యాఖ్యానము. మూలగ్రంథస్థ శ్లోకములకు కేవలము అర్థవివరణ చేయుటతో తృప్తిచెందక ఈ గ్రంథకర్త ఆర్యభటసంప్రదాయ గర్భితమగు స్వకాలీన గణితవిజ్ఞాన పురస్సరముగ లీలావతీ విషయములను విస్తరించి పూరించెను.

ఇందు π యొక్క అనంతపరంపర లేదా వృత్తపరిధి $= 4d - \frac{4d}{3} + \frac{4d}{5} - \ldots \ldots$ అను సమతా సంబంధము వివరముగ చర్చింపబడియున్నది. ఈ సందర్భమున సంకలిత వ్యాపారము సవివరముగ పరామర్శింపబడెను. తక్కిన గ్రంథములలో సరళ సంకలనము లేదా పరంపరల మొత్తము కనుగొనుటయను అర్థము ఆరోపింపబడిన 'సంకలిత' శబ్దము ఆర్యభటుని సంప్రదాయములో నిశిత తరసాంకేతికార్థమునందు వాడబడినది. క్రియాక్రమకరి యందు, ఈ సంప్రదాయమునకు చెందిన ఇతరగ్రంథము లందు సంకలితపదము 'చయనీకరణము' (ఇంటెగ్రేషన్) అనగా పూర్ణము యొక్క భాగముల సంకలనము లేదా అట్టి భాగముల యొక్క ఘాతములసంకలనము (ఈ భాగముల పరస్పరాంతరము ఆ పూర్ణము యొక్క అనంతాల్ప భాగమై ఉండవలెను) అను అర్థములో వాడబడినది. సంకలనపూర్వకమగు ఈ చయనీకరణవ్యాపారము నారాయణపండితుని 'వారసంకలిత' పదార్థముచే కొంత మట్టుకు ఆకాంక్షింపబడినదని చెప్పవచ్చును. కాని సంకలనపూర్వకచయనీకరణము అనెడు ప్రక్రియను సాధించిన గౌరవము ఆర్యభట సంప్రదాయమునకు చెందును. ఈ వ్యాపారము యథార్థముగ ఎవని ఉపజ్ఞమో మనకు తెలియదు. క్రియాక్రమకరి, యుక్తిభాషయను ఈ రెండు గ్రంథములే ఈ వ్యాపారమును వివరించినవి. వృత్తపరిధి మూల్యము ఒక పరంపరగా వ్యక్తపరచిన కీర్తి మాధవునిది.

కనుక, దీనిని సాధించుటకు మీదచెప్పిన చయనీకరణ వ్యాపారము ఆవశ్యకము కనుకను ఈ జ్ఞానము మాధవుని కాలములో ప్రచారమునందున్నదని కాని, లేదా మాధవునిచే కల్పితమైనదని కాని నిరాటంకముగ చెప్పవచ్చును. క్రియాక్రమకరీ రచయిత జీవ, కోటిజీవ పరంపరలను గూడ సాధించెను. 4, 8, 16, 32, ... ఇట్లు క్రమ వర్ధమాన భుజసంఖ్యగల బహుభుజులను రచించుటవలన వృత్తము యొక్క పరిధిని గణింపగల మాధవుని విధానమును వివరించుట ఈ గ్రంథము యొక్క మరియొక నిర్వాహము.

జ్యామితిలో π కి, జ్యాకి సమాసములను ఇచ్చుటయే గాక చయనీకరణపరికర్మ నుపయోగించి, గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యమును, ఘనపరిమాణమును క్రియాక్రమకరి నిర్ణయించెను; చక్రీయచతుర్భుజ కర్ణములకు సూత్రములను సాధించెను. ఆర్యభట సంప్రదాయమందు అత్యంతాదరమును పడసిన జ్యామితీయ బీజగణితము కూడ ఈ గ్రంథమున తడవబడినది.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$$

వంటి సాంకేతికములకు జ్యామితీయ నిరూపణములు పొందుపరుపబడినవి. ఇట్లే అంకశ్రేఢి సంకలనమునకు; సహజ సంఖ్యల వర్గముల, ఘనములసంకలన (వర్గసంకలిత, ఘన సంకలిత) ఫలములకు, త్రికోణీయసంఖ్యల సంకలన (సంకలితైక్య) సూత్రములు ఈయబడినవి.

ఇట్లు క్రియాక్రమకరీ రచయితకు తన గణితవిజ్ఞానమును ప్రదర్శించుటకు లీలావతి నిమిత్తమాత్రమైనదని చెప్పవచ్చును. అమూల్యమైన ఈ గ్రంథమింకను విశోధితమై ప్రచురణ భాగ్యము నందుకొనలేదు. రచయితనామమును గాని, ఆతని కాలమునుగాని నిర్ణయించుటకు తగిన ఆధారములు ఇందు కానరావు. కాని కొన్ని వ్యాఖ్యాన గ్రంథములందు క్రియాక్రమకరియందలి క్రింది నమస్కారశ్లోకము కనపడుచున్నది:

"నారాయణం జగదనుగ్రహ జాగరూకం
శ్రీ నీలకంఠమపి సర్వవిదం ప్రణమ్య"

నీలకంఠుని తంత్ర సంగ్రహమునకు 1556 లో శంకరవారియార్ చే రచింపబడిన "లఘువృత్తి" అను వ్యాఖ్యానములో ఈ శ్లోకము ఉన్నది. అందుచేత క్రియాక్రమకరి రచయితే ఈ శంకరవారియారే కావచ్చును. యుక్తిభాషయను మళయాళగ్రంథము విషయసంపదలో క్రియాక్రమకరికి అతిసన్నిహిత సాదృశ్యము కనపరచుచున్నది. అందు కొన్ని భాగములు పరస్పరము అక్షరశః అనువాదములుగ కన్పట్టుచున్నవి. సరస్వతి.

క్వాంటం వాదము : చూ. భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు - పు. 311.

ఖగోళగతిశాస్త్రము : గతిశాస్త్రప్రకారము ఒక బిందువు వక్రరేఖలో పోవునపుడు త్వరణఘటకములు SP దిశగా $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ అగును ; SP కి లంబదిశగా $\frac{1}{r} \times \frac{d}{dt}\left(r^2 \times \frac{d\theta}{dt}\right)$ అగును. దాని వైశాల్య వేగము $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ అనియు మనకు తెలియును. కెప్లర్ ద్వితీయ సూత్ర ప్రకారము వైశాల్య వేగము స్థిరము కావున $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ఒక స్థిరరాశి. అందుచేత $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)$ శూన్యము. కావున గ్రహముయొక్క త్వరణఘటకము SP కి లంబదిశలో శూన్యము. అనగా గ్రహముపై ప్రవృత్తమగు బలము పూర్తిగా SP దిశలోనే ఉండును. అనగా ఆశక్తి సూర్యుని గ్రహముతో కలుపు దిశలో ప్రవర్తించుచుండును.

పైన సూచించిన గ్రహగతి సమీకరణమును అనుసరించి $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ఒక స్థిరాంకము అను విషయమును ఉపయోగించి, SP దిశలోనున్న త్వరణాంగమును గుణించగా, దాని యొక్క విలువ

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

(μ ఒక స్థిర ధనరాశి) అని తేలుచున్నది. గ్రహము యూనిట్ దూరములో ఉన్నప్పుడు μ ను బలము అని చెప్పవచ్చును. కాగా గ్రహముపైన ప్రయుక్తమగు బలము ఎల్లప్పుడును సూర్యునివైపు ఉన్నదనియు, అదియు సూర్యునినుండి గ్రహమునకు గల దూరముయొక్క వర్గమునకు విలోమ సంబంధములో ఉన్నదనియు తెలియుచున్నది. ఈ విషయము న్యూటన్ విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతమును బలపరచుచున్నది. ఆ సిద్ధాంతము ప్రకారము విశ్వములోని ప్రతికణము ప్రతి ఇతరకణమును ఆకర్షించును. ఆ ఆకర్షణబలము ఆ రెండు కణముల ద్రవ్య సంచయముల గుణకార లబ్ధమునకు సమసంబంధమును, వాని మధ్య దూరవర్గమునకు విలోమ సంబంధమును కలిగియుండి, ఆ రెండు కణములను కలుపు దిశలో ప్రవర్తించును. అనగా m_1, m_2 ద్రవ్యసంచయములుగా గల రెండు కణముల మధ్యదూరము d అయినచో దాని మధ్య ఆకర్షణబలము $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$. దీనిలోని G ఒక స్థిర

రాశి. దీనిని గురుత్వ స్థిరరాశి అందురు. కాబట్టి గ్రహగతి కూడా ఈ విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతమును అనుసరించియే ఉన్నదని తెలియుచున్నది.

ఒక గ్రహము విశ్వగురుత్వ సూత్రప్రకారము భ్రమించు చున్నదని తలచినచో, ఆ గ్రహముయొక్క **మార్గము** దీర్ఘవృత్తము అనియు, దాని నాభి యొక్కటి సూర్యుని స్థానమందు ఉండుననియు, వైశాల్యవేగము స్థిరమనియు కూడ నిరూపించవచ్చును. కాబట్టి కెప్లర్ ద్వితీయ సూత్రము గ్రహగతికి మూలకారణమగు బలమును నిరూపించి, విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతమును బలపరచుచున్నది.

దీర్ఘవృత్త మార్గములో ఒక గ్రహము భ్రమించునప్పుడు దానియొక్క ఆవర్తనకాలము T అయినచో

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad \dots\dots \quad (1)$$

($2a$ దీర్ఘవృత్తము యొక్క దీర్ఘాక్షము, μ గ్రహము యొక్క ఆకర్షణబలము) అని నిరూపించవచ్చును.

సూర్యుని నుండి రెండు గ్రహముల మాధ్యమ దూరములు a_1, a_2 లు అని, వానియొక్క ఆవర్తనకాలములు క్రమముగా T_1, T_2 లు అని అనుకొందము. సూర్యుని నుండి అవి ఒకే ప్రమాణ దూరములో ఉన్నపుడు వాని యొక్క ఆకర్షణబలములు μ_1, μ_2 లు అని అనుకొందము.

పై సూత్ర ప్రకారము

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{\mu_1}; \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{\mu_2}$$

కాని కెప్లర్ **మూడవ సూత్రప్రకారము :**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3} \text{ అనగా } \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

$$\therefore \frac{4\pi^2}{\mu_1} = \frac{4\pi^2}{\mu_2} \quad \therefore \mu_1 = \mu_2$$

కాబట్టి ఒకే దూరములో ఉన్నపుడు ఏ రెండు గ్రహముల కైనను సూర్యుని ఆకర్షణబలము ఒకటే అని కెప్లర్ సిద్ధాంతము వలన తెలియుచున్నది.

కాని న్యూటన్ గురుత్వసిద్ధాంతమును ఉపయోగించిన కలుగు మార్పులను గమనింతము. సూర్యుని ద్రవ్యరాశి M ; m_1, m_2 లు రెండు గ్రహముల ద్రవ్యరాశులు అనుకొందము. వాని ఆవర్తన కాలములు T_1, T_2 అనుకొందము. వాని ఫలిత త్వరణములు $G\ (M+m_1)$, $G\ (M+m_2)$ అగును (G గురుత్వ గుణకము).

గ్రహములు దీర్ఘవృత్తములలో భ్రమించుటచే (1) ప్రకారము

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{G\ (M+m_1)}; \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{G\ (M+m_2)}$$

$$\therefore \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(M+m_2)\ a_1^3}{(M+m_1)\ a_2^3}$$

$$\text{లేదా } \frac{(M+m_1)\ T_1^2}{(M+m_2)\ T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

దీనిని గురుత్వ సిద్ధాంతము వలన వచ్చెడు తృతీయ కెప్లర్ సిద్ధాంతము (కెప్లర్ తృతీయ స్ఫుట సూత్రము) అనవచ్చును.

m_1, m_2 ద్రవ్యసంచయములు Mతో సరిపోల్చినపుడు చాల సూక్ష్మమైనచో, $\left(\frac{m_1}{M},\ \frac{m_2}{M}\ \text{సూక్ష్మరాశు లైనచో}\right)$ పై సూత్రమును

$$\frac{\left[1+\frac{m_1}{M}\right] T_1^2}{\left[1+\frac{m_2}{M}\right] T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \text{ గా వ్రాసి,}$$

$\frac{m_1}{M}$, $\frac{m_2}{M}$ లు సూక్ష్మములగుటచే వానిని నిరాకరించినచో $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ అను కెప్లర్ మూడవ సూత్రము పై సూత్రము యొక్క స్థూలరూపము అని చెప్పవచ్చును.

గ్రహముల మార్గములు స్థూలముగా వృత్తములు అనుకొనినచో, వానికి ఏకరూపకోణీయవేగములు ఉండును. ఆ వృత్తము వ్యాసార్ధము a అనియు, ఆ గ్రహము ద్రవ్యరాశి m_1 అనియు, ఆవర్తనకాలము T_1 అనియు తీసికొనినచో, గ్రహగతికారకమగు బలము ఎల్లప్పుడు సూర్యుని వైపు ఉండుననియు, v_1 ఆ గ్రహ కక్ష్యావేగము అనియు తీసికొనినచో, గతిశాస్త్ర ప్రకారము ఆ బలము యొక్క విలువ $F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{a}$ అని మనకు తెలియును.

T_1 కాలములో గ్రహము a_1 వ్యాసార్ధముగల వృత్తము చుట్టి రాగలుగుటచే

$$2\pi a_1 = v_1 T_1; \quad \therefore v_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1}$$

$$F_1 = \left(\frac{2\pi a_1}{T_1}\right)^2 \frac{m_1}{a_1} = \frac{4\pi^2 a_1 m_1}{T_1^2}$$

$$F_1 \text{ (న్యూటన్ గురుత్వ సిద్ధాంత ప్రకారము)} = G \cdot \frac{m_1 M}{a_1^2}$$

$$\therefore \frac{4\pi^2 a_1 m_1}{T_1^2} = \frac{G\ m_1\ M}{a_1^2}.$$

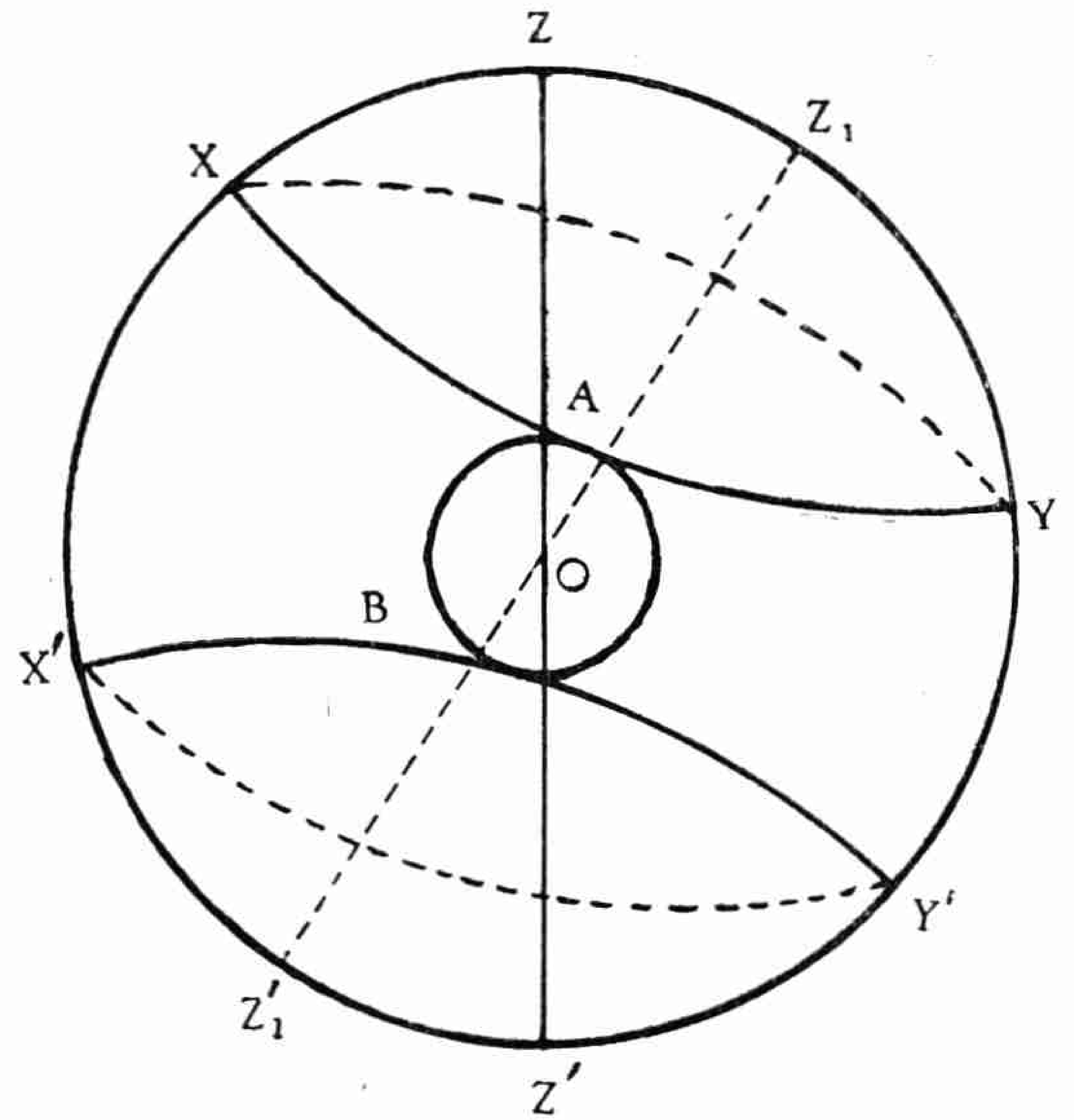
కాబట్టి $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ (స్థిరము).

ఈ రకమైన పద్ధతిని అవలంబించినను, తిరిగి కెప్లర్ మూడవ సిద్ధాంతమే వచ్చుచున్నది. కావున కెప్లర్ మూడవ సిద్ధాంతము స్థూలసూత్రమే అనియు, న్యూటన్ స్ఫుటపరచిన స్ఫుట సూత్రమే సరియైనదనియు మనము భావించవచ్చును.

న్యూటన్ గతిసూత్రములు, విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతము, కాంతివేగముతో సరిపోల్చినపుడు అల్పమగు వేగములు కల ద్రవ్యసంచయములకే సరిపోవుననియు, అధిక వేగములు కల వానికి అన్వయింపవనియు, గత 50 సంవత్సరములుగా సాపేక్షతా సిద్ధాంతమువలన తెలియుచున్నది. న్యూటన్ సిద్ధాంతములు ఇంతగా మనలనంటి ఉండుటకు ముఖ్యకారణము భూగోళముపై నున్న వస్తువులవేగములు కాంతి వేగముతో పోల్చినపుడు అల్పమగుటయే. గ్రహగతులలో న్యూటన్ సిద్ధాంతములను పూర్తిగా అనుసరింపక ఉండునది బుధగ్రహ పరిహేళియొక్క గతి. న్యూటన్ సిద్ధాంత ప్రకారము బుధగ్రహముయొక్క నీచోచ్చరేఖ శతాబ్దమునకు 532″ (532 సెకనులు) వేగముతో పరిభ్రమించుచున్నట్లు తెలియుచున్నది. కాని ప్రత్యవేక్షణమున ఇది శతాబ్దమునకు 574″ వేగముతో పరిభ్రమించుచున్నదని చూపట్టుచున్నది. సాధారణ సాపేక్షతా సిద్ధాంతము ఈ వ్యత్యాసమునకు బుధగ్రహము యొక్క వేగమే కారణమని తెలుపుచున్నది. ఆ వేగము పూర్వముతలచినంత అల్పముకాదనియు, కాంతివేగముతో సరిపోల్చినప్పుడు నిరాకరింప తగినది కాదనియు ఆ సిద్ధాంతమువలన విశదమగుచున్నది. ఈ భేదము ప్రత్యవేక్షణయందలి ప్రమాదము కారణముగ కలుగుచున్నదా లేదా అను విచారణచేయుటకైనను, ఏ ఇతర గ్రహము ఈ విధమైన ప్రత్యవేక్షణకు అనుకూలముగా లేదు. కాబట్టి సాపేక్షతా సిద్ధాంతము గ్రహపథములలో ఒక్క బుధగ్రహ ప్రత్యవేక్షణలపైననే ఆధారపడిఉన్నది. (చూ. సాపేక్షతా సిద్ధాంతము, భౌతికరాసాయనిక శాస్త్రములు-పు. 732). ఎన్ని సిద్ధాంతములు ఏర్పడినను, న్యూటన్, కెప్లర్ సిద్ధాంతములే సాధారణవ్యవహారములకు తగు సాధనములను సమకూర్చినవి (చూ. కెప్లర్, యోహాన్ - పు. 193; న్యూటన్, ఐజక్). పి. సూ. నా.

ఖగోళము : నిర్మలనిశీథమున ఆకాశమును గమనించినఎడల తారలు, తదితర స్వయంప్రకాశనభోమూర్తులు మొదలగునవి మన దృశ్యఅర్ధగోళాంతర భాగమున ఇమిడిఉన్నట్లు గోచరించును. అదృశ్యార్ధగోళముతోచేరి ఇది ఒక పూర్ణగోళము అగును. దీనిని ఖగోళము, లేదా దివ్యగోళము అని అందురు.

మస్తకము, పాతాలబిందువు, యామ్యోత్తరరేఖ, విషువృత్తము, దివ్యధ్రువములు, క్రాంతివృత్తము : భూమి మీద ఒక ప్రదేశమున భూమిని స్పర్శించు తలము ఖగోళమును వృత్తములో ఖండించును. ప్రతిస్థలమునకు ఈ వృత్తము ముఖ్యముగ దిశయందు మారుచుండును. ఉదా : A, B అను రెండు స్థలములను తీసికొందము.(చూ. చిత్రము 116) XY, X′Y′ ఆప్రదేశముల వృత్తములను సూచించుచున్నవి.



చిత్రము 116

బ్రహ్మాండమైన దివ్యగోళపరిమాణములతో భూపరిమాణములను పోల్చినప్పుడు భూపరిమాణములను ఉపేక్షించి, భూమిని దివ్యగోళకేంద్రమునందలి బిందువుగ గ్రహింపవచ్చును. అందువలన భూమియందలి వివిధప్రదేశములకు భూస్పర్శరేఖాతలములు దివ్యగోళకేంద్రము O గుండా పోవు దివ్యగోళ వృత్తములగును. గోళకేంద్రము నుండి పోవు ప్రతిగోళీయవృత్తమును గురువృత్తమందురు. పై విధముగ ఒక ప్రదేశమున భూస్పర్శరేఖాతలము దివ్యగోళమును గురువృత్తములో స్పర్శించును. ఈ వృత్తమును క్షితిజము (హారైజన్) అందురు. క్షితిజము ప్రేక్షకుని అనుసరించి మారుచుండును.

Z, Z′ బిందువులు A అను ప్రదేశమునకు ఊర్ధ్వముగాను, అధోముఖముగాను గల బిందువులు. వీనిని క్రమముగా మస్తకము (జెనిత్), పాతాలబిందువు (నాడిర్) అని అందురు. ZZ′ రేఖ క్షితిజమునకు లంబముగా

ఉండును. Z, Z' లు ప్రతిస్థలమునకు మారుచుండును. ZZ' నుండి పోవు గురువృత్తమును ఉదగ్రవృత్తము అందురు.

భూమి తన ధ్రువాక్షముచుట్టు పరిభ్రమించుచుండును. ఈ భూఅక్షము దివ్యగోళమును P, P' అను రెండుబిందువుల వద్ద ఖండించును. ఈ బిందువులను దివ్యధ్రువములందురు. ధ్రువనక్షత్రమునకు సమీపమున కలదియు, దానిచేతనే గుర్తించబడునదియు అగు P అను బిందువును ఉత్తరదివ్య ధ్రువమనియు, P' ను దక్షిణ దివ్య ధ్రువమనియు అందురు. దివ్యధ్రువముల (P, P') నుండిపోవు గురువృత్తములను ద్యుజ్యావృత్తములు అందురు (చూ. చిత్రము 117).

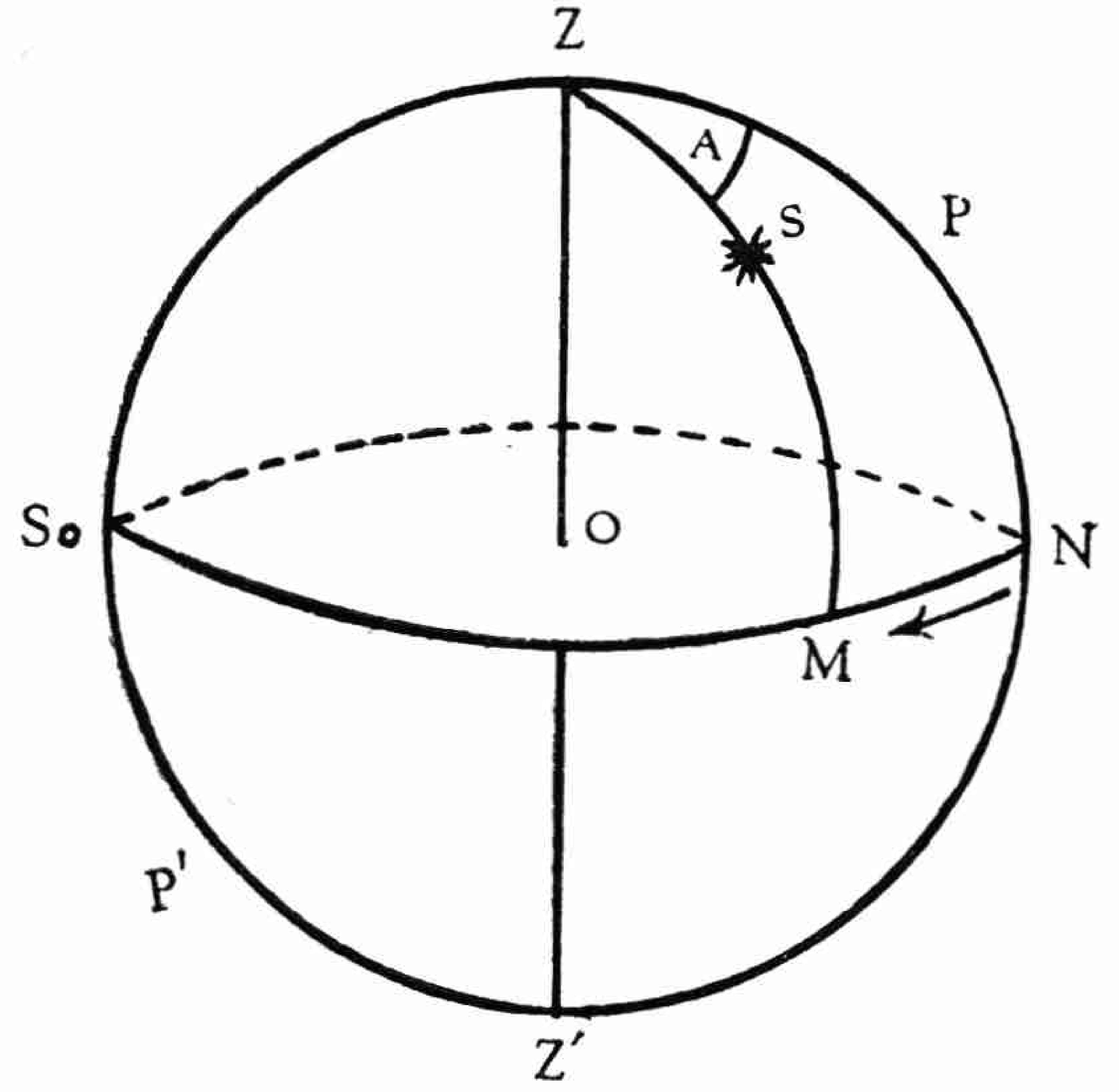
Z, Z' ల నుండి పోవు ఉదగ్రవృత్తమును, ఆ ప్రదేశము యొక్క దివ్య మధ్యాహ్న రేఖ అందురు. ఈ వృత్తము క్షితిజమును N, S_0 అను రెండు బిందువులవద్ద ఖండించును. ఈ బిందువులను ఉత్తర, దక్షిణ బిందువులందురు. P బిందువుకు సమీపముననుండు బిందువును ఉత్తరబిందువందురు. భూనిరక్షరేఖా తలము ఖగోళమును గురువృత్తములో ఖండించును. ఈ గురువృత్తమును ఖగోళనిరక్షరేఖ, లేదా విషువృత్తము అని అందురు. ద్యుజ్యావృత్తములు అన్నియు విషువృత్తమునకు లంబములుగా ఉండును.

సూర్యునిచుట్టు భూమి వార్షికగతిలో పరిభ్రమించుచుండుటచేత, సూర్యుడు భూమిచుట్టు పరిభ్రమించు చున్నట్లు మనకు గోచరించుచున్నది. సూర్యుని ఈ వార్షిక గతి దివ్యగోళమునందు గురువృత్తముగా గుర్తించబడినది. ఈ గురువృత్తమును క్రాంతివృత్తము అందురు. క్రాంతి వృత్తము, విషువృత్తము రెండుబిందువులవద్ద ఖండించుకొనును. వీనిని మేషాదిబిందువు, తులాదిబిందువు అని అందురు.

తారల దైనిక గతి : భూమి తనచుట్టుతాను పడమర నుండి తూర్పునకు పరిభ్రమించుటచేత, సూర్యుడు గ్రహములు, తారలు మొదలగు నభోమూర్తులు భూమిచుట్టు తూర్పునుండి పడమరకు తిరుగుచున్నట్లు మనకు గోచరించుచున్నదని న్యూటన్, ఫోకాల్ట్ మొదలగు ప్రఖ్యాత ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు రుజువు చేసిరి. ఒక పరిభ్రమణకాలము ఒకదినము. ఈ కృత్రిమగతులను వాని దైనికగతులందురు. తారల దైనికగతులు దివ్యగోళమున విషువృత్తమునకు సమానాంతరలఘువృత్తములుగ ఉండును.

చతుర్విధ నిరూపకముల పద్ధతులు : ఖగోళమున తారల స్థానములను నిర్ణయించుటకు నిరూపకపద్ధతులు 4 కలవు.

ఉచ్చత్వము (ఆల్టిట్యూడ్) - దిగంశ (అజిమత్): S అను తారనుండి పోవు ఉదగ్రవృత్తము క్షితిజమును M వద్ద కలసికొనినది అనుకొందము. (చూ. చిత్రము117) చాపము ZS ను ఆ తార నతాంశ అందురు. చాపము SMను ఆ తారఉచ్చత్వము అందురు. (ఉచ్చత్వము = 90 —



చిత్రము 117

నతాంశ). యామ్యోత్తరరేఖకు, ఉదగ్ర వృత్తమునకు మధ్యగల PZS కోణమును ఆ తార యొక్క దిగంశ అందురు. ఇది క్షితిజచాపము NM కు సమానము. దీనిని N నుండి పడమరకు (అపసవ్య దిశలో) కొలుతురు. దివ్య మధ్యాహ్నరేఖ, మస్తకము, పాతాళ బిందువు ఒక ప్రదేశమునకు స్థిరములు. కనుక నిర్ణీత స్థలమున, నిర్ణీత సమయమున తారల ఉచ్చత్వము, దిగంశ, నతాంశ - వీటియందు మార్పుండదు.

నతకాలము (అవర్ ఆంగెల్) - క్రాంతి (డెక్లినేషన్) : S అను తారనుండి పోవు ద్యుజ్యావృత్తము విషువృత్తమును M అను బిందువువద్ద కలిసికొనినది అనుకొందము. (చూ. చిత్రము 118) దివ్య మధ్యాహ్నరేఖ, ద్యుజ్యావృత్తముల మధ్యగల ZPS కోణమును ఆ తార నతకాలము అని అందురు. ఇది చాపము QMకు సమానము. నతకాలమును Q నుండి (0 నుండి 360 వరకు) పడమరగా (అపసవ్యదిశలో) కొలుతురు. చాపము SM ను దాని క్రాంతి అందురు. చాపము PS ను ఆ తార ఉత్తరధ్రువాంతర మందురు (ఉత్తరధ్రువాంతరము = 90 — క్రాంతి). నతకాలము స్థలమునుబట్టి, సమయమునుబట్టి మారుచుండును. కాని క్రాంతి స్థిరముగ ఉండును.

విషువాంశ (రైట్ ఎసెన్షన్) - క్రాంతి : చిత్రము 118 లోని ♈ ను మేషాది బిందువనుకొనిన చాపము ♈ M ను ఆ తార విషువాంశ అందురు. విషువాంశను

విషువృత్తముమీద, మేషాది బిందువునుండి M వరకు తూర్పుగా (సవ్యదిశలో) కొలుతురు. క్రాంతిని కొలుచు

చిత్రము 118

పద్ధతి పైన చెప్పితిమి. విషువాంశ, క్రాంతి స్థిరములు.

శరము, (సెలస్టియల్ ఆల్టిట్యూడ్), భోగము (సెలస్టియల్ లాంగిట్యూడ్) క్రాంతి వృత్తధ్రువముల (K, K') నుండి పోవు ప్రతి గురువృత్తము క్రాంతి వృత్తమునకు లంబ

చిత్రము 119

ముగా ఉండును. γ మేషాదిబిందువు. K, K', నుండి S తార నుండి పోవు గురువృత్తము క్రాంతివృత్తమును M వద్ద ఖండించునని అనుకొందము. SM చాపమును S తార యొక్క శరము అని అందురు. చాపము γM (చిత్రము 119) ను దాని భోగముఅని అందురు. భోగమును మేషాదిబిందువు γ నుండి M వరకు తూర్పుగా (సవ్యదిశలో) కొలుతురు. శర, భోగములుకూడ స్థిరములు. మేషాది బిందువు యొక్క, క్రాంతివృత్తము యొక్క స్థానములను నిర్ణయించుట కష్టసాధ్యము. అందువలన దివ్యగోళమున ఏదేని ఒక తారస్థానమును నిర్ణయించుట గాని, లేదా ఊహించుటగాని 3, 4 పద్ధతుల వలన కంటె, 1, 2 పద్ధతుల మూలమున సులభము. ఎమ్. వి. సు.

గణిత అనుగమనము : క్రింది ప్రమేయమును తీసికొందము :

$$1+2+3+ \ \dots \ \dots \ +n=\frac{n\,(n+1)}{2} \quad \dots \ (1)$$

ఇందు n యొక్క విలువను అనుసరించి అనేక ప్రమేయములు ఉన్నవి. $n=1, 2, 3, 4 \dots$ మొదలగు పరిమిత సంఖ్యలకు ఈ ప్రమేయమును సరిచూపవచ్చును. కాని అన్ని (అనగా అనంత) విలువలకును ఇది నిజమని నిరూపించుట ఎట్లు? గణిత అనుగమనము (మాథమేటికల్ ఇండక్షన్) ఇందుకు ఒక మార్గమును చూపుచున్నది. ఆ విధానమును అనుసరించి,

ఏదో ఒక విలువకు ప్రమేయము నిజమని సరిచూపుము.

ఈ ప్రమేయము $n=r$ అను వ్యాపకవిలువకు నిజము అయినచో, $n=(r+1)$ అను ప్రక్క విలువకును ఇది నిజమే అని గణితరీతిగా ఒక ఉపపత్తి కనిపెట్టుము.

ఈ రెండు పనులను పూర్తిచేసినచో ఆ ప్రమేయము అన్ని విలువలకును నిజమై ఉండును.

పై ప్రమేయమునందు $n=1$ అని తీసికొనినచో $1=\frac{1\times 2}{2}=1$ అగును. కనుక $n=1$ అను విలువకు ప్రమేయము నిజమని సరిచూపితిమి. $n=r$ అను వ్యాపక విలువకు అది నిజమయినచో,

$$1+2+3+ \ \dots\dots \ +r=\frac{r\,(r+1)}{2} \quad \dots\dots \ (2)$$

రెండు ప్రక్కలకును $(r+1)$ సంకలనము చేయుము. అపుడు

$$1+2+3+ \ \dots \ \dots \ +r+(r+1)$$

$$=\frac{r\,(r+1)}{2}+(r+1)=\frac{r^2+3r+2}{2}=\frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

అయితే ఇదియే $n=r+1$ విలువ గల ప్రమేయము. కనుక $n=r$ కు ప్రమేయము నిజమయినచో, $n=(r+1)$ విలువకును అది నిజము అగుచున్నది. అయితే $n=1$ విలువకు ప్రమేయము నిజము. కనుక $n=2$ విలువకు

ప్రమేయము నిజము. $n=2$ కు నిజమైనందున, $n=3$ కు ఇది నిజమే. కనుకనే $n=4$ కును నిజము. ఇట్లు క్రమముగా ఏ సంఖ్యకైనను నిజమగును. కనుక అన్ని సంఖ్యలకును ఇది నిజమే.

మరియొక ఉదాహరణము తీసికొందము :

$$1+3+5+7 \dots \dots (2n-1)=n^2$$

అనగా ఒకటి నుండి వరుసగా n బేసి సంఖ్యల సంకలన ఫలము n^2 అని ఈ ప్రమేయము చెప్పుచున్నది. గణిత అనుగమన పద్ధతి ప్రకారము మొదటి కొన్ని n విలువలకు ఇది నిజమని సరి చూపుదుము.

$$1=1^2$$
$$1+3=2^2$$
$$1+3+5=3^2$$
$$1+3+5+7=4^2$$

ఇకమీద ఈ ప్రమేయము $n=r$ అను వ్యాపక విలువకు నిజమయితే, $n=r+1$ విలువకును నిజమని ఒక ఉపపత్తి కనిపెట్టవలెను. ఇది సులభమే

$$1+3+5+ \dots \dots (2r-1)=r^2 \qquad \dots (3)$$

నిజము అనుకొందము. రెండు ప్రక్కలకును, $(2r+1)$ చేర్చుము. ఇదియే $(2r-1)$ తరువాత వచ్చు బేసి సంఖ్య.

$$1+3+5+ \dots (2r-1)+(2r+1)$$
$$=r^2+(2r+1)=(r+1)^2 \qquad \dots (4)$$

అయితే ఇదియే $n=r+1$ విలువ గల ప్రమేయము. కనుక $n=r$ విలువకు ప్రమేయము సత్యమైతే $n=r+1$ విలువకును ప్రమేయము సత్యము. $n=1, 2, 3, 4$ విలువలకు ప్రమేయము సత్యమని నిరూపించితిమి. కనుక $n=5, 6, \dots$ అన్ని ధన పూర్ణాంకములకును ప్రమేయము సత్యము.

కొన్ని సమయములందు $n=1, 2, 3, \dots r$ విలువలకు అన్నిటికి ప్రమేయము సత్యమనుటను ఉపయోగించియే $n=r+1$కు నసత్యమని నిరూపించు పరిస్థితి కలుగును. $n=1$ విలువకే సత్యమని మనము సరి చూచినచో, $n=2, 3. \dots$ విలువలకు క్రమముగా నిరూపించవచ్చును.

గణిత అనుగమన విధానము ద్వారా నిర్ణయించుటకు యుక్తమైన మరికొన్ని ఉదాహరణములు :

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1\, a^{n-1} b + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

(${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$ అను ఫలిత మును ఉపయోగించుము.)

$$D^n(uv)=u\,D^n v+{}_nC_1\, Du\, D^{n-1} v+{}_nC_2 D^2u\, D^{n-2} v+ \dots +v\, D^n u$$

[ఇచ్చట $u=u(x)$, $v=v(x)$ x చలరాశిగా గల ఫలములు, $D=d/dx$ పరికర్మము] ఎమ్. వెం.

గణితకథలు : 1. యూక్లిడ్ క్రీ. పూ. 300 ప్రాంతమున జీవించినవాడు. అతడు మృదుస్వభావుడు, ఆడంబర రహితుడు ; నిష్కపట విద్యార్థులవిషయమున దయాంతరంగుడు అనిప్రసిద్ధి. ఒకప్పుడు జ్యామితి పఠనమువలన తనకు లాభమేమికలుగునని అతనిని ఒకశిష్యుడు అడిగెను. "ఈతడు ఏపనియు లాభములేకుండ చేయడు గనుక ఈతనికి మూడు నాణెములు ఇమ్ము" అని యూక్లిడ్ తనభృత్యుని ఆజ్ఞాపించెను.

జ్యామితి బోధకు సులభతర మార్గము లేదాయని ప్రశ్నించిన టాలెమీ సార్వభౌమునకు 'స్వామీ! జ్యామితిలో రాజమార్గమేమియులే' దని యూక్లిడ్ బదులుచెప్పెను.

2. ప్రసిద్ధప్రపంచయాత్రికుడు అలెగ్జాండర్ వాన్ హంబోల్ట్ జర్మనీదేశమందలి గొప్పగణితజ్ఞుడు ఎవ్వరని తన్నడిగినప్పుడు లాప్లాస్ "పాఫ్" అనిబదులుచెప్పెను. గాటింజన్ వేధశాలాదర్శకునిగ చేయుటకు గౌస్‌ను పరీక్షించిన హంబోల్ట్ ఆశ్చర్యచకితుడై "గౌస్ విషయమేమి" యని మరల తన్నడుగగా లాప్లాస్ "ఆహా, గౌస్ ప్రపంచమందే గొప్పగణితజ్ఞుడు" అని జవాబు చెప్పెను.

3. తనకు అమితశ్లాఘాపాత్రుడగు ఆర్కిమీడీజ్‌ను గురించి చెప్పుచు "మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యలను వ్రాయుటకు ఒక పథకమును కనుగొనగలిగిన ఆర్కిమీడీజ్ ఎట్లు దశాంశ అంకగణనపద్ధతిని ఆవిష్కరించలేక పోయినాడో నేను గ్రహించలేకున్నాను" అని గౌస్ నుడివెను. ఈ ప్రమాదము విజ్ఞానచరిత్రలో ఒక అత్యాహితము అని గౌస్ అభిప్రాయము.

4. న్యూటన్ గౌస్‌కు అత్యంతప్రశంసాపాత్రుడు. న్యూటన్ ఆపిల్‌ఫల పతనమునుగురించిన కట్టుకథ గౌస్‌ను మిక్కిలి కోపోద్రిక్తుని కావించెను. "అది మౌఢ్యము" అన్నాడు గౌస్. మీకిష్టమున్నచో ఆ కథను నమ్ముడు. కాని దానిసత్యమిది ; మందమతియైన ఛాందసుడొకడు గురుత్వనియమము నెట్లు కనుగొనగలిగినావని న్యూటన్‌ను అడిగినాడు. ప్రశ్నకుడు బాలిశుడని ఎరిగిన న్యూటన్ ఆతనినెట్లో వదలించుకొనుటకు "అయ్యా! ఆపిల్ పడి నా ముక్కు చితుక గొట్టినది" అని బదులు చెప్పెను. ప్రశ్నకుడు సంతృప్తుడై, సంపూర్ణప్రతిబుద్ధుడై వెడలిపోయెను.

5. ఈ ఆపిల్ కథకు మనరోజులలో ఒక మారుమోత కలదు. గురుత్వక్షేత్రసిద్ధాంతమును ఎట్లు ఆకాంక్షింప

గలిగినాడో చెప్పమని ఐన్‌స్టయిన్ పరులచే నిర్బంధింపబడినపుడు "ఒక ఎత్తయిన సౌధమునుండి క్రిందికి పడి, అదృష్టవశముగ గడ్డిమేటుపై బడిన ఒక కర్మకారుని 'నీవు క్రిందకు పడుచున్నప్పుడు గురుత్వబలకర్షణమును అనుభవించితివా' అని అడిగితిని. లేదని ఆ కర్మకారుడు బదులు చెప్పెను. ఉచితస్వల్ప పరిమితికల అవకాశములో క్రిందికి పడుచున్న కార్మికుని నిర్దేశకాధికరణము యొక్క త్వరణము గురుత్వమువలె ప్రవర్తించగలదని నేను వెంటనే గ్రహించగలిగితిని" అని ఐన్‌స్టయిన్ బదులు చెప్పెను. ఒకవేళ ఈకథ సత్యమేయయినను, బహుశః సారవిధురమే యగును. ఐన్‌స్టయిన్‌కు సాపేక్షతాసిద్ధాంతరచనకు సూచనను అందించినది వాస్తవముగ అతడు ఫెన్సార్ కలన అనుశీలనయందు పండ్లకొలది పడినశ్రమయే.

6. ఒకనియతసంకేతము + అగునా, లేదా — అగునా అను విషయముపై ఆలోచనచేయనిది నాలుగు సంవత్సరముల కాలములో గౌస్‌కు ఒకవారమయిన గడవలేదు. దీని సమాధానమాతనికొక సమయమున మెరుపువలె స్ఫురించినది. కాని చిరకాలము శ్రమపడకుండ అదియొక నూతనతారవలె తనకుతానే ప్రకాశితమగునని అనుకొనుట భ్రాంతియే యగును. ఒక పరిశోధనాంశము విషయమై రోజులు, వారములు ఫలసిద్ధిలేకుండ గడపిన తర్వాత, ఒకరాత్రి జాగరణానంతరమున, ఆ యంశమును పునరనుశీలన విషయము కావించినపుడు, అంతవరకు ఆవిషయమును ఆవరించికొనియున్న అస్ఫుటత అంతయు అదృశ్యమై, అతని మనస్సుఎదుట దాని సమాధానసాకల్యము ఆవిర్భవించును. తీక్ష్ణ ఆయతఏకాగ్రతను వశపర్చుకొనుటకు గౌస్‌కుగల సామర్థ్యమే ఆతని ఆవిష్కరణలకు ఆధారరహస్యము.

7. నిరీశ్వరవాదియగు డిడిరో, ఈశ్వరాస్తిత్వస్థాపనకు గణితశాస్త్ర విద్వాంసుడొకడు ఒక బీజగణిత నిరూపణను సంపాదించినాడనియు, విననిచ్ఛగించిన ఎడల అతడా నిరూపణను ఒక సభయెదుట విన్నవింప సిద్ధముగ నున్నాడనియు తెలిసికొనెను. డిడిరో సహర్షముగ దాని కియ్యకొనెను. అంతట ఆయ్‌లర్ డిడిరోను సమీపించి, సంపూర్ణ నిశ్చయసూచకమైన గంభీర వాక్కుతో "అయ్యా $\frac{a+b^n}{n}=x$. అందుచే ఈశ్వరుడున్నాడు" అని పలికెను. దీనికేమిబదులు? గణితవైదేశికుడగు డిడిరోకు అది ఉపపన్నముగ తోచినది. సభవారికి తాను పరిహాసవిషయమయితినని తెలిసికొనిన డిడిరో వెంటనే సభనువిడచి పోయెను.

8. గణితజ్ఞులు సాధారణముగ సంగీతప్రియులని ఎరిగిన మనకు వియర్‌స్ట్రాస్ ఏ రూపమున నైనను సంగీతమును సహించలేకుండెనను భూతార్థము ఒక విచిత్ర విషయము. సంగీతము ఆతనికి ఏమియుగాదు. సంగీత కార్యక్రమములకు బలవంతముగ కొనిపోబడినపుడు అవి అతనికి ఎనలేని ఏవగింపు కలిగించుచుండెడివి. ఆ పేరాలు అతనిని నిద్రపుచ్చుచుండెడివి.

9. స్వదేహారోగ్య విషయమున అత్యంతవిముఖుడగు న్యూటన్ ప్రిన్సిపియా అను తనగ్రంథరచనలో నిమగ్నుడై యుండిన సమయములలో ఆహారనిద్రలను అర్థించు దేహమొకటి తనకుకలదని మరచుచుండెడివాడు. భోజనమతనికి తరచు విస్మృతివిషయమో, అస్వీకార్య విషయమో అగుచుండెడిది. ఎప్పుడైన కునుకుపట్టి లేచినపిమ్మట అర్థ సంపీతుడై మంచపుటంచున ఉపవసించి, గణితప్రశ్నల నాలోచించుచు గంటలకొలది కాలముగడ పెడివాడు.

10. 1696లో జొహాన్ బెర్నౌలీ, లైబ్‌నిట్జ్ ఇద్దరును కలిసి యూరపు గణితశాస్త్రజ్ఞులు అందరిముందు ఒక గడ్డు సమస్యను ప్రదర్శించి, వారిని ధర్షించిరి. ఆ సమస్య ఇది. ఒక ఊర్ధ్వఉదగ్ర తలముపై ఏవో రెండు బిందువులు యాదృచ్ఛికముగ ఈయబడినవి అనుకొమ్ము. గురుత్వ బలప్రభావమున ఒక కణము ఘర్షణలేకుండ ఒక వక్రముమీద ఊర్ధ్వబిందువునుండి అధోబిందువునకు కనిష్ఠ కాలవ్యవధిని తీసికొనునట్లు జారుటకు, ఆ వక్రము ఎటులుండవలెను? ఆరునెలలు గడచినను గణితజ్ఞులెవ్వరును సమాధానము చెప్పలేకపోయిరి. ఒకనాడు రోజంతయు కష్టపడి ఇంటికి వచ్చినపిదప న్యూటన్ ఈ విషయము వినెను. ఆహారానంతరమున ఆనాడే అతడాసమస్యను సాధించెను. అనుల్లిఖిత సాధకనామముగ ఈ సాధన ప్రకటింపబడినపుడు దానిని చూచిన బెర్నౌలీ "పాదమునుచూచి సింహమును గుర్తించితిని" అని ఉద్ఘోషించెను.

11. న్యూటన్ ప్రతిభాశక్తికి ఇంకొక తార్కాణము 1716 లో అతని 74వ ఏట వెలుగుచూచినది. యూరపు గణితజ్ఞులందరిని, ముఖ్యముగా న్యూటన్‌ని ఉద్దేశించి, లైబ్‌నిట్జ్‌చే అవిమృష్టముగ ఒకసమస్య ప్రకటింపబడెను. ఒక దత్తవక్రరేఖా కుటుంబమును లంబకోణీయముగ ఖండించు వక్రములన్నిటిని కనుగొనుటయే ఆ సమస్య. తన ఆఫీసునుండి ఇంటికిచేరినతరువాత ఒకనాడు న్యూటన్ ఆ సమస్యనుగురించి వినెను; ఆరాత్రియే దానిని సాధించగలిగెను.

12. న్యూటన్‌ధరించు దుస్తులెప్పుడును అపరిష్కృతములుగా నుండెడివి. ఆతడెప్పుడును తన ఆలోచనా

ప్రవాహంమందే నిమగ్నుడై యుండెడివాడు. అందుచే అతడు ఎవ్వరికయిన పరధ్యానముగనుండు సహచరుడు. అతడు గణితాన్వేషణయందు మునిగియున్న సమయమున ఆతడు ప్రదర్శించిన శూన్యమనస్కతనుగురించి చాల కథలు మనదాకవచ్చినవి. గ్రాంతమ్‌నుండి ఒకనాడతడు ఇంటివైపు స్వారిచేసిన సమయమున, అతడాగుర్రమును దిగి దానికళ్ళెముపట్టుకొని, గుట్టనొకదానిని ఎక్కనారంభించెను. పైకెక్కి గుర్రమెక్కబోగా కళ్ళెముమొక్కటే అతని చేతిలోమిగిలెను; గుర్రము తప్పించుకొనిపోయెను.

13. ఒకనాడు న్యూటన్ తనస్నేహితులు కొంతమందికి ఆతిథేయము నిర్వహించుచు, మరికొంత మధ్యము తెచ్చుటకై వారినివిడిచివెళ్ళెను. మద్యాగార మందతడొక గణిత ప్రశ్నయందు కృతాదరుడై దాని విషయమైన ఆలోచనయందు కొంతసేపు నిమగ్నుడై, మద్యముకొరకు వేచియున్న తన అతిథులనుమరచి, చర్చికి పయనమయ్యెను.

14. ప్రతిపూర్ణాంకము అతనిసన్నిహిత స్నేహితుడు అని శ్రీనివాస రామానుజన్ విషయమున ఒక ఉక్తికలదు. అతడొకప్పుడు రుగ్ణుడై తల్పగతుడై యున్న సమయమున ఆతని దర్శింపవచ్చిన ఆచార్యహార్డీ తాను 1729 నంబరు గల టాక్సీలో వచ్చితిననియు, ఆ సంఖ్య నిస్తేజస్కము, నిరాదరణీయము అని చెప్పగా 'అట్లుకాదు, అదిచాలవిచిత్రమయినసంఖ్య, రెండు భిన్నవిధములలో దానిని రెండు ఘనముల సంకలనఫలముగా వ్యక్తపరచుటకు వీలైన కనిష్ఠసంఖ్య' ($1729 = 10^3 + 9^3$ లేదా $12^3 + 1^3$) యని రామానుజన్ హార్డీకి బదులు చెప్పెను.

15. యువకుడగు లాప్‌లాస్ ప్రసిద్ధులనుండి సిఫార్సుపత్రములను సేకరించి, పారిస్‌నగరమునుచేరి, డెలాంబేర్‌ను దర్శించ అవకాశమునువేడెను. అతనికి జవాబురాలేదు. అట్టి పిన్నవయసువానికి అతీతమగు ఆంతరదృష్టితో లాప్‌లాస్ ఆ ఉపరోధకారణమును గ్రహించి, యాంత్రికశాస్త్రవ్యాపక తత్త్వములను ఉదాహరించుచు డెలాంబేర్‌నకు లేఖవ్రాసెను. దానికివెంటనే జవాబువచ్చినది. ఆ ప్రతిలేఖార్థమిది 'నీ సిఫార్సు పత్రికలను నేను సరకుగొనలేదు, ఏలన నీకు సిఫార్సులనవసరము. సిఫార్సులకన్న నీ యుత్తరమే నిన్నునాకు ఎక్కువ ఫలవంతముగ పరిచితుని చేసినది.' కొన్ని రోజులతరువాత డెలాంబేర్ మాటలపై పారిస్ సైనికవిద్యాశాలయందు లాప్‌లాస్ ఆచార్యుడుగ నియుక్తుడయ్యెను.

16. తన 'మెకానిక్ సెలెస్టె' యొక్క పునస్సంస్కారము లాగ్రాన్జ్ యొక్క చివరివైజ్ఞానికోద్యమము. 70 ఏండ్ల వృద్ధుడైనను ఆతని తొంటిశక్తియంతయు ఆతనికి తిరిగి వచ్చెను. అతడు అవిరతముగ పనిచేసి, తనదేహము తన మనస్సు వశములోలేదని కనుగొనెను. అప్పటినుండి అతడు మూర్ఛరోగ బాధితుడుకాజొచ్చెను. ఒకనాడు ఆతనిభార్య నేలపై నిశ్చేష్టుడై పడియున్న అతనిని చూచెను. ఒకమేజా బల్లపై పడుటచే దానిఅంచుమోసి ఆతనితలకు ప్రమాదకరమైన దెబ్బతగిలెను. కాని అప్పటికి అతడు నిరుద్విగ్నుడై యుండెను.

17. తన "సెలెస్టియల్ మెకానిక్స్" గ్రంథము ప్రతినొకదానిని లాప్‌లాస్ నెపోలియన్‌కు బహుమాన పురస్సరముగ సమర్పించెను. గాంభీర్యమును అభినయించుచు ఆ గ్రంథమందలి స్థాలిత్యమునొకదానిని నెపోలియన్ ఉగ్గడించెను. "విశ్వవ్యవస్థపై ఇట్టిఉద్గ్రంథమును రచించి, ఒక సారియైన విశ్వకర్తను నీవు పేర్కొనలేదు." అని నెపోలియన్ ఆక్షేపింపగా "అయ్యా అట్టికల్పనయొక్క ఆవశ్యకతను నేను దర్శించలేదు" అని లాప్‌లాస్ బదులు చెప్పెను. నెపోలియన్ అంతవాని ఎదుట నిలబడి సత్యము వచించుటకు ఎంతధైర్యము కావలెను!

18. ఒకనాడు ఒక గణితజ్ఞుడు ఒక విందునకు పోయెను. ఆసమయమున ఆతనిప్రక్కనే కూర్చున్న ఒక మహిళ అతనినిచూచి 'ఆచార్యవర్యా! సాపేక్షతావాద సారమును నాకు కొద్దిమాటలలో తేటపరచిచెప్పుడు' అని ప్రార్థించెను.

అతడు ఆమెను చూచి 'ఆ విషయము నీకు అవశ్యము వివరింతును. కాని ముందుగా ఒకకథను చెప్పనిమ్ము. ఒక గ్రుడ్డి మిత్రునితో నేనొకనాడు విహారమునకు పోయితిని. అతనికి ఇంగ్లీషు బాగుగారాదు. త్రోవలోమాకు దప్పికకల్గినది. మేము ఒక పొలమును సమీపించితిమి. అప్పుడునేను 'ఇచ్చట ఒక గిన్నెడుపాలు కొని త్రావుదము' అని అంటిని. 'పాలుఅనఏమి' అని అతడు వెంటనే నన్నడిగెను. 'ఏమీ! పాలన్న నీకుతెలియదా? అది తెల్లటి ద్రవము' అని నేనుబదులు చెప్పుచుండగా నా అర్ధోక్తిలోనే 'తెల్లటి అనఏమి' అని నా మిత్రుడు నన్నాపెను. 'ఓ తెల్లటి అను పదముకూడ నీకు అర్థముకాలేదా? అయితే నీవు హంసను చూచితివా? అని నేనంటిని. 'హంస అన్న' అతడు మరలనన్ను ప్రశ్నించెను. 'హంసను నీవెరుగవా? అది వంపుమెడగల పెద్దపిట్ట' అని నేనుచెప్పగా 'వంపు అనగాఏమి' అని అతడు తిరిగి ప్రశ్నించెను.' 'అరరే! ఇదికూడనీకు తెలియదా? నాచేయి చూడుము. దీనికే వంపుఅనిపేరు' అని నాచేతిని వంపుగా పెట్టి చూపితిని. 'సరిసరి అదియావంపు, నాకిప్పుడు

పాలన్న ఎటులుండునో తెలిసినది ' అని నామిత్రుడు తృప్తి పడెను.'' ఆ. న.

గణిత చిక్కు ప్రశ్నలు-వినోదములు (అంకగణిత ప్రశ్నలు): ప్రాచీనకాలము నుండి వచ్చుచున్న చిక్కు ప్రశ్నలలో ఒక అవిదితసంఖ్యను కనుగొనుట తరచైనది. అవిదితసంఖ్యను x అని తీసికొని, ఒక సమీకరణమును సాధించుటవలనగాని, లేదా, చివరనుండి బయలుదేరి వెనుకకు పోవుటవలనగాని ఆ సంఖ్యను సాధారణముగ కనుగొనవచ్చును.

దృష్టాంతములు : ప్రశ్న - 1 : కోసిన కలువ పువ్వులలో 3 వ భాగము మహాదేవునికి, 5 వ భాగము హరికి, 6 వ భాగము సూర్యునికి, 4 వ భాగము దేవికి, మిగిలిన 6 ను గురువునకు అర్పించబడినవి. కోసిన పువ్వులు ఎన్ని ? (భాస్కరాచార్య-II లీలావతి).

సాధనము : కోసిన పూలసంఖ్య x అనుకొనినచో గురువునకు అర్పితమైన శేషము 6 క్రింది సమీకరణముచే సూచించవచ్చును.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} = 6$$

కనుక $\frac{x}{20} = 6 \quad \therefore \ x = 120.$

ప్రశ్న - 2 : ఒక సంఖ్యను తలచుకొనుము. దానిని 5 చే గుణించి, ఆ ఫలమునకు 6 కలుపుము. ఆ వచ్చినఫలమును 4 చే గుణించుము. దానికి 9 కలిపి 5 చే గుణించుము. ఆ వచ్చిన ఫలమునుండి 165 తీసివేసి, శేషమును 100 చే భాగించి ఫలము చెప్పుము. ఈ భాగహారఫలమే మనకు కావలసిన సంఖ్య.

అనుకొనిన సంఖ్య x అయినచో మనకు పై పరికర్మల క్రమమున $5x$, $5x+6$, $20x+24$, $20x+33$, చివరకు $100x+165$ లభ్యమగును. దీనినుండి 165 ను తీసివేసి శేషమును 100 చే భాగించుము. ఆ భాగహారఫలమే x. అనగా ఇదియే తలచుకొనిన సంఖ్య.

ప్రశ్న - 3 : 60 కంటే తక్కువగు ఒక సంఖ్య N ను తలచుకొనుము. తలచుకొనిన సంఖ్యను 3 చేత భాగించగా మిగిలిన శేషము, 4 చే భాగించగా, మిగిలిన శేషము, 5 చే భాగించగా మిగిలిన శేషము, ఈ మూడు శేషములు ఈయబడినచో ఆ సంఖ్యను కనుగొనవలెను.

సాధనము : శేషములు క్రమముగా a, b, c అని అనుకొందము. ఇపుడు $40a + 45b + 36c$ ను గణింపుము. ఇది 60 కంటే తక్కువైతే, ఇదియే సాధనము. 60 కంటే ఇది ఎక్కువైతే దీనిని 60 చేత భాగహారముచేసి శేషమును తీసికొనుము. ఇదియే సాధనము. దీని రహస్యమేమనగా $a=1$, $b=0$, $c=0$ అగునపుడు, దీని సాధనము $N = 40$. ఏలన $40 = 3 \times 13 + 1 = 4 \times 10 = 5 \times 8$. ఇటులనే $a=0$, $b=1$, $c=0$ అగునపుడు N యొక్క విలువ 45. మరి $a=0$, $b=0$, $c=1$ అగునపుడు N యొక్క విలువ 36. వీటిని ఉపయోగించియే వ్యాపకసాధనము అగు $40a + 45b + 36c$ వ్రాయబడినది. ఉదా : శేషములు 1, 2, 3 అగునపుడు సాధనము $40 + 90 + 108 = 238$ కనుక $N = 58$. ఇచ్చట 60 అనునది 3, 4, 5 సంఖ్యల క. సా. గు. (ఎల్. సి. ఎమ్) అగుచున్నది. 60 ని N కు చేర్చినను, తీసివేసినను 3, 4, 5 చే విభజించగా దొరకిన శేషములు మారవు.

ప్రశ్న - 4 : తొలి, చివరి అంకెల వ్యత్యాసము ఒకటి కన్న హెచ్చుగాగల ఏ మూడు అంకెలుగల సంఖ్యనైన తీసికొనుము. ఈ అంకెల వరుసను మరల తిరుగబెట్టగా వచ్చిన సంఖ్యను వ్రాయుము. ఈ రెండు సంఖ్యల వ్యత్యాసమును కనుగొనుము. ఈ వ్యత్యాసమును తిరుగబెట్టి వ్రాయుము. కడపట వ్రాసిన రెండు సంఖ్యలను కూడుము. తొలిని తీసికొనిన అంకెలు ఎవ్వియైనను కడకు వచ్చు సంఖ్య ఎప్పుడును 1089 గనే ఉండును.

ఉదా : తొలి సంఖ్య 238

దీని వ్యత్యస్తక్రమము 832

భేదము = $832 - 238 = 594$

భేదమునకు వ్యత్యస్తము 495

చివరకు $495 + 594 = 1089$

ఈ విచిత్రమైన విధానమును అంకెలకేకాక ద్రవ్యములకు, కొలతలకును ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదా : (i). రూపాయలు, అణాలు, పైస*లు సంఖ్యలో వ్రాసిన ఏ ద్రవ్యము నైన తీసికొనుము. ఇచ్చట రూపాయలసంఖ్య 12 కన్న తక్కువగా ఉండవలెను. (ii). తరువాత దానిని తిరుగబెట్టి వ్రాయుము. అనగా రూపాయల, పైసల స్థానములు మార్చుము. (iii). పై రెండు ద్రవ్యముల భేదమును కనుగొనుము. (iv). ఈ భేద ద్రవ్యమును మరల అటునుంచి, ఇటు వ్రాయుము. (v). కడపట వ్రాసిన రెండుద్రవ్యములను కలుపుము. ఈ మొత్తము ఎప్పుడును రూ. 12-14-11 గనే ఉండును. ఉదా : రూ. 6-13-10 తీసికొందము. (10-13-6) — (6-13-10) = రూ. 3-15-8. దీనిని త్రిప్పగా దొరకునది రూ. 8-15-3. రూ. (8-15-3) + (3-15-8) = రూ. 12 అ. 14 పై. 11. మొత్తమును పౌనులు, షిల్లింగులు, పెన్నీలలో

* పైస = దమ్మిడీ

వ్రాసి పై పరికర్మల సాగించినచో ఫలమెప్పుడును £ 12-18-11 అగును.

ప్రశ్న-5: ఒక గడియారము ముఖఫలకమును తీసికొందము. ఈ ముఖముపై ఉన్న గంటల అంకెలలో దేనినైన నీ స్నేహితుని తలచుకొమ్మని చెప్పుము. అవి M అనుకొందము. తరువాత అతనిని ఆ గంటల అంకెలను వ్రేలితో vii నుండి ప్రారంభించి క్రమముగా వెనుకకు vi, v, iv .... వరుసను వెనుకగా పోవుచు, ఆ గంటల అంకెలను మెల్లగా వేలితో కొట్టుమనుము. vii ను కొట్టినప్పుడు $M+1$ అని లెక్కపెట్టుమనుము. తరువాత vi ను కొట్టినపుడు $M+2$. ఇట్లే వెనుకకు పోయినకొద్దీ, ఏకోత్తరముగా తగిలిన M ను హెచ్చుచేయుచు పోయినచో అతడు 20 అనిచెప్పి ఒక గంటను కొట్టునపుడు ఆ గంటయే అతడు తలచుకొనిన M అగును. vii నుంచి కాక vi నుంచి బయలుదేరి వెనుకకు గంటల అంకెలను కొట్టుచుపోయినను పోవచ్చును. ఇప్పుడు 19 లెక్కపెట్టినప్పుడు తాకబడినది తలచుకొన్నగంట M అగును.

ప్రశ్న-6: గుణకారపు లెక్కనుండిగాని, భాగహారపు లెక్కనుండిగాని కొన్ని అంకెలను లోపించినట్లుచేసి వాటిని పూరించుట లక్ష్యముగా పెట్టుకొనిన గుప్తాంకగణిత సమస్యలు కలవు. ఈ క్రిందిది ఒక భాగహారము. ఇందు దానియందు చూపిన '5' లు తప్ప తక్కిన అంకెలు అన్నియు చెరిపివేయబడినవి; ప్రతిచుక్కయు ఒక తెలియని అంకెకు ప్రతినిధిగా ఉన్నది. ఈ భాగహారమందు తెలియని అంకెలన్నిటిని కనిపెట్టవలెను.

```
. . . . ) . 55 . . 5 . ( . 5 .
          . . 5 . .
          ---------
          . . . . .
          . . . . .
          ---------
            . . . .
            . . . .
            -------
```

ఈ సమస్యకు ఒకేసాధనము కలదు. దీనిని బుద్ధిని ఉపయోగించి కనుగొనవలసి ఉన్నది.

ప్రత్యుత్తరము: భాజకము 3926; భాగఫలము 652.

సంకేతిత మానములపై ఆధారపడిన చిక్కు ప్రశ్నలు: మనము సంఖ్యల నిరూపించుటకు వాడుచున్న మానము దశాంశమానము. అనగా కుడినుండి ఎడమకు శ్రేణిలో ఉన్న అంకెల స్థానమూల్యములు 1, 10, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ ఇట్లు సాగుచుండును. మనము దీని వ్రాయుటకు 0, 1, ... 9 అంకెల వాడుదుము. 10 కి బదులు వేరు సంకేతిత మానమును ఉపయోగించవచ్చును. 10 కి బదులు 5 ను ఎంచికొందము. ఇప్పుడు క్రమముగా కుడినుండి ఎడమకు స్థానమూల్యములు $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$ అగును. ఇప్పుడు మనము 0, 1, 2, 3, 4 అను అంకెలనే ఉపయోగింతము.

అన్నిటికంటె సరళతమ సంకేతితమానము 2. ఏ సంఖ్యనైన ఈ మానములో వ్యక్తపరచుటకు వాడుకచేయవలసిన అంకెలు 0, 1 లే. ఈ ద్వికమానములో 25 అను సంఖ్యను 11001 అను అంకెల శ్రేణి తెలియజేయును. ఏలన $25 = 2^4 + 2^3 + 0 + 0 + 1$. ఈ మానమందు రెండు సంకేతములు 0, 1 మాత్రము ఉన్నవి కనుక రెండు స్థితులు మాత్రమున్న వస్తువుల వరుసల ద్వారా ఒక సంఖ్యను గురించిన సమాచారమును తెలియపరచవచ్చును. ఒక వరుస బాలురలో కొందరు కూర్చునియు, మిగిలిన వారు నిలిచియు ఉన్నారనుకొందము. నిలబడిన బాలుడు 1 అనియు, కూర్చొనిన బాలుడు 0 అనియు అర్థమిచ్చినచో ఈ బాలుర వరుస ఒక ద్వికమాన సంఖ్య అగుచున్నది. అటులనే ఒక వరుస దీపములలో కొన్ని వెలుగుచు, కొన్ని వెలుగకయు ఉన్నచో ఈ వరుసను ఒక సంఖ్యగా నిర్ణయించవచ్చును. ఈ విధానమును ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్ర యంత్రములలో వాడుచున్నారు.

తూనికల ప్రహేళికలు: 1 మొదలు 15 ఔన్సుల వరకు మధ్యగల భారమును అన్నిటిని తూచుటకు వలయు తూనిక గుండ్లు కనిష్ఠ సంఖ్య కనుగొనవలెను. ఒకే త్రాసు చిప్పలో ఈ బరువులను అన్నిటిని పెట్టినచో కావలసిన తూనిక గుండ్లు ఇవి: 1 ఔ, 2 ఔ.లు, 4 ఔ.లు, 8 ఔ.లు కనుక మొత్తము నాలుగు గుండ్లు చాలును.

$7 = 4 + 2 + 1$; $5 = 4 + 1$; $6 = 4 + 2$ ఇట్లే చూచికొనునది. 1, 2, 2^2, 2^3, ... 2^{N-1} అను వరుసను అనుసరించి 1 నుండి 2^N వరకు గల బరువులను అన్నిటిని పై N బరువులతో తూచవచ్చును. రెండు తూనిక చిప్పల లోను బరువులు వాడుక చేయవచ్చుననిచో పైన వివరించినన్ని గుండ్లు అక్కరలేదు. 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, ... అను వరుసలలోని గుండ్లు ఉన్న చాలును. 1, 3, 9 బరువు గల మూడు మాత్రము ఉపయోగించి 1 నుండి 13 వరకు తూనిక చేయవచ్చును. 1, 3, 9, 27 బరువు గల నాలుగు గుండ్లను మాత్రము ఉపయోగించి 1 నుండి 40 వరకు తూనిక చేయవచ్చును.

ఇది ఎట్లనగా 15 గ్రాములు తూనిక పొందుటకు $15 = 27 - 9 - 3$ అని వ్రాయవచ్చును. కనుక 27 గ్రాముల తూనిక ఒక చిప్పలోను, మరియొక చిప్పలో ఆ వస్తువును, దానితో 9 గ్రాముల గుండు, 3 గ్రాముల గుండువేసి సరిగ

తూచినచో ఆ వస్తువు యొక్క బరువు 15 గ్రాములు. ఇటులనే అన్ని భారములకు.

ఒక అంకెల పట్టికలో ఒక అంకె ఏ ఏ వరుసలో ఉన్నదో చెప్పుటవలన ఆ అంకెను కనుగొనుట :

ఒకనిని 32 కన్న తక్కువ సంఖ్యను తలచుకొను మనుము. ఆ సంఖ్య ఈ క్రింది పట్టికయొక్క ఏ ఏ కాలమ్ లలో కలదో చెప్పుమనుము. దీని పర్యవసానముగ అతడు తలచుకొనిన అంకెను తప్పకుండ చెప్పవచ్చును.

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

2, 3, 4 కాలమ్‌లలో మాత్రము ఆ అంకె గలదని చెప్పినచో పట్టికను పరీక్షించి ఆ మూడు కాలమ్‌లందే కనబడు అంకె 14 అని సులభముగా చెప్పవచ్చును. ఇంతేగాక ఆ సంఖ్యను పొందుటకై ఆ వరుసల పై నున్న అంకెలను కలుపుము, $2+4+8=14$ అగును. అదియే అతడు తలచుకున్న సంఖ్య. మొదటి వరుసలో ద్వికమానములో తెలియజేసినప్పుడు 1 ని చివర అంకెగా గల సంఖ్యలను వ్రాసితిమి. రెండవ వరుసలో, మరల ద్వికమానములో తెలియపరచినపుడు 1 (సున్న కాదు) తరువాతి స్థానములో అంకెగా గల సంఖ్యలు వ్రాయబడినవి. ఇట్లే తక్కిన వరుసలకు కూడ ఊహించుకొనవలసినది.

ఉదా : $23 = 16+4+2+1$ కనుక ఈ సంఖ్య (23) ను శీర్షమున 16, 4, 2, 1 గల వరుసలలో మాత్రము వ్రాసియున్నాము.

అంకెల యుద్ధము : ఇది ఇద్దరు ఆడవలసిన ఆట. 'L' అను ఒక సంఖ్యను అవధిగా ముందుగా వారెన్నుకొందురు. అవధి దాటని ఒక సంఖ్యను 'A' అను వ్యక్తి చెప్పును. దానిని 'B' అను వ్యక్తి అవధిని దాటని ఒక అంకెను కలిపి దాని ఫలమును ప్రకటించును. ఇప్పుడు A వంతు. ఇతడు B ప్రకటించిన దానికి మరల అవధిని దాటిపోని మరియొక సంఖ్యను చేర్చి ఫలమును పైకి చెప్పును. ఇట్లు కొనసాగించుచు 100 ను ప్రకటించిన అతడే జయించినాడని చెప్పుదుము. $L=10$ అయినచో, A, 1 మొదలు 10 వరకు గల సంఖ్యలలో దేనినైన ప్రకటించవచ్చును. A, 7 ను ప్రకటినాడనుకొందము. తరువాత B, 8 మొదలు 17 వరకున్న సంఖ్యలలో దేనినైన ప్రకటించవచ్చును. ఇట్లే ఆట కొనసాగును. అతి సరళమైన ఈ ఆటయొక్క విశిష్టత ఏమనగా దీనికి అన్వయించు సంపూర్ణ సిద్ధాంతమును పొందుపరచి, ఈ ఆటను గెలుచుటకు తగు ఉపదేశములు ఈయవచ్చును. ఈ ఆటయందు జయమును కలిగించు కొన్ని సంఖ్యలు కలవు. ఈ సంఖ్యలలో ఒక దానిని ప్రకటించువాడు 100 ను చేరువరకు ఒక విజయ సంఖ్యనుండి ఇంకొక దానికి పోవుచు అంత్యవిజయమును ఆర్జించవచ్చును. A ఆటకాడు 89 ని ప్రకటించినాడనుకొందము. తరువాత B 90, 91, 92,...99 వరకు ఉన్న ఏ సంఖ్యనైన ప్రకటించవచ్చును. కాని, 100 ప్రకటించరాదు. ఏలన చేర్చిన సంఖ్య $L=10$ అను అవధిని దాటరాదు. ఈ సంఖ్యలలో దేనిని B ప్రకటించినను, A తన వంతు వచ్చినప్పుడు 10, 9, 8,...1 దాక ఉన్న సంఖ్యలలో దేనినైన చేర్చి 100 ప్రకటించవచ్చును. వాస్తవముగ ప్రకటించిన సంఖ్యను ఎరుగకుండనే నేరుగ 100 నే ప్రకటించవచ్చును.

ఇట్లే 78 ని ప్రకటించిన ఒక వ్యక్తి A, తరువాత తన వంతు వచ్చినపుడు 89 ని ప్రకటించవచ్చును. ఏలన రెండవ వాడు B, 78 కి తనకు వశములో నున్న 1,...9 అంకెలలో ఏదైనా కలిపి ప్రకటించవచ్చును. ఇప్పుడు A దీనికి తగిన సంఖ్యను చేర్చి 89 ని ప్రకటించవచ్చును. ఇట్లే 67 ను ప్రకటించువాడు, ప్రతిస్పర్థి ఎన్నుకొను సంఖ్య ఏదియైనను 78 ని, తరువాత 89 ని, తరువాత 91 ని ప్రకటించి చివరకు 100 ను ప్రకటించవచ్చును. స్పష్టముగా 1, 13, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100 అనునవి గెలుపు సంఖ్యలు. ఆటను మొదలు పెట్టువాడు ఈ అంకెలలో దేనినైన గ్రహించి ఆట మొదలుపెట్టి ఈ క్రమమును తప్పకుండ పోయినచో గెలుపు పొందగలడు. కాని, కొన్ని ఆటలైన తరువాత ప్రతిస్పర్థి ఈ రహస్యమును తప్పక తెలిసికొనగలడు. అందుచే ఈ గెలుపు సంఖ్యలను ఆటలో చివరి భాగమందు గ్రహించుట మేలు. అదిగాక అవధి సంఖ్య $L=10$ ను చివరి సంఖ్య $N=100$ ను ఈ రెండింటిని వేరు సంఖ్యలకు మార్చుటవలన ఈ రహస్యఛేదనను కొంత

వరకు తప్పించవచ్చును. ఇపుడు కూడ N నుండి $L+1$ యొక్క గుణిజములను వ్యవకలించుట వలన గెలుపు సంఖ్యలను తెలిసికొనవచ్చును.

నిమ్: ఇది పై ఆట వంటిదే. దీనికి కూడ సమగ్రమగు గణిత సిద్ధాంతము కలదు. ఇందు కూడ ఇద్దరు ఆటగాండ్రు ఒకరి తరువాత ఒకరు ఆడుదురు. ఒకే రకపు వస్తువులు (అవి పిక్కలుకాని, గవ్వలుకాని, నాణెములు కాని కావచ్చును) ఎంచుకొని, వాటిని ఏ ప్రకారమునైన మూడు కుప్పలుగా విభజించి, ఒక బల్లమీద ఉంతురు. ఆ ఇద్దరిలో ప్రతి ఆటకాడు తన కిచ్చవచ్చిన సంఖ్య వస్తువులను ఏ ఒక కుప్పనుండియైన గ్రహించవచ్చును. అతడు కనీసము ఒకదానినైన తీసికొనవలెను. కుప్పలో ఉన్న అన్నిటినికూడ గ్రహించవచ్చును; కాని ఒక కుప్పకన్న ఎక్కువ కుప్పలనుండి ఒకే సమయమందు గ్రహించరాదు. ఇట్లే ఒకరితరువాత ఒకరు ఈ షరతులకులోబడి వస్తువులను తీసికొనుచుపోవుటలో ఎవరు ఆ బల్లను ఖాళీచేయుదురో వారు గెలుతురు. అనగా తీసికొనుటకు వస్తువులులేక ఎవడు ఊరకుండునో వాడు ఓడిపోయినాడన్నమాట.

అంకెల యుద్ధములోవలె ఇక్కడకూడ సంఖ్యల గెలుపు త్రికములు కలవు. ఆ మూడు కుప్పలలో ఉండువస్తువుల సంఖ్యలు a, b, c ఆ కాలమునందు ఆటపరిస్థితిని తెలియజేయును. ఈ ఆటయందు కొన్ని సంఖ్యాత్రయముల (a, b, c) ను విజయత్రికములు అనియు, మిగిలినవాటిని అపజయ త్రికములు అనియు వర్ణించవచ్చును.

తాను ఆడినతరువాత A ఒక గెలుపు త్రికమును బల్లమీద ఉంచినచో B తన ఆటవలన ఆ త్రికమును ఓడిపోవు త్రికముగా మార్చును. మరల దానిని A ఉచిత వ్యాపారము వలన గెలుపు త్రికముగా మార్చగలడు. ఇటుల తన ఆట వచ్చినపుడు గెలుపు త్రికముగా చేసినవ్యక్తి చివరవరకు అట్టిగెలుపు త్రికములనే బల్లమీద ఉంచి, చివరకు తాను జయము పొందును.

వ్యక్తముగ 0, 0, 0 ఒక గెలుపు త్రికమే అగును. ఏలన A ఈ ఆట తరువాత బల్లమీది ఒక్కొక్క కుప్పను శూన్యమునుచేసిన, బల్ల ఖాళీచేసినవాడగును. అందుచే గెలిచినవాడు అగును. ఇంకొక గెలుపు త్రికము $(0, n, n)$ అనగా ఒక కుప్ప శూన్యమగుట, తక్కిన రెండును సమాన సంఖ్యలో వస్తువులు గలిగిఉండుట. ఏలన A ఇట్టి త్రికమును తన ఆటఅంతమున బల్లమీద విడిచిపెట్టినట్లైన, B ఏదో ఒక కుప్పనుండి p వస్తువులు కొని $(0, n-p, n)$ అను త్రికమును బల్లమీద విడిచి పెట్టును. A మరల p వస్తువులు రెండవ కుప్పనుండి తీసివేయుటలో మరల దానిని $(0, n-p, n-p)$ అను గెలుపు త్రికముగా మార్చును. కుప్పలలో వస్తువులు తగ్గిపోవుచు రాగా A $(0, 0, 0)$ అను త్రికమును చివరకు సాధించి, విజేతయగును.

ఏ కుప్పలోనైన వస్తువుల మొత్తపుసంఖ్య 12 ను దాటనప్పుడు (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (1, 8, 9), (1, 10, 11), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (2, 8, 10), (2, 9, 11), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 8, 11), (3, 9, 10), (4, 8, 12), $(0, n, n)$, ఇవి మాత్రమే గెలుపు త్రికములు అగును, మిగిలినవన్నియు అపజయ త్రికములే, ఈ పైత్రికములన్నిటిని ఒకడు జ్ఞాపకముంచికొనినచో, అతడు ఓడిపోవు త్రికమునైనను ఉచితవ్యాపారముచే గెలుపు త్రికముగ మార్చగలడు. అట్లుగాక, ఆ త్రికము ఇదివరకే గెలుపు త్రికమైనచో దానిని అతడు తన ఆటవల్ల ఓడిపోవుత్రికముగ మార్చవలసిఉండును. అపుడు ఎదిరి గెలుపు త్రికములను తెలిసినవాడైనచో ఎదిరియే జయించును. ఇద్దరు ఆటగాండ్రును జయత్రిక రహస్యమును తెలిసినవారైతే జయము ప్రారంభత్రికముపై వ్రాలును. గెలుపు త్రికములను కనిపెట్టుటకు $(a, b, c,)$ సంఖ్యలను ద్వికమానము (స్కేల్ అవ్ 2)న ఒకటి క్రింద ఒకటిగా వ్రాయుము. ప్రతి స్థానమందును అంకెల మొత్తము సరి సంఖ్య అయినప్పుడే (a, b, c) త్రికము గెలుపుత్రికము కాగలదు.

దృష్టాంతమునకు గెలుపు కూర్పు $(a, b, c) =$ (3, 8, 11) తీసికొనుము. ద్వికమానములో

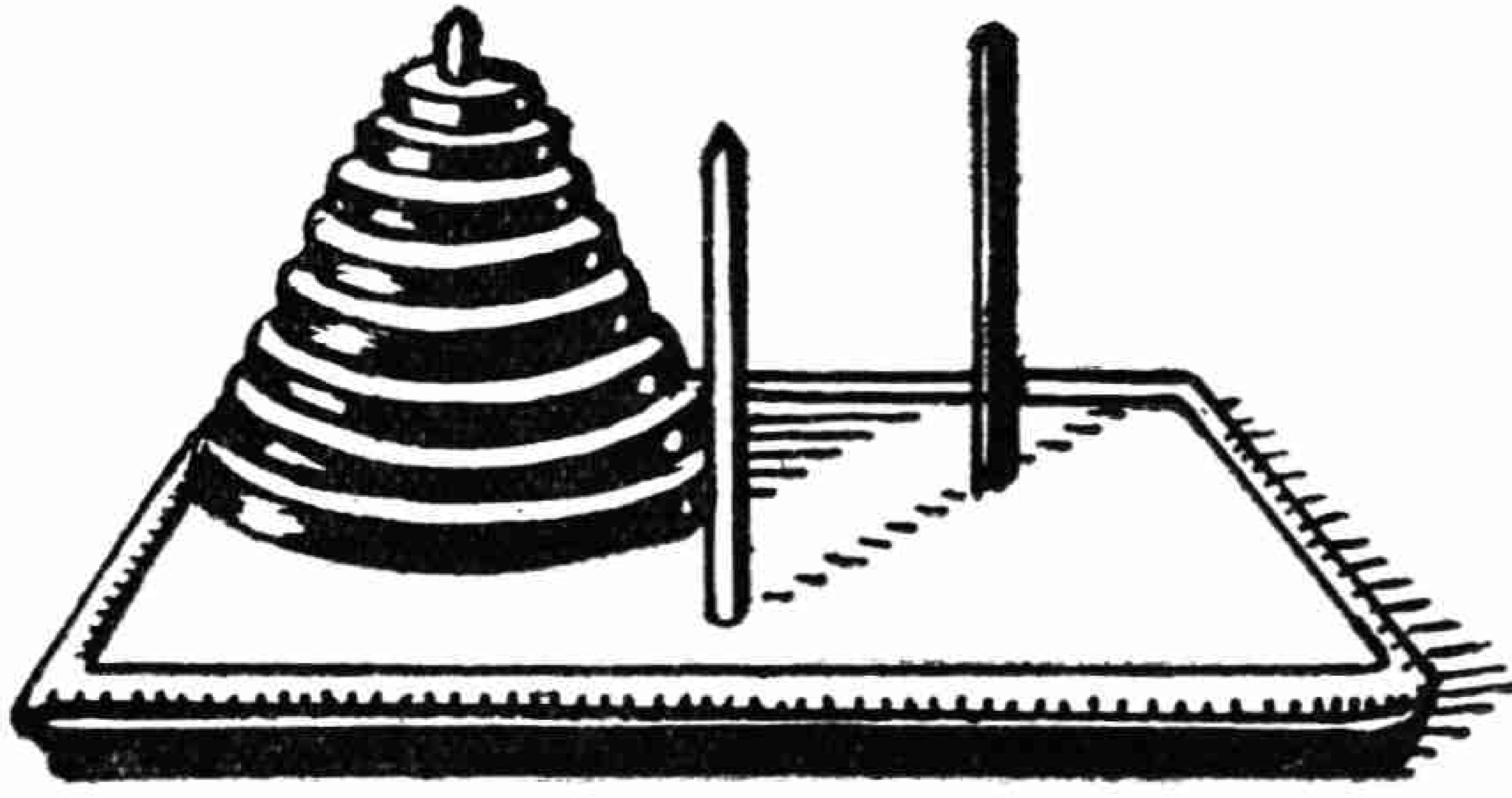
$$\begin{aligned} 3 &= \quad 11 \\ 8 &= 1000 \\ 11 &= 1011 \\ \hline & \quad 2022 \end{aligned}$$

ఏస్థానములో ఉన్న అంకెల మొత్తము అయినను 0 లేదా 2 అగుచున్నది. కనుక (3, 8, 11) ఒక గెలుపు త్రికము.

హనోయ్ గోపురము: ఒక బల్లపై మూడు కొయ్యచీలలు రెండుమూడు సెంటిమీటనుల ఎడములో అతికించబడినవి; మధ్య కన్నములుగల 8 కర్రబిళ్లలు దూర్చబడినవి. ఈ బిళ్లల వ్యాసార్ధములు పరస్పరభిన్నములు. ఆట మొదటిలో ఈ బిళ్లలన్నియు సైజువారిగా పెద్దదిక్రిందను, క్రమముగా వ్యాసార్ధము తగ్గునట్లును ఒకేచీలపై అమర్చబడును (చూ. చిత్రము 120 - పు. 219).

ఒక చీలపైనఉన్న ఆ బిళ్లల వరుసను ఒకబిళ్ల తరువాత ఒక్కొక్కటి చొప్పున ఇంకొక చీలపైకి మార్చుటయే ఈ సమస్య. దీనికి రెండు షరతులు ఉన్నవి. అందు మొదటిది;

ఒకసారి ఒకేబిళ్లను మార్చవలెను. రెండవది: ఆటలో ఏ సమయమునందును, ఏదైనఒకబిళ్ల దానికన్న పెద్దదాని



చిత్రము 120 హానోయి గోపురము

క్రింద ఉండునట్లు కూర్చరాదు. ఒక్కొక్క బిళ్ల దాని పెద్ద బిళ్లమీదనే ఉండవలెను. అవసరము ఉన్నచో ఈ మార్చుటలో మూడు చీలలను ఉపయోగించవచ్చును.

బిళ్లల సంఖ్య N అగుచో, ఆ వరుసనంతను ఇంకొక చీలపైకి మార్చుటకు $2^N - 1$ సార్లు మార్చవలెనని చూపవచ్చును. ఉదాహరణమునకు: మూడు బిళ్లలు మాత్రము ఉన్నచో, వాటినన్నిటిని మొదటి చీలనుండి రెండవ చీలకు మార్చు పద్ధతిని సూచించెదము. క్రింది పట్టికలో ఒక్కొక్కమార్పు తరువాత ఉండు పరిస్థితిని చూపించి ఉన్నాము.

మొదటి చీల	రెండవ చీల	మూడవ చీల
1, 2, 3	—	—
2, 3	1	—
3	1	2
3	—	1, 2
—	3	1, 2
1	3	2
1	2, 3	—
—	1, 2, 3	—

కనుక 7 మార్పులు = $(2^3 - 1)$ మార్పులు కావలెను.

ఇటులనే 4 బిళ్లలున్నచో, పై మూడు బిళ్లలను మొదటి చీలనుండి మూడవ చీలకు మార్చుటకు 7 మార్పులు, 4 వ బిళ్లను రెండవ చీలకు మార్చుటకు 1 మార్పు, తరువాత 3 బిళ్లలు 1, 2, 3 ను మూడవ చీలనుండి రెండవ చీలకు మార్చుటకు ఒకమార్పు మొత్తము $7 + 1 + 7 = 15 = 2^4 - 1$ మార్పులు కావలెను.

ఈఆటకు సంబంధించినకథ ఒకటి కలదు. $N = 64$ బిళ్లలు, దేవుడు వారణాశిలో ఒకచీలపై ఉంచినాడట. పూజారులు పగలనక, రాత్రియనక ఎల్లకాలము అవిరతముగ పాటుపడుచు, మొదటపెట్టిన చీలపైనుండి ఇంకొకచీలకు బిళ్లలు సాంతముగ మార్చుచున్నారట. ఈ మార్పు ముగించగా జగత్ప్రళయము సంభవించునట. పూజారులు ఒకసారియైన ప్రమాదములేకుండ పాటుపడుదురనియు, ప్రతిబిళ్ల మార్పుకు ఒక సెకనుకాలము పట్టుననియు అనుకొనినచో, $2^{64} - 1$ సంఖ్యచే తెలుపబడు ఎత్తులు అన్నియు ముగియ సరికి 50,00,00,000 (అనగా 50 కోట్ల) ఏండ్ల కాలము పట్టును. దానితరువాత ఒక ప్రళయమువచ్చును.

కూట చతురస్రములు (మాజిక్ స్క్వేర్స్): సంఖ్యలు చతురస్రరూపములో వేరు వేరు గళ్లలో అమర్చబడి, అడ్డు, నిలువు వరుసలలోను, కర్ణములవెంటను ఉన్న వరుసలలోను దేనియందైన ఆ సంఖ్యల మొత్తము ఒకటేయగునట్లు అమర్చబడిన సంఖ్యల సమూహమునకు కూటచతురస్రము అనిపేరు. 1 మొదలు n^2 వరకు వ్యాపించియున్న పూర్ణ సంఖ్యలలో ఏ సంఖ్యనైనఒకసారి ఆ చతురస్ర రచనయందు వాడవలెను. చిత్రములు 121, 122లో అట్టి రెండు చతురస్రములు చూపబడినవి:

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

చిత్రము 121

3వ తరగతి కూట చతురస్రము

1	**12**	**7**	**14**
8	**13**	**2**	**11**
10	**3**	**16**	**5**
15	**6**	**9**	**4**

చిత్రము 122 4వ తరగతి కూట చతురస్రము

n వ తరగతి కూటచతురస్రమందు ఒక నిలువువరుసలో గాని, అడ్డువరుసలోగాని అంకెల మొత్తము

$\frac{1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2)}{n} = \frac{n\ (n^2+1)}{2}$ అగును. కూట చతురస్రమును దాని కేంద్రముచుట్టు 1, 2, 3 లంబకోణముల ద్వారా త్రిప్పుటవలన వేరొకకూట చతురస్రము లభ్యమగును; లేదా ఆ చతురస్రముయొక్క సౌష్ఠవాక్షమును ఆశ్రయించి, దాని సంఖ్యల ప్రతిబింబములను తీసికొనుటవలన కూడ వేరొకకూట చతురస్రమును సాధింపవచ్చును.

సాధారణ ధర్మములు, లేదా విశేష ధర్మములు గల కూట చతురస్ర రచన విషయమై చాల వాఙ్మయము కలదు. వీటి అనుశీలన భారతదేశమందు, చీనాయందు ప్రాచీనకాలములో అత్యధికముగ కావించబడినది. ఇట్టి చతురస్రములకు ఇంద్రజాలిక ధర్మములు ఉండునని విశ్వసించ బడుచుండెడిది. 15, 16 శతాబ్దములనాటి యూరప్ దైవజ్ఞులు ఇట్టి నమ్మకముగల వారలై వీటి విషయమై మిక్కిలి సావధానతను చూపిరి.

జ్యామితీయ వినోదములు : ఇందు కాగితములు మడచుట; కాగితపు కత్తిరింపులు; నాలుగు రంగుల సమస్య; నేలను అలంకరించుటకు నమూనాలు కొన్ని. అవి వివరముగ దిగువచర్చింపబడినవి.

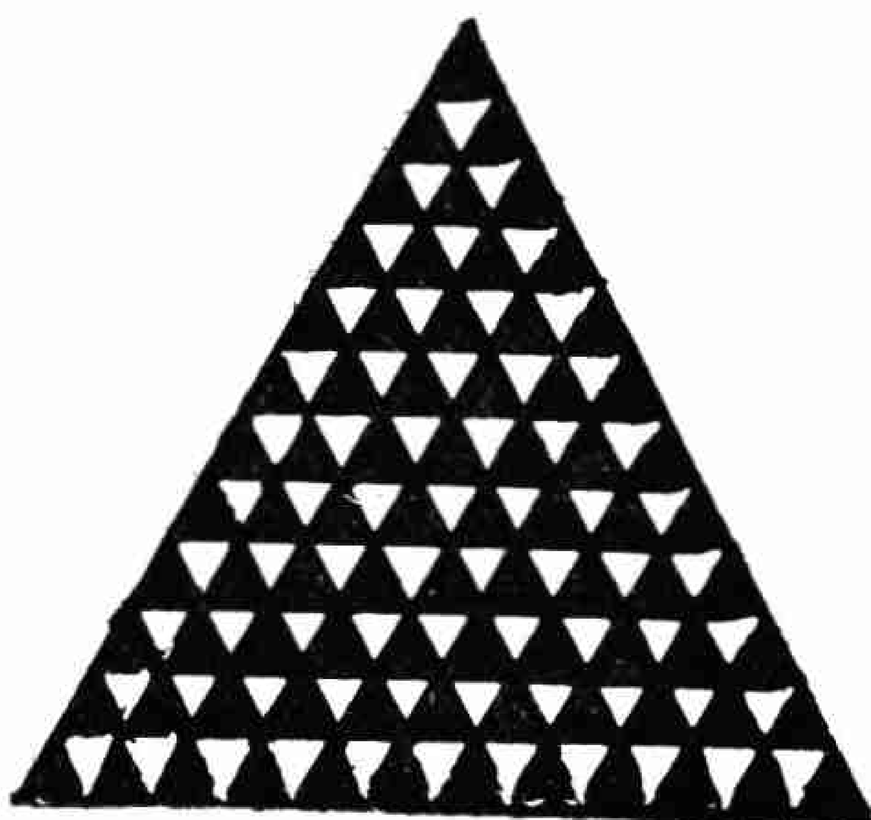
కాగితములు మడచుట : కాగితములు మడచుట యను క్రీడయందు జ్ఞానదాయకము సంతోషకరమును అగు కౌశలమును చూపించవచ్చును. ఒక కాగితమును తీసికొని ఒకపెడ ఇంకొకపెడపై మడతబెట్టి ఆ మడత అంచును చేతితో నొక్కినచో మనకు ఒక తిన్నని అంచుప్రాప్తము అగును. ఒక కాగితముపై A, B అను బిందువులు ఇచ్చినచో AB వెంట కాగితమును మడచి ఈ రెండు బిందువులను కలుపు ఋజురేఖను సాధించవచ్చును. ఈ మడతపెట్టిన కాగితమును మడత అంచు దాని మీదనే పడునట్లు మరలమడచినచో A, B కు లంబముగా ఉండు ఋజురేఖ లభ్యమగును. ఈ అభ్యాసమును ఉపయోగించి, ఋజురేఖపై ఆ రేఖపైన ఉన్న బిందువునుండిగాని దానికి బాహ్యమున ఉన్న బిందువునుండిగాని ఒక లంబమును పొందవచ్చును. A, B రెండు బిందువులై A, B పై పడునట్లు కాగితమును మడచితిమేని A, B యొక్క ద్విభాజక లంబరేఖను సాధించవచ్చును. కాగితమును మడచుటవలన ఒకదత్త ఋజురేఖకు దానికి బాహ్యముగ ఉన్న బిందువుద్వారా ఒక సమానాంతర ఋజురేఖను గీయవచ్చును. దీనికై మొదట ఆ రేఖపై పైచెప్పిన ఉపాయమున ఆ ఋజురేఖపై ఒక లంబమును రచించి తరువాత ఈ లంబమునకు మరియొక లంబమును ఆ దత్త బిందువు ద్వారా రచించవలెను. ఆ కాగితమందున్న కోణభుజములలో ఒకటి ఇంకొకదానిపై పడునట్లు కాగితమును మడచి, దానిపై ఉన్న కోణమును ద్విభాగించవచ్చును. మడచుటవలన 90° కోణమునేగాక 45°, $22\frac{1}{2}^\circ$, $11\frac{1}{4}^\circ$ గల కోణములు కూడ రచించవచ్చును. కాగితములు మడచి 5, 8, 10, 12, 15 భుజములుగల క్రమబహుభుజులు రచించవచ్చును.

కాగితపు కత్తిరింపులు : ఇదిచాల వింతయైన వినోదము. (చూ. టొపాలజీ).

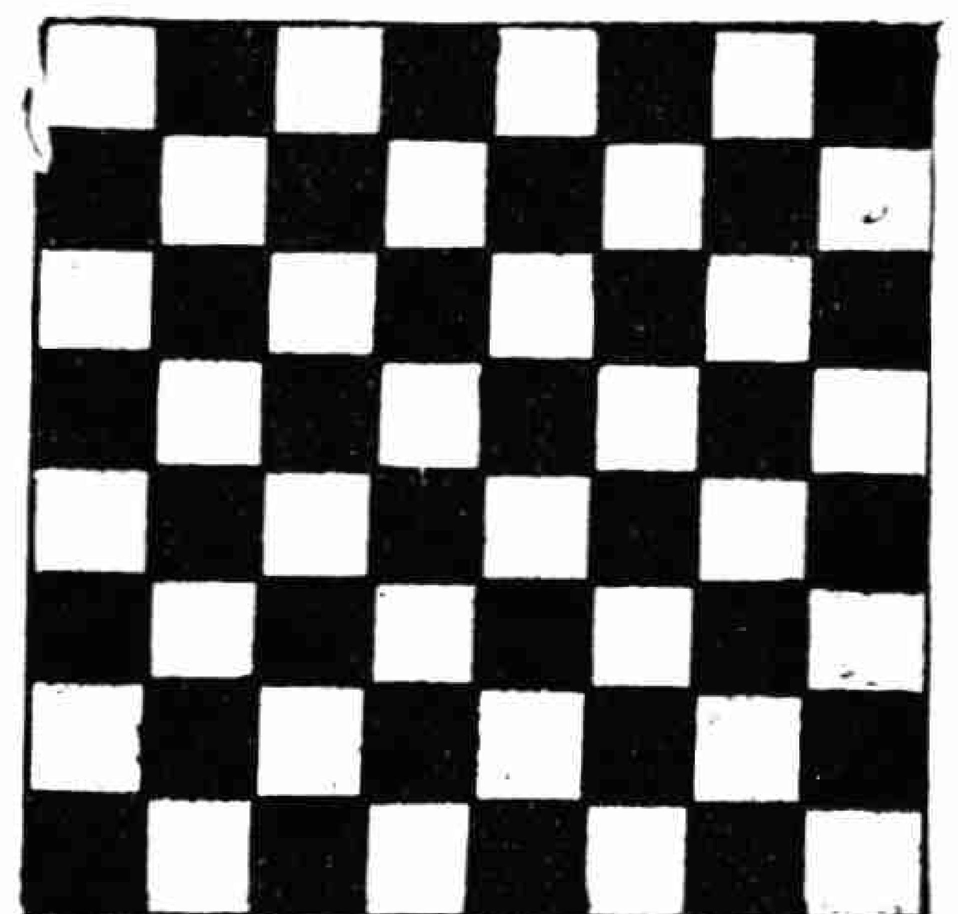
నాలుగురంగుల సమస్య : చూ. టొపాలజీ,

నేలను అలంకరించుటకు నమూనాలు : ఒకే పరిమాణము గల ఒకేరకపు క్రమ బహుభుజులచే ఒక తలమునంతను కప్పవలెను అనుకొందము. ఒక బహుభుజియొక్క మూల ఇంకొకదాని అంచుపై పడకూడదనినచో, ఈ సమస్య పరిష్కరించుటకు మూడేమూడు పద్ధతులు కలవు. అవి: 1. క్రమత్రిభుజములను ఉపయోగించుట; 2. క్రమ చతురస్రములను ఉపయోగించుట; 3. క్రమ షడ్భుజులను ఉపయోగించుట. ఏలన, ఒక బిందువువద్ద ఉండు 360° మొత్తపుకోణము ఆ బిందువు వద్ద కలియు అన్ని బహుభుజ కోణములచే ఆక్రమించబడవలెను. దీని సాధనములు :

$$360^\circ = 6 \times 60^\circ = 4 \times 90^\circ = 3 \times 120^\circ.$$


చిత్రము 123


చిత్రము 124


చిత్రము 125

60°, 90°, 120° ఒక త్రిభుజ, చతుర్భుజ, షడ్భుజముల కోణములు. ఇట్టి నమూనాలు పుట 220లో చిత్రములు 123, 124, 125లలో చూపబడినవి. అనేక రకముల క్రమ బహుభుజులు వాడవచ్చును అనుకొందము. అప్పుడు ఒక మూలలో కలియు బహుభుజులసంఖ్య 3 కన్న తక్కువగా ఉండకూడదు. 6 కన్న ఎక్కువగా ఉండకూడదు. ఏ మూలలోనైన కోణముల మొత్తము 360° లకు సమము కావలెను. అదిగాక n భుజములుగల క్రమ బహుభుజి యొక్క లోపలికోణము $\left[\frac{n-2}{n}\right]180°$ అగును. అందువలన n_1, n_2, n_3 భుజములుగల 3 క్రమ బహుభుజులు ఒక మూలను కలిసినచో

$$\left[\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right]180° = 360°.$$

దీనినుండి $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$ అను షరతు లభ్యమగును.

ఇటులనే ఒక కోణమువద్ద సంగమించు 4, 5, 6 క్రమ బహుభుజులకు క్రింది షరతులు లభ్యమగును :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

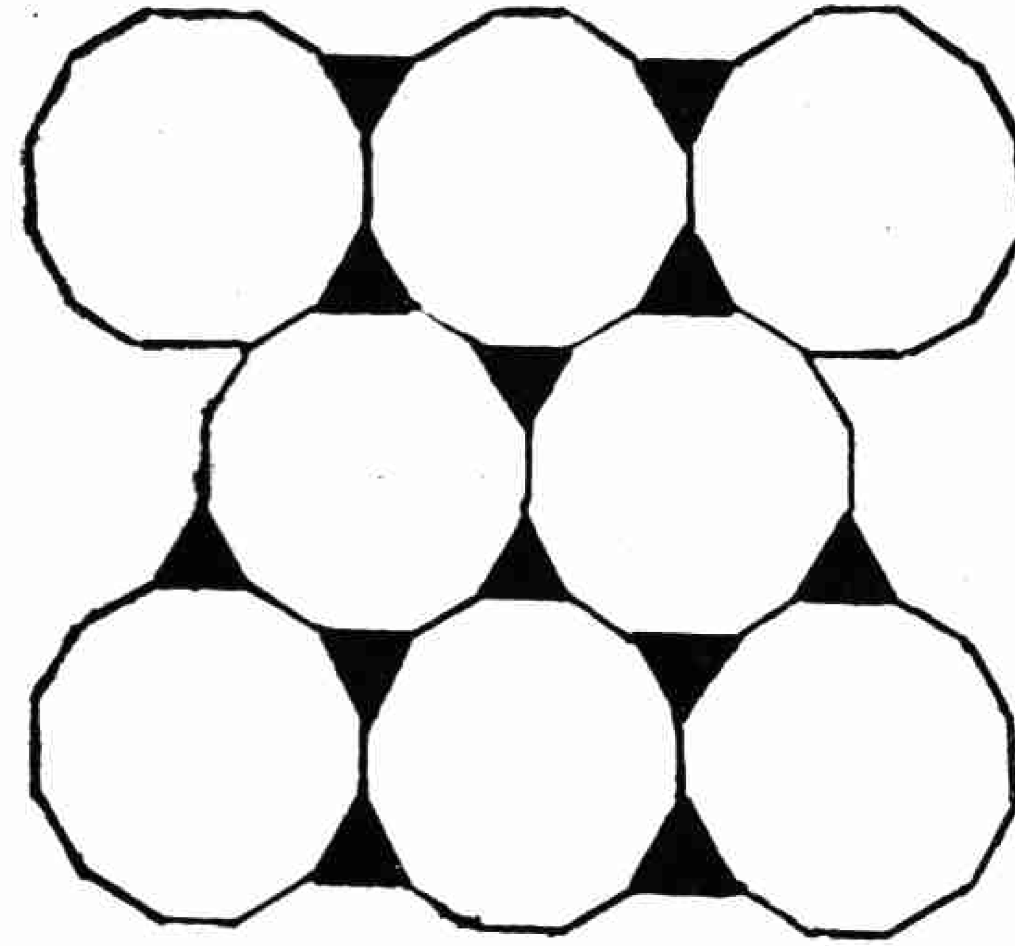
$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2.$$

అన్నియు కలిసి ఈ సమస్యకు 17 సమాధానములు కలవు. వీటిలో మనము అప్పుడే మూడింటిని [అనగా, (6, 6, 6),

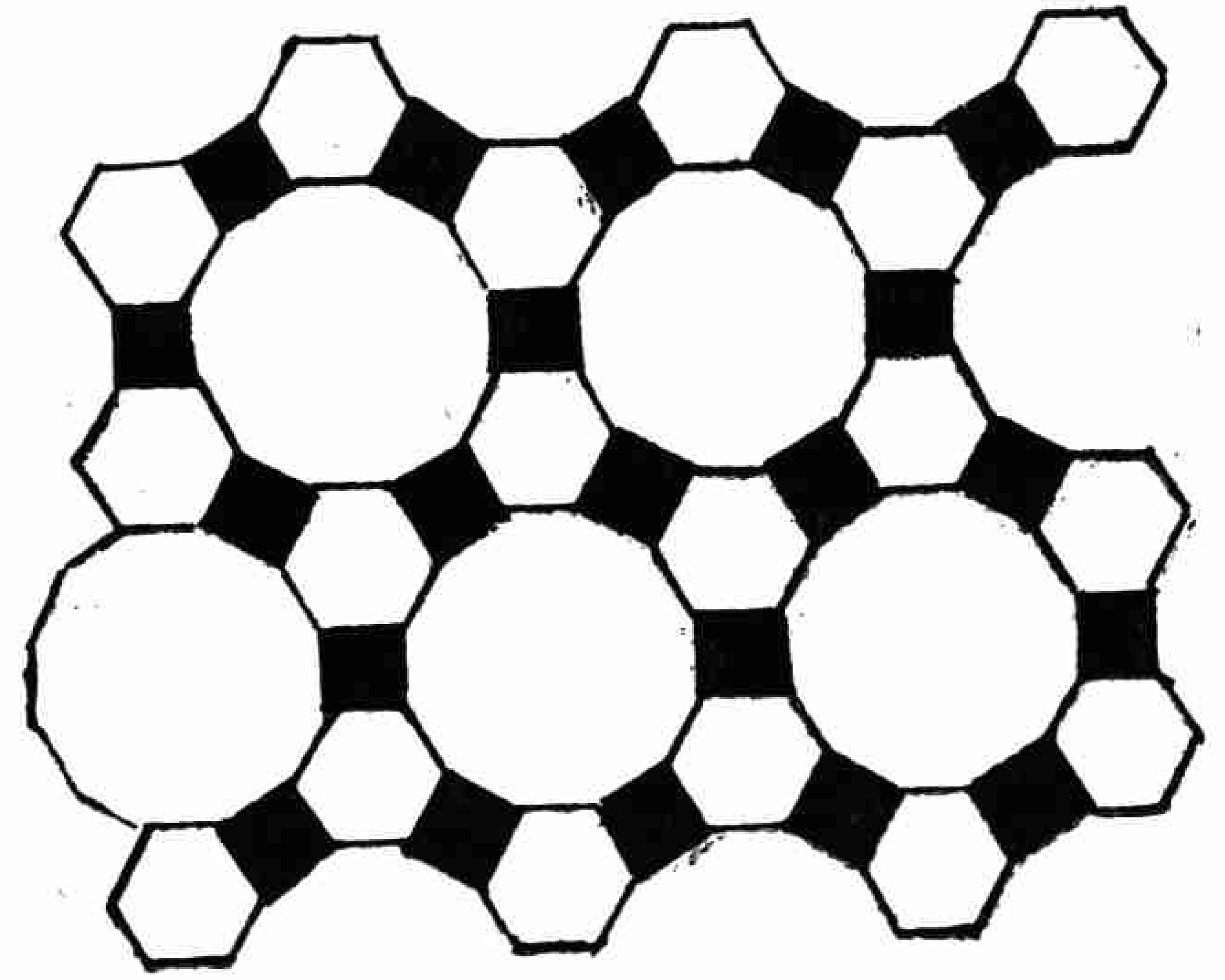
No.	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1.	3	12	12		
2.	4	6	12		
3.	4	8	8		
4.	3	3	6	6	
5.	3	4	4	6	
6.	3	3	3	4	4
7.	3	3	3	3	6

(4, 4, 4, 4), (3, 3, 3, 3, 3, 3)] గ్రహించితిమి. తక్కిన వాటిలో కొన్ని సమాధానములు ఒకే శీర్షమువద్ద సాధ్యమగును. కాని తలమంతట అవి కొనసాగించబడుటకు వీలుకలిగింపవు. అందువలన పట్టికలో చూపిన పథములే మిగిలి ఉన్నవి :

వీటినన్నిటిని తలమునంతను కప్పుటకు ఒకే నమూనాగా వాడవచ్చును. మొదటిదానిలో రెండు ద్వాదశభుజులు, ఒక త్రిభుజము ప్రతిమూలవద్ద కలియును. చిత్రము 126లో చూపినట్లు 12 భుజములుగల క్రమబహుభుజములను దట్టముగ అమర్చవచ్చును. మిగిలిన స్థలములలో త్రిభుజములు పట్టును. తరువాతి చిత్రము 127 ఇంత కన్న క్లిష్టమైన నమూనాను చూపుతున్నది. అందలి ఘటకములు, క్రమద్వాదశ భుజులు, క్రమషడ్భుజులు, చతురస్రములు అయి



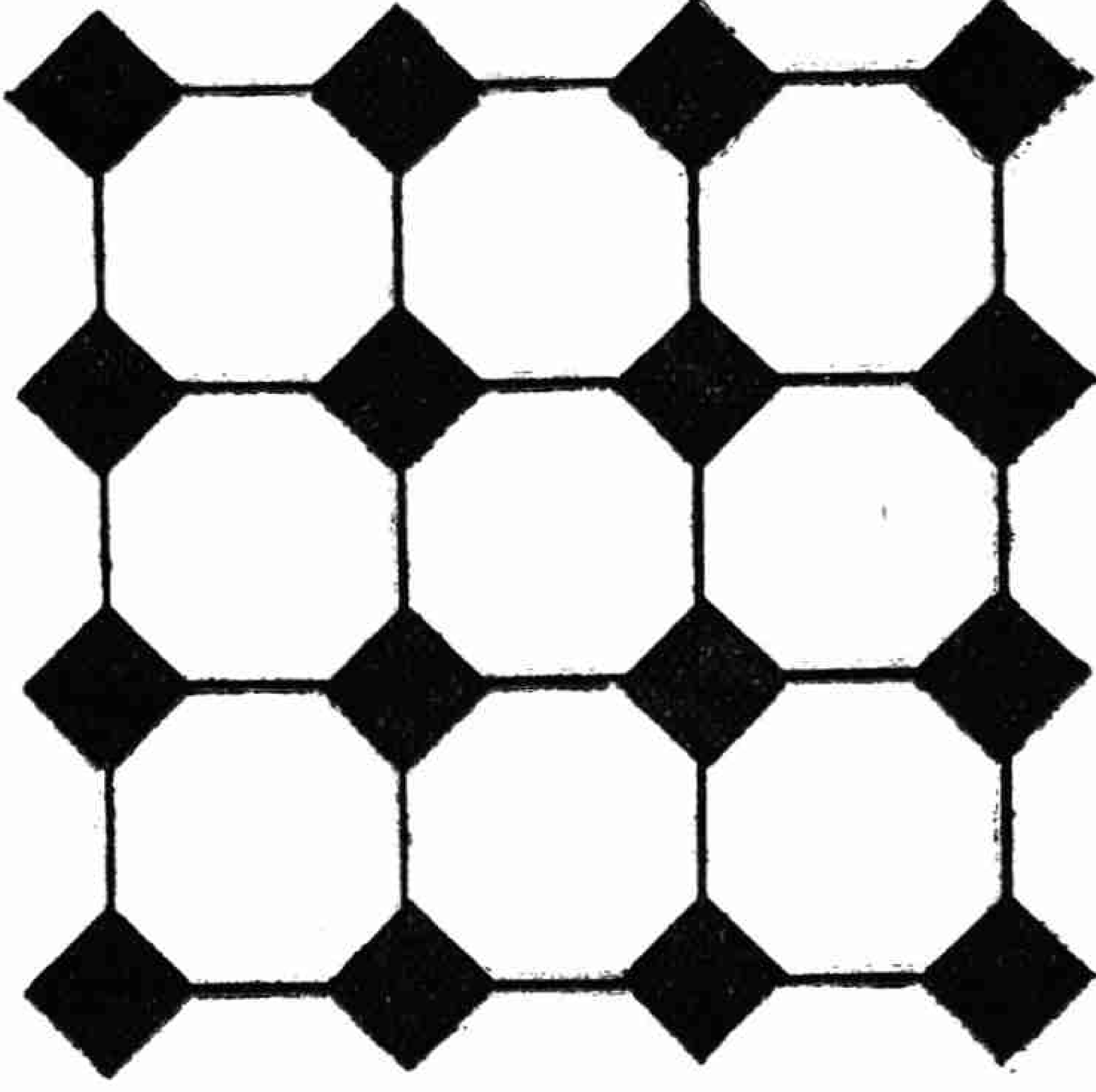
చిత్రము 126

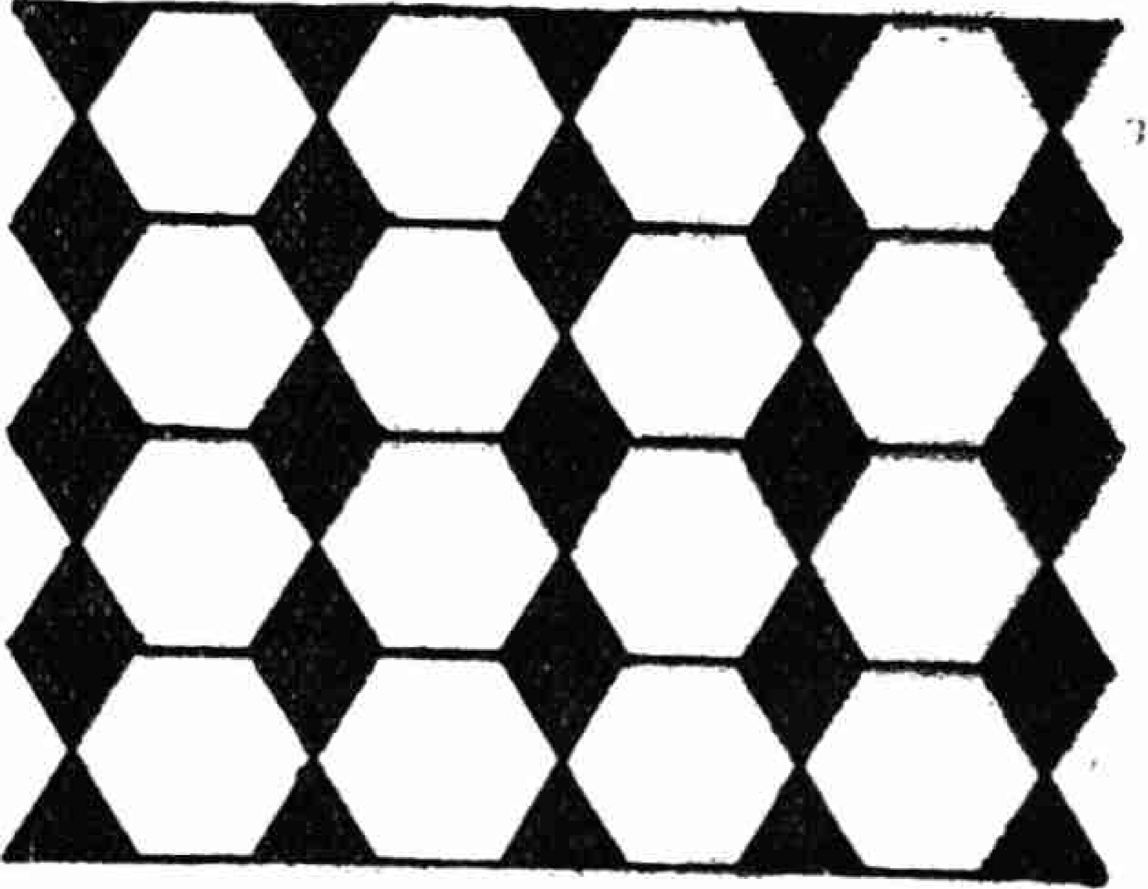


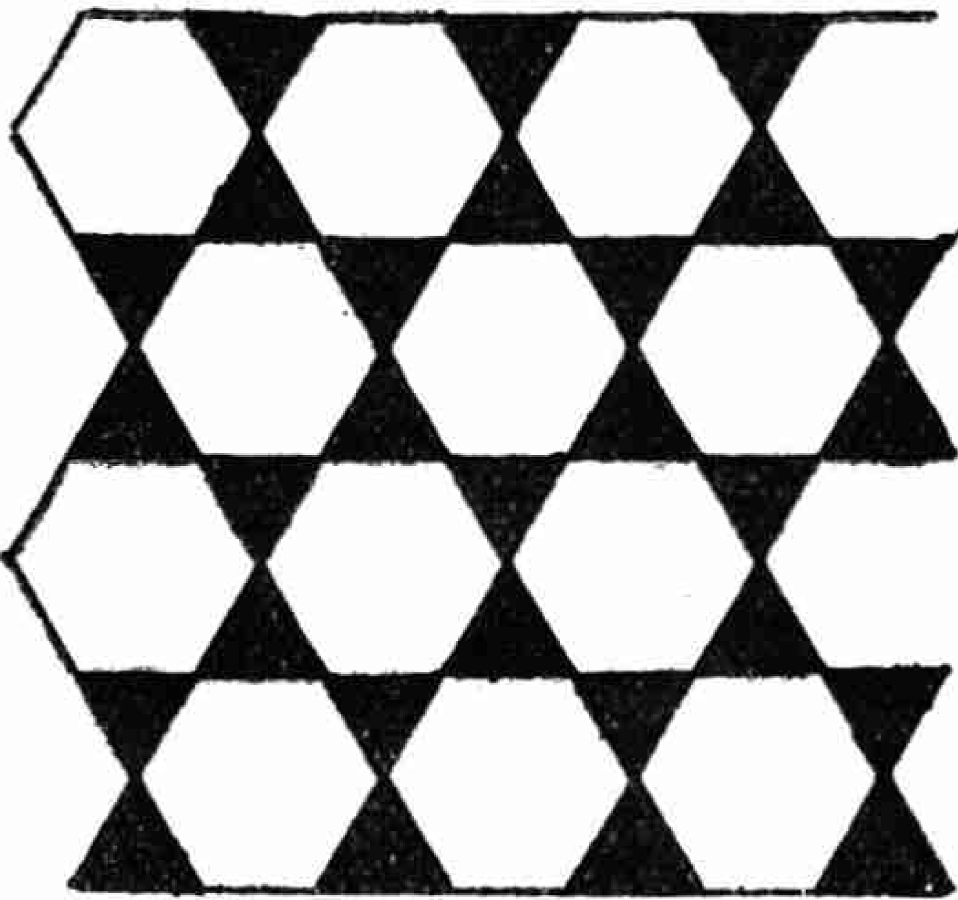
చిత్రము 127

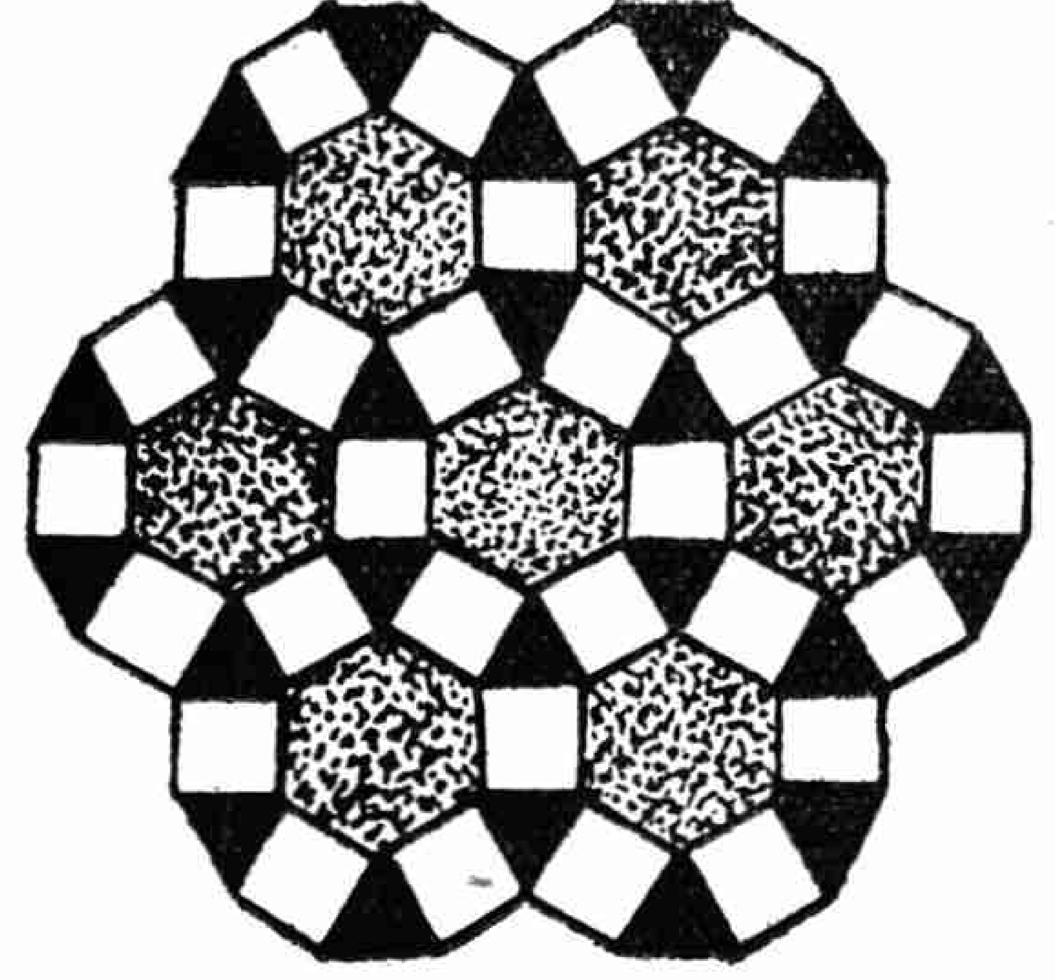
ఉన్నవి. ఈ నమూనా (4, 6, 12) సాధనకు అనురూపముగ ఉన్నది.

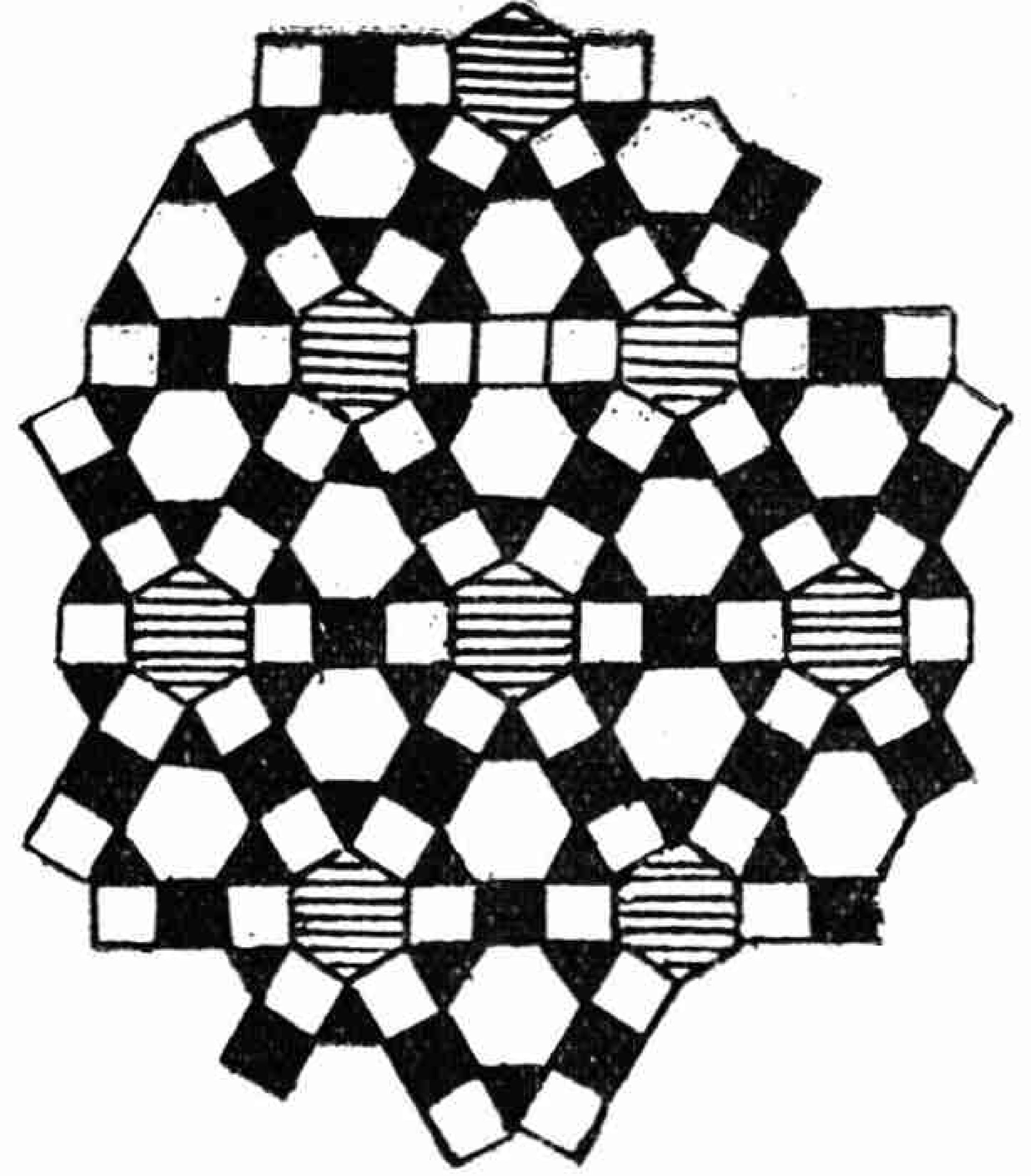
తరువాతి చిత్రము 128 (చూ. పు. 222) సాధన (4, 8, 8) అనగా రెండు అష్టభుజులు, ఒక చతురస్రము ఒక బిందువునందు కలియుట చూపుచున్నది. ఇది క్రమ అష్టభుజులను దట్టముగా అమర్చి, ఖాళీస్థలములందు చతురస్రములను ఉంచుటవలన లభ్యమగును. తరువాతి రెండు (129, 130) చిత్రములు (3, 3, 6, 6) అను సాధనము నుండి లభించును. ఇందలి రెండు షడ్భుజులకు ఒక ప్రక్కనో, ఒక మూలనో ఉమ్మడియగునట్లు ఉంచి రెండు

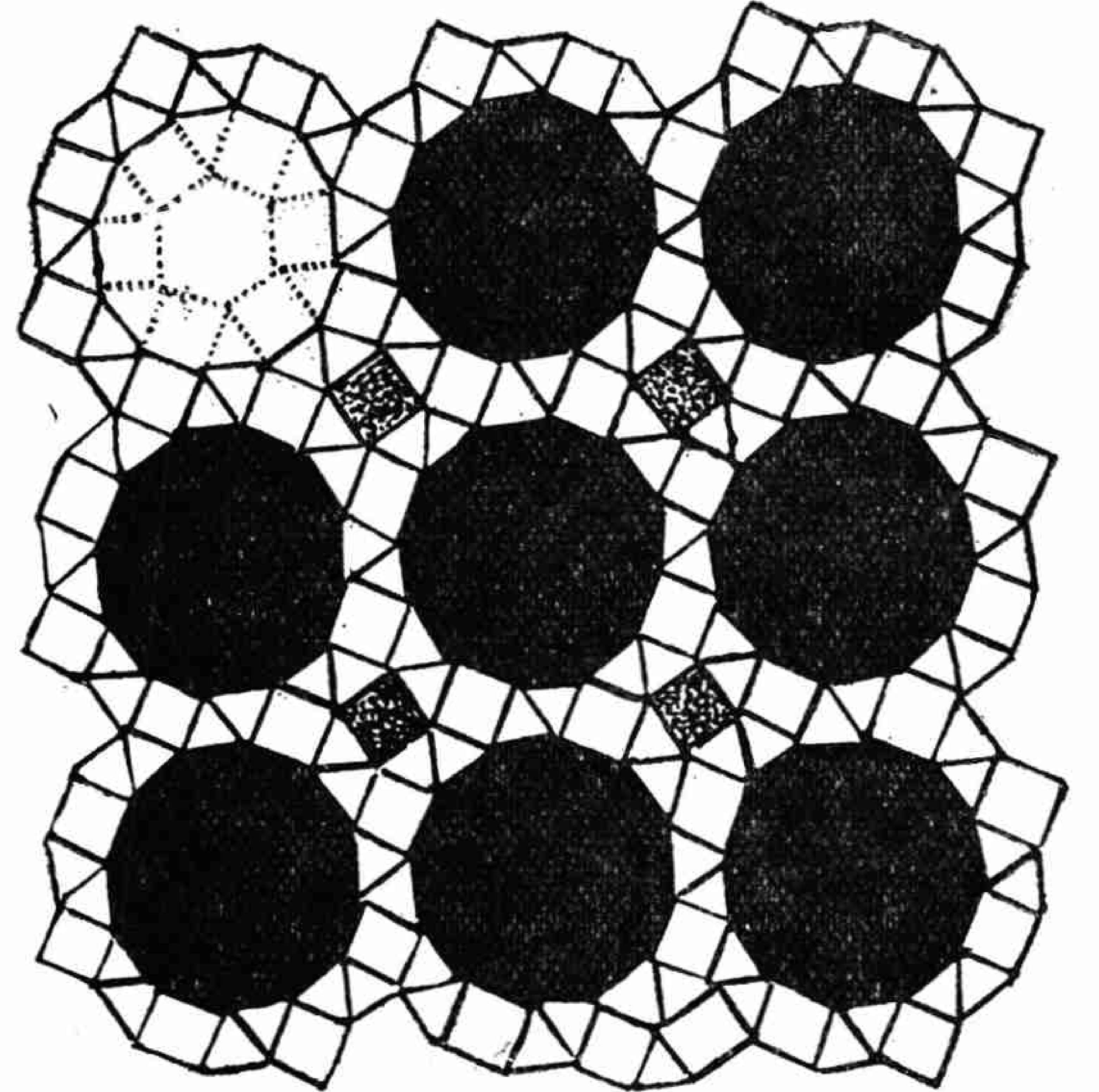

చిత్రము 128


చిత్రము 129


చిత్రము 130

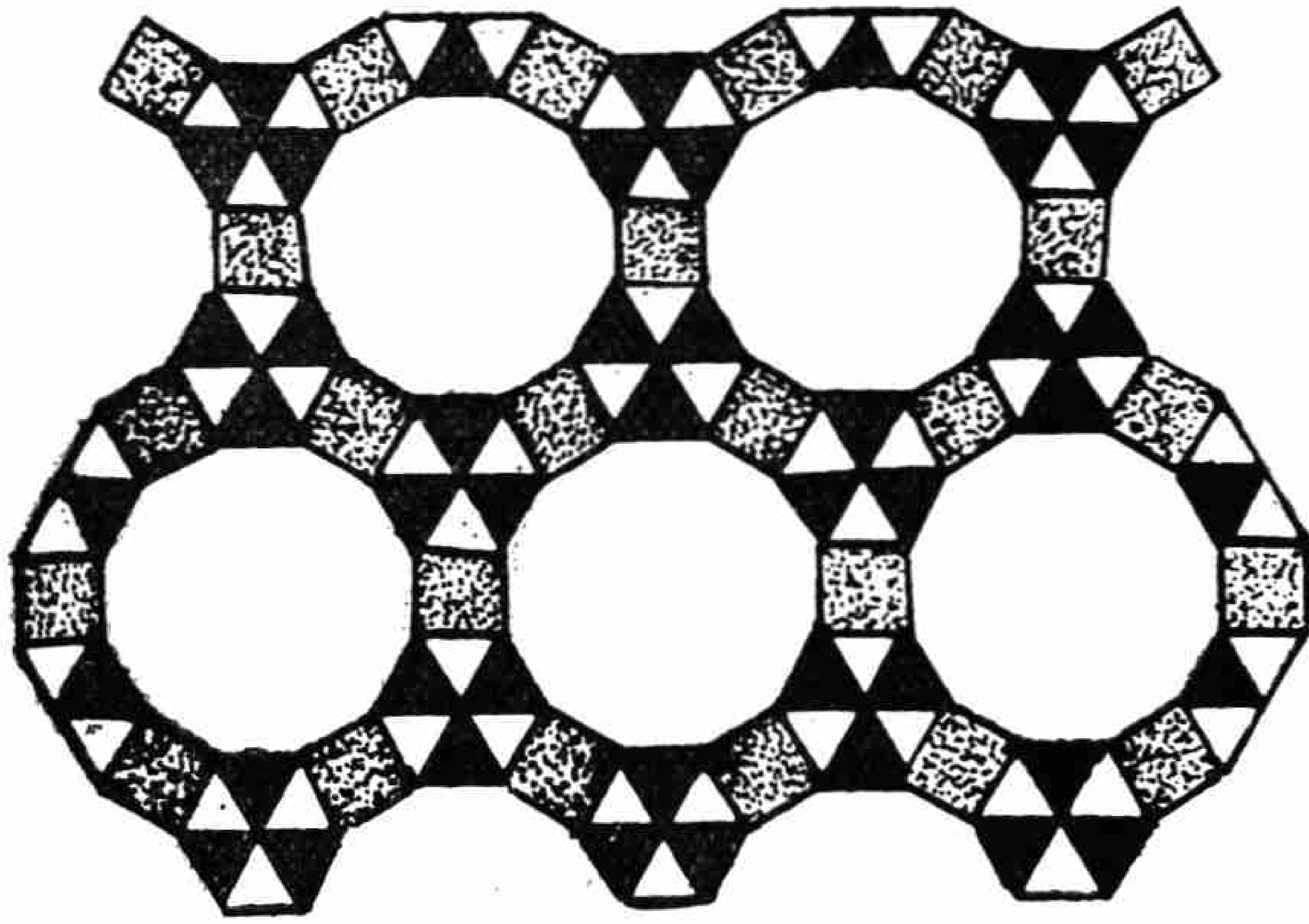

చిత్రము 131


చిత్రము 132


చిత్రము 133

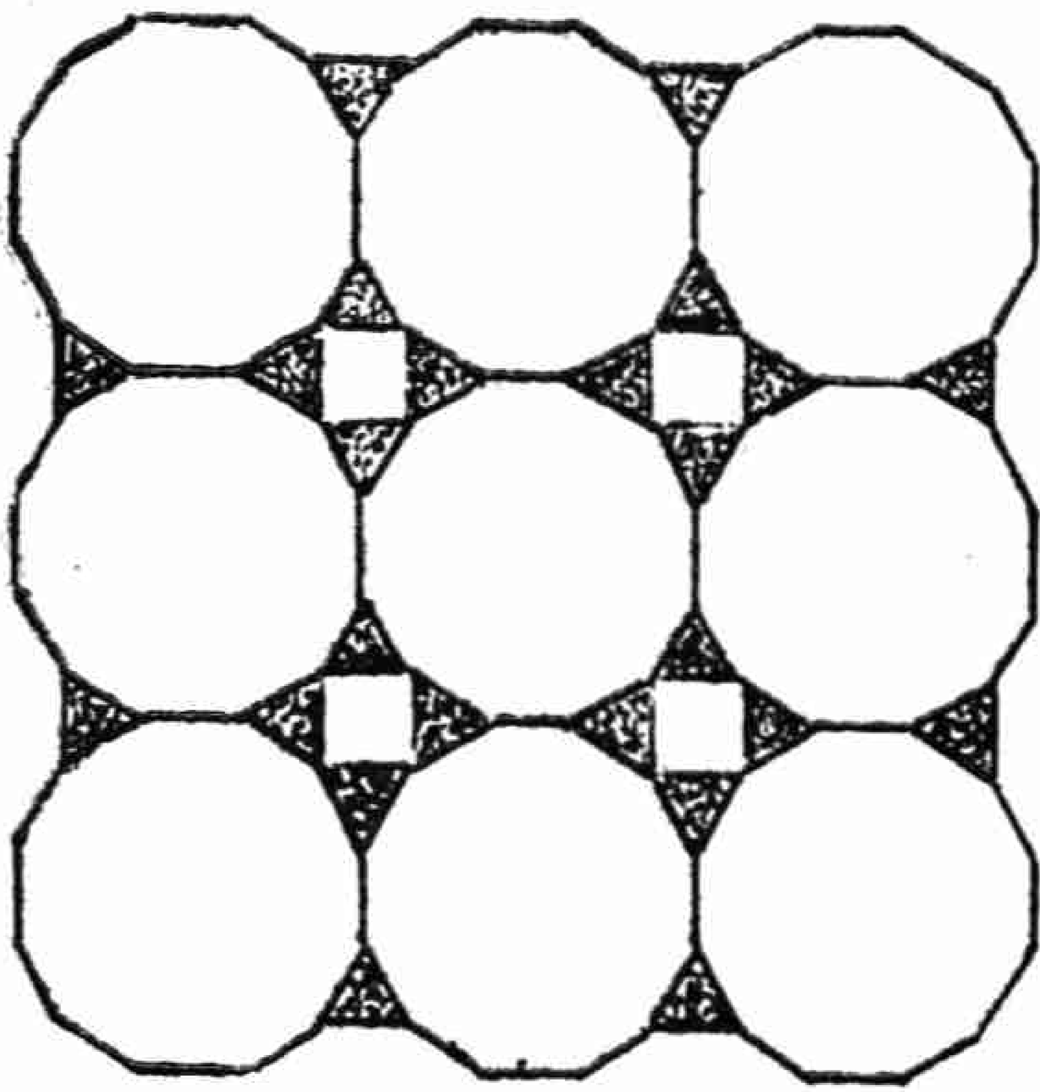
వేరువేరు నమూనాలను పడయవచ్చును. అవి 222 పుటలో చిత్రము 129, 130 లలో చూపబడినవి.

(3, 4, 4, 6)కు (3, 3, 3, 4, 4)కు అనురూపముగఉన్న సాధనములు అనేకములు ఉన్నవి. అందు కొన్నిమాత్రము 222 పుటలోని చిత్రము 131, 132లలో చూపబడినవి.



చిత్రము 134

133, 134, 135 చిత్రములు (3, 3, 4, 12) అనుసాధన (3, 3, 3, 4, 4); (3, 3, 3, 3, 3, 3); (3, 12, 12) సాధనలతో విడివిడిగా కలయికలను సూచించుచున్నవి.

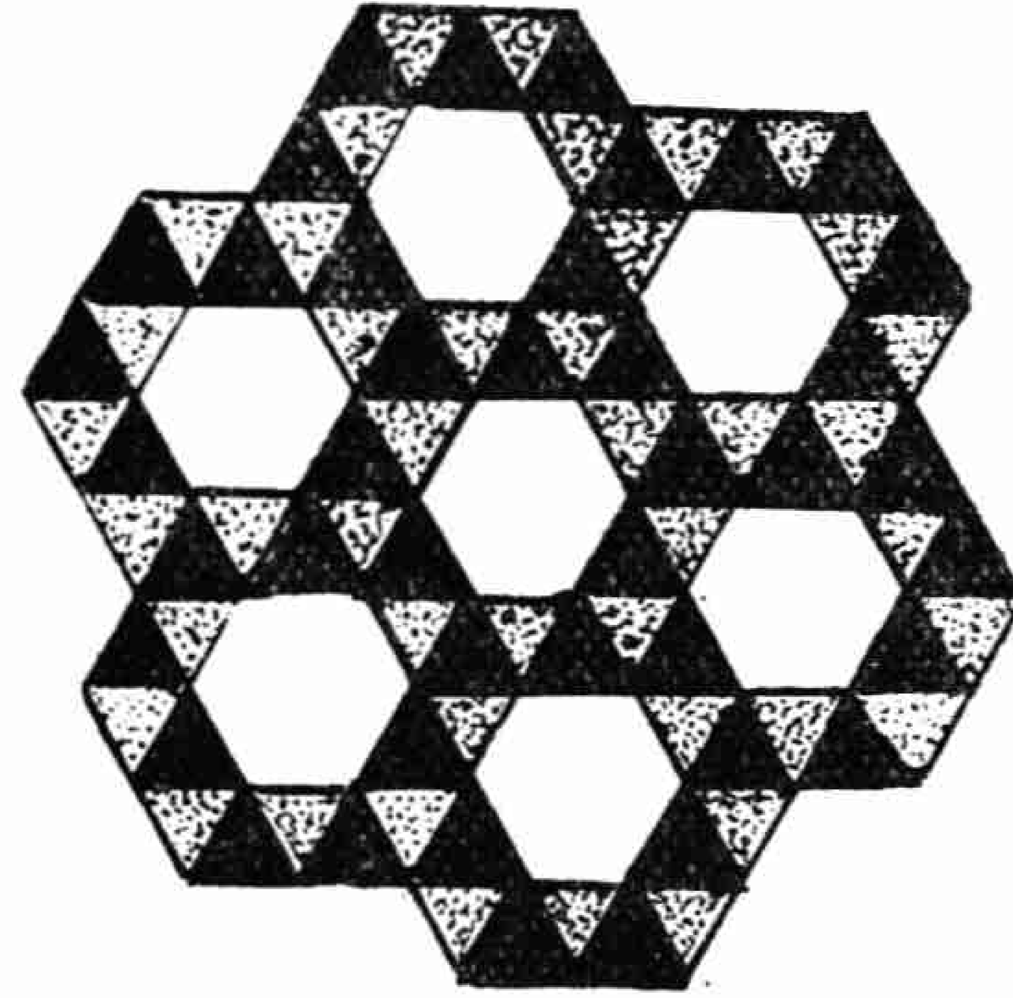


చిత్రము 135

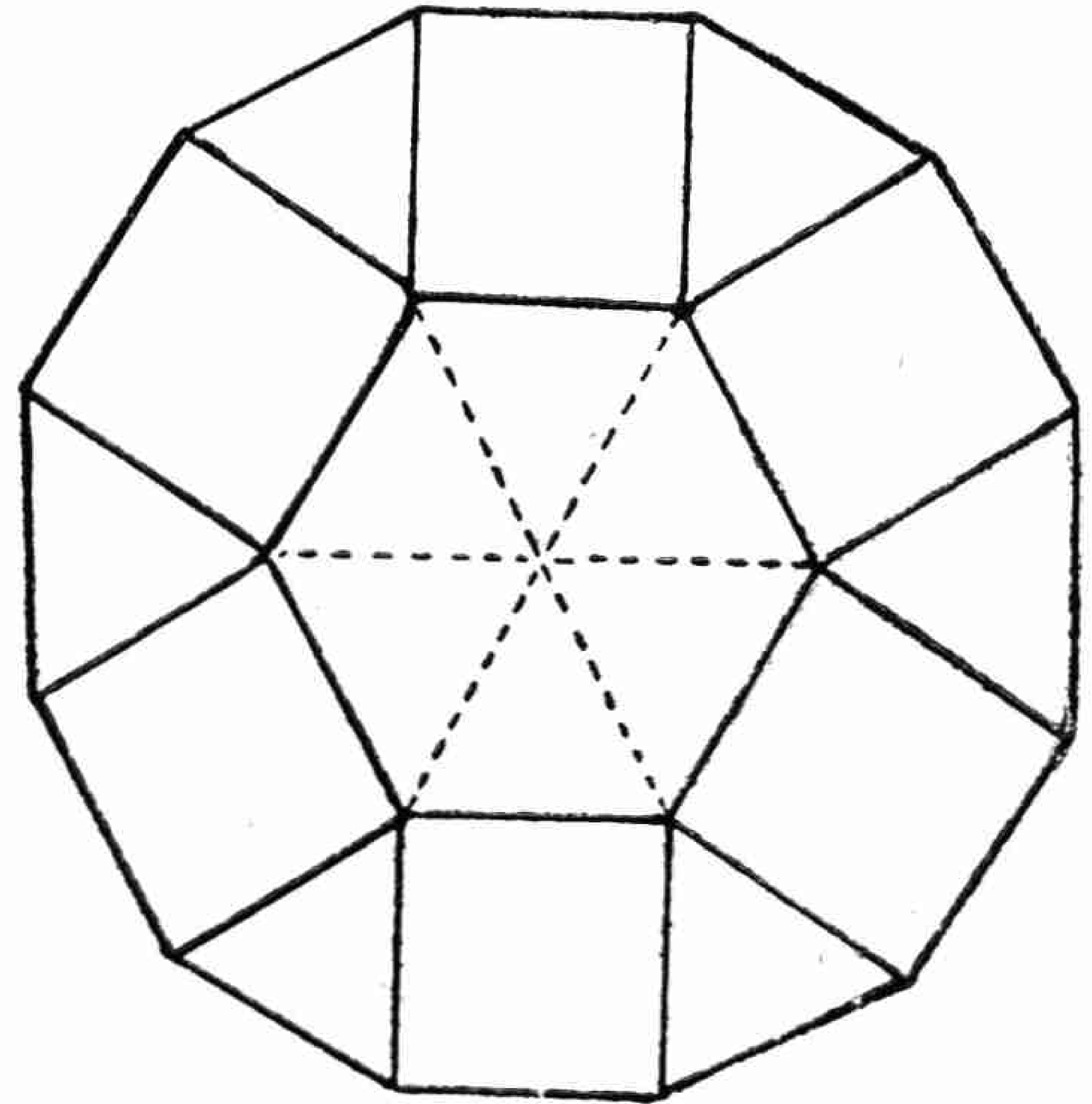
చివరన ఉన్న సాధనములు (3, 3, 3, 3, 6) చిత్రము 136లో చూపినట్లు, త్రికోణములచే (త్రిభుజములచే) ఆవరించబడిన షడ్భుజులు గలవి.

ఒక షడ్భుజిని, అదేభుజపు కొలతగల ఆరు త్రిభుజములుగా విభజించవచ్చును. అందువలన 6కు బదులుగా పై పట్టికలో (3, 3)ను ఉంచవచ్చును. ఇట్లే ద్వాదశ భుజిని, 12 త్రిభుజములక్రిందను, 6 చతురస్రముల క్రిందను చిత్రము 137లో చూపినట్లు విభజించవచ్చును.

ఈ ప్రకారముగ ఒక నమూనాను ఇంకొకదానికి మార్చవచ్చును. ఈ చిత్రములను అట్టముక్కలతో రచించుట చాల సొగసైన వ్యాసంగము. అన్ని వయస్సుల వారికిని సంతోషమును ఇచ్చునట్టి వ్యాపారము. ఇంతేకాక, గృహ శిల్పులకు, భవన నిర్మాణ శిల్పులకు, తివాచీలు, బట్టలు నేయు వారికి మిక్కిలి ఉపయోగకరము.



చిత్రము 136



చిత్రము 137

పంచదశ ప్రహేళిక : ఇది 1 మొదలు 15 వరకు ఉన్న సంఖ్యలచే గుర్తించబడిన 15 సమచతురస్రఫలకముల క్రీడా సాధనము. వీటిని ఇట్టి16 ఫలకములను సరిగ ఇముడ్చుకొనగల ఒక చతురస్రాకారముగల పెట్టెలో ఉంచెదరు. ఖాళీస్థలము లోపలి 16 స్థానములలో దేనియందైన ఉండవచ్చును. కాని, ఆట ప్రారంభములో ఖాళీస్థలము కుడివైపున ఉన్న క్రింది మూలలో ఉండును (చూ. చిత్రము 138 పు. 224). ఆ సమచతురస్ర ఫలకములు చిత్రములో చూపినట్లు అంకెలసహజక్రమములో 1 మొదలు 15 వరకు పెట్టెలో అమర్చబడును. ఆ ఫలకముల సైజులు వాటిని ఆ పెట్టె ప్రక్కలకు సమానాంతరముగ జరుపుటకు వీలుండునట్లును, ఏ మూలగా జరుపుటకు వీలుగాకుండునట్లుగను ఉండును. ఆ ఫలకములలో దేనినికూడ పెట్టెనుండి మీదకు ఎత్తరాదు.

ఖాళీ స్థలమునకు ప్రక్కగఉన్న ఫలకమును దేనినైన ఆ ఖాళీ స్థలములోనికి జరుపుటవలన, అంకములచే అంకితమైన ఆ ఫలకముల సంఖ్యాక్రమమందు అనేకములగు మార్పులను కొని తేవచ్చును. ఇప్పుడు 1-15 అను సహజ క్రమమున బయలుదేరి 2, 1, 4, 3 వంటి వేరగు ఒక దత్త సన్నివేశము మొదటి వరుసలోను, పూర్వపు సన్నివేశముసే తక్కిన వరుసలలోను, ఖాళీస్థలమును ఆట ప్రారంభమునకు ముందున్న తొలిస్థానమందే ఉంచి ఉండ జూచుటయే సమస్య (చూ. చిత్రము 138).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

చిత్రము 138

ఈ ఆట ఒకప్పుడు యూరప్‌లో అత్యధిక జనాదరమును పడసినది. ఒకప్పుడు పథికులు ఈ ఆటను ఆడుచు, మైమరచి బండ్లక్రిందపడి ప్రమాదమునకు గురియగుట కూడా సంభవించెడిది. అంతేగాక క్లాసులో విద్యార్థులు, కోర్టులలో న్యాయాధికారులు ఈ ప్రహేళికా మననము నందు నిమగ్నులై వారి వారి విహిత కృత్యముల మరచుచుండిరను నేరమునకు పాత్రులగుచుండిరి. ఈ ఆటను అనవరతము ఆలోచించుటవలన మనుజులకు నరముల రోగము లెక్కువగు చున్నదని వైద్యులు వాపోయిరి. తుదకు దీని అభ్యాసమును వీధులలోను, ప్రజలు గుంపులుగా చేరు పార్కులలోను నిషేధించుచు రాజశాసనము జారీ చేయబడినది.

ఇట్టి ఆశ్చర్యకర జనాదరణమునకు హేతువు ఈప్రశ్నను సాధించగలవారిలో మొదటివానికి పెద్ద పారితోషికము (1000 డాలర్ల బహుమానము) ఈయబడునని ప్రకటించబడుటయే. 1, 2, 3 ... 15 అను సహజ సన్నివేశమునుండి ప్రారంభించి దీనికి విలోమక్రమములో ఉండు 15,14,13,...1 సన్నివేశమును రచించుటయే బహుమాన సమస్య.

విధివశమున ఈ సమస్య దుస్సాధ్యమైనది. వాస్తవముగా సాధ్యములగు పునర్విన్యాసములు అన్నిటిలోను సగము మార్పులే సాధించుటకు వీలుకలదు. తక్కినవి అప్రాప్యములు. ఒక నిర్దిష్టవిన్యాసము సాధ్యమగునో కాదో చెప్పవచ్చును. మొదటి 1, 2, ... 15 విన్యాసములో క్రమవ్యత్యాసము ఏదియులేదు. ఏలన ప్రతి సంఖ్య దానికి పెద్దదగు సంఖ్యచే అనుసరించబడినది. 2, 1, 4, 3, 5, 6, ... 15 వంటి మరొక విన్యాసమును తీసికొందము. ఇందు 2, 1కి ముందున్నది; 4, 3కి ముందు ఉన్నది. వేరు క్రమమార్పులు లేవు. అందువలన రెండే రెండు క్రమవ్యత్యాసములు ఉన్నవి. క్రమములో మొత్తపు మార్పుల సంఖ్య ఇచ్చట సరిసంఖ్య అగుటచే ఈ సమస్య పరిష్కరింపబడుటకు వీలుఉన్నది. కాని, మరియొక నూతన విన్యాసము 3, 1, 5, 6, 4, 2, 7, 8 ... ... 15 తీసికొందము. ఇందు 7 క్రమవ్యత్యాసములు ఉన్నవి. ఈ సంఖ్య బేసి సంఖ్య గనుక సమస్య అసాధ్యము అగును. మొదట ప్రతిపాదింపబడిన సమస్యలో అనగా 15, 14, 13, ... 1 క్రమములో 105 క్రమ వ్యత్యాసములు ఉన్నవి, 105 బేసి సంఖ్య గనుక సమస్య పరిష్కారము కాదు. అందువలనే అన్ని ప్రయత్నములు విఫలములు అయ్యెను. గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఈ సమస్య అపరిష్కార్యమని రుజువుచేసిన తరువాత దీనియందు జనులకు ఆదరము సన్నగిల్లినది.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2 5 8 9 11 14 15 17 18 20

1 2 3 4 11 12 13 14 15 16

3 6 8 10 12 14 16 17 19 20

1 5 6 7 11 12 13 17 18 19

4 7 9 10 13 15 16 18 19 20

చిత్రము 139 గవాక్ష వాచకము

గవాక్షవాచకములు: ఇది ఒక ఆట. ఇందు కొన్ని నియత స్థలములందు కన్నములు పొడవబడ్డ 6 కార్డులు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క కార్డులోను కొన్ని సంఖ్యలు గుర్తించబడి ఉండును. వీటికి అన్నిటికి వేరుగా ఒక మాస్టరుకార్డుకూడ కలదు. దీనిపై 1 నుండి 20 వరకు అన్ని సంఖ్యలు ఉండును. కాని కన్నములు ఉండవు. ఒక మనుజుని 20 లోపల ఒక

సంఖ్యను తలచుకొనుమని చెప్పుము. తరువాత అతనికి కన్నములు గల కార్డులు ఒకదాని తరువాత ఇంకొకటి ఇమ్ము. ఈ కార్డులలో వ్రాసిఉన్న సంఖ్యలను అతడు చదివి తాను తలంచుకొనిన సంఖ్యగల కార్డునే తిరిగి ఐంద్రజాలకునికి ఇచ్చివేయును. తనకు ఈయబడిన కార్డులను అన్నిటిని ఐంద్రజాలికుడు ఒకదానిపైన ఒకటి వరుసగా ఉంచి, మాస్టరు కార్డును అన్నిటిక్రింద ఉంచినప్పుడు, ఒకేఒక కన్నముగుండా ఒకేఒక సంఖ్య కనబడును. ఇదియే అతడు తలచుకొనిన సంఖ్య. 1 మొదలు 20 వరకు ఉన్న సంఖ్యలలో దేనినైన కనుగొనుటకు వీలిచ్చు అట్టి గవాక్షవాచకము (6 కార్డులు) చిత్రము 139 (పు. 224)లో చూపబడినది. ఎన్నుకొనిన సంఖ్య ఆ కార్డులలో మూడిటిమీద మాత్రమే కానవగును. ఈ కార్డుల ఛాయాయుత భాగముల కత్తిరించి క్రింది పంక్తులలో కననగు సంఖ్యల కార్డులలో వ్రాయవలెను, ఆ. న.

గణిత పథకములు : గణితజ్ఞానము అధికమగునపుడు పథకములు ఆవశ్యకములు. బాలురు బడిలో చదువుచు గణితాభ్యాసము చేయునపుడు వారికి ఎక్కములు బోధించుట ఆవశ్యకము. వారు వాటిని కంఠస్థము చేయుదురు. గణితపథకములలో మొదటిది ఎక్కములు.

ఎక్కములవలని ఉపయోగము చాలఎక్కువ. గుణకార పాఠములు అవలీలగ బోధింపవచ్చును. ప్రతి ఎక్కము 20 వరకు ఉండును. అనగా : $2 \times 1 = 2$ నుండి $2 \times 20 = 40$ వరకు పథకములో ఉండును. 16 వ ఎక్కమువరకు పిల్లలు సాధారణముగ నేర్చుకొందురు. ఎక్కములు అందరికి తెలిసినందున వాటిగురించి విపులముగ వ్రాయుట అనవసరము.

మన పూర్వులు ఇతర పథకములుగూడ వాడుచుండిరి. నవీన బోధనావిధానములో వానికి చోటులేకున్నది. అట్టి పథకముల వాడుటవలన మన పూర్వులు లెక్కలన్నిటిని మనోగణితముగ వేయుచుండిరి. వారికి కాగితము, కలము అక్కరలేదు. ఆ పథకములు భిన్నాంకములను గురించినవి.

భిన్నాంకములకు పూర్వపు సంకేతములను స్మరణకు తెచ్చుకొనుట మంచిది.

ఆధునిక సంజ్ఞలు	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$
పూర్వపు సంజ్ఞలు	౻	౺	౹	౾	౽	౼	౸౹	౸౺
	ముప్పాతిక	అర	పాతిక	మువ్వీసము	పరక	వీసము	కాణి	అర్ధణా

ఉదాహరణముగా కొన్ని పథకములు తీసికొందము :

$2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$	$7 \times \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$	$6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$
$20 \times \frac{3}{4} = 15$	$70 \times \frac{1}{4} = 17\frac{1}{2}$	$60 \times \frac{1}{16} = 3\frac{3}{4}$
$200 \times \frac{3}{4} = 150$	$700 \times \frac{1}{4} = 175$	$600 \times \frac{1}{16} = 37\frac{1}{2}$
$2000 \times \frac{3}{4} = 1500$	$7000 \times \frac{1}{4} = 1750$	$6000 \times \frac{1}{16} = 375$

ఇవి యన్నియు పూర్ణాంకములకు సంబంధించినవి. భిన్నాంకములకు సంబంధించినవి కూడ వారు కొన్ని వాడుచుండిరి.

$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$; $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$;
$\frac{3}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{9}{64}$; $\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$; $\frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{64}$.

ఖగోళశాస్త్రమునందు కొన్ని పథకములు కలవు. ఒకటి sin x కు సరియగునది. ఆ పథకమును జీవ పథకమని చెప్పుదురు. sin x పథకములన్నియు దశాంశములు. కాని, జీవపథకములు పూర్ణాంకములు. అన్ని విలువలకు సమానహారము కలదు.

ఒక సమకోణము ($90°$) ను 24 సమభాగములు చేసిన ఒక భాగములో $3\frac{3}{4}° = 225'$.

ఒక వృత్త పరిధిఖండము కేంద్రమువద్ద $3\frac{3}{4}° = 225'$ చేసిన, ఆ పరిధి ఖండము వక్రమైనను చూచుటకు ఋజురేఖగా ఉండును. అనగా ఒక వృత్తపరిధి యొక్క 1/96 భాగమును ఋజురేఖగా తీసికొనవచ్చును.

"వృత్తస్యషణ్ణవత్యంశో దండవద్దృశ్యతే తు సః"

వృత్తవ్యాసార్ధము 3438′. ఒక వృత్తీయకోణములో $57° \ 18'$ = రేడియన్. $57° \ 18' = 3438'$. దీనినే వృత్తవ్యాసార్ధముగా మన పూర్వులు తీసికొనిరి. వారి మతము ప్రకారము ఇది అన్ని జీవలకు సామాన్యహారము (చూ. జీవ లేదా sin పథకముల పట్టిక పు. 226).

ఈ జీవల విలువలన్నిటికిని హారము 3438 కాబట్టి 24 వ జీవ = sin $90° = 3438 / 3438 = 1$. ఇతర కోణములకు అనుపాతములో జీవలను కనుగొనవచ్చును. ఒక జీవను ఇచ్చిన విలోమములో ఆ కోణమునకు అనురూపమగు ధనుస్సును కూడ కనుగొనవచ్చును. 3438 నుండి ప్రతి జీవవిలువను తగ్గించిన, ఉత్క్రమ జీవపథకము లభించును

ఆధునిక గణిత సంబంధ పథకములు అనేకములు కలవు. లాగరిదమ్, జీవ (sin), కోటిజీవ (cos) స్పర్శజీవ (tan) పథకములు విజ్ఞానశాస్త్రమునందును, ఖగోళశాస్త్రమునందును విశేషముగా వాడబడుచున్నవి.

సాంఖ్యకశాస్త్ర సంబంధపథకములు కూడ ఎక్కువగా ప్రచారములో నున్నవి. హెర్బర్ట్ ఆర్కిన్, ఆర్. కోల్టిన్ ప్రచురణములు చాల ఉపయోగకరమయినవి. లాగరిదమ్ పథకము ముఖ్యమయినది. అది రెండు విధములు :

జీవ, లేదా sin పథకముల పట్టిక

జీవలు	అంశ(డిగ్రీ)లు	విలువ
1	$3\frac{3}{4}^\circ$	225
2	$7\frac{1}{2}^\circ$	449
3	$11\frac{1}{4}^\circ$	671
4	15°	890
5	$18\frac{3}{4}^\circ$	1105
6	$22\frac{1}{2}^\circ$	1315
7	$26\frac{1}{4}^\circ$	1520
8	30°	1719
9	$33\frac{3}{4}^\circ$	1910
10	$37\frac{1}{2}^\circ$	2093
11	$41\frac{1}{4}^\circ$	2267
12	45°	2431
13	$48\frac{3}{4}^\circ$	2585
14	$52\frac{1}{2}^\circ$	2728
15	$56\frac{1}{4}^\circ$	2859
16	60°	2978
17	$63\frac{3}{4}^\circ$	3084
18	$67\frac{1}{2}^\circ$	3177
19	$71\frac{1}{4}^\circ$	3256
20	75°	3321
21	$78\frac{3}{4}^\circ$	3371
22	$82\frac{1}{2}^\circ$	3409
23	$86\frac{1}{4}^\circ$	3431
24	90°	3438

1. సాధారణ లాగరిదమ్ పథకము, 2. సహజ లాగరిదమ్ పథకము. లాగరిదమ్ పథకములు 7 దశాంశస్థానముల వరకును, 4 దశాంశస్థానముల వరకును గణింపబడినవి. ఎక్కువగ వాడబడునవి నాలుగు స్థానములు కల పథకములే. సహజ లాగరిదమ్‌లు నేపియర్ చే గణింపబడినవి. అందుండి సాధారణ లాగరిదమ్‌లు గణింపబడెను.

$N = a^x$ అయిన x సంఖ్య a ఆధారముగా N యొక్క లాగరిదమ్.

$a^x \times a^y = a^{x+y}$; ఇపుడు $a^x = N$, $a^y = M$ అయినచో $a^{x+y} = N.M.$

లాగరిదమ్ పథకములో నుండి a^{x+y} ఏ సంఖ్యకు సమానము అని కనుగొనవచ్చును. ఆ సంఖ్య P అయినచో $N \times M = P$. ఇపుడు లాగరిదమ్ వలన గుణకారము, సంకలనముగా మారెను. N, M సంఖ్యల లాగరిదమ్‌లు x, y లను కూడుటచే $(x+y)$ వచ్చినది. అందుండి P లభించినది. అట్లే $\frac{N}{M} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ఇట్లు భాగహారము, వ్యవకలనముగా మారును.

$N = a^x$ అయినచో N యొక్క లాగరిదమ్ x.

$N^k = (a^x)^k = a^{x \cdot k}$; N^k యొక్క లాగరిదమ్ xk. xk తెలిసిన $a^{x.k}$ కనుగొనవచ్చును. అపుడు N^k యొక్క విలువ లభించును. ఘాతక్రియ, మూలక్రియ గుణకార భాగహారములుగా మారును. సాధారణ లాగరిదమ్‌లలో ఆధారము 10, నేపియర్ లాగరిదమ్‌లో ఆధారము $e = 2{\cdot}71828$.

సాధారణ లాగరిదమ్ యొక్క ఉపయోగము అధికము.

$235{\cdot}8 = 2{\cdot}358 \times 10^2$. కాబట్టి

$\log 235{\cdot}8 = \log 2{\cdot}358 + \log 10^2$

[లాగరిదమ్ 235·8 = లాగరిదమ్ 2·358 + లాగరిదమ్ 10^2]

లాగరిదమ్ 235·8 = 2 + లాగరిదమ్ 2·358. ఇపుడు 2·358 యొక్క లాగరిదమ్ తెలిసినచో 235·8 యొక్క లాగరిదమ్ తెలిసికొనుటకు 2 కూడవలయును.

2.358 క్రమరూపములో ఉన్నదని చెప్పుదుము. అనగా, పూర్ణాంక భాగములో ఒక స్థానముండును. బ్రిగ్స్ లాగరిదమ్ పథకములో క్రమరూపసంఖ్యలకు లాగరిదమ్ విలువలిచ్చినచో అదే సార్థకాంకములు గల ప్రతిసంఖ్య యొక్క లాగరిదమ్ కనుగొనవచ్చును. log 2·358 ఒక పూర్ణదశాంశము. (1 నుండి 10 వరకు గల సంఖ్య లాగరిదమ్ పూర్ణదశాంశము). 2.358 ని 10 చేతను, 10 యొక్క ఘాతములచేతను గుణించినను భాగించినను లాగరిదమ్ దశాంశభాగము మారదు. దీనికి మేంటిస్సా అని పేరు. పూర్ణాంక భాగమునకు ఘాతపూర్ణాంకము అని పేరు.

పథకములో మేంటిస్సా మాత్రము ఈయబడును. సంఖ్యకు తగినట్లు ఘాతపూర్ణాంకము వ్రాయవలయును.

లాగరిదమ్ పట్టిక

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784

ఉదాహరణముగా ఒక సంఖ్య 235·8 యొక్క లాగరిదమ్ కనుగొనుటకు ప్రయత్నించెదము. నాలుగుస్థానపథకము లోని యుక్తమగు వరుస (చూ. లాగరిదమ్ పట్టిక).

సంఖ్య క్రమరూపములో నుండిన 5 కు నేరుగా నుండు వంశములో 3711 ఉన్నది. కాబట్టి

2·35 యొక్క లాగరిదమ్ 0·3711.

2·36 యొక్క లాగరిదమ్ 0·3729.

అంతరము 18 అనగా 0·0018.

$2{\cdot}36 - 2{\cdot}35 = 0{\cdot}01$; ఇపుడు log 2·358 యొక్క విలువ కావలయును.

$2{\cdot}358 - 2{\cdot}35 = 0{\cdot}008$. 0·01 అంతరమునకు వ్యత్యాసము 0·0018 అయిన 0·008 అంతరమునకు అనుపాతములో లభించు వ్యత్యాసము. $0{\cdot}0018 \times \frac{8}{10} = 0{\cdot}00144 = 0{\cdot}0014$ సవరణ వలన లభించినది. కాబట్టి

$$\log 2{\cdot}358 = 0{\cdot}3725$$
$$\log 235{\cdot}8 = 2{\cdot}3725$$

ప్రతిలాగరిదమ్ (ఆంటిలాగ్) పథకములు కూడ కలవు. లాగరిదమ్‌ల యొక్క అనురూప సంఖ్యలను వాని నుండి కనుగొనవచ్చును.

నేపియర్ లాగరిదమ్ యొక్క ఆధారము e కాబట్టి అవి ఎక్కువ వాడుకలో లేవు. మొదట లాగరిదమ్ log గణించినపుడు నేపియర్ e ని ఆధారముగా వాడెనని కొందరు భావింతురు.

$$\log_{10} N = \log_e N \cdot \log_{10} e$$
$$\log_{10} e = 0{\cdot}43429$$

కాబట్టి ప్రతిసహజలాగరిదమ్ దీనిచేగుణించిన, సాధారణ (బ్రిగ్స్) లాగరిదమ్ లభించును.

$$\log_e 0{\cdot}2358 = \log_e 2{\cdot}358 \times 10^{-1}$$
$$= 2{\cdot}358 + \log 10^{-1}$$
$$= -1 + \log 2{\cdot}358$$
$$= -1 + 0{\cdot}3725$$

దీనిని $\bar{1}{\cdot}3725$ అని వ్రాయుదురు.

పూర్ణాంకము మాత్రము ఋణాత్మకము. దశాంశ భాగము ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకము; అది ఋణాత్మక మయినపుడు −1 కు +1 కూడ చేర్చి దశాంశ భాగమును ధనాత్మకముగా మార్చవలయును.

ఉదా: $-0{\cdot}72 = -1 + 1 - 0{\cdot}72 = -1 + 0.28$
$= \bar{1}\cdot 28$

త్రికోణమితీయ ఫలములు: sinx (జీవ), cosx (కో. జీవ). tanx (స్ప. జీవ) ఫలములకు పథకములు 0° నుండి 90° వరకు ప్రచారములో నున్నవి. $\sin(90° - x) = \cos x$; $\tan(90 - x) = \cot x$ అయినందున ఈ నాలుగు ఫలముల విలువలు పథకములలో ఈయబడును :

x	sinx	cosx	tanx	cotx	90° − x
15° 0′	0·2588	0 9659	0·2679	3·7321	75° 50′
15° 10′	0.2616	0·9652	0·2711	3·6891	75° 50′
15° 20′	0·2644	0·9644	0·2742	3·6470	75° 40′
15° 30′	0·2672	0 9636	0·2773	3·6059	75° 30′
15° 40′	0·2700	0·9628	0·2805	3·5856	75° 20′
15° 50′	0·2728	0·9621	0·2836	3·5261	75° 10′

మధ్యవిలువలను అనుపాతము మూలమున కనుగొన వచ్చును. sin x, cos x యొక్క విలువలు 1 కంటె తక్కువగా నుండును. tan x, cot x యొక్క విలువలు 0 నుండి ∞ వరకు ఉండును. వీటికి లాగరిదమ్ కనుగొని పథకములు తయారుచేయబడినవి. వీనికి ఉపయోగము చాల తక్కువ.

జీవ, కోటిజీవల లాగరిదమ్ లన్నియును ఋణాత్మకము లయినందున, వానికి పది చేర్చి, దశాంశ భాగము ఎప్పుడు ధనాత్మకముగా నుండునట్లు చేయబడును. తక్కిన వానికి కూడ అట్లే.

వర్గముల, వర్గమూలముల, ఘనముల, ఘనమూలముల పథకములు కూడ కలవు.

వ్యుత్క్రమముల పథకములు: సాధారణముగా 100 నుండి 999 వరకు పథకము తయారుచేయబడును. తల వరుసలో 0 నుండి 9 వరకు ఇవ్వబడినందున 100 నుండి 999 వరకు అన్ని సంఖ్యలకు వ్యుత్క్రమములు కనుగొన వచ్చును. శాతములు కనుగొనునపుడు, భాగహారములు చేయునపుడు ఇవి చాల ఉపయోగములు. గణిత యంత్రములు వాడునపుడు ఈ పథకము ఆవశ్యకము.

క్రమగుణిత n (ఫాక్టోరియల్ n)

$$= n \times (n-1)(n-2) \ldots \ldots 3\,2{\cdot}1 = n!$$

వీని ఉపయోగము సాంఖ్యక శాస్త్రములో ఎక్కువ అయినది.

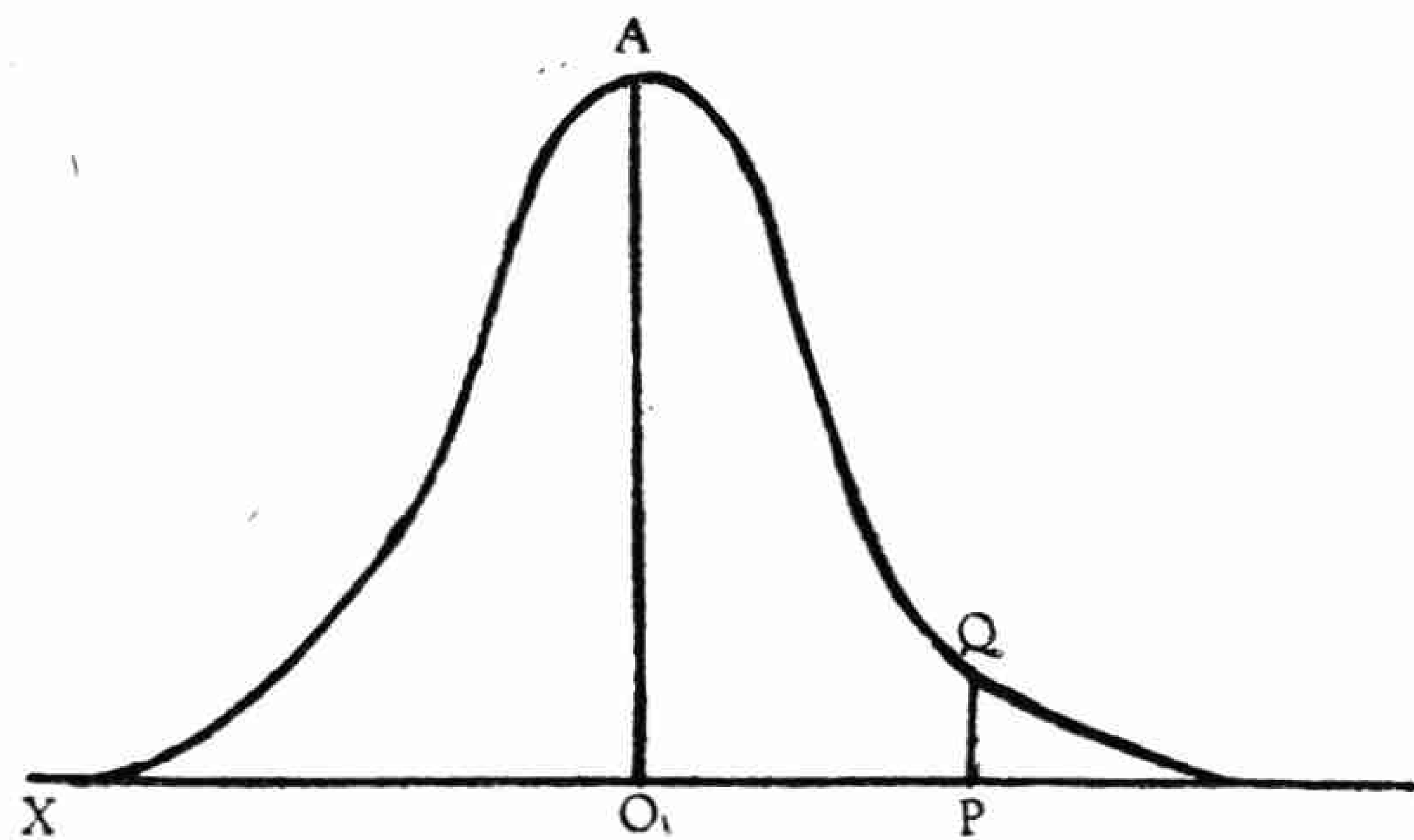
పథక గ్రంథములందు 1 నుండి 15 వరకు ఇవి ఇవ్వబడినవి. అంత పెద్ద సంఖ్యలను వాడిన ఫలితములో చాల పెద్ద సంఖ్యలు వచ్చును.

ఉదా: 15! = 1,307,674,368,000

క్రమగుణిత సంఖ్యల లాగరిదమ్‌లు: log 1 నుండి 1000 వరకు పథకములో నుండును.

ఉదా: log 120! = 198·8253938

సరళవక్ర విస్తీర్ణములు: చిత్రము 140 ఒక సరళ వక్రము. అందు O మూలబిందువు. మధ్యమ మూల్యము కూడ అచట నుండును. OA, x అక్షమును గుర్తించును. వక్రము యొక్క గరిష్ఠకోటి OA. వక్రముపై నుండు బిందువు Q నుండి QP, x అక్షమునకు లంబము గీయబడినది. PQ ఒక కోటి, $OP = x$ అని తీసికొనుము. ఇచట



చిత్రము 140 సరళవక్రము

σ = క్రమవిచలనము. వక్రములో OA, PQ ల మధ్య నుండు వైశాల్యమును OA కోటికి కుడివైపున నుండు వక్ర వైశాల్యము యొక్క పరిశతముగా ఈ పథకమున ఈయబడును.

ఉదా: $x/\sigma = +2{\cdot}52$ అయిన పథకము నుండి వైశాల్యపరిశతము = 49·41 అనగా $x/\sigma = \pm 2{\cdot}52$ అయిన వాని మధ్యనుండు వక్ర వైశాల్యము 98·82%.

సరళ వక్రము యొక్క వైశాల్యము సమస్యలోని పౌనఃపున్యముల మొత్తమును గుర్తించుటచే $x/\sigma = \pm 2{\cdot}52$ కోట్ల మధ్యనుండు పౌనఃపున్యముల మొత్తము98·82%.

ఒక వస్తువును యథేచ్ఛగా తీసికొనినచో, అది ఇష్ట సమితికి చేరినదా లేదా, దాని సంభావనీయత ఎంతయని కనుగొనవచ్చును.

సరళవక్ర కోట్ల (ఆర్డినేట్స్) పథకము: $OP = x/\sigma$ PQ కోటి యొక్క విలువను ఈ పథకము ఇచ్చును.

యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలు: ఇవి ప్రతి రూపములు పేరుటలో చాల ఉపయోగకరము. టిప్పెట్టు, కెండల్ - స్మిత్, మహలోనోబిస్ మొదలగు వారు ప్రచురించి యున్నారు. పదివేల సంఖ్యలు అందుండును.

కొన్ని ముఖ్య స్థిరరాశులు: π, π^2, $\sqrt{\pi}$, $1/\pi$, $1/\sqrt{2\pi}$, $1/2\pi$, e, e^2, $\sqrt{e}$, $1/e$, $1/\sqrt{e}$, $\log_e 10$, $\log_{10} e$ మొదలగునవి. ఆచార్య.

గణితము - ప్రాయోగికపద్ధతులు: చూ. మాంటీ కార్లో విధానములు.

గణితవేత్తల దివ్యవచనములు: గణితము విజ్ఞాన శాస్త్రములకు రాణి; సంఖ్యావాదము గణితశాస్త్రమునకు రాణి. —గౌస్

సంఖ్య విశ్వశాసనకర్త. —పితాగొరస్

ఈశ్వరుడు సంఖ్యలను సృజించెను; తక్కినదంతయు మానవసృష్టి. —క్రానెకర్

ఈశ్వరుడు సదా అంకగణిత కార్యమగ్నుడే. —జాకోబీ

ఈశ్వరుడు సదాజ్యామితిశాస్త్ర వ్యాపృతుడే.—ప్లేటో

అంకెలు, అక్షరములు జ్ఞానము యొక్క నేత్రయుగళము. —తమిళ సామెత

విశ్వమహాశిల్పి నేడు శుద్ధగణితశాస్త్రజ్ఞుడుగా కన్పట్ట మొదలిడినాడు. —జీన్స్

సంకీర్ణసంఖ్య పరమాత్ముని విచిత్రఅద్భుత ప్రయుక్తి; అది సదసదుభయచరకల్పము. —లైబ్నిట్జ్

శుద్ధగణితము దానినూతన వికాసస్థితియందు మానవాత్మయొక్క మౌలికతమనిర్మాణము అన్న ప్రశంసకు తగియున్నది. —వైట్ హెడ్

నూతన ఆవిష్కృతజ్ఞానము ఏదిఅయిన గణితరూపములో ఉండును. ఏలన, అంతకన్నమనకు ఇతరమార్గదర్శి లేదుకదా! —సి. జి. డార్విన్

కొంతవరకు కవిగానిగణితజ్ఞుడు ఎన్నడును సంపూర్ణముగ గణితజ్ఞుడు కానేరడు. —వియర్ స్ట్రాస్

వృత్తమును చతురస్రీకరింపవచ్చును, కాని గణితజ్ఞుని మోసపుచ్చలేము. —డి. మార్గన్

గణితము అన్ని శాస్త్రములలోకెల్ల యథార్థతమమైనది. దాని నిగమనములు నిరపేక్షసమర్థనమునకు వీలిచ్చును. అయితే గణితము ఎన్నడును నిరపేక్షనిగమనములను సాధింప యత్నించదు. గణితశాస్త్రసత్యము లన్నియు సాపేక్షకములు, సోపాధికములును. —స్టైయిన్ మెట్జ్

శుద్ధగణితశాస్త్రారాధకులలో పలువురు గణితమును కళలలోకెల్ల గొప్పదిఅని భావించినట్లు అగపడుచున్నారు. —సల్లివన్

ప్రయోగనిరపేక్ష మానవచింతన ఫలమే అగు గణితము వాస్తవికవస్తువులకు ఎట్లు అద్భుతముగ అన్వయింప సమర్థముగ ఉన్నది. —ఆల్బర్ట్ ఐన్‌స్టయిన్

గణితశాస్త్రజ్ఞుడు నేడు ఎదురుచూచు విషయము భౌతికశాస్త్రజ్ఞుడు రేపు కనుగొనినది అగుటకు అలవాటుపడి ఉన్నది. —లండన్ టైమ్స్ పత్రిక

న్యూటన్ చాల అదృష్టవంతుడని చెప్పవచ్చును. ఏలన, అతని కాలమునందు ప్రపంచపద్ధతిని గూర్చి తెలిసికొనవలసిన విషయములు ఎన్నియో మిగిలిఉండెను.—లాప్లాస్

ఒక ప్రాయోగికుడు తన పరిశోధన ఫలితములను గణితము లేక వివరింపబూనుట ఎంతకష్టమో అనిచూపించుటకు లెక్కలేనన్ని దృష్టాంతములు కలవు. ఎట్టి విధములైన అమూర్త భావములతో నైన వ్యవహరించుటకు సాధకతమ సాధనము గణితము. ఈ రంగమందు దానిశక్తికి మేరయే లేదు. అందుచేతనే ఆధునిక భౌతికశాస్త్రము కేవల గుణవర్ణనకే అంకితమైనప్పుడు తప్ప ప్రధానముగా గణిత శాస్త్రబద్ధమై ఉండవలెను. —డిరాక్

ప్రపంచము నన్నెట్లు భావించునో నాకు తెలియదు. కాని సత్యమహాసముద్రము అంతయు నా ఎదుట అనావిష్కృతముగ విస్తరించిఉండగా, గులకరాళ్ళలో ఇంకను నునుపైనది, గుల్లలలో ఇంకను చక్కనైనది ఏరుకొనుచు, ఆనందించుచు, సముద్రతీరమున ఆడుకొను బాలునివలె నాదృష్టిలో నేను కన్పట్టుచున్నాను. —న్యూటన్

కళాభిజ్ఞ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు ప్రతిభ అను తన తూలికను సంకేతములు అను వర్ణపేటికయందు ముంచి, ప్రస్ఫుమర విశ్వము యొక్క చలసంఘటనములను యథార్థముగ చిత్రించునపుడు మనము సౌందర్యభావ చకితులమగుదుము. దీనికి అతని నిర్వచనమునకు, నిరూపణకు, వివరణకు, మన స్వానుభవమునకును పూర్ణ అనురూపతయే కారణము. —ఏ. ఇ. స్వానిలాండ్

కామశాస్త్రమందు, అర్థశాస్త్రమందు, సంగీతమందు, పాకకళయందు, ఇటులనే వైద్యమందు, శిల్పశాస్త్రము లందు, ఛందశ్శాస్త్రమందు, అలంకారశాస్త్రమందు, కావ్యమందు, తర్కవ్యాకరణ శాస్త్రములందు, ఇంకను ఇటువంటి తక్కినవాటియందు, వివిధ కళాక్షేత్రములకు సంబంధించిన విషయములందు గణితవిజ్ఞానము శిరోధార్యమని భావింపబడుచున్నది. సూర్యుడు మొదలగు గ్రహముల చారము, గ్రహణములు, గ్రహసంయోగములు, త్రిప్రశ్న, చంద్రచారము, వీటన్నిట గణితశాస్త్రము ఉపయోగింపబడుచున్నది.

ద్వీపముల, సముద్రముల, పర్వతములసంఖ్య; పరిధి కొలత, భూవాసుల నివాసముల, శాలలపంక్తుల విస్తృత పరిమాణములు; జ్యోతిర్లోకవ్యంతరము, దేవలోకవాసులు, నరకలోకవాసుల వ్యంతరములు, ఇంకను సకల విధములగు ప్రకీర్ణకముల మానవ్యాపారములును గణిత శాస్త్రాధారకములే. ఆ లోకములందలి ప్రాణుల ఆకారములు, వారి జీవితావధులు. వారి అష్టగుణములు, ఇంకనుఇతర సదృశ విషయములు, వారి పురోగతి, వారి సహవాసము, ఇటువంటివి మరికొన్నియు గణితశరణ్యములే. ఇంక ఇతరములు మిగిలియున్నవి చెప్పుట ఎందులకు? ఈ మూడు లోకములందుగలస్థాస్ను, చరిష్ణు వస్తువులన్నియు మానాధీనములు కాకుండ మననేరవు.

సంజ్ఞాజలమయము, అంకగణితపరికర్మకూలము, భిన్నాంకప్రయుక్త వ్యాపారఝషము, ప్రకీర్ణ దృష్టాంతమకరావృతము, త్రైరాశికసూత్రనిరూపితతరంగము, ప్రకీర్ణప్రశ్నాధ్యాయసంబద్ధ ప్రశస్య ప్రవచనరత్నవైభవశబలితము, వైశాల్యనిర్ణయప్రశ్నాధ్యాయ నిరూపితాగాధమూలతలము. ఘనపరిమాణ, ఖాతాధ్యాయసైకతముఖగోళశాస్త్ర ప్రయోగ గణితశాఖాసంబద్ధచ్ఛాయాధ్యాయ ప్రోచ్చలద్గురువేలమునగు అనంతరత్న ప్రసవహేతువగు గణిత మహోదధియందు విహరించు అంక గణితజ్ఞులు వాంఛితరత్నరాజములను పడయగలరు అనుట నిస్సందేహము. —మహావీర - గణితసారసంగ్రహము

'ఇంద్రియప్రత్యక్షాతీత భూమి కాశ్రయములగు అతి లోకరమణీయతా విశిష్ట చింతనారూపములను సృజించు బ్రహ్మశుద్ధగణితశాస్త్రము. అతడు వాడు భాష సాధారణ వైఖరీ వాక్కుకన్న అర్వాచీనపరిణామము నందుకొన్న భాష. అతని ప్రదర్శనశాలయందు చిత్రవిచిత్ర ప్రతికృతులు కలవు. అనేకవిధములైన వ్యక్తులు అతనిని సమీపించి, వారికోరికల ప్రకారము నిర్మించిన వస్తువులను వారి ఉపయోగమునకై తీసికొని పోవుచున్నారు.

ఆధునికగణిత ప్రదర్శనశాలలో అంకెలప్రసక్తిలేని బీజగణితముకద్దు. ఇచ్చట $A + A = A$; $A \times B$ అనునది $B \times A$ కు సమానముకాని మరియొక బీజగణితము సృజించియున్నారు. తలములో పరిమితసంఖ్య బిందువులు, రేఖలు ఉండవలెను. అయిన సామాన్య జ్యామితిలక్షణము లన్నియు కలిగియుండవలెను. ఇట్టిజ్యామితులు కావలసినచో గాల్వాక్షేత్ర సహాయముతో సృజించవచ్చును. ఋజురేఖీయావిరతకము యొక్క క్రమము, అవిచ్ఛిన్నత వంటి ధర్మములు విశ్లేషించబడి, విభాగించబడినవి. ఇందు ఒక్కొక్కభావమును విశాలీకరించబడి, స్వతంత్రముగను, ఇతరులతో సంయుక్తముగను వికసింపబడి యున్నవి. ఇట్లు జనించిన అనేకమైన వెర్రికుటుంబమునందు ఆది పురుషుడగు వాస్తవిక ఋజురేఖ యొక్క మూలరూపము పూర్తిగా మగ్నమైపోయినది. పొడవులు కోణములవలెను, కోణములు పొడవులవలెను ప్రవర్తించగల జ్యామితులు కలవు. సమానాంతర రేఖలే లేనివి, లేదా ఒక దత్త బిందువు గుండ ఒకదత్త ఋజురేఖను ఛేదించని అనంతరేఖలుగల జ్యామితులుకలవు. ఒక స్థలమునుండి మరొకస్థలమునకు ఎంత వరకు ప్రయాణము చేసితిమో చెప్పవీలులేని జ్యామితులు

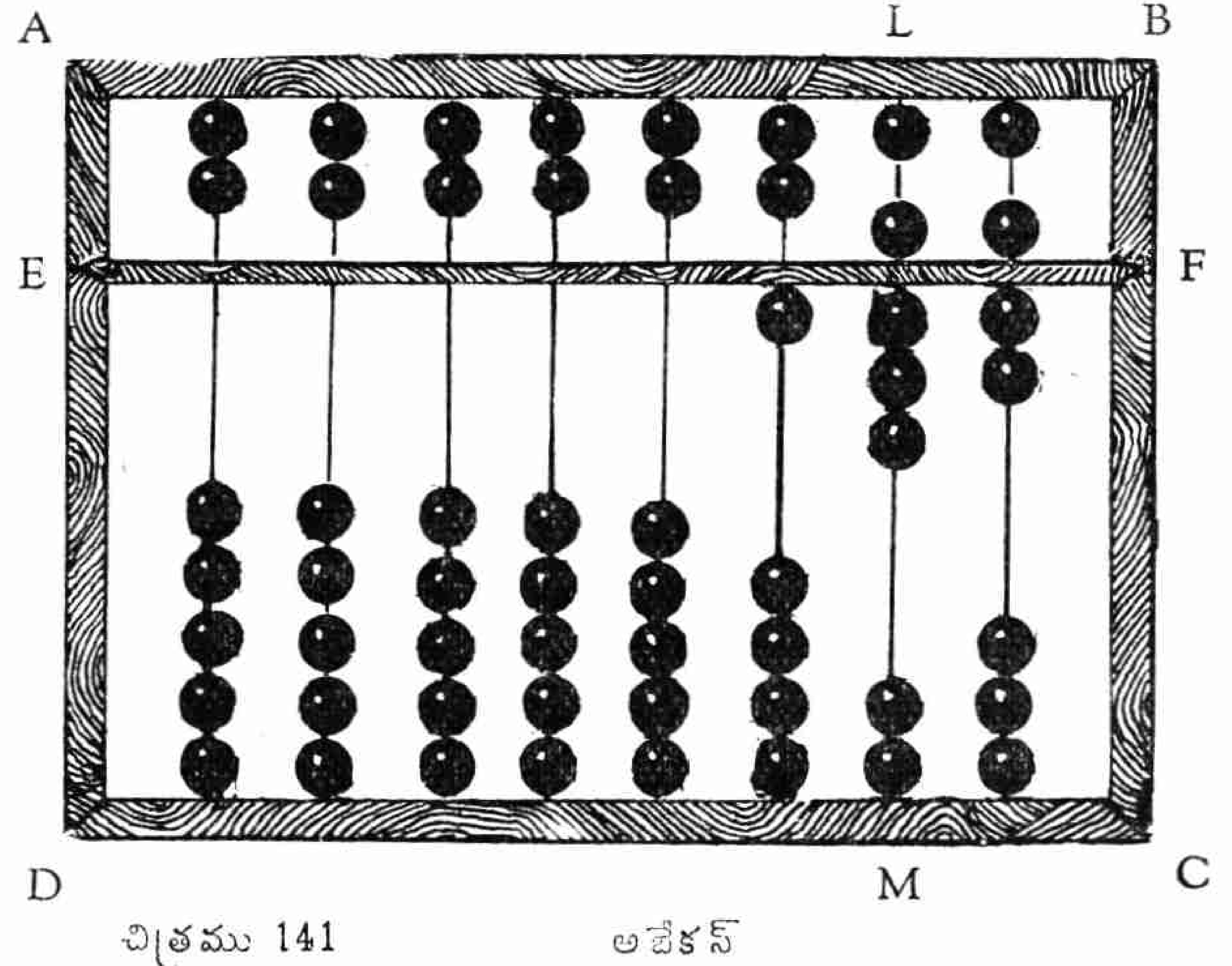
కలవు. మనముకలలలో కాంచునట్టి ఉన్నతత్తమ స్వసంగత నిర్మాణములు గణితములో చూడవచ్చును.

బాహ్య ప్రపంచమనబడు దృఢభూమినుండి మానవుడు విశ్వదృష్టియను నిశ్రేణినెక్కి పైకిపోవుకొలది, అతని దృక్పరిధి విశాలతరమై, ఆతని కృతిమత్త్వమును ఇనుమడించుచుండును.

గణితము బహుళః మానవసృజనశక్తి యొక్క ఉన్నతతమ వికాసము. దాని సౌందర్యవేదనాసంజనకకార్యమందది లలితకళలకు ప్రతిస్పర్ధి. దాని సంఘనిత సంపదయందు అది కవిత నధరీకరించును. సర్వవ్యాపక అమూర్తత్వభావసంపదయందది ఔపనిషదచింతనాసరణిని పోలియుండును. అందువలన అది మానవుని బౌద్ధిక, నైతిక పరిణతికి ఒక గీటురాయి. ఇతరరీతుల అవికలమయ్యును గణితవిజ్ఞాననైపుణ్య ప్రగల్భముకాని జాతి బుద్ధి చాతుర్యము, శీలములేనిరూపసి, సుసంపితుడు అగు పురుషుని వంటిది. అందుచేత గణితశాస్త్రపురోగతిని పొందలేని దేశమందు నేనెందుకు తలఎత్తుకొని నడవలేను అని మీకు విశదమగును † అ. న.

గణిత్రయంత్రములు : ప్రాచీన కాలిక జనసంఘములలో గణనకు సహకారులుగ కొన్ని ఉపాయముల కల్పించుట సామాన్యముగనుండెడిది. రోమన్‌లు గులకరాళ్లను ఉపయోగించిరి. తరువాత నానా దేశములందు అబేకస్ * అను యంత్రము గణనకర్మ సహాయముగ మిక్కిలి ఆదరమును బడసినది. (చూ. చిత్రము 141) ఈయంత్రములో ABCD అను దీర్ఘచతురస్రాకారము గల ఒక చట్రములో సమానాంతరముగ కొన్ని తీగలో, కడ్డీలో అమర్చబడి యుండును. వీటిలో నొకతీగను చిత్రములో LM అని గుర్తించితిమి. ఇందు ప్రతి తీగయును కొన్ని గోళకముల వహించును. ఈ గోళకముల తీగంట ఇటునటు జరుపవచ్చును. EF అను కర్ర అడ్డుగా అమర్చబడియున్నది. ఇది ఈ యంత్రపు ప్రతితీగను రెండు భాగములుగ విభజించును. ABFE అను చిన్నభాగమునకు 'స్వర్గ'మని పేరు. దీనిలోని ప్రతితీగపైనను రెండు పూసలు లేక గోళకములు ఉండును. ఇందు ప్రతి గోళకముయొక్క మూల్యము 5. పెద్దభాగము EFCD కి భూతలమని పేరు. ఇందలి ప్రతి తీగలోను 5 గోళకములుఉండును. ఈగోళకము మూల్యము 1 కనుక ప్రతితీగపైనున్న గోళకముల విలువ మొత్తము $(5\times 2)+(1\times 5)=15$. ఏగణన కార్యమందైనను అడ్డుకర్ర EF దగ్గరకు తీసికొనివచ్చిన గోళకములే లెక్కలోనికి తీసికొనబడును. తీగపైఉన్న తక్కినగోళకములు నిలువుగా ఉండును.

187 వంటి సంఖ్యను దీనిలో అమర్చుటకు అబేకస్ యొక్క కుడివైపున ఉన్న ఆఖరు తీగను ఒకట్ల స్థానమని



చిత్రము 141 అబేకస్

తీసికొందము. దీనిపై స్వర్గసీమనుండి ఒక గోళకమును అడ్డుకర్రను స్పృశించునట్లును, భూసీమనుండి 2 గోళకములను అడ్డుకర్ర దగ్గరకును జరుపుదుము. ఈ సన్నివేశము $5+2=7$ తెలుపును. పదుల స్థానములో 8 ని తెలుపుటకు మనము స్వర్గసీమనుండి ఒక గోళకమును భూసీమనుండి 3 గోళకములను అడ్డుకర్రదగ్గరకు చేర్చుదుము. ఈ పరికర్మను ఒకట్లస్థానపు తీగకు ఎడమవైపున ఉన్న తీగపై జరుపవలెను. ఏలన ఇదియే పదవ స్థానపు తీగ. 100 సంఖ్యను తెలియజేయుటకు మూడవ తీగమీద భూసీమనుండి ఒక గోళకమును, అడ్డుకర్ర స్పృశించునట్లు జరుపవలెను. ఇప్పుడీ గోళకముల సన్నివేశము చిత్రము 141లో చూపినట్లు 187 అను అంకెను సూచించును.

187 కు 64 చేర్చవలెననుకొందము. అబేకస్‌పై ఇదివరకే 187 అమర్చబడియున్నది. 4 ను 7 తో ఒకట్లస్థానములో చేర్చవలెను. దీనికై ఒకట్లస్థానపు తీగమీద ఇంకను మిగిలియున్న మూడు గోళకములను అడ్డుకర్ర దగ్గరకు చేర్చుదుము. మనము ఇంకను ఇంకొకగోళకమును జరపవలెను. కాని, మరింక గోళకములు లేవు. అందుచే భూసీమలో ఉన్న అయిదు యూనిట్‌లను స్వర్గసీమలో ఉన్న ఒక గోళకముతో ఆ తీగమీదనే వినిమయించవలెను. అనగా భూసీమకు చెందిన అయిదు గోళకములను అడ్డుకర్రకు విరుద్ధముఖములో జరిపి స్వర్గసీమలోని ఒక గోళకమును

† అ.న.రావు, అధ్యక్షోపన్యాసము, అఖిలభారత గణితసమావేశము.

* అబేకస్ అనగా ఫలకము, బల్ల. దీనిని సంస్కృతమున పాటీ అందురు. దీని నిర్వహించు లెక్కలకు పాటీగణితమని పేరు. అయితే ఇచ్చట వివరించినది భారతదేశపు ఫలకముకాదు.

అడ్డుకఱ్ఱవైపు నడుపవలెను. ఇప్పుడు మనకు భూసీమలో గోళకములు లభించినవి. ఇందులో నొకదానిని అడ్డుకఱ్ఱ వైపు జరిపి ఒకట్లస్థానమునకు మొత్తము 4ను కలుపుదము. చివరకు 5 మూల్యముగల స్వర్గములోనుండు రెండుగోళకములను అడ్డుకఱ్ఱవద్ద నుండి జరిపి ప్రక్కతీగపై భూప్రదేశములో ఉన్న గోళకమునకు వినిమయించుదుము. అనగా స్వర్గసీమలో అడ్డుకఱ్ఱను తాకియున్న ఆ రెండు గోళకములను అడ్డుకఱ్ఱకు విముఖముగా కదలింతుము. తరువాత భూసీమలో తరువాతి తీగపై ఉన్న ఒక గోళకమును అడ్డుకఱ్ఱవైపే జరుపుదుము. చివరకు 6 ను పదుల స్థానమునకు చేర్చుటకు, స్వర్గమందలి ఒక గోళకమును భూమిలోని ఒక గోళకమును తరువాత తీగపై అడ్డుకఱ్ఱవైపు కదల్చుదము. తరువాత స్వర్గములోని రెండవ తీగపై ఉన్న రెండు గోళకములను, మూడవ తీగపై భూసీమలో ఉన్న ఒక గోళకముచే వినిమయించెదము. దీనిని నిర్వహించు విధానము స్వర్గములో ఉన్న రెండు గోళకములను అడ్డుకఱ్ఱకు దూరముగ జరిపి దాని ప్రక్కతీగలో భూభాగములో ఉన్న మరియొక గోళకమును అడ్డు తీగవైపున నడుపవలెను.

ఇట్టి సంకలన ఫలము 251 అగును. వ్యవకలనముకూడ ఇట్లే. కావలసినసంఖ్య గోళకములను అడ్డుకఱ్ఱనుండి దూరముగ తొలగించుట వలన నిర్వహించవచ్చును., గుణకము చిన్నదిగా ఉన్నపుడు గుణకారమును మరల మరల కూడికను చేసి నిర్వహించవచ్చును.

హిందూ - అరబిక్ అంకెల సామాన్యోపయోగము, అబేకస్ వాడుకను త్రోసిపుచ్చినది. ఏలన పై సంఖ్యా వ్యవస్థ ననుసరించి అబేకస్‌లేకయే కాగితముపై సులభముగ చేయవచ్చును. అయినప్పటికిని చీనా, జపాన్, సోవియట్ రష్యా, ఇండియా దేశములలోని వర్తకులింకను వారి వర్తక వ్యాపారపు లెక్కలకై అబేకస్‌నే వాడుచు, మనము కాగితముపై నిర్వహించునంత వేగముగ వారిలెక్కలను అబేకస్ సహాయమున నిర్వహించ గలుగుచున్నారు.

స్లైడ్‌రూల్ : హిందూ - అరబిక్ సంఖ్యాపద్ధతి తరువాత, మానవ ప్రతిభాసృష్టియగు లాగరిదమ్ పద్ధతి మిక్కిలి మహత్వముగల గణిత్ర సాధనము (చూ. లాగరిదమ్‌లు). లాగరిదముల ప్రయోగములందు వివరించబడిన పరికర్మలన్నియు, స్లైడ్‌రూల్ సహాయమున అనాయాసముగ నిర్వహించ బడవచ్చును. లాగరిదమ్‌ల ఉపయోగము వలన రెండు సంఖ్యల గుణకారము లేక భాగహారము ఆ సంఖ్యల లాగరిదమ్‌ల సంకలనము లేక వ్యవకలన పరికర్మముగా మారును. గుణకారముకన్న సంకలనము సులభమైన పరికర్మము కదా! లాగరిదమ్‌ల పట్టికలకు బదులు స్లైడ్‌రూల్‌ను ఉపయోగించి పై ప్రయోజనమును పొందవచ్చును. లాగరిదమ్‌ల నిర్మాణమైన వెంటనే ఈ స్లైడ్‌రూల్ ఉపకరణము నిర్మించబడి అనతి కాలములో వృద్ధి పొందించబడినది. ఈ ఉపకరణము వృత్తము, లేదా సర్పిలము, లేదా ఋజురేఖ రూపములలో దేనినైన స్వీకరించవచ్చును. ఈ రూపములన్నిటిలో మిక్కిలి ఆదరమును గన్నది ఋజురేఖారూపము. ఈ యష్టి సుమారు 25 సెంటీమీటర్లు పొడవుండును. ఇది విస్తారముగా గుణకారము, భాగహారము, వర్గమూల సాధన, ఘాతాంకములు, మొదలగు పరికర్మలకు యంత్ర శాస్త్రజ్ఞులచే వాడబడుచున్నది. దాని ముఖ్యభాగము లివి :

(1) చట్రము (ఫ్రేమ్) అను స్థిర భాగము. ఇందు దాని పొడవువెంట ఒక నరద (గ్రూవ్) ఉండును. (2) ఈ నరదలో అటునిటు జారగల సరకము (స్లైడర్); (3) సూచకము (ఇండికేటర్) లేదా ధావకము (రన్నర్) అని పేరుగల చలాంగము. ఈ ధావకము పారదర్శక ద్రవ్యముతో చేయబడిన చిన్న దీర్ఘచతురస్రరూపములో ఉండును దాని మధ్యనొక రేఖ "కేశరేఖ" అనునది చిహ్నితమై ఉండును. ఈ ఉపకరణమందున్న మాపనశ్రేణులు దూరముగా ఉన్నప్పుడు వాటిపైనుండు అనేక సంకేతములలో ఏవి సరిగా అభిముఖముగా ఉన్నవో గుర్తించుటకు ఈ ధావకము సహాయపడును.

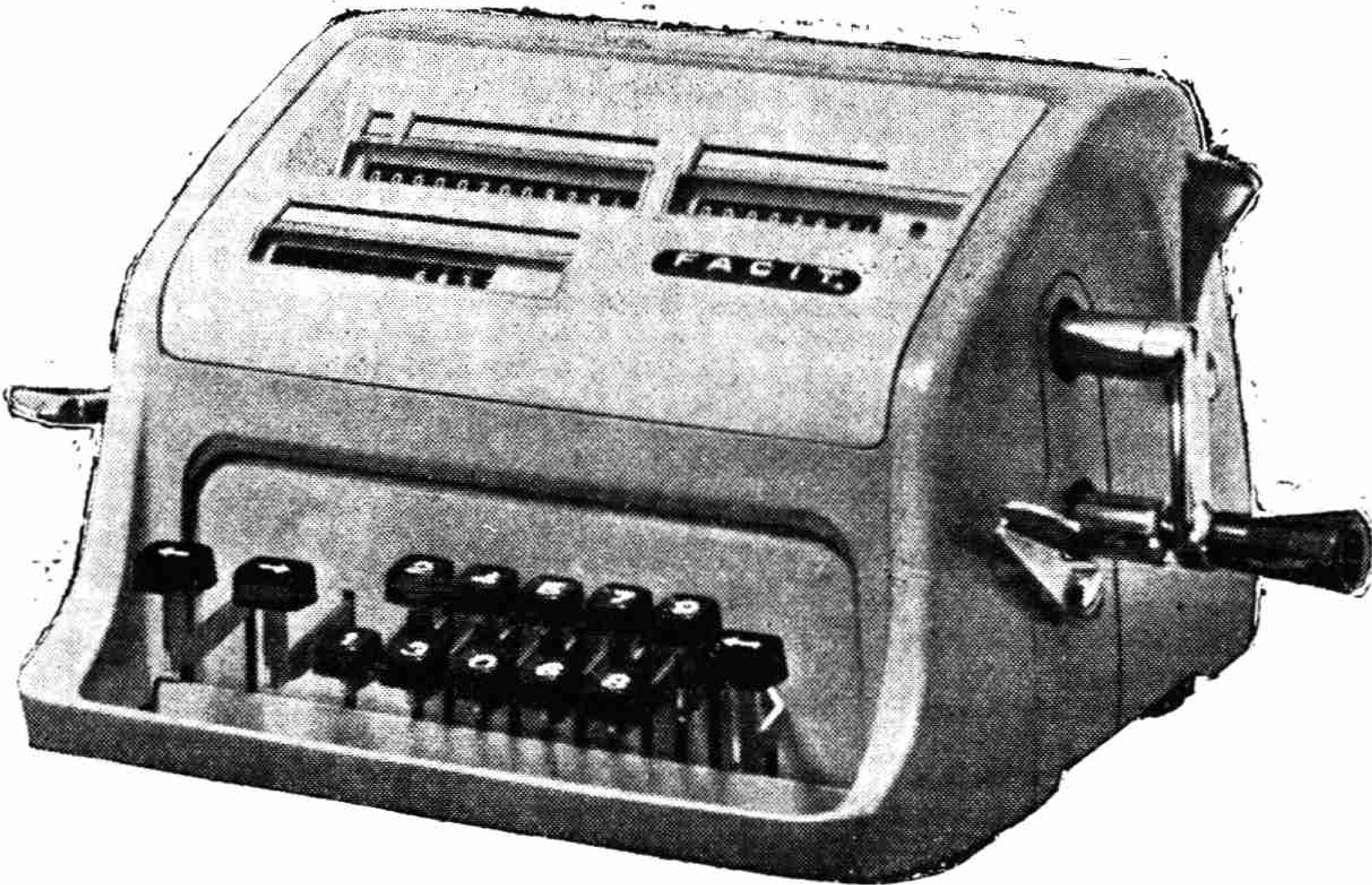
ఈ ఉపకరణముయొక్క ప్రక్రియకు మూలాధారతత్వమేదియన దానిపై అంకెలచే గుర్తించబడిన దూరములు ఆ అంకెల మూల్యములకు ప్రతినిధులు కావు, వాటి లాగరిదమ్‌లను సూచించును. అందుకనే ఈ మానవ్యవస్థ యొక్క ఒక చివర 1 అను గురుతు కలదుగాని, 0 అను గురుతు లేదు, ఏలన $\log 1 = 0$. రెండు, మూడు, నాలుగు......పది అను వేరువేరు గురుతులచే చిహ్నితమైన బిందువులు $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 0.6021$, ..., $\log 10 = 1$ అను దూరములలో ఉండును. మామూలు మాపనశ్రేణియందెందైనను m, n అను గురుతులచే చిహ్నితమైన బిందువుల మధ్యదూరము $n - m$ అను వ్యవకలన ఫలమునకు సమానుపాతములో ఉండును. అయితే స్లైడ్‌రూల్‌లో ఈ మధ్యదూరము $\log n - \log m = \log n/m$ కు అనుపాతము.

అందువలన 1, 10 అను సంకేతములు గల బిందువుల మధ్యదూరము, 10, 100 అను సంకేతములు గల బిందువుల మధ్యదూరమునకు సమానము. ఇదియే మరల 100, 1000 అను గురుతులుగల బిందువుల మధ్యదూరమునకు సమా

నము. ఈ పైచెప్పిన దూరములలో ప్రతిదియును $\log 10/1 = \log 100/10 = \log 1000/100 = 1$. ఈ 1 పొడవును సూచించుటకు యోగ్యమైన నిడుపు ఏదైనా ఉండవచ్చును.

సరకమీద రెండు లాగరిదమ్ శ్రేణులు దాని రెండు అంచుల చిహ్నితములైయున్నవి. ఇవి చట్రముపై ఇట్టి రెండు లాగరిదమ్ శ్రేణులకు సన్నిహితములైయున్నవి. ఇవిగాక ఈ సరకము మధ్యను లాగరిదమ్ శ్రేణియొకటి మొదటి మాపనశ్రేణులకు విరుద్ధదిశలో నడచునది గలదు.

a_1, a_2 అని సరకముమీద గుర్తించబడిన సంకేతములు b_1, b_2 అని చట్రముపై గుర్తించబడిన సంకేతములకు అభిముఖముగ ఉన్నవనుకొందము. ఆ బిందువులమధ్య దూరము అందుచే $\log a_2 - \log a_1 = \log b_2 - \log b_1$ అగును. $\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$. అందువలన ఈ అంకెలలో మూడు దత్తములైనచో నాలుగవదానిని ఉపకరణముపై గ్రహించవచ్చును. ఇట్లు లభించు ఫలితములు సాధారణముగ 3 లేదా 4 దశాంశ భిన్నస్థానములవరకు యథార్థముగ ఉండును. ఇట్లే స్లైడ్‌రూల్ పై, వర్గములను, వర్గమూలములను, ఘనములను, ఘనమూలములను, త్రికోణమితి ఫలములను కనుగొనుటకు వీలిచ్చు ఇతర మాపన శ్రేణులుండును.



చిత్రము 142 బల్ల గణిత్రము

ఇంకను ఈ ఉపకరణముపై చిహ్నితమైన లాగరిదమ్‌లకు లాగరిదమ్‌లు సూచించు శ్రేణి సహాయమున x^y అను ఘాతమునుకూడ కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట x, y లు ఏ ధనాత్మక సంఖ్యలైన (అవి పూర్ణాంకములు కానక్కర లేదు) కావచ్చును.

సాదృశ్యమూలములు అంకమూలములు అగు గణిత్రములు : గణిత్రములను సాదృశ్యమూలములు, అంకమూలములు అని రెండు తరగతులుగ విభజింపవచ్చును. సాదృశ్యమూలములగు వాటిలో గణితశాస్త్రీయ విలువలను, పొడవులు, గుండ్రని విళ్లయొక్క భ్రమణకోణములు, విద్యుచ్ఛక్కులు మొదలైనట్టి భౌతిక మహత్త్వములచే నిరూపింతురు. స్లైడ్‌రూల్ ఇట్టి సాదృశ్యమూలక గణిత్రము. అంకమూలములగు గణిత్రములలో లెక్కలు, మనము కాగితముపై గావించునట్లు, అంకెలచేతనే నిర్వహింపబడును.

ఇట్టి యాంత్రిక అంకమూలగణిత్రములకు డెస్క్ గణిత్రములనికూడ పేరు. ఇవి టైపుయంత్రపు పరిమాణములో నుండును. బల్లమీద ఉంచి ఉపయోగించవచ్చును. వీటికి బల్లగణిత్రములని పేరు. సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహార పరికర్మలను 20 అంకెలవరకు ఈ యంత్రములచే కావించవచ్చును. అనేక శతాబ్దముల క్రిందటనే వీటి నమూనాలు కల్పించబడినను. ఈ శతాబ్దమందే ఇవి నిర్మించబడి క్రయమునకు దొరకుచున్నవి.

బల్ల గణిత్రము : ఇట్టి యంత్రములో ప్రధానభాగము 10 పండ్లు గల యొక పండ్ల చక్రము. దీని అంచుపై 0 నుండి 9 వరకు అంకెల గుర్తులుండును. ఇట్టివి ఎన్నో చక్రములుండును. వీటిలో నొకటి ఒకట్ల స్థానమందు అంకెలను, ఇంకొకటి పదుల స్థానములోని అంకెలను, వేరొకటి వందల స్థానములోని అంకెలను, ఇట్లే అవసరమున్నంతవరకు సూచించును. యంత్రముయొక్క కప్పులో కోయబడిన కన్నముద్వారా ప్రతి పండ్లచక్రముమీద ఉన్న ఒకటే అంకె మన కగపడును. వేరువేరు పండ్లచక్రములకు ఎదురుగా ఉన్న ఈ కన్నములు ఒక వరుసలో నుండును. అందువలన గణనఫలములను ఈ కన్నముల లేదా గవాక్షములగుండ మనము చూచినచో కాగితముపై కనుగొనినట్లు సంఖ్యలను చదవగలము. పండ్లచక్రమును ఒక పన్ను ఆస్తికి త్రిప్పినపుడు, దాని కెదురుగాఉన్న గవాక్షమందు మనకగపడు

అంకె ఒకటిచే ఎక్కువగును. ఏ గవాక్షముగుండ నైనను మన కగపడు తొమ్మిది '0' కు మారినపుడు. ఈ పండ్ల చక్రమునకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రక్క చక్రము ఒక పన్ను ఆస్తికి త్రిప్పబడుటకు ఒక విశిష్టయాంత్రిక ఉపాయము కలదు. 0 మొదలుకొని 9 వరకు గుర్తులు గల పది స్థానములలో దేనియందైన అమర్చుటకు వీలగు ఉచ్చాలకములు ఈ యంత్రములో అమర్చబడినవి. ప్రతి అంకెల పండ్లచక్రమునకును ప్రత్యేకముగ సంబంధపడిన ఒక ఉచ్చాలకమున్నది. ఏదేని ఒక ఉచ్చాలకము 4 అను స్థానమునపెట్టి, ఆ యంత్రమునకు కుడివైపున ఉన్న ఒక క్రాంక్‌ను ఒకమారు త్రిప్పినపుడు, దీనికి అనుగుణముగ ఉన్న అంకెల చక్రము నాలుగు పండ్ల ఆస్తికి తిరుగును, అందుచే మనము ఒకట్లస్థానపు ఉచ్చాలకమును 3 వద్దను, పదులస్థానపు ఉచ్చాలకమును 5 వద్దను, వందలస్థానపు ఉచ్చాలకమును 7 వద్దను పెట్టి క్రాంక్‌ను ఒకమారు త్రిప్పినచో, గవాక్షములోని ఒకట్లస్థానపు అంకె 3 చే హెచ్చించబడును, పదులస్థానమందు అంకె 5చే హెచ్చింపబడును, వందలస్థానములోనిది 7 చే హెచ్చింపబడును. అనగా గవాక్షముల కెదురుగ నుల్లేఖించబడిన ఏ సంఖ్యకైనను 357 కలుపబడినది. మనము 357 ను 74 చే గుణించగోరినచో, గవాక్షములలో ఇదివరకు ఉల్లేఖించబడిన అంకెలనన్నిటిని మొదట తుడిచివేయవలెను. దీనికి ప్రత్యేక ఉచ్చాలక మొకటి ఉన్నది. తరువాత ఒకటి, పది, వందల ఉచ్చాలకములను క్రమముగా 7, 5, 3 స్థానములలో అమర్చి క్రాంక్‌ను 4 సార్లు త్రిప్పినచో 4×357 యొక్క ఫలము గవాక్షములగుండ కననగును. ఇప్పుడు మనము 70×357 గుణకారఫలము పై ఫలమునకు కలుపవలసియున్నదికదా ? దీనికై ఆ ఫలములను వహించుచున్న వాహకమును ఎడమకు ఒక స్థానము నెట్టి, క్రాంక్‌ను ఏడుసార్లు త్రిప్పవలెను. ఈ కార్యకలాపము 'మనకు కావలసిన ఫలమును అందజేయును. పలుమార్లు వ్యవకలనమును అభ్యసించుటచే భాగహారమును నిర్వహించవచ్చును.

ఈ బల్ల గణిత్రములలో విద్యుత్ చలితములుకూడ కలవు. వీటిలో మనము గుణించవలసిన వాటినిగాని, భాగహారము చేయవలసిన వాటినిగాని అంకెలను యంత్రమునకు అందించి, విద్యుత్ప్రవాహమును ప్రవేశపెట్టినచో ఆ యంత్రము దానంతటదియే ఆ లెక్కను చేసి, ఫలమును ప్రదర్శించి, ఒక గంటను మ్రోగించును. ఇంకను వివిధరకములగు గణిత్ర యంత్రములు ఉన్నవి. ఇందు క్రాంక్‌ల త్రిప్పుటకు బదులుగ టైపురైటర్ యంత్రములు, అక్షరములకు బదులు 0, 1, 2 ...... 9 అంకెలను మోయు కీ వరుస లున్నవి. వీటిని టైపురైటర్ కీలనువలె ఆడించినచో గణన ఫలము లభించును.

హొలెరిత్, తక్కిన పంచ్‌కార్డు యంత్రములు : పెద్ద పెద్ద పారిశ్రామిక సంస్థలందు, ప్రభుత్వసంస్థలందు, విద్యుత్ సరఫరా కార్పొరేషనులందు ఈ యంత్రములు మిక్కిలి వాడుకలో ఉన్నవి. ఖర్చుపడిన విద్యుత్‌యూనిట్లు, ప్రతి యూనిట్‌కు విలువచేయవలసిన రేటు, ఉపయోగించిన వానిసంఖ్య మొదలగు విషయములు కార్డులలో పొడిచిన కన్నముల రూపమున నిరూపించబడును. ఈ యంత్రమూ విషయముల లెక్కించి, ఒక్కొక్క కార్డుపైన ఆ యా వ్యక్తి చెల్లించవలసిన రుసుములను లిఖించును. ఇంతేగాక ఒక పెద్ద కన్నపుకార్డుల సమూహములో కన్నముల స్థానముల శోధించి, వాటిని అతి శీఘ్రకాలములో వేరు వేరు తరగతుల క్రిందవిడదీసి అమర్చును. అందువలన ఇవి జనాభా లెక్కలవంటి ప్రయోజనములకు మిక్కిలి సహాయముగా ఉన్నవి,

ఎలెక్ట్రానిక్ గణిత్రములు : ఇవి అతినూతనమైనవి. 1946 నుండి వీటివాడుక ప్రారంభము. ఒక పన్ను తరువాత నింకొకదానిని త్రిప్పుచు నుండు పండ్లచక్రములకు బదులుగ ఇచ్చట అతి కురచైన విద్యుత్ప్రవాహముల, లేదా ఆఘాతముల, లేదా ధ్వని సంకేతముల వ్యాపారములుండును. ఒక అంకెను ఉదా : 256 అను సంఖ్యను తెలియజేయుటకు 256 ఆఘాతముల సృజింతురు. ఈ ఆఘాతములు లెక్కించబడి, ఉల్లేఖించబడును. సంకలన వ్యాపారములో కూడ వలసిన రెండు అంకెలకు సరిపోవు ఆఘాతములను సృజించి వాటిమొత్తపు ఆఘాతముల సంఖ్యను ఎంచి ఫలమును తెలియజేయును. ఎలక్ట్రాన్‌ల సంక్రమణ జడతా రహితము. కనుక అత్యంత అల్పకాలికములోనే ఇట్టి యంత్రము గణించును. ఒక సెకనుకు 10 లక్షల ఆఘాతములనైన నిర్వహించగలదు. ఆఘాతముల లెక్కల ఫలములు, ఏక్షణమందైనను విద్యుద్వాహన స్థితియందు నెలకొను వాల్వులచే ఉల్లేఖించబడును.

'0' అంకెను అవహనస్థితి నిరూపకముగను, 1 ని వహన స్థితి నిరూపకముగను ఉపయోగింతము. అట్టి వాల్వుల వరుసలో ఒక్కొక్కటియు 1 ని గాని '0' ను గాని సూచించును. మన మామూలు అంకగణిత వ్యవహారమందు 10 ని సంఖ్యామానముగ ఉపయోగింతుము. 1, 10, 10^2, 10^3 మొదలగు గుణిజములద్వారా లెక్కపెట్టుటకు, 0 మొదలు 9 వరకుండు అంకెలనే వాడుకచేతుము. మనము 2 ను సంఖ్యామానముగా ఉపయోగించినచో 1, 2, 2^2, 2^3 మొద

లగు గుణిజములద్వారా లెక్కపెట్టుదుము. సంఖ్యలను వ్రాయుటకు '0', '1' అను రెండు అంకెలు చాలును. ఈ వ్యవహారమే ఎలక్ట్రానిక్ వాల్వులేఖినియందు నిర్వహించబడును. ఇట్లు ఆ వాల్వుల వరుసస్థితి 101001 అను సంఖ్యను లిఖించినచో, అది $1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 = 41$ అను సంఖ్యను నిరూపించును.

ఒక ఆదేశ కార్యక్రమవరసలను ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రము నిర్వహించగలదు. ఈ యంత్రము అత్యున్నత వేగముతో పని చేయును. కనుక మన మందించవలసిన ఆదేశక్రమముల ముందుగనే సిద్ధముచేసికొని, ఒక జరుగు టేపుపై పొడవబడిన కన్నముల ద్వారానో, లేదా ఒక లోహపు తీగపై అయస్కాంతిక క్షేత్రారోపరూపముల ద్వారానో ఉల్లేఖించబడి ఉండవలెను. గణన కార్యమందు మనము ఉపయోగించు అంకెలనుకూడ నిల్లే ముందుగనే గణిత్రమునకందించవలయును. కన్నము గోచరించినపుడెల్ల ఒక లోహపు బ్రష్ ఆ కన్నములగుండ లోపలఉన్న ఒక స్తూపమును స్పృశించును. లేదా ఒక ప్రకాశకిరణము ఆ కన్నములగుండదూరి మన మందించిన ఆదేశముల చదివి వాటిని విద్యుదాఘాతములుగా మార్చును. అంత్యపర్యవసానము ముద్రితఫలముగా ఉల్లేఖించబడును.

ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రమునకు రెండు గణనీయలక్షణములు కలవు. మొదటిది: 237 వ 'సంచయఘటమునుండి సంఖ్యను 352 వ సంచయ ఘటమందలి అంకెనుండి తీసివేయుము. ఫలము ధనాత్మకమగుచో ఈ క్రింది వ్యాపారక్రమమును నిర్వహింపుము. అది ఋణాత్మకమగునేని ఈ క్రింది ఇంకొక వ్యాపారక్రమమును నిర్వహింపుము'. అను నటువంటి ఆదేశముల నిది గ్రహించగలదు. అనగా ఈ యంత్రము షరతులతోకూడికొనిన ఆదేశములనుకూడ గ్రహించగలదు.

రెండవది: ముందుగా అందించిన అంకెల నిలువజేయు స్మృతిస్థలములు అనేకము లిందున్నవి. వీటిని ఉచిత సమయముల ఆదేశముల ననుసరించి, ఈ స్మృతిస్థలములలో నుండి తీసికొని ఉపయోగించును. ముందుగా అందించబడిన ఈ సంఖ్యలేకాక గణన సరణియందు పొడసూపు అంకెలను తాత్కాలికముగ నిలువచేసి, తరువాత వాటిని వాడుటను కూడ చేయగలదు.

ఆధునిక గణిత్రములు గణన ప్రమాదశోధకసాధనముల కూడ నిమిడ్చుకొనియున్నవి.

విశిష్టప్రయోజన గణిత్రములు: పైన వర్ణించిన గణిత్రములు కేవలము గణితశాస్త్రీయగణిత్రములు. ఇవిగాక ఇతర విశిష్ట ప్రయోజనములకై ఉద్దిష్టమైన గణిత్రములు కూడకలవు. ఒక ఫిరంగి విక్షేపించు గుండు ఒక నియత లక్ష్యమును తాకునట్లు చేయుటకు వలయు దాని ఉన్నతి కోణమును కనుగొనుట; కనుగొనుటయేగాక ఆకోణము వచ్చు వరకు ఫిరంగిని త్రిప్పి దానిని కాల్చగలుగుట. ఒక కృత్రిమ ఉపగ్రహముయొక్క వర్తమానస్థానమును అది ఉండవలసిన స్థానముతో సరిపోల్చిచూచి, ఆ స్థానమును సరిదిద్దుటకు వలయు బలముల లెక్కించుట మొదలైనవి ఈ విశిష్టప్రయోజనములలో కొన్ని.

ఇట్టి సందర్భములలో ఆ గణిత్రము లెక్కలను కట్టుటయే కాక, సరిగా లక్ష్యమును నెరవేర్చునట్లు చేయుటకువలయు క్రియలకూడ నిర్వహించును. లేదా మనమిచ్చిన ఆదేశముల ప్రకారము ఈ గణిత్రము కృత్రిమగ్రహముపై నెలకొల్పబడవలసిన రాకెట్ మోటార్లను ఉచితకాలమునకు పనిచేయునట్లుకూడ చేయగలదు.

మనుష్య గణకుడు నిర్వహించుటకు పలుసంవత్సరములు పట్టు గణనవ్యాపారములను కొన్ని గంటలలో ముగించగలుగునంత వేగముతో పనిచేయుటకు ఈ గణిత్రములు మిక్కిలి ఉపయోగ్యములు. ఆ. న.

గతిభారము (మోమెన్‌టమ్): గతిభారము గతిశాస్త్రములో ఒక ముఖ్యభావము. ఒక వస్తువుయొక్క ద్రవ్యరాశి m, దాని వేగము $\boldsymbol{v}$ ఈ రెండింటి గుణకారలబ్ధమగు $m\boldsymbol{v}$ యే గతిభారము. వేగము, త్వరణము, బలములవలెనే ఇదియు ఒక సదిశరాశి.

న్యూటన్ రెండవ గతినియమము ప్రకారము గతిభారముయొక్క కాలిక రేటే ఆ కణముపై ప్రయుక్తమగు బలమగును. అనగా $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$. సాధారణముగ m స్థిరరాశి అగుటచే, దీనిని $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ అని వ్రాయవచ్చును. $\boldsymbol{a}$ అనునది, ఆ కణము యొక్క త్వరణము.

t అపేక్షయా, చయనీకరణము చేసినచో $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(mv) = mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$ అను సమీకరణము దొరకును. కనుక ఒక కణముపై బలప్రయోగము ఉన్నపుడు, ఆ కణముయొక్క గతిభారములోని మార్పు $\int_{t_1}^{t_2} Fdt$ కు సమముగా నుండును. దీనికి 'ప్రచోదన' (ఇమ్‌పల్స్) అని పేరు.

కొన్ని సమయములందు ఒక వస్తువుపై ప్రయోగింపబడిన బలము చాల మహత్తైయుండును. అయితే అది

పనిచేయుకాలము చాలా స్వల్పముగ నుండును. ఉదా: ఒక సుత్తితో ఒక పట్టెడపైనున్న వస్తువును స్వర్ణకారుడు కొట్టునపుడు బలము F చాల ఎక్కువైనది. అది ప్రవర్తించు కాలము ఒక క్షణమే. ఇట్టి సమయములందు మనము F, $(t_2 - t_1)$ ప్రత్యేకముగా కనుగొనలేము. అయితే $\int_{t_1}^{t_2} Fdt$ ఒక మితసదిశరాశిగ నుండును. ఇదియే ఆ దెబ్బ యొక్క 'ప్రచోదన'. పైన వివరించిన సంబంధము $\int Fdt = mv_2 - mv_1$ ప్రకారము, ఒకవస్తువు గతిభారము లోని మార్పే ఆ వస్తువుపై ప్రయోగింపబడిన దెబ్బ పరిమాణము.

రెండు వస్తువులు ఢీకొట్టునపుడు, ప్రతిక్షణమందును ఒకటి మరియొక దానిపై ప్రయోగించుబలము సమము గను, వ్యతిరేక దిశలలోను ఉండును. అనగా F_1, F_2 ఈ బలములను గుర్తించినచో $F_1 = -F_2$. కనుక $\int F_1 dt + \int F_2 dt = 0$. అనగా ఢీకొట్టు రెండు వస్తువుల మొత్తము గతిభారములో ఏ మార్పు దెబ్బవలన కలుగదు.

రెండు కణములు, లేదా రెండు నునుపైన గోళములు ఢీకొట్టుకొనినచో, వాటి తరువాతి గతి నిర్ణయించుటకు రెండు సమీకరణములు కావలెను. మొత్తము గతిభారములో మార్పులేదనుట ఒక సమీకరణము నిచ్చును, మరియొకటి వాని స్థితిస్థాపకగుణకముపై ఆధారపడి యుండును. ఈ రెండు సమీకరణములను ఉపయోగించి వాని గతిని కనిపెట్టవచ్చును. ఆ. న.

గతిశాస్త్రము : చూ. గణితసమీక్ష - పు. 57 ; కణగతిశాస్త్రము పు. 170 ; దృఢవస్తుగతిశాస్త్రము ; శుద్ధగతిశాస్త్రము.

గామా ఫలములు : గణితములో $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$ అను గుణకారలబ్ధమునకు ఫాక్టోరియల్ n అని పేరు. దీనినే $n!$ అని వ్రాయుదుము. ఇది ఒక ముఖ్యమైన n చలరాశిగా గల ఫలము. n ధన పూర్ణాంకము కానపుడు, $n!$ కు అర్థమేలేదు. అన్ని విలువలకు అర్థముండునట్లును, n ధన పూర్ణాంకమగునపుడు దాని విలువ $n!$ అగునట్లును ఒక ఫలమును కనిపెట్టుట సాధ్యమా అను ప్రశ్నను 19 వ శతాబ్దమున గణితవేత్తలు సాధించిరి. ఈ ప్రయత్నమందు ఉద్భవించినది గామా ఫలము. ఈ నిర్వచనప్రకారము $\Gamma(n) = (n-1)!$ అగును, అనగా $\Gamma(n+1)$ ను $n!$ ఒకే ఫలము.

ఈ సాధనలో మొదటి మార్గమును

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{2}{(2+x)} \cdot \ldots \frac{n}{(n+x)} \cdot n^x$$

అను గుణకార పరంపరయొక్క అవధి ($n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు) అని నిర్వచించెదము. ఇది ఒక ఉపసరణ గుణకార పరంపర. ఇది గౌస్ కనిపెట్టిన విధానము.

మరియొక విధానమును వియర్‌స్ట్రాస్ ఇచ్చిఉన్నాడు ఈ విధానము ప్రకారము :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r}$$

ఇందు γ అనునది ఒక స్థిరరాశి. దీనికి ఆయిలర్ స్థిరరాశి అని పేరు (చూ. ఆయిలర్ పు. 146). దాని విలువ 0.5772157 ...

అనంత గుణకార పరంపరలను ఉపయోగింపక అనంత చయనము ద్వారా క్రింది పథములో గామా ఫలమును నిర్వచించవచ్చును :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ t^{x-1} \ dt$$

ఇది ఉపసరణ చయనముగా నుండుటకు x విలువ $x > 0$ అను నిబంధనను తృప్తిపరచవలెను.

గామా ఫలముల గుణములు : పైన వివరించిన ఏ విధానమును తీసికొనినను $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ అనినిరూపించవచ్చును. కనుక యూనిట్ నిడుపుయందు $\Gamma(x)$ విలువ లిచ్చినచో అన్నిస్థలములందున అది నిశ్చితమగుచున్నది. ఉదా : $x = 0.3$ లో $\Gamma(x)$ విలువ, అనగా $\Gamma(0.3)$ తెలిసినచో, $\Gamma(1.3) = 0.3\ \Gamma(0.3)$ తెలియును. అటులనే $\Gamma(2.3) = (1.3)\ \Gamma(1.3) = (1.3)\ (0.3)\ \Gamma(0.3)$. $\Gamma(1)$ యొక్క విలువ 1 అని నిరూపించవచ్చును. కనుక $\Gamma(2) = 1 \times 1 = 1$; $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 1 \times 2$. $\Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 1 \times 2 \times 3 \ldots \Gamma(n+1) = n!$ (n పూర్ణాంకమగునపుడు). మరియొక ముఖ్యమైన గుణము

$$\Gamma(x)\ \Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$$

దీనిలో $x = \frac{1}{2}$ అను విలువ నిచ్చినచో $\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$ అని లభించును.

కనుక $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

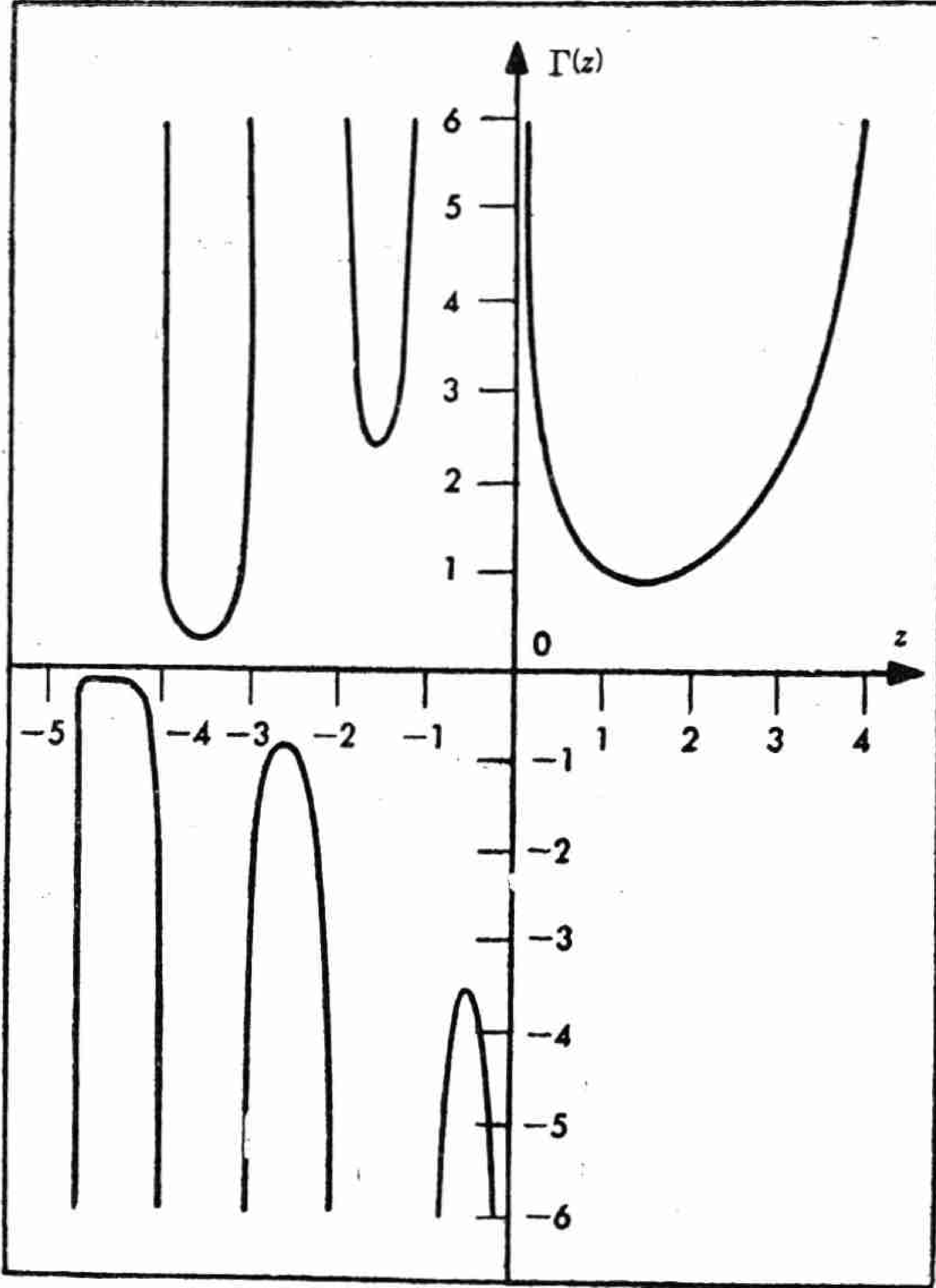
$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{1/2}}$$

అనియు నిరూపింపవచ్చును.

x ఒక వాస్తవ చలరాశియేకాక సంకీర్ణచలరాశి అయినను $\Gamma(x)$ యొక్క విలువ నిర్ణయించవచ్చును. దీనికి పరివృతచయనములు ఉపయోగించవలెను. ఇట్లు గామా ఫలమును విస్తరింపగా, ఇది $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ ... ... బిందువులందు ధ్రువములు (పోల్స్) కలదని తెలియుచున్నది.

గామా ఫలముల మరియొక ధర్మము :

$$\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(x+1\right)=\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma\left(2x+1\right)$$



చిత్రము 143 గామాఫల రేఖాచిత్రము

వాస్తవ విలువలు x కు $\Gamma(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము 143 వ చిత్రములో చూపబడియున్నది. ఎమ్. వి. సు.

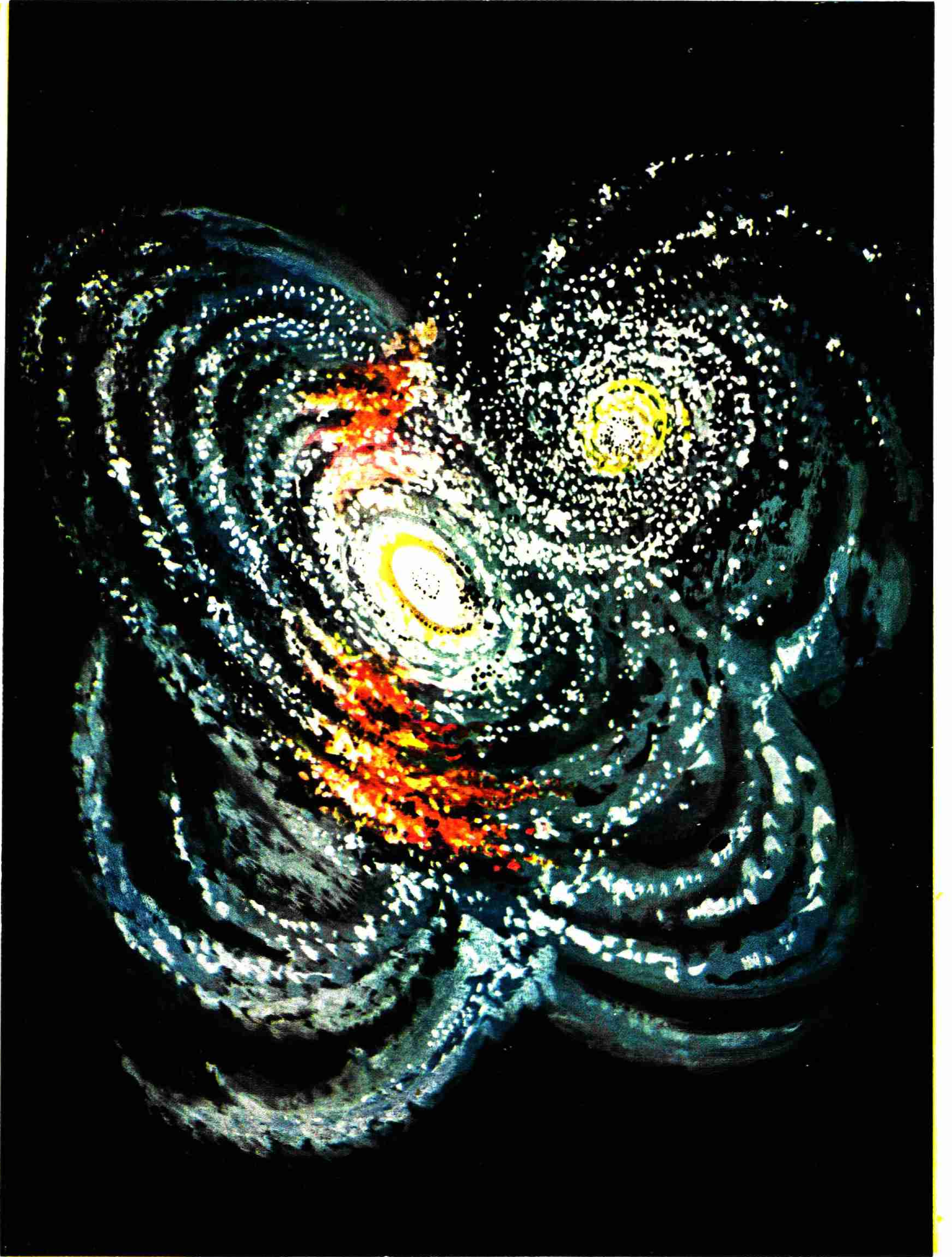
గాలక్సీలు (నక్షత్రవీథులు) : ఆకాశములో నక్షత్రములు చెల్లాచెదరుగ నున్నట్లు స్థూలదృష్టికి గోచరించినను, వాటికి గుంపులు గుంపులుగచేరి ఉండు స్వభావము ఉన్నట్లు క్రమబద్ధ పరిశీలనవలన తెలిసినది. ప్రాచీనులుసైతము అక్కడక్కడ నక్షత్రపు గుంపులను కనిపెట్టిరి. వాటిలో వృషభరాశిలోని కృత్తికానక్షత్రము, రోహిణి నక్షత్ర కూటము, మందాకినిలోని మేఘసదృశమైన మచ్చలు ముఖ్యమైనవి. ఇట్టికూటములను గణములు అందురు.

గణములు : నక్షత్రగణములు రెండురకములు; వివృత గణములు, వర్తులగణములు అని వాటికి పేర్లు. మొదటి వాటిలోనున్న నక్షత్రములు పరస్పరము దూరముగా ఉండుటచే దూరదర్శనిలో వివిక్తముగా కనిపించును. వాటిలోని ఉజ్జ్వలతర నక్షత్రములు నేత్రగోచరములే. ఒత్తుగా గుమికూడిన వర్తులగణములు వేలకొలది అస్పష్ట నక్షత్రములచే నేర్పడినవి. సామర్థ్యముగల దూరదర్శనులకు సైతము వాటిమధ్యనున్న నక్షత్రములు గోచరించనంత దట్టముగా అవి పుంజీభూతమై ఉన్నవి.

నక్షత్రవీథి : దూరదర్శనులు వచ్చినతర్వాత మరియొక రకపు నక్షత్రగణములు బయలుపడినవి. వానినే ఇప్పుడు గాలక్సీలు అని పిలుచుచున్నారు. కోట్లాది నక్షత్రములతో ఇవి కూడియున్నవని సుమారు రెండువందల సంవత్సరముల క్రిందట ఇమాన్యుయేల్ కాంట్ అను విజ్ఞాని సరిగా ఊహించి ఉండెను. వీనిని ద్వీపవిశ్వములుగా పరిగణింప వచ్చునని కూడ ఆయన భావించియుండెను. ఈ గాలక్సీలలో ఎక్కువ ముఖ్యమైనది ఆండ్రోమీడాలోని గొప్ప నెబ్యులా. దీనిని 95వ పుటలోని చిత్రము 39లో చూడవచ్చును. దక్షిణ ఆకాశ ధ్రువమునకు దగ్గరగనున్న 'మెగలేనిక్ మేఘములు' కూడ చాల ముఖ్యమైనవే. వీనిని దక్షిణార్ధ గోళమందలి అవేక్షకులు బాగుగా చూడగలరు. ఇప్పటికి చాల గాలక్సీలు ఛాయా చిత్రితమైనవి. హార్వర్డ్ యూనివర్సిటీ వారిచే నియమితములైన కొన్ని వేధశాలల యందు ఈ రకపు కృషి హెచ్చుగా జరిగినది. అందెక్కువ పాటుపడినవారు హార్లో షేప్లీ, ఎడ్విన్‌హబుల్ శాస్త్రజ్ఞులు. గాలక్సీలను తన 'న్యూజనరల్ కేటలాగు' లో జె. ఎల్. ఇ. డ్రెయర్ అను నాతడు వర్ణించెను.

గాలక్సీ నిర్మాణము : రూపమునందు ఒక గాలక్సీకిని, వేరొక గాలక్సీకిని, వ్యత్యాసము ఉండుటచేత, ఏ గాలక్సీనైనను సులువుగా గుర్తుపట్టవచ్చును. కాని, వానిరూపమును అనుసరించి గోళకల్ప (స్ఫెరాయిడల్) గాలక్సీలు, సర్పిల (స్పైరల్) గాలక్సీలు అని హబుల్ విజ్ఞాని వానిని స్థూలముగా వర్గీకరణ మొనర్చెను.

39 వ చిత్రమందలి నాలుగు గాలక్సీలు 'స్ఫెరాయిడల్' వర్గమునకు చెందును. వానియందు క్రమబద్ధమైన నక్షత్రచలనములు ఏమియును గోచరములు కావు. 39వ చిత్రము(పు. 95) నందున్న మిగిలిన గాలక్సీలు స్పైరల్ గాలక్సీవర్గమునకు చెందినవి. మధ్యనున్న కేంద్రకముచుట్టు నున్న పెద్దపెద్ద నక్షత్రరాశులు స్పైరల్ గాలక్సీవర్గమునకు చెందినవి. మధ్యనున్న కేంద్రకము చుట్టునున్న పెద్ద పెద్ద నక్షత్రరాశులు స్పైరల్ గాలక్సీలయందు సూచితమగును. ఇంచుమించు నక్షత్రములన్నియును ఏవో కొన్ని రాశులకు చెందియున్నవనియును, ఈ నక్షత్రరాశులే చేరి గాలక్సీలు అగుచున్నవనియును, ఈ శతాబ్ద ప్రారంభములో షేప్లీ విజ్ఞాని సూచించెను. నక్షత్రముల నిజచలనములను పరీక్షించుటవలన ఇంచుమించు నక్షత్రములన్నియును ధనూరాశి దిశలో కాన్పించుచున్న ఒక బిందువుచుట్టును తిరుగుచున్నవని విదితమైనది. బహుళ సంఖ్యాకములైన



గాలక్సీలు పరస్పరము ఢీకొన్నప్పుడు జరుగు సంఘటన (ఊహా చిత్రము) సర్పిలశాఖలు గల అంతర్నక్షత్ర మేఘము పరస్పరము ఘర్షించి ఎర్రగా మెరయును.

Blank Page

నక్షత్రరాశులున్న ఈ మండలము కేంద్రముగా వ్యవహరించుచున్నదనియును, శేషించిన నక్షత్రరాశులు దాని చుట్టు విభిన్న వేగములతో సంచరించుచున్నవనియును స్పష్టము. ఈ గాలక్సీకి 'మందాకిని' (మిల్కీవే) అని పేరు. ఇది తాంద్రబెత్తు లేదా జేబు గడియారపు ఆకారములో ఉన్నదని నిర్ణయింపబడినది. ఈ మందాకిని సూర్యునకు 30,000 కాంతి వత్సరముల దూరములో ఉన్నది. మందాకిని కేంద్రము చుట్టు సెకనుకు (సుమారు 322 కి. మీ.) 200 మైళ్ల వేగముతో సూర్యుడు సంచరించుచున్నాడు. ఆ కేంద్రము చుట్టు ఒకసారి తిరిగి వచ్చుటకు సూర్యునకు సుమారు 20లక్షల శతాబ్దములు పట్టును. గాలక్సీ యొక్క క్షితిజ సమాంతర వ్యాసపు నిడివి రమారమి 1,00,000 కాంతి వత్సరములు.



చిత్రము 144 మందాకిని

ఇక ప్రతి గాలక్సీనిచుట్టి ఒక రకమైన మసక కన్పట్టును. ఇది బహుశః అస్పష్టకాంతిగల చిన్ననక్షత్రమువలన కలిగినదై ఉండవచ్చును. గాలక్సీనుండి ప్రసారితమైన కాంతి కొంతవరకు దాని చుట్టునున్న అస్పష్టకాంతిచే శోషితము కావచ్చును. ఈ శోషణమును యుక్తముగా పరిగణనములోనికితీసికొనకపోయినచో పై పద్ధతివలన గణించిన దూరములు తప్పును. ఒక్కొక్కప్పుడు ఈ అస్పష్టకాంతి గాలక్సీ మధ్యభాగమందే యుండి సరిగా సరిహద్దు నేర్పరచును.

గాలక్సీ ద్రవ్యసంచయము : ఒక గాలక్సీనుండి ప్రసారితమైన మొత్తము కాంతిని బట్టి గాలక్సీ యొక్క ద్రవ్యసంచయమును అంచనా వేయుదురు. ఆండ్రోమీడా నెబ్యులా యొక్క దీప్తి సూర్యుని దీప్తికి సుమారు 160 కోట్లరెట్లు అని హబుల్ శాస్త్రజ్ఞుని పరిశోధనలవలన వ్యక్తమైనది. సూర్యవర్ణచిత్రము ఏ తరగతికి చెందియున్నదో ఇంచుమించు అదేతరగతికి గాలక్సీ వర్ణచిత్రముకూడ చెందియున్నదని ఇటీవల తెలియవచ్చినది. అందుచేత సూర్యుని ఒక సామాన్య నక్షత్రముగా పరిగణించినచో దాని ద్రవ్యసంచయమునకు 160 కోట్లరెట్లు ఆండ్రోమీడా నెబ్యులా యొక్క ద్రవ్యసంచయము ఉండుననియును, ఇంచుమించు 160 కోట్ల నక్షత్రములు గాలక్సీ యందుండుననియు ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు అంచనావేసిరి.

గాలక్సీల దూరము : సెఫీడ్ తరగతికి చెందిన వృద్ధిక్షయనక్షత్రముల కాంతిని పరిశీలించుట ద్వారా గాలక్సీల దూరములను నిర్ణయింతురు. ఈ నక్షత్రములు స్పందించును; అనగా సంకోచమును, వ్యాకోచమును పొందును. ఇట్లు అవి సంకోచించునపుడు ఎక్కువ కాంతి మంతముగను, వ్యాకోచించునపుడు తక్కువ కాంతి మంతముగను అగపడును. వాటి స్పందన కాలమునకును, వాటి దీప్తికిని నియతమైన సంబంధము ఉన్నది. నక్షత్రముల నుండి ప్రసారితమగు మొత్తము కాంతికే 'దీప్తి' అని పేరు. అందుచేత స్పందనకాలమును నిర్ణయించి, తన్మూలముగా వాని దీప్తిని గణింపవచ్చును. అప్పుడు భూతలమందలి అవేక్షకుని చేరుకొనునట్టి, ఆ నక్షత్రము యొక్క మొత్తపు కాంతిని నిర్ణయించి, తద్ద్వారా దాని దూరమును గణింపవచ్చును. భూమికిని, గాలక్సీకిని గల దూరముతో పోల్చినపుడుగాలక్సీ యొక్క పరిమాణము తక్కువయని అనుకొన్నచో, సెఫీడ్ వృద్ధిక్షయతార ఎంత దూరమున ఉన్నదో గాలక్సీ కూడ అంతేదూరమున ఉన్నదని మనము పరిగణింపవచ్చును.

మెగలేనిక్ మేఘములు : భూమినుండి సుమారు పది లక్షల కాంతి వత్సరముల వ్యాసార్ధము గల ప్రదేశమునందు 12 గాలక్సీలను గుర్తింపవచ్చును. వాటిలో పెద్దవి, చిన్నవి అయిన మెగలేనిక్ మేఘములు ఎక్కువ ముఖ్యమైనవి. ఇంతవరకు అవేక్షింపబడిన గాలక్సీలలో పెద్ద మెగలేనిక్ మేఘమే పెద్దది. దానియందు బాగా వ్యాపించియున్న నెబ్యులాలు, అతిబృహత్తారలు చాల ఉన్నవి. 30 డొరేడస్ (దానికి లూప్ నెబ్యులా అని మరియొక పేరు కూడ ఉన్నది) అను పెద్ద నెబ్యులా యొక్క

వ్యాసము 130 కాంతి వత్సరములు. S-డొరేడస్ అను నీలికాంతిగల ద్వికము ఒక బృహత్తార. అది సూర్యుని కంటె 5,00,000 రెట్లు ఎక్కువ దీప్తిని కలిగియున్నది. కొన్ని బృహత్తారల వ్యాసములు గురుగ్రహకక్ష్య వ్యాసముతో పోల్చదగినవై యుండును.

వ్యాకోచద్విశ్వము : గాలక్సీల వర్ణచిత్రములందలి రేఖలు వర్ణచిత్రముయొక్క ఎరుపు కొసవైపునకు జరుగుచున్నటుల నిశ్చయముగా తేలినది. దానినిబట్టి మన దృష్టిమార్గము నుండి అధికవేగముతో ఇవి దూరముగా పోవుచున్నవని స్పష్టమగును. ఇక గాలక్సీల ఈ తిరోగమనవేగము వాటి దూరములకు ఇంచుమించుగా అనుపాతములో నుండి నట్లుకూడా విదితమగుటచే విశ్వమంతయు అత్యధికమైన వేగముతో వ్యాకోచించుచున్నదని వివరించబడినది. కాని, ఇటీవల మౌంట్‌విల్సన్ పరావర్తన దూరదర్శనితో తీసిన కొన్ని దూరపు గాలక్సీల ఛాయా చిత్రములనుబట్టి, ఆ గాలక్సీల వేగములు సెకనుకు రమారమి 40,200 కిలో మీటరులు (సుమారు 25,000 మైళ్లు) అని అంచనావేసినారు. దీనినిబట్టి ఈ గాలక్సీలకు 7, 8 రెట్లు ఎక్కువ దూరమునందున్న గాలక్సీలు కాంతి వేగపు శ్రేణిలోనున్న వేగముతో సంచరింపవలెనని వ్యక్తమగును. కాని, ఈనాటి మన పరిజ్ఞానము దృష్ట్యా ఇది సాధ్యము కాదనుట స్పష్టముకాగా, ఈ విషయము వ్యాకోచద్విశ్వవాద ప్రామాణ్యమును శంకించుటకు ఎడమిచ్చుచున్నది. కాని, ఈ విషయములన్నియును ఇంకను సరిగా అవగతములు కాలేదు. అందుచే ఈ విషయమును గూర్చిన వాదములు ఇంకను ఊహారంగముననే ఉన్నవి. వికల్పములదశలోనే ఉన్నవనుట నిశ్చయము. ఎన్. రా.

గాల్వా, ఎవరిస్ట్ (1811-32) : గాల్వా ఫ్రాన్స్ (1811) లో పుట్టెను. అతని జీవితము అతి దౌర్భాగ్యమైనది. గాల్వా యొక్క అపారగణితసామర్థ్యమును బడిలో గుర్తించక, అతనికి మొద్దబ్బాయి అని పేరు పెట్టిరి. అతడు పై చదువునకు ముఖద్వారమగు ఇకోలి పాలిటెక్నిక్ పరీక్షలో రెండు మార్లు తప్పెను. 17 ఏండ్ల వయస్సులో అతడు కనిపెట్టిన అపూర్వగణిత సిద్ధాంతములు గల ఒక వ్యాసమును ఆ కాలపు గణిత సార్వభౌముడైన కోషీ అలక్ష్యముగా చదువకనే పారవేసెను. గాల్వా తండ్రి ఇతరుల బాధలను సహింపక ఆత్మహత్యచేసికొనెను. ఆ కాలములో ఎల్లపుడును రాజ్యాంగ విషయమైన కక్షలు, కలహములు సహజము. వీనియందు తగులుకొనిన గాల్వాకు ఆరునెలలు కారాగృహ వాసములభించెను. 'అకాడెమీ అవ్ సైన్సెస్' అను విద్వత్సభకు గాల్వా పంపిన పరిశోధనలను ఇవి అబోధ్యములు అని త్రిప్పివేసిరి. తుపాకులతో ద్వంద్వయుద్ధములో పాల్గొనవలసిన నిర్బంధము ఏర్పడి, 1832లో 21వ ఏటనే గాల్వా మరణించెను, ద్వంద్వయుద్ధమునకు ముందటి రాత్రియంతయు తాను అంతవరకు కనిపెట్టిన గణిత తత్త్వములను తొందరగా వ్రాసి ఒక స్నేహితునికి ఒప్పగించెను. స్వల్పకాల జీవితమైనను, గాల్వా కనిపెట్టిన గణిత తత్త్వములు, ఎన్నో శతాబ్దములుగా గణిత తత్త్వజ్ఞులను బాధపెట్టిన ప్రశ్నలకు ప్రత్యుత్తరములు ఇచ్చుచున్నవి. (చూ. గాల్వా క్షేత్రములు) ఆ. న.

గాల్వా క్షేత్రములు (గాల్వా ఫీల్డ్స్) : గాల్వాను గణితములో అమరునిగాచేసిన విషయములు (1) గాల్వా క్షేత్రములు, (2) గాల్వాకూర్పులు (గాల్వా గ్రూప్స్), (3) ఐదవ తరగతి సమీకరణ మూలములను గుణకముల నుండి $+, -, \times, \div, \sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}$ పరికర్మముల మిత్రప్రయోగము ద్వారా పొందుట సాధ్యమా అను ప్రశ్నకు ప్రత్యుత్తరము :

మొదటి నాలుగు తరగతుల సమీకరణముల మూలములు ఇట్లు పొందుట సాధ్యమనియు, పొందుటకు కావలసిన సూత్రములు రెండు శతాబ్దములకు పూర్వమే తెలిసియుండెను. ఉదా : $x^3 + 3mx = 2n$ అను మూడవ తరగతి సమీకరణ మూలములను

$$\sqrt[3]{\left[\sqrt{(n^2+m^3)}+n\right]} - \sqrt[3]{\left[\sqrt{(n^2+m^3)}-n\right]}$$

రీతిగా పొందవచ్చునని, 16వ శతాబ్దములోనే టార్టాల్‌యా కనిపెట్టెను. అయితే ఇట్టి ప్రయత్నములన్నియు ఐదవ తరగతి సమీకరణము విషయములో నిష్ఫలములయ్యెను. గాల్వా ఇట్లు వర్గమూలముల మిత్రప్రయోగము ద్వారా 5 లేదా 5 కంటె ఎక్కువ తరగతి సమీకరణమునకు మూలములను కనిపెట్టుట సాధారణముగా అసాధ్యమనియు, ఎటువంటి సందర్భములలో అది సాధ్యమో కనిపెట్టెను.

పరిమిత గాల్వాక్షేత్రములు (ఫినిట్ ఫీల్డ్స్) : ఒక ప్రధాన సంఖ్య p ను తీసికొందము. ఏ పూర్ణాంకమును p చేత భాగహారము చేసినచో దొరకు శేషము $0, 1, 2, 3, (p-1)$ లో ఒక్క సంఖ్యగా నుండును. రెండు పూర్ణాంకములు a, b అనునవి p చేత భాగహారము చేసిన ఒకే శేషము నిచ్చునట్లయితే $a \equiv b$ మా (p) అనెదము. ఉదా : $p = 5$ ఉన్నట్లయితే శేషములు $0, 1, 2, 3, 4$ అగును. ఇచ్చట $2 \equiv 7 \equiv 12 \equiv -3$ (మా 5). ఈ సంఖ్యలన్నియు ఒకే జాతికి చేరినవి; అనగా $5n + 2$ రూపములో నున్నవి లేదా 2 శేషముగా గల

జాతి అనవచ్చును. ఒకే జాతికి చేరిన పూర్ణాంకములను అన్నిటిని ఒకే అంకెగా భావించినచో అప్పుడు 0, 1, 2, 3, 4 అను ఐదు ప్రత్యేక అంకెలు మాత్రమే ఉన్నవని చెప్పవచ్చును. గణిత సమీక్షలో చూపినట్లు (చూ. పు. 17) ఈ అయిదు అంకెలును ఒక క్షేత్రము అగును. అనగా వీటిలో కూడిక, తీసివేత, గుణకార భాగహారములు అను (శూన్యము హారముగా ఉండకూడదు) నాలుగు అంకగణిత పరికర్మములు సాధ్యము; అట్టి పరికర్మముల వల్ల లభించు సంఖ్యలును, 0, 1, 2, 3, 4లో ఒకటిగనే యుండును. ఉదా: $2+3 \equiv 0$, $3-4 \equiv 4$ (ఏలన $4+4=8 \equiv 3$); $3 \times 4 \equiv 2$, $1 \div 3 = 2$ (ఏలన $3 \times 2 = 6 \equiv 1$) ఇదియే 5 సంఖ్యలుగల గాల్వా క్షేత్రము; దీనిని GF (5) అని గుర్తించెదము.

దీనినే విశాలపరచి $5^2 = 25$ సంఖ్యలు గల పరిమిత క్షేత్రము GF (5^2) ను లేదా $5^3 = 125$ సంఖ్యలు గల క్షేత్రము GF (5^3) ను ఇట్లే GF (5^n) అనగా 5^n సంఖ్యలు గల క్షేత్రమును పొందుటకు గాల్వా దారి చూపెను. GF (5^2) ను పొందుటకు మూల క్షేత్రమగు 0, 1, 2, 3, 4 తీసికొని ఈ క్షేత్రములో లేని మరియొక సంఖ్య ఉదా: $\sqrt{2}$ చేర్చెదము. ఈ 6 సంఖ్యలు సృజించు క్షేత్రములోని అన్ని సంఖ్యలు $a + b\sqrt{2}$ అను రూపము ధరించును. ఇచ్చట a, b మూల క్షేత్రమునకు చేరిన 0, 1, 2, 3, 4 అంకెలు కాబట్టి a, b సంఖ్యలకు అన్ని విలువలు నిచ్చిన మనకు $5 \times 5 = 25$ సంఖ్యలు లభించును. ఈ 25 సంఖ్యలుచేరి ఒక క్షేత్రమునకు చేరినవి. అనగా వీటిలో ఏ రెండు సంఖ్యల సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము (శూన్యము హారముగా ఉండరాదు పరికర్మములు ప్రయోగించవచ్చును. అట్లుచేసినచో దొరకు సంఖ్యయునూ, ఈ క్షేత్రమునకు చేరినదిగనే ఉండును. ఉదా: $(3+4\sqrt{2}) \times (1-\sqrt{2}) = 3 - (4 \times 2) + \sqrt{2} = -5 + \sqrt{2} \equiv \sqrt{2}$.

ఆలాగుననే $\dfrac{3+4\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{(3+4\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1-2} = \dfrac{11+7\sqrt{2}}{-1} \equiv -(1+2\sqrt{2}) \equiv 4+3\sqrt{2}$. ఏలన $11 \equiv 1$ (మా. 5), $-1 \equiv 4$ (మా 5) $-2 \equiv 3$ (మా 5).

ఇట్లు రెండవ తరగతి సమీకరణము $x^2 - 2 = 0$ మూలము $\sqrt{2}$ ను చేర్చుకొని GF (5) క్షేత్రమును విశాలపరచుటకు బదులుగా ఒక మూడవ తరగతి సమీకరణము ఉదా: $x^3 + x - 1 = 0$ యొక్క మూలము t ను చేర్చినట్లయితే మనకు దొరకునది GF (5^3) అనగా $5^3 = 125$ సంఖ్యలు గల క్షేత్రము. దీనియందు ఒక్కొక్క సంఖ్యను $a + bt + ct^2$ అను రూపము కలది. ఇచ్చట t అనునది $x^3 + x - 1 = 0$ అను సమీకరణము యొక్క మూలము; అనగా $t^3 + t - 1 = 0$. అందువలన t లో రెండవ తరగతికి పై తరగతి బహుపదముల నన్నిటిని $a + bt + ct^2$ రూపములో వ్రాయవచ్చును. ఉదా:

$$t^3 = 1-t,\quad t^4 = t-t^2,\quad t^5 = t^2 - t^3 = t^2 + t - 1$$

ఇచ్చట a, b, c సంఖ్యలు మూల క్షేత్రమగు GF (5) కు చేరినవి. అందువలన అవి 0, 1, 2, 3, 4 అను ఐదు విలువలు మాత్రమే తీసికొనును. కావున $a + bt + ct^2$ అను రూపమునఉన్న సంఖ్యలు $5 \times 5 \times 5 = 125$. ఇవి అన్నియు చేరి ఒక క్షేత్రమగునని నిరూపించవచ్చును.

5 లేదా 5 కంటె ఎక్కువ తరగతి సమీకరణము యొక్క మూలములు ఆ సమీకరణ గుణకముల నుండి $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ } \dots \sqrt[n]{\ }$ అగును. పరికర్మముల మితప్రయోగము వలన లభించవలెనంటే, ఇది ఎల్లప్పుడును సాధ్యము కాదు. అట్లు సాధ్యమగుటకు ఒక నిబంధన ఉన్నది. అది: ఆ సమీకరణమునకు చేరిన అన్ని మూలములును ఏవో రెండు మూలముల అకరణీయ ఫలములుగా నుండవలెను. ఇదే గాల్వా కనిపెట్టిన తత్త్వము. దీనినే మరియొక విధముగా చెప్పవచ్చును. ఆ సమీకరణమునకు సంబంధమైన కూర్పు యొక్క $G_1, G_2, G_3 \dots \dots$ సంయోజిత వరుస అయితే ఒక్కొక్క G_k/G_{k-1} కూడ ఒక ఆవృతకూర్పుగా ఉండవలెను (చూ. గాల్వా, ఎవరిస్ట్). **ఆ. స.**

గుణకారము: అంకగణితములో సంకలనము యొక్క ఆవర్తనమునకే 'గుణకారము' అని పేరు. $3+3+3 \dots \dots$ ఏడుమార్లు సంకలనముచేసినచో లభించు ఫలమునే 3×7 అనెదము. **21** దీని విలువ. $7+7+7$ అనునది 7×3 దీని విలువ 21. $(2+3+4) \times 6$ గుణించుటకు 2, 3, 4 సంకలనముచే లభించు ఫలమును కనిపెట్టి, ఈ ఫలమును 6 చే గుణకారము చేయవలెను. దీని విలువ 54. ఇట్లుచేయక 2×6, 3×6, 4×6 అని ప్రత్యేకముగ గుణకారముచేసి, తరువాత ఈ సంఖ్యల సంకలనమును చేసినచో, మనకు లభించునది 54, అనగా అంకగణితములో గుణకారమునకు రెండు ధర్మములు ఉన్నవి. A, B ఏ రెండు సంఖ్యలైనను

$$A \times B = B \times A \quad \dots \dots (1)$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \dots \dots (2)$$

శుద్ధబీజగణితమునందు సంకేతములు ఎల్లప్పుడును సంఖ్యలను సూచింపవు. కనుక $A \times B$ అనగా $(A + A + \dots)$ B మార్లు అను నిర్వచనమునకు అర్థములేదు.

కనుక శుద్ధబీజగణితమందు సంకలనము ఒక పరికర్మ మనియు, గుణకారము మరియొక పరికర్మమనియు నిర్వచనము చేయవలెను. కనుక పై ధర్మములు నిజముగ ఉండనక్కరలేదు. సాధారణముగ (2) వ ధర్మమును అంగీకరించి, (1) ని తిరస్కరించి పెక్కు బీజగణితము లను కల్పించియున్నారు. బూలియన్ బీజగణితములో $A + A = A$, $A \times A = A$. కనుక ఇచ్చట సంఖ్యలకే స్థలములేదు. వెక్టార్ బీజగణితములోను $A \times A = 0$, $A \times B = -B \times A$. మాట్రిక్స్ బీజగణితములోను (1) వ ధర్మము అసత్యము. అంకగణితములో గుణకారమునకు ఒక యూనిట్ ఉన్నది. ఇదియే 1. దీని ధర్మమేమనగా, A అనునది బీజగణితములోని ఏ సంకేతమయినను $A \times 1 = 1 \times A = A$. అయితే ఇటువంటి యూనిట్ శుద్ధ బీజగణితమునందు ఉండదు.

అంకగణితమందు రెండు సంఖ్యలను గుణకారము చేయుటకు ఎక్కాల పట్టికలను కంఠస్థము చేసికొని వాటిని ఉపయోగించెదము. ఇట్టి పట్టికలు లేకుండా గుణకారము సాధ్యమా అని అడుగవచ్చును. అవును సాధ్యమే! ఈజిప్టు దేశములో ప్రాచీనకాలమునందు అట్టి గుణకార భాగ హారములు చేయుచుండిరి. పట్టికలకు బదులు ఒక సంఖ్యను ద్విగుణీకరించుట తెలిసిన చాలును. వీరు ఉపయోగించిన విధానములోని రహస్యమేమనగా, ఏ సంఖ్యయైనను 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... సంఖ్యలలో కొన్నిటిని సంకల నము చేసిన లభించవచ్చుననుటయే.

ఉదా: $11 = 8 + 2 + 1$, $22 = 16 + 4 + 2$.

$37 = 32 + 4 + 1$

రెండు సంఖ్యలు (213ను 37ను) గుణకారము చేయు టకు 213ను క్రమముగా రెట్టింపుము. ఎడమ వైపు 1, 2, 4, 8 ... ... అని వ్రాయుము.

1*	213
2	426
4*	852
8	1704
16	3408
32*	6816

ఎడమప్రక్కన * సంజ్ఞతో గుర్తించిన 32, 4, 1 సంఖ్యల సంకలనము 37 నిచ్చుచున్నది. కనుక ఈ సంఖ్యల కెదురుగ నుండు $6816 + 852 + 213 = 7881$ గుణకార లబ్ధఫలము నిచ్చును. ఇచ్చట $37 \times 213 = (32 + 4 + 1) \times 213 = 32 \times 213 + 4 \times 213 + 1 \times 213$ అను సూత్రమును ఉపయోగించి యున్నాము.

ఇటులనే భాగహారమును వారు సాగించిరి. ఉదా: 580ను 32 చేత భాగహారము చేయుటకు, 32ను మరల మరల రెట్టించిరి.

1	32
2	64
4	128
8	256
16	512

దత్త సంఖ్య $580 = 512 + 64 + 4$ అనగా $16 \times 32 + 2 \times 32 + 4$. కనుక భాగహార లబ్ధము = 18, శేషము 4.

గుణకార పద్ధతి: 934×413 కనిపెట్టుటకు, వీటిని $(900 + 30 + 4) \times (400 + 10 + 3)$ అని వ్రాసి, దీనిని విస్తరించి ఆంశిక లబ్ధఫలములగు 4×3, 30×3, 900×3 4×10, ... అనునవి కనిపెట్టి సంకలనము చేసెదము. దీనినే హ్రస్వముగా వ్రాయుపద్ధతిలో, శూన్యము లన్నిటిని విడిచిపెట్టి శూన్యము కాని అంకెలను ఉచితస్థానములో వ్రాసి సంకలనము చేసెదము. ఇటువంటి పెక్కుపద్ధతులు ఉన్నవి. వాటిలో కొన్ని మాత్రము సూచించెదము.

ఏకపఙ్క్తి గుణకారము: 934×314 లబ్ధఫలమును, ఒకే శ్రేణిలో గుణకారము చేయుటకు ఒక సంఖ్యను ఉదా: 934ను ఒక కాగితముమీద వ్రాసిపెట్టుము. రెండవ సంఖ్యనుత్రిప్పి ఒక కాగితపుచీలికపై 413 అని వ్రాయుము. ఇప్పుడు చీలిక 413 లోని మొదటి అంకెయగు 4 ను, 934 యొక్క కడపటి అంకెయగు 4 క్రింద వచ్చునట్లు జరుపుము. ఇప్పుడు ఆ రెండు సంఖ్యలు $\begin{matrix}934\\413\end{matrix}$ అను స్థలములలో ఉండును. ఒకటిక్రింద మరియొకటిగనున్న 4, 4 గుణకా రముచేసి లబ్ధఫలమగు 16 లో ఒకట్ల స్థానమునుండు 6 ను ఫలముయొక్క ఒకట్ల స్థానాంకముగా వ్రాసి, మిగిలిన అంకెయగు 1 ని మనసులో ఉంచుకొనుము.

తరువాత చీలికపైనున్న సంఖ్యను ఒకపదము ఎడమ ప్రక్కకు జరుపుము. ఇప్పుడు రెండు సంఖ్యలును $\begin{matrix}934\\413\end{matrix}$ స్థానమున ఉండును. ఒకటిక్రింద మరియొకటిగ నున్న 3×4, 4×1 గుణకారముచేసి వాటి సంకలన ఫలమగు 16 తో, మనసులో ఉంచుకొనిన 1 చేర్చుము. ఇదియే అంతిమ ఫలముయొక్క పదవస్థాన సంఖ్య. కనుక పదవస్థానమందు 7ను వ్రాసి, ఒకటిని మనసులో పెట్టు కొనుము.

తరువాత చీలికపైనున్న సంఖ్యను మరియొక పదము ఎడమపక్కకు జరిపి, సంఖ్యలను $\begin{matrix}934\\413\end{matrix}$ రూపమునకు తెమ్ము. ఇచ్చటను ఒకటి క్రింద ఒకటిగనుండు అంకెల

గుణకారముచేసి (9 × 4) + (3 × 1) + (4 × 3) = 51. పొందెదము. దీనితో మనసులో నున్న 1 ని చేర్చి 51 + 1 = 52 కనుక వందల స్థానములో 2 వ్రాసి, 5 ను మనసులో పెట్టుకొనుము. ఇట్లు క్రమముగా జరిపి కడపట $\begin{matrix}934\\413\end{matrix}$ అని పొందుదుము. 9 × 3 = 27 తో మనసులోనున్న సంఖ్యను చేర్చుకొని, ఆ ఫలమును వ్రాసినట్లైతే, దత్తసంఖ్యల గుణకారలబ్ధము దొరుకును.

సాధారణ గుణకారము : ఇదియే భారతదేశములో ఎక్కువ వాడుకలో ఉండునది. ఈ విధానము ప్రకారము 934 × 314 కనిపెట్టుటను క్రింద చూపియున్నాము. దీనియందు లబ్ధఫలములను వ్రాయుట యందు ఒక్కొక్క అంకెతో గుణకారము ముగించినపుడు, ఒక పదము ఎడమప్రక్క ఆరంభించవలెను. దీనిని మానుకొనవలె నంటే గుణకార సంఖ్య నొకటిని తల క్రిందులుగా త్రిప్పి (అనగా 314 కు బదులు 413 అని) వ్రాసితే చాలును. ఉదా :

```
   9 3 4
   3 1 4
 -------
 3 7 3 6
 9 3 4
2 8 0 2
-----------
2 9 3 2 7 6
```

	9	3	4	
2	2 / 7	0 / 9	1 / 2	3
9	0 / 9	0 / 3	0 / 4	1
3	3 / 6	1 / 2	1 / 6	4
	2	7	6	

చిత్రము 145

పై గుణకారమునే క్రింద చూపియున్నాము. అయితే సంకలనము ఎడమనుండి కుడివైపున వ్రాలు కర్ణముల వరుసగా చేయవలయును. అనగా మొదట 6, తరువాత 3 + 4, తరువాత 7 + 3 + 2, ఇటులనే.

```
      9 3 4
    ---------
    3 7 3 6 | 4
      9 3 4 | 1
    2 8 0 2 | 3
  -----------
  2 9 3 2 7 6
```

మూడవ గుణకార పద్ధతిలో ఒక విశేషము ఉన్నది. ఇచ్చట మనసులో ఏ సంఖ్యను పెట్టుకొన అక్కరలేదు. అన్ని అంకెల ఆంశిక లబ్ధఫలములను పూర్తిగా వ్రాసెదము. పై గుణకారము 934 × 314 నే తీసికొనెదము. చిత్రము 145 లో ఈ విధానము వ్యక్తమగును. 934 పై వరుసలో వ్రాసెదము, 314 కుడివైపున ఒకటి క్రింద ఒకటిగా వ్రాసెదము. 3 × 4 = 12 ఆంశిక లబ్ధమున, 3, 4 కు నేరుగనున్న చతురస్రములో 1 కర్ణమునకు పైనను, 2 కర్ణమునకు క్రిందను వ్రాసెదము. ఇటులనే 3 × 3 ను 09 అని వ్రాసెదము. ఇట్లు అన్ని ఆంశిక గుణకారములను పూర్తిచేసి, సంకలనము చేయునపుడు మూలనుండి మూలకు చేసెదము. ఈ విధానమునకు ఒక అనుకూలము ఏమనగా. అన్ని ఆంశిక లబ్ధములు ఉన్నందున ఎచ్చట కావలసినను నిలుపవచ్చును. తప్పు ఎక్కడ ఉన్నదని కనిపెట్టుట సులభము. జ్ఞాపకశక్తి తక్కువగనుండు వారికి, ఆరంభ విద్యార్థులకు మనసులో పెట్టుకొను శ్రమము లేదు, తప్పులును తగ్గును.

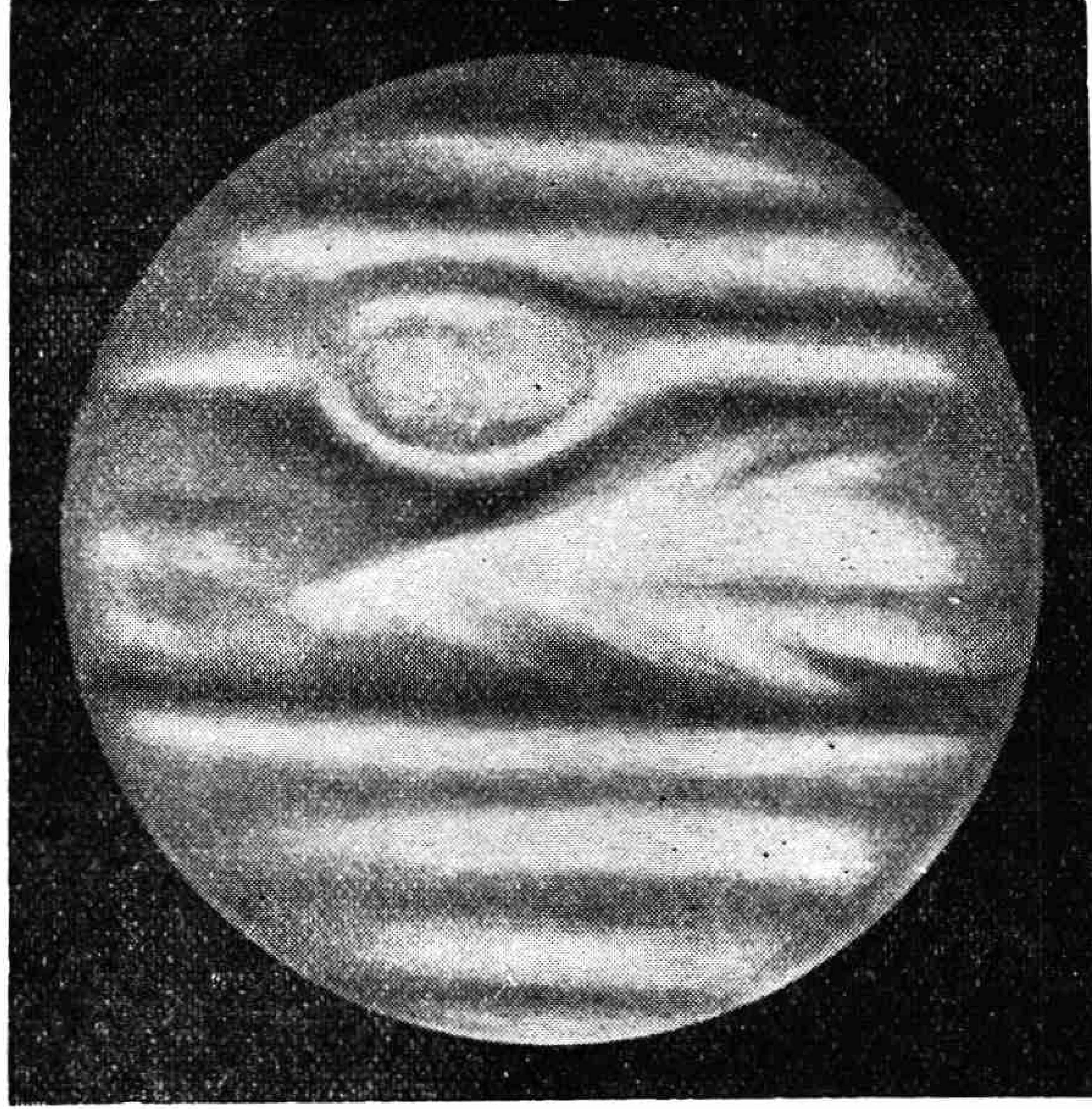
పై విధానమువంటి మార్గమే ప్రాచీన భారత గణితజ్ఞుల గ్రంథములో నున్నది. అ. న.

గురుడు : సౌరకుటుంబములోని మూర్తులన్నింటి కంటె పెద్దది గురుగ్రహము. దీని ద్రవ్యరాశి మిగిలిన గ్రహముల ద్రవ్యరాశుల మొత్తముకంటె సుమారు $2\frac{1}{2}$ రెట్లు అధికము. దీని తలముయొక్క ఆకర్షణబలము భూమ్యాకర్షణబలముకంటె సుమారు 2·64 రెట్లు హెచ్చు. కనుక భూమిపై 150 గ్రాములు తూగు వస్తువు గురులోకములో అంతకంటె చాల ఎక్కువ తూగును.

గురుగ్రహకక్ష్య భూకక్ష్యకు వెలుపల ఉండుటచే, షడ్భాంతరములో ఉన్నప్పుడు గ్రహమును రాత్రియంతయు క్షితిజముపైన చూడవచ్చును. దీని పరిభ్రమణకాలము 12 సంవత్సరములు; పరావర్తనశక్తి (ఆల్బెడో) సుమారు 0·44. శుక్రగ్రహమువలె దీనికి కళలు లేవు.

దూరదర్శనితో చూచిన గురుబింబము ఆశ్చర్యకరముగ ఉండును. గ్రహముయొక్క నిరక్షరేఖకు సామ్య (సమాంతర) ముగ ఎరుపు పట్టకములు కనబడును. వీని నడుమనుండు ప్రదేశములకు మండలములనిపేరు. పై పట్టకముల సహాయమున భ్రమణ కాలమును గణింప శక్యమగుచున్నది. నిరక్షరేఖీయ మండలముయొక్క భ్రమణకాలము సుమారు 9 గం. 50 ని. 25 సె. మందోష్ణమండలముల భ్రమణకాలములు 9 గం. 55·1 ని.ల నుండి 9 గం. 55·9 ని.ల వరకు ఉండును. ఇందువలన వివిధ అక్షాంశములలో భ్రమణ కాలములు వేరుగ ఉండునని తెలియుచున్నది. కాని, నిరక్షరేఖ నుండి ధ్రువమువైపు పోవునపుడు భ్రమణకాలములలో ఏర్పడు మార్పులలో ఏ నియమము కన్పించదు.

పై పట్టకములలోను, మండలములలోను అప్పుడప్పుడు వర్ణములందు తారతమ్యములు చూపు మచ్చలను చూడ వచ్చును. కాని వీని రూపస్థితులలో శీఘ్రముగ మార్పు లేర్పడుచుండును. అటువంటి మచ్చలలో పేర్కొనతగినది అరుణ తిలకము. ఇది 20 డిగ్రీలు దక్షిణ అక్షాంశములో కనబడును. దీని నిడివి సుమారు 48,280 కిలోమీటరులు(30,000 మైళ్లు), వెడల్పు 11,265 కిలోమీటరులు (7,000 మైళ్లు). దీని ఆవర్తనకాలము దానిని పరివేష్టించి ఉండు వాతావరణపు పట్టకము కంటె కొంచెము అధికముగ ఉండును. దక్షిణోష్ణ పట్టకములో ఉండు చీకటి ప్రదేశమునకు దక్షిణోష్ణ సంక్షోభము అనిపేరు. దీని ఆవర్తనకాలము సుమారు 9 గం. 55 ని. 19.5 సె.



చిత్రము 146 గురుడు

గురుబింబము అంచువైపు పోనుపోను కాంతి తగ్గుచుండుట, పట్టకములు మారుచుండుట, నక్షత్రములు కనబడుట, మరుగుపడుట - వీనినుండి గురులోకము వాతావరణముతో కూడుకొని ఉన్నదని తెలియుచున్నది. దీని వర్ణమాలలో మీథేన్, అమోనియా పట్టికలను చూడ వచ్చును. వికిరణ మాపక పరిశీలనల నుండి గురులోక తాపక్రమము సుమారు - 146° (సెంటీగ్రేడు) అని తెలియవచ్చుచున్నది.

గురుగ్రహమునకు 12 ఉపగ్రహములు కలవు. వాటి వివరములు దిగువ పట్టికలో పేర్కొనబడినవి :

ఈ ఉపగ్రహములలో కడపటి ఏడు ఛాయాచిత్రముల సహాయముతో ఆవిష్కరింపబడినవి. వీటిలో 8, 9, 11, 12 ఉపగ్రహములు సవ్యగతిలో భ్రమణము చేయుచున్నవి. గురుగ్రహమునుండి చాలదూరములలో ఉండుటచే వీటి కక్ష్యలలో సంక్షోభములను చూడవచ్చును. ఇందొక ఉపగ్రహము మాతృగ్రహము వెనుకకు పోయినచో, అది కనపడదు ; అపుడు దానికి గ్రహణము పట్టును. ఈ ఉపగ్రహముల గ్రహణ కాలముల నుండియే రమర్ జ్యోతి

గురుగ్రహ ఉపగ్రహముల వివరముల పట్టిక

ఉపగ్రహము నంబరు	ఆవిష్కర్త	ఆవిష్కరింపబడిన సంవత్సరము	గురుగ్రహము నుండి దూరము (కిలోమీటరులలో)	వ్యాసము (కిలోమీటరులలో)	పరిభ్రమణకాలము		
					ది.	గం.	ని.
1	గెలిలియో	1610	4,22,000	3218 + ?	1	18	28
2	గెలిలియో	1610	6,71,000	3218 + ?	3	13	14
3	గెలిలియో	1610	10,71,000	5149 + ?	7	3	43
4	గెలిలియో	1610	18,84,000	4988 + ?	16	16	32
5	బర్నార్డ్	1892	1,81,000	160 ?	0	11	57
6	పెరిన్	1904	1,14,66000	144 ?	251	0	0
7	పెరిన్	1905	117,52,000	48 ?	260	0	0
8	మిలోట్	1908	235,19,000	24 ?	739	0	0
9	నికల్సన్	1914	236,37,000	24 ?	745	0	0
10	నికల్సన్	1938	115,75,000	24 ?	260	0	0
11	నికల్సన్	1938	225,76,000	30 ?	692	0	0
12	నికల్సన్	1951	209,21,000	?	600	0	0

ర్వేగమును కనిపెట్టెను (చూ. సౌరాతివర్తనము). అధిక కరణ సామర్థ్యము హెచ్చుగా కల దూరదర్శనిలో ఈ ఉపగ్రహ తలముల కచ్చితమైన రూపములను చూడ వచ్చును. ఉపగురు లోకములలో వాతావరణము జాడ కనపడదు. కె. ఎస్. వి. స.

గురుస్వామి పిళ్లై: ఇతడు తమిళుడు; అద్భుత గణకుడు (చూ. అద్భుతగణకులు-పు. 131). జననము 1902. మశూచివలన ఇతనికి అంధత్వము దాపురించెను. వివాహ మైనది; 5 కుమారులు, 1 కుమార్తె కలరు.



చిత్రము 147 గురుస్వామి పిళ్ళె

అద్భుతగణకులు అందరికివలె ఈతని ధారణాశక్తి కూడ గణనీయమహత్త్వము కలది. చాల పండ్ల క్రిందట అనేక స్థలములలో తనకు ఈయబడిన ప్రశ్నలను వాటి ఉత్తరములతోసహా ఇతడు మరల తు. చ. తప్పకుండ చెప్ప గలడు. ఈ గణనశక్తిని పురస్కరించికొని మధురలో మీనాక్షీ మిల్లులో ఇతనికి ఉద్యోగమిచ్చిరి. మిల్లు వ్యాపారమునకు సంబంధించిన లెక్కలను శోధించుట అతని పని. అతడు కావించిన కొన్ని అద్భుతగణనములు :

(1) కోట్లు, లక్షలు, వేలు....ఇట్లు 43 అంకెలు కల సంఖ్య ఒకటి మెల్లగా, రెండుసార్లు తమిళభాషలో అతనికి చదివి వినిపించిరి. ఆ సంఖ్యను వెంటనే కచ్చితముగ అతడు తిరిగి చెప్పగలిగెను; ఇంతేకాదు మరునాడు కూడ చెప్పగలిగెను, తలక్రిందులుగ కూడ ఒప్పజెప్పెను.

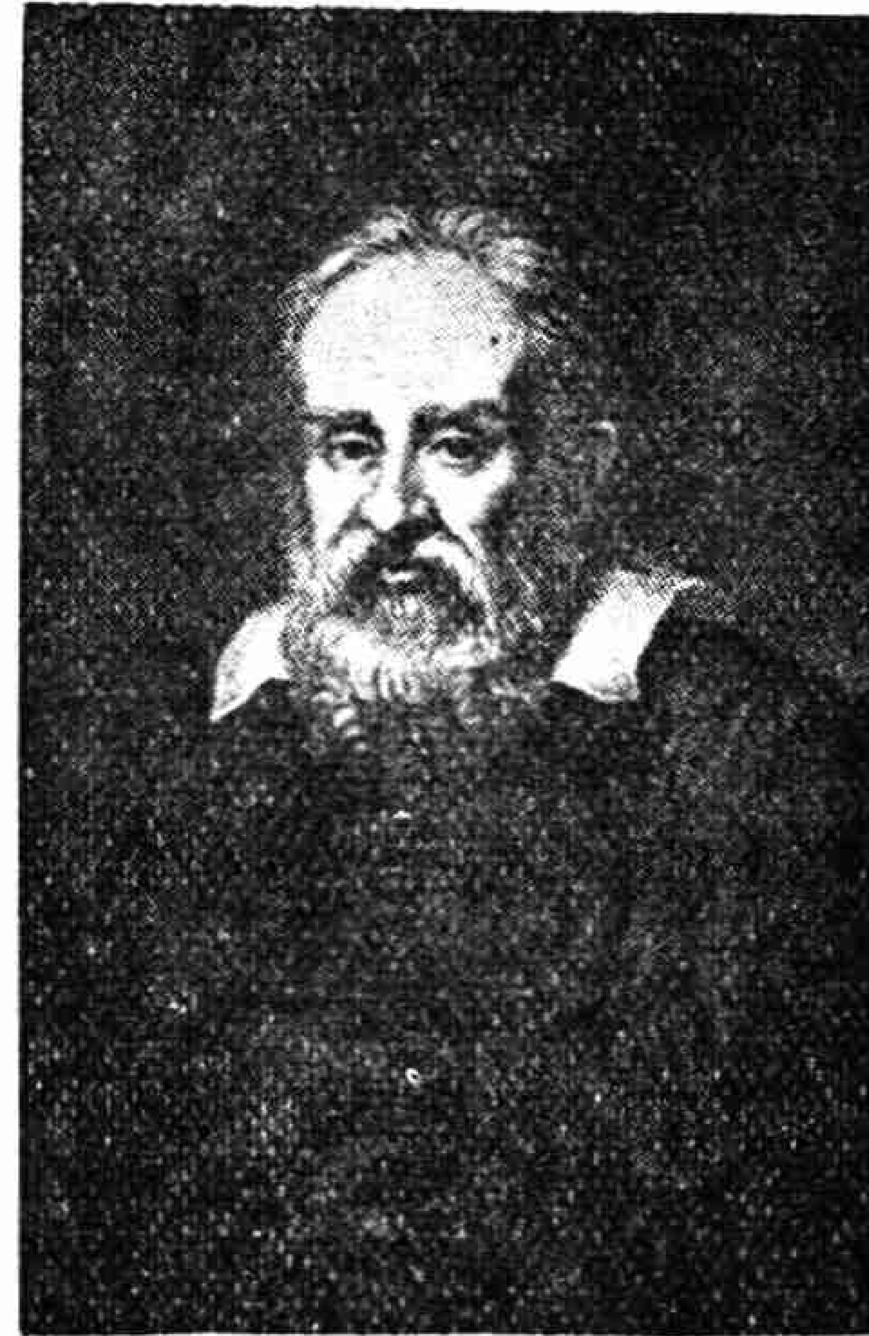
(2) $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + 5^6 + 6^7 + 7^8 + 8^9$. దీని మొత్తము ఎంత అని అడుగగా 140,279,204 అని జవాబు చెప్పెను.

(3) 760,835 ను 943,587 తో గుణింపుము అని అడుగగా గుణకారలబ్ధమును సరిగా చెప్పెను.

(4) హెన్రీఫోర్డ్ ఆర్జన ఒక నిముషమునకు పౌ. 47-14-5-3 అయినచో 5 సంవత్సరముల, 67 దినముల, 13 గంటల కాలములో అతని ఆర్జన ఎంత ఉండునో వెంటనే చెప్పగలిగెను. ఆ. స.

గెలీలియో (1564-1642): ప్రప్రథమముగ దూరదర్శనిని నిర్మించి గగన అవేక్షణలను సులభతరము చేసిన ప్రసిద్ధ ఇటలీ గణిత, ఖగోళ శాస్త్రవేత్త.

ఇతడు 1564 సం. ఫిబ్రవరి 18 వ తేదీన పీసా నగరములో జన్మించెను. వెలమ్బ్రోజ్‌లోని మతపాఠశాలలో విద్యాభ్యాసము చేసి, గ్రీక్, లాటిన్ భాషలందు, తర్కశాస్త్రమునందు, లలిత కళలందు మంచి పాండిత్యమును సంపాదించెను. గెలీలియో తండ్రి విన్‌సెన్‌జియో తన కుమారుని మతోద్యోగమున ప్రవేశ పెట్టుటకు ఇష్టపడక, వైద్య విద్యార్థిగా పీసా యూనివర్సిటీలో ప్రవేశ పెట్టెను.



చిత్రము 148 గెలీలియో

20 వ ఏటనే పీసానగర చర్చిలో ఊగులాడు దీపపు గోళమును పరిశీలించి, పరిశోధనలుచేసి 'స్థిరమైన పొడవు గల లోలక డోలనావర్తనకాలము స్థిరము; అది కంపన పరిమితిపై ఆధారపడి ఉండదు' అను లోలక మూల సూత్రమును నిర్వచించెను.

దారిద్ర్యముచే కళాశాల జీతమును చెల్లింపలేక గెలీలియో 1585 లో వైద్యవిద్య నుండి విరమించి, ఫ్లోరెన్స్ నగరమున పెక్కు శాస్త్రోపన్యాసములను చేసెను. గణిత, ఖగోళ శాస్త్రములందు ఆతని ప్రతిభను గుర్తించి టస్కనీ ప్రభువు పీసా యూనివర్సిటీలో గణిత శాస్త్ర ప్రొఫెసర్‌గా గెలీలియోను 1589 లో నియమించెను. యూనివర్సిటీ పట్టము లేకుండ 25 పండ్ల

ప్రాయములో ప్రొఫెసర్‌గ నియమింపబడుటలో అతని ప్రతిభ వ్యక్తమగుచున్నది.

'బరువైన వస్తువుకన్న తేలికఅయిన వస్తువు నెమ్మదిగా క్రిందికి పడును' అని అరిస్టాటిల్ సిద్ధాంతీకరించెను. అరిస్టాటిల్ పై సిద్ధాంతము రుజువుకాదని గెలీలియో గుర్తించెను. ప్రసిద్ధ పీసా వాలినగోపురమును గెలీలియో ఎక్కి పది పౌనుల గుండును, ఒక పౌను గుండును ఒకే సారి క్రిందికి వదలెను. అవి రెండు ఒకే సమయములో భూమిని తాకినవి. అరిస్టాటిల్ సిద్ధాంతములోని దోషము, గెలీలియో సిద్ధాంతములోని సత్యము రుజువైనవి. కాని, గెలీలియో ఏదో తంత్రముచేసినాడని కొందరు విమర్శింప దొడగిరి.

గెలీలియో చేసిన పరిశోధనలలో 'ఒక నియమిత ఎత్తు నుండి ఒక వస్తువు భూమిపైకి పడుటకు పట్టుకాలమును నిర్ణయించుట' ప్రశంసనీయమైనది. కచ్చితమైన కాలమును చూపు గడియారములు లేని రోజులలో, పీసా గోపురము పై నుండి ఒక వస్తువు భూమిపైకి పడుటకు 3 సెకనులకు మించిన కాలము పట్టునని నిర్ణయించుటలో అతని పరిశోధనా సామర్థ్యము వెల్లడియగుచున్నది.

వాలు తలములపై అనేక ప్రయోగములుచేసి 'సమగ్రముగ నునుపైన ఒక సమతలముపై ఒక వస్తువును కదిలించి వదిలిన అది అట్లు కదలుచునే ఉండును' అని గెలీలియో ప్రకటించెను. ఈ క్రియను జడత్వము (ఇనర్షియా) అందురు. ఈ భావమునే కొద్ది మార్పులతో న్యూటన్ తన మొదటి గతి సూత్రముగ ప్రకటించినాడు.

భూమి స్థిరముగ ఉన్నట్లు మన జ్ఞానేంద్రియములు చెప్పుచున్నప్పటికి, భూమి చలించుచున్నదని ప్రయోగపూర్వకముగ గెలీలియో కోపర్నికస్ సిద్ధాంతమును బలపరచెను.

గెలీలియో సిద్ధాంతములు వాస్తవములు అయినప్పటికి, వాటిని అతడు పలువురి సమక్షమున నిరూపించినప్పటికి, అరిస్టాటిల్ వాదులు అతనిని తీవ్రముగ విమర్శింప జొచ్చిరి. రాజస్థానమునందును, యూనివర్సిటీలో కూడ పరిస్థితులు తనకు ప్రతికూలములు అగుచుండుట ఆత్మాభిమాని అయిన గెలీలియో తెలుసుకొని 1592 లో తన ప్రొఫెసర్ పదవికి రాజీనామా ఇచ్చెను.

ఒక సంవత్సరము తరువాత పాడువా యూనివర్సిటీలో గణితశాస్త్ర ప్రొఫెసర్‌గా గెలీలియో నియమింపబడెను. ఇచ్చట ఖగోళ, గణితశాస్త్రములలో గెలీలియో చేసిన ప్రయోగములు, పురోభివృద్ధి అతనికి యూరప్ ఖండమంతట ఖ్యాతిని తెచ్చినవి.

గెలీలియో మొట్టమొదటి దూరదర్శనిని 1609 లో నిర్మించెను. నభోమూర్తులలో మొట్టమొదట చంద్రునిపై తన దూరదర్శనితో పరిశోధనలు జరిపెను. (చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష - పు. 78). గ్రహములు నక్షత్రముల వంటి నభోమూర్తులు కావని, చంద్రునివలె అవి బాహ్యము నుండి ప్రకాశమును పొందుచున్నవని గెలీలియో కనుగొనెను.

మందాకిని (మిల్కీవే) మేఘము కాదనియు, అనేక నక్షత్రములు దగ్గర దగ్గర గుమిగూడి యుండుటచే చూచుటకు అట్లు తెల్లని మేఘమువలె గోచరించుచున్నదని అతడు విశదీకరించెను. 1610 లో గురుగ్రహము యొక్క 4 ఉపగ్రహములను గెలీలియో కనుగొనెను. గురుని చుట్టు ఉపగ్రహములు తిరుగుచున్నట్లే సూర్యుని చుట్టు గ్రహములు తిరుగుచున్నవని భావించుటకు పై అన్వేషణ అవకాశము కలుగచేసినది.

రెండవ కాస్మో ఆహ్వానముపై 18 ఏండ్ల నుండి ఉంటున్న పాడువా యూనివర్సిటీని వీడి ఫ్లొరెన్స్ నగరములో స్థిరనివాసము ఏర్పరచుకొనెను. తరువాత చంద్రునివలెనే శుక్రుడు కూడా కళలు ప్రదర్శించుచుండునని కనుగొనెను. అటుపిమ్మట శనిగ్రహము ప్రదర్శించు అద్భుత దృశ్యమును అవేక్షించెను (చూ. పు. 78).

సూర్యగోళమును పరీక్షించి దాని ఉపరితలముపై ఉన్న మచ్చలను కనుగొనెను. ఆ సూర్యకళంకములను అతి జాగ్రతతో పరిశీలించి సూర్యుడు ఆత్మప్రదక్షిణము ఒనర్చుచుండెనని గెలీలియో చెప్పెను.

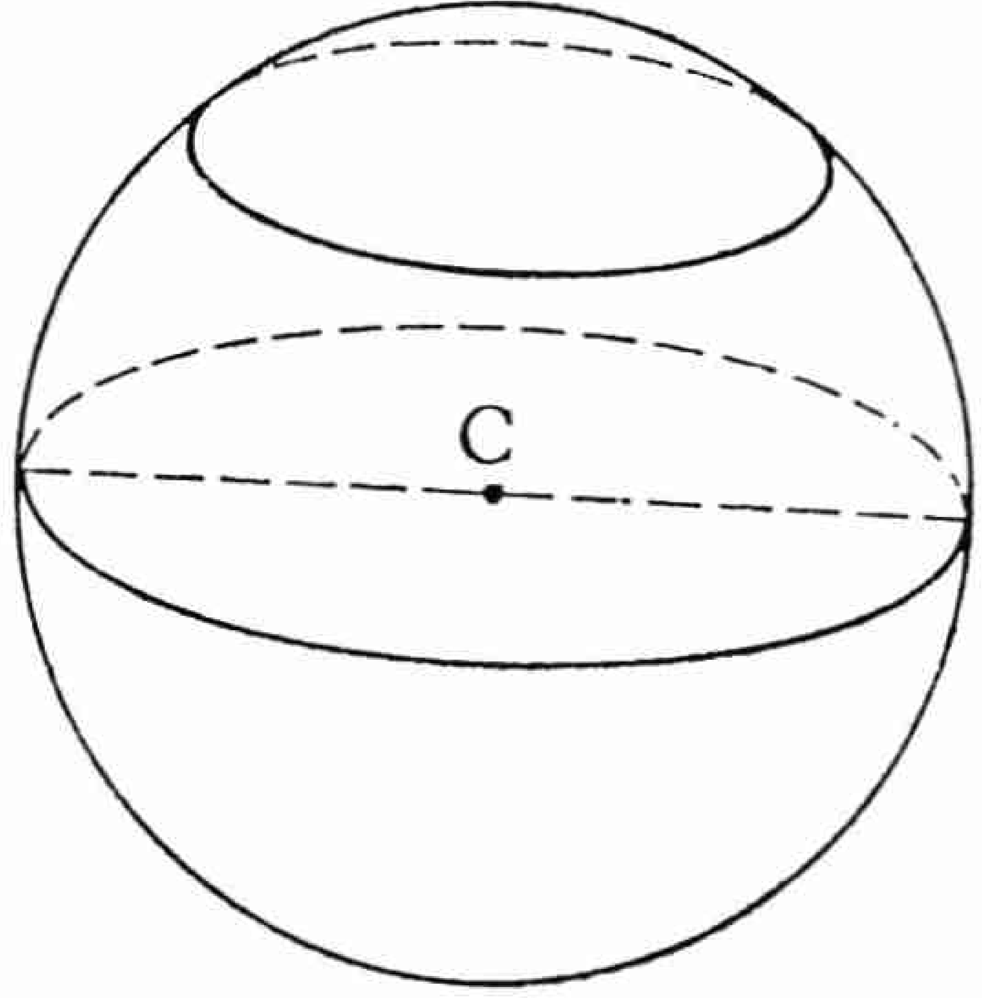
సూర్యునికి కళంకములను గెలీలియో ఆరోపించి నందులకు క్రైస్తవ మతాధికారులు మరింత కోపిష్టులైరి. గెలీలియో తన సిద్ధాంతములను ప్రచారము చేయరాదని 1616 లో పోప్ శాసించెను. 1623 లో గెలీలియో మిత్రుడు బార్బారినో పోప్ పీఠము ఎక్కెను. కొత్త పోప్ తనపై ఉన్న ఆంక్షను తొలగించునని తలంచి, 'భూ, సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతము' లపై ఒక ఉత్తమ గ్రంథమును 1632 లో ప్రచురించెను. మతద్రోహమును తలపెట్టినందులకు గెలీలియోకు ఆజన్మ కారాగార వాసమును ఆ మతాధికారులు విధించిరి.

గెలీలియో దృష్టి క్రమేణ తగ్గిపోవ మొదలిడినది. ఇన్ని కష్టములలో ఉండికూడ ఖగోళ, గతిశాస్త్రములను సంభాషణ రూపములో 1636 లో పూర్తి చేసెను. ఆ గ్రంథములో తన జీవితకాలములో 'చలనము', 'త్వరణము', 'గురుత్వాకర్షణము' లపై తాను చేసిన పరిశోధనా ఫలితములను గెలీలియో పేర్కొనెను.

1637 లో గెలీలియో పూర్తిగా అంధుడయ్యెను. మతాధికారుల నిర్బంధముననే 1642 లో 78 వ ఏట గెలీలియో మరణించెను. మతాధికారులు గెలీలియో భౌతికదేహమును మతావరణలో పూడ్చరాదని, అతని మరణమునకై సంతాపసభను జరుపరాదని, శిలావిగ్రహమును ప్రతిష్ఠింపరాదని శాసించిరి. పా. ల. నా.

గోళము : ఒక అర్ధవృత్తము తన వ్యాసమును అక్షముగా చేసికొని దానిచుట్టు పరిభ్రమించుటచే ఏర్పడు ఘనరూపమును ' గోళము ' అందురు.

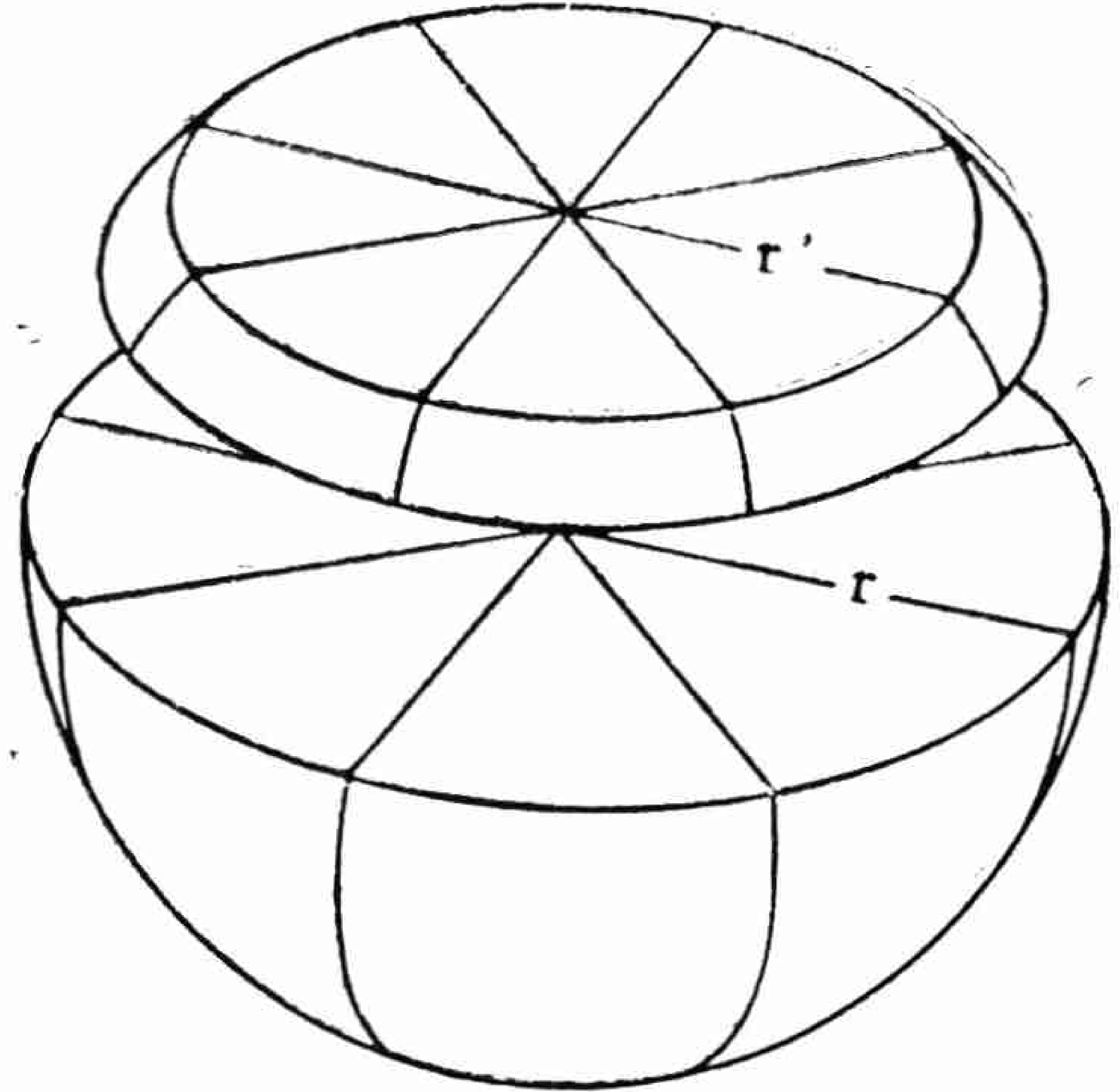
ఒక స్థిరబిందువు C నుండి స్థిరదూరములో ఉండు అన్ని బిందువులు ' గోళము 'పై ఉండును. ఆ స్థిరబిందువును గోళ కేంద్రము అందురు. ఆ స్థిర దూరమును గోళ వ్యాసార్ధము అందురు.



చిత్రము 149 గోళము

గోళ వ్యాసార్ధము r అయిన ఆ గోళ ఉపరితల వైశాల్యము $S = 4\pi r^2$; ఘనపరిమాణము $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ అగును.

గోళమును ఒకే ఒక బిందువువద్ద స్పృశించు తలమును స్పర్శతలము అందురు. గోళకేంద్రమును, ఆ స్పర్శబిందువును కలుపు వ్యాసార్ధమునకు పై స్పర్శతలము లంబముగ ఉండును. ఒకటికన్న ఎక్కువ బిందువులవద్ద గోళమును ఛేదించు తలము ఆ గోళమును వృత్తముగ ఛేదించును. ఈ తలము గోళకేంద్రము నుండి పోవుచో ఆ వృత్తమును 'గురువృత్తము' (గ్రేట్ సర్కిల్) అని, లేనిచో, 'లఘువృత్తము' (స్మాల్ సర్కిల్) అని అందురు. రెండు సమానాంతర తలములు గోళమును ఛేదించినచో ఆ తలముల మధ్యఉండు గోళీయతలమును ' మండలము ' (జోన్) అని అందురు. మండలము ఎత్తు అనగా ఆ సమానాంతర తలముల మధ్యదూరము h అయిన ఆ మండల వైశాల్యము $2\pi rh$ అగును. ఇచ్చట r అనునది గోళ వ్యాసార్ధము. ఆ తలములను, ఆ మండలమును మేరగాగల ఆక్రమింపబడు ఘనరూపమును గోళఖండము అందురు. ఈ గోళఖండము యొక్క ఘనపరిమాణమును $V = (\pi h/6)(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ అను సూత్రముతో కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట r_1, r_2 లు పీఠవృత్తముల వ్యాసార్ధములు. దీనిని $V = (h/6)(B_1 + 4M + B_2)$ అను ప్రిజ్మోయిడల్ ఫార్ములా ద్వారా కూడా కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట B_1, B_2 లు రెండు పీఠవృత్తముల వైశాల్యములు; M అనునది ఆ రెండు పీఠముల మధ్యచ్ఛేదన వైశాల్యము.

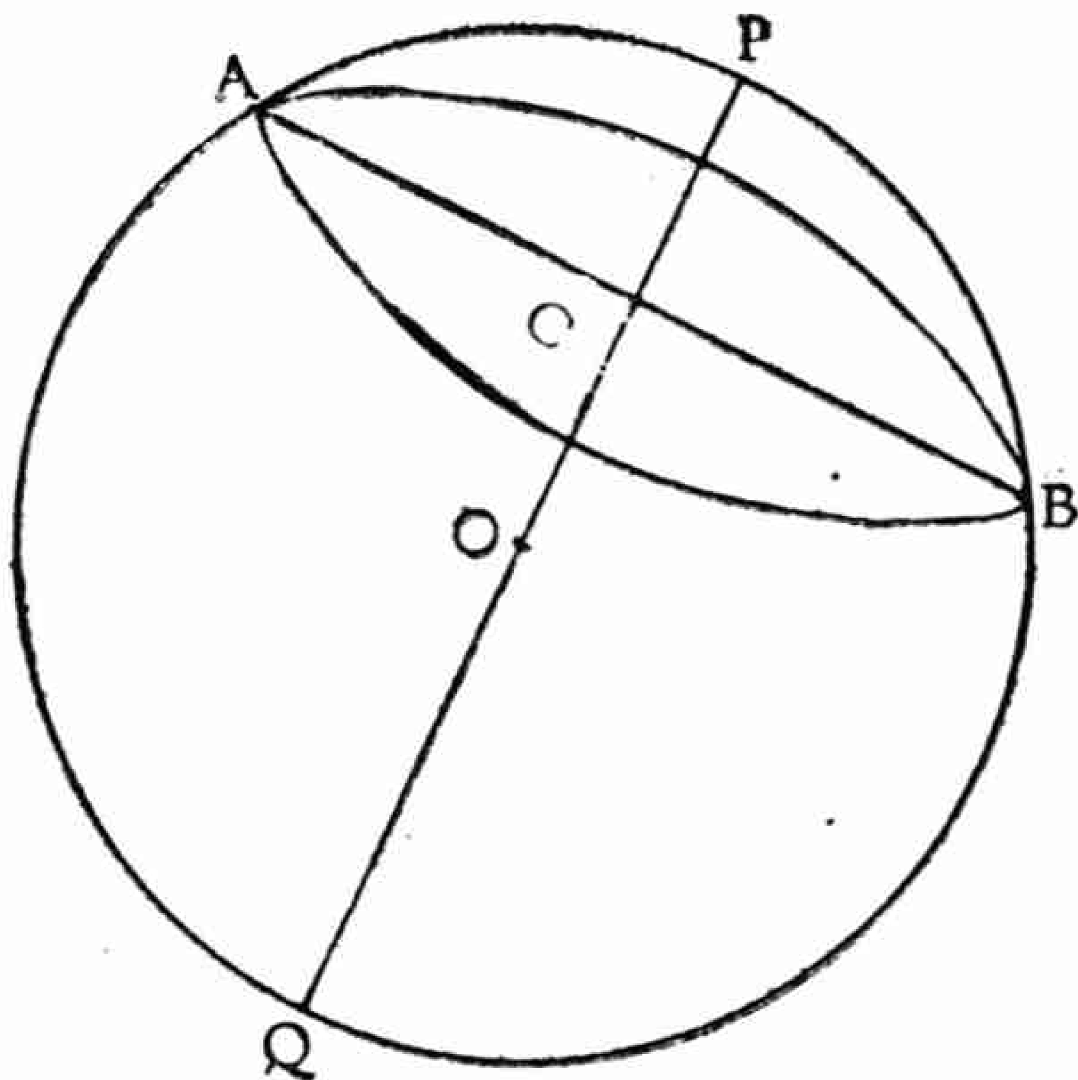


చిత్రము 150 గోళఖండము

గోళము యొక్క ఏ గురువృత్తము అయినను దానిని రెండు అర్ధగోళములుగ విభజించును. మరియొక (రెండవ) గురువృత్తము ఆ అర్ధగోళమును రెండు చంద్రరేఖలుగ ఛేదించును. ఆ చంద్రరేఖల శీర్షములు పై రెండు గురువృత్తముల ఛేదన బిందువులవద్ద ఉండును; వాని వైశాల్యములు ఆశీర్ష బిందువులవద్ద గురువృత్తమేరలకు గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణములకు అనుపాతముగ ఉండును. మూడవ గురువృత్తము తిరిగి ప్రతి చంద్రరేఖను రెండు గోళీయ త్రిభుజములుగ ఖండించును. అనగా గోళముయొక్క ఉపరితలముపైన A, B, C అను మూడు బిందువుల (మూడును ఒకే గురువృత్తము పైన ఉండకూడదు)ను గురువృత్త చాపములచే కలుపగా ఏర్పడు చిత్రము ' గోళీయ త్రిభుజము '. ఆ వృత్తచాపములను ఆ త్రిభుజ భుజములు అందురు. గోళీయ త్రిభుజ భుజములు BC, CA, AB లను అవి గోళకేంద్రము వద్ద చేయు a, b, c అను కోణములచే కొల్తురు (చూ. గోళీయ త్రికోణమితి). పా. ల. నా.

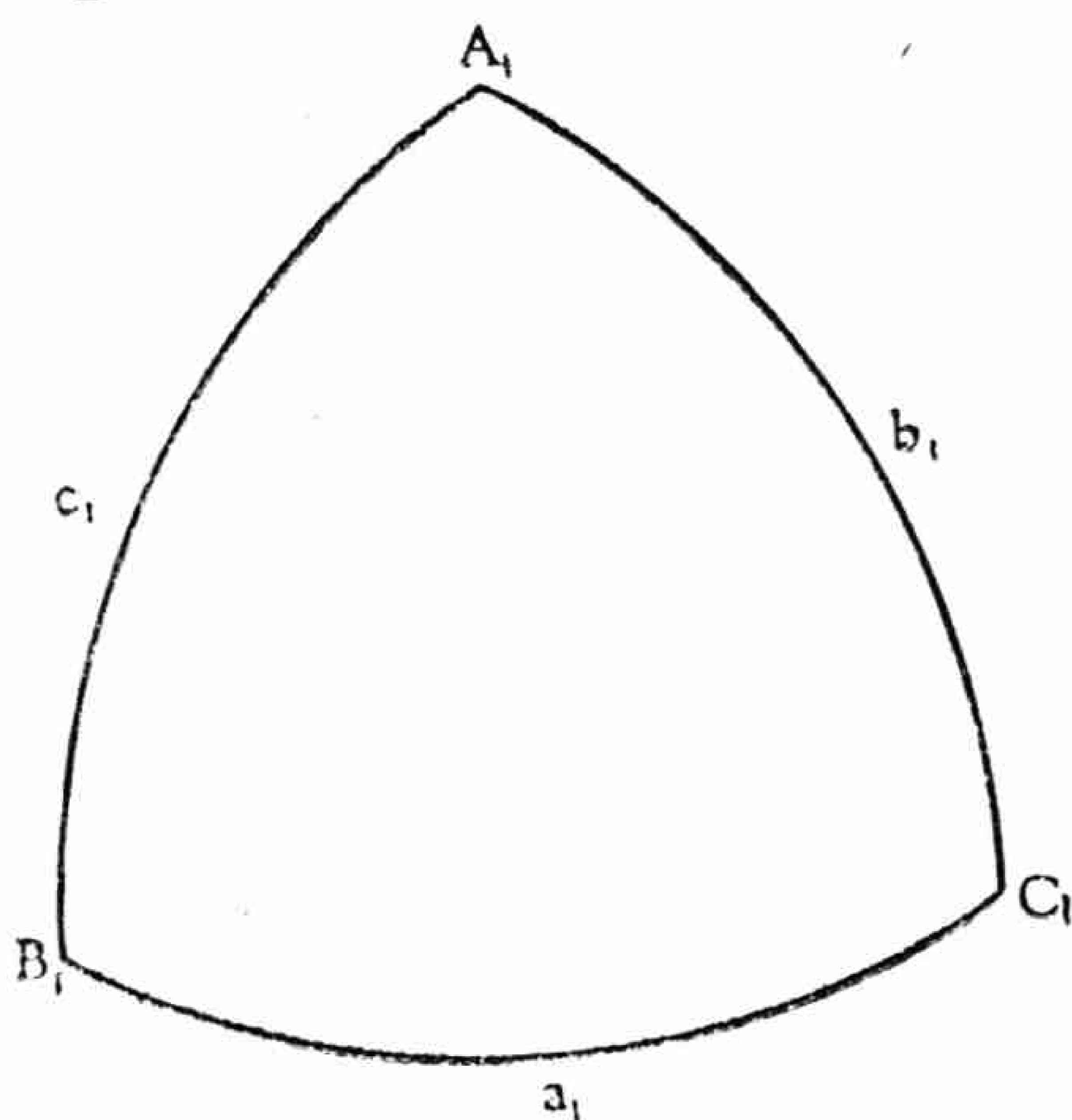
గోళీయ త్రికోణమితి : అక్షము - ధ్రువములు : AB సమతలము గోళకేంద్రముగుండా వెళ్ళక గోళమును ఖండింప నిమ్ము. అప్పుడు ఛేదక వృత్తమునకు లఘువృత్తము అని పేరు. AB తలమునకు OC లంబము అయినచో OC, OA స్థిరరాశులు. O, C స్థిరబిందువులు.

$AC^2 = OA^2 - OC^2$. ఇది స్థిరరాశి. కాబట్టి AB ఒక వృత్తము అని తెలియుచున్నది. C బిందువు లఘువృత్తము AB యొక్క కేంద్రము. OC ని ఇటు అటు పొడిగించినచో అది గోళమును P, Q బిందువులలో ఖండించును. PQ గోళ వ్యాసము. దీనిని AB తలము, లేదా వృత్తము యొక్క అక్షము అనియు, PQ లను ధ్రువములు అనియు చెప్పుదురు.



చిత్రము 151

గోళీయ త్రిభుజము: ఒక గోళ తలమున మూడు గురువృత్తములు AB, BC, CA లచే ఏర్పడు త్రిభుజమునకు గోళీయ త్రిభుజము అని పేరు. O గోళకేంద్రము, AB, BC, CA లు గురువృత్తముల



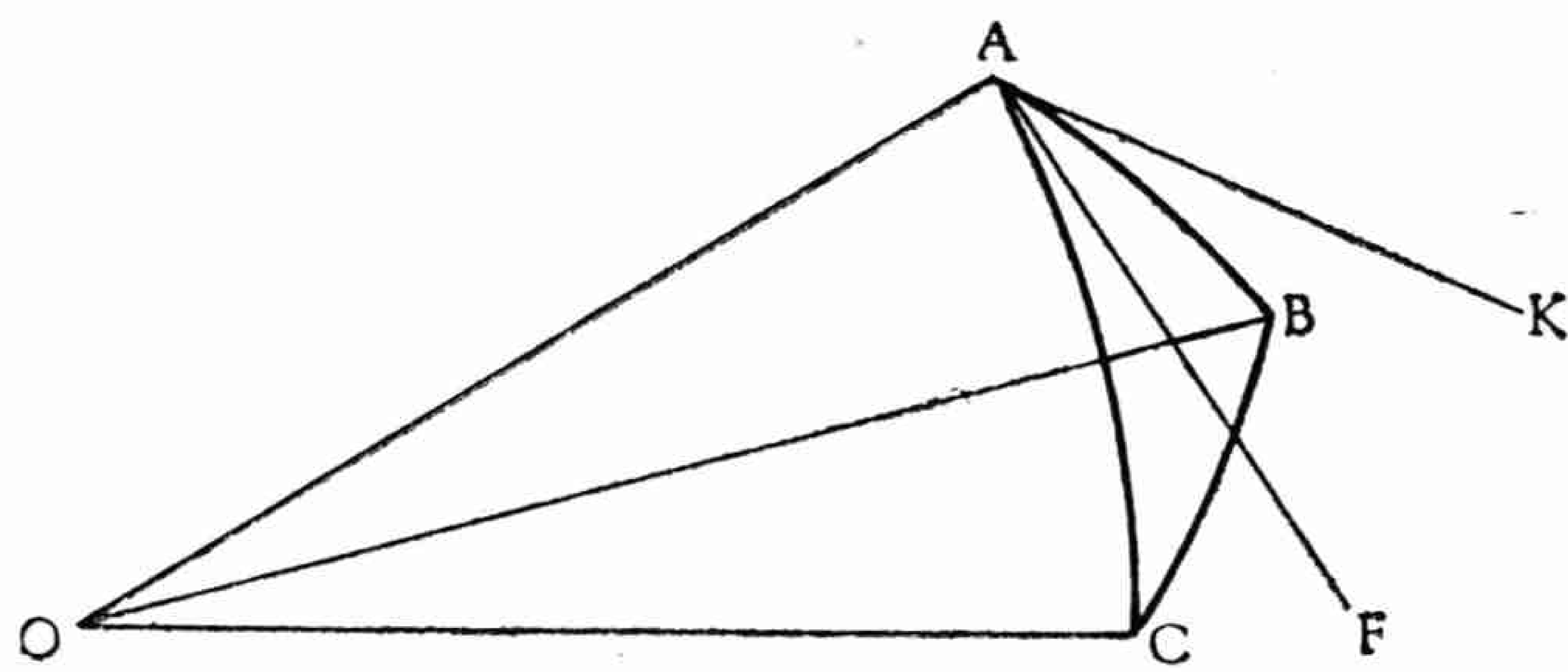
చిత్రము 153 ధ్రువీయ త్రిభుజము

యొక్క చాపములు. ABC యొక్క భుజములు AB, BC, CA లను c, a, b, అని గుర్తింపవచ్చును. కోణము A, చాపములు AB, AC లకు A వద్ద ఉండు స్పర్శరేఖలు AK, AF ల మధ్య ఉండు కోణము. ∠ BOC యొక్క విలువ చాపము (ఆర్క్) BC చే గుర్తింపబడును. గోళ వ్యాసార్ధము R అయినచో, ∠ BOC = BC/R (కోణీయ మానము). సాధారణముగ R = 1 అని తీసికొనుట పరిపాటి. గోళీయత్రిభుజము కొలతలు అన్నియు కోణములచే గుర్తింపబడును (చూ. చిత్రము 152).

ధ్రువీయ త్రిభుజములు: A వైపున ఉండు భుజము BC యొక్క ధ్రువము A_1. ఇట్లే B_1, C_1 లను తీసికొనుము. A_1 B_1 C_1 ఒక గోళీయ త్రిభుజము (చూ. చిత్రము 153). దీనిని ABC త్రిభుజముయొక్క ధ్రువీయ త్రిభుజము అని చెప్పుదురు. కొలతలు పరస్పర పూరకములు.

$$a_1 = 180 - A; \qquad A_1 = 180 - a$$
$$b_1 = 180 - B; \qquad B_1 = 180 - b$$
$$c_1 = 180 - C; \qquad C_1 = 180 - c$$

ఒక గోళీయ త్రిభుజముయొక్క భాగములకు సంబంధించు సూత్రములు తగిన మార్పులతో ధ్రువీయ త్రిభుజము యొక్క భాగములకు అన్వయించును. త్రిభుజము A_1 B_1 C_1 యొక్క ధ్రువీయ త్రిభుజము ABC అని సులభముగ తెలియుచున్నది.



చిత్రము 152 గోళీయ త్రిభుజము

గోళీయ త్రిభుజముల లక్షణములు:

ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజముల సంకలనము మూడవ భుజమునకంటె ఎక్కువ.

ఒక త్రిభుజముయొక్క మూడుకోణములు రెండు లంబకోణములకంటె ఎక్కువ, ఆరు లంబకోణముల కంటె తక్కువ.

రెండు భుజములు సమానములు అయినచో వాటి ఎదుటి కోణములు సమానములు. విపర్యయముగా సమాన కోణములకు ఎదురుగ ఉండు భుజములు సమానములు.

కొన్ని సంబంధ సూత్రములు-భుజములు, కోణములు :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

ఒక త్రిభుజమునందు a, C, b, A లను క్రమముగా తీసికొనినచో a బయటి భుజము, b లోపలి భుజము, C లోపలి కోణము, A బయటి కోణము అయినచో

$$\cos b \cos C = \cot a \sin b - \cot A \sin C$$

త్రుపీయ త్రిభుజము నుండి లభించు సూత్రములు పొందుటకు a, b, c, A, B, C లకు బదులు $180-A$, $180-B$, $180-C$, $180-a$, $180-b$, $180-c$ క్రమముగా ప్రతిక్షేపించవలయును :

$a+b+c=2s$ అయినచో

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin s\,.\,\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}$$

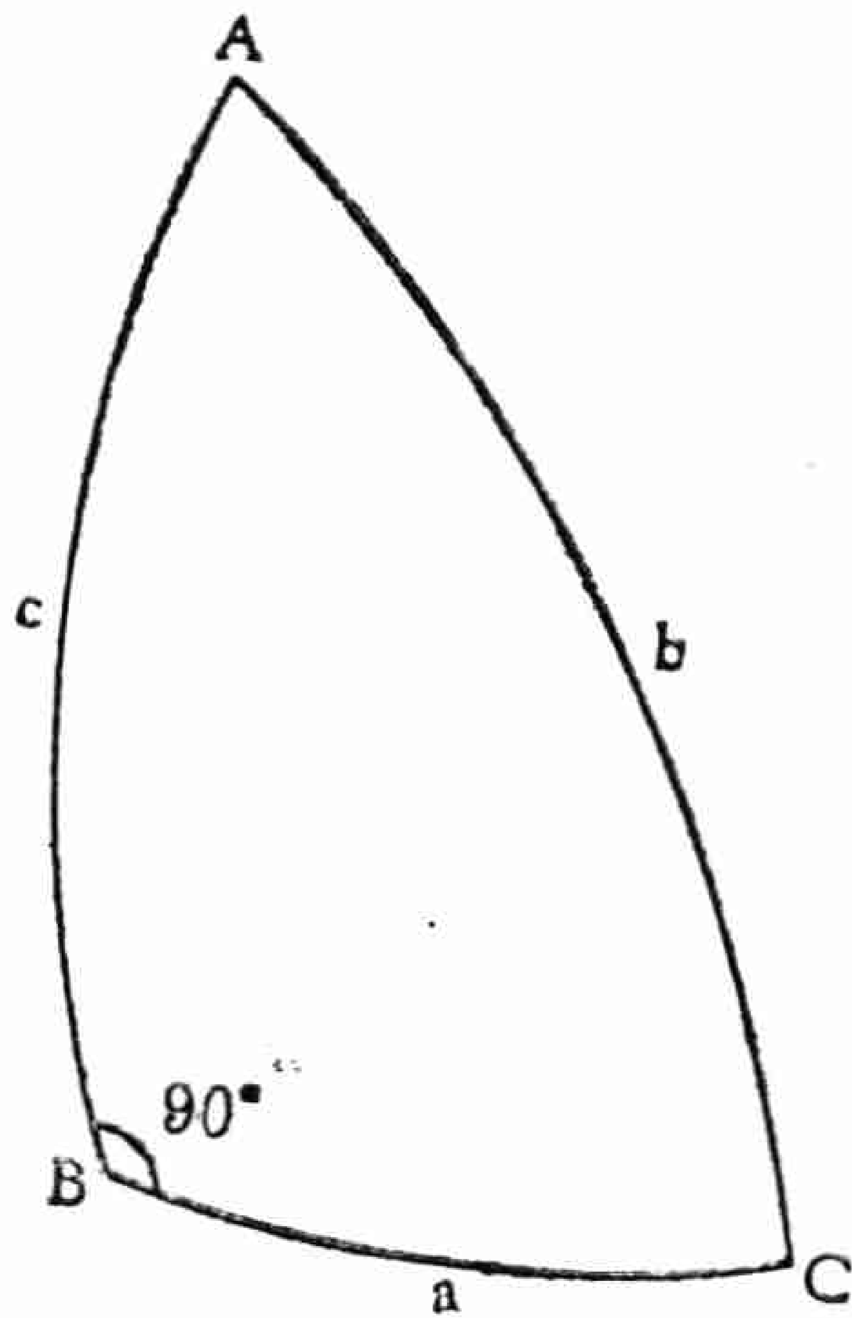
$A+B+C=2S$ అయినచో

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}$$

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}$$

ఇట్టి సూత్రములు అనేకములు కలవు. వాటిని ప్రత్యేక గోళీయ గణిత గ్రంథములలో కనుగొన వచ్చును.

లంబకోణ త్రిభుజము : ఒక గోళీయ త్రిభుజమునందు ఒక కోణములంబ కోణము అయినచో అది లంబకోణ గోళీయ త్రిభుజము అగును. ABC త్రిభుజమునందు B లంబకోణము. దాని ఎదుటి భుజము b కర్ణము. ఇట్టి త్రిభుజము యొక్క భాగముల సంబంధమును నేపియర్ క్రింది విధమున చిత్రించెను.



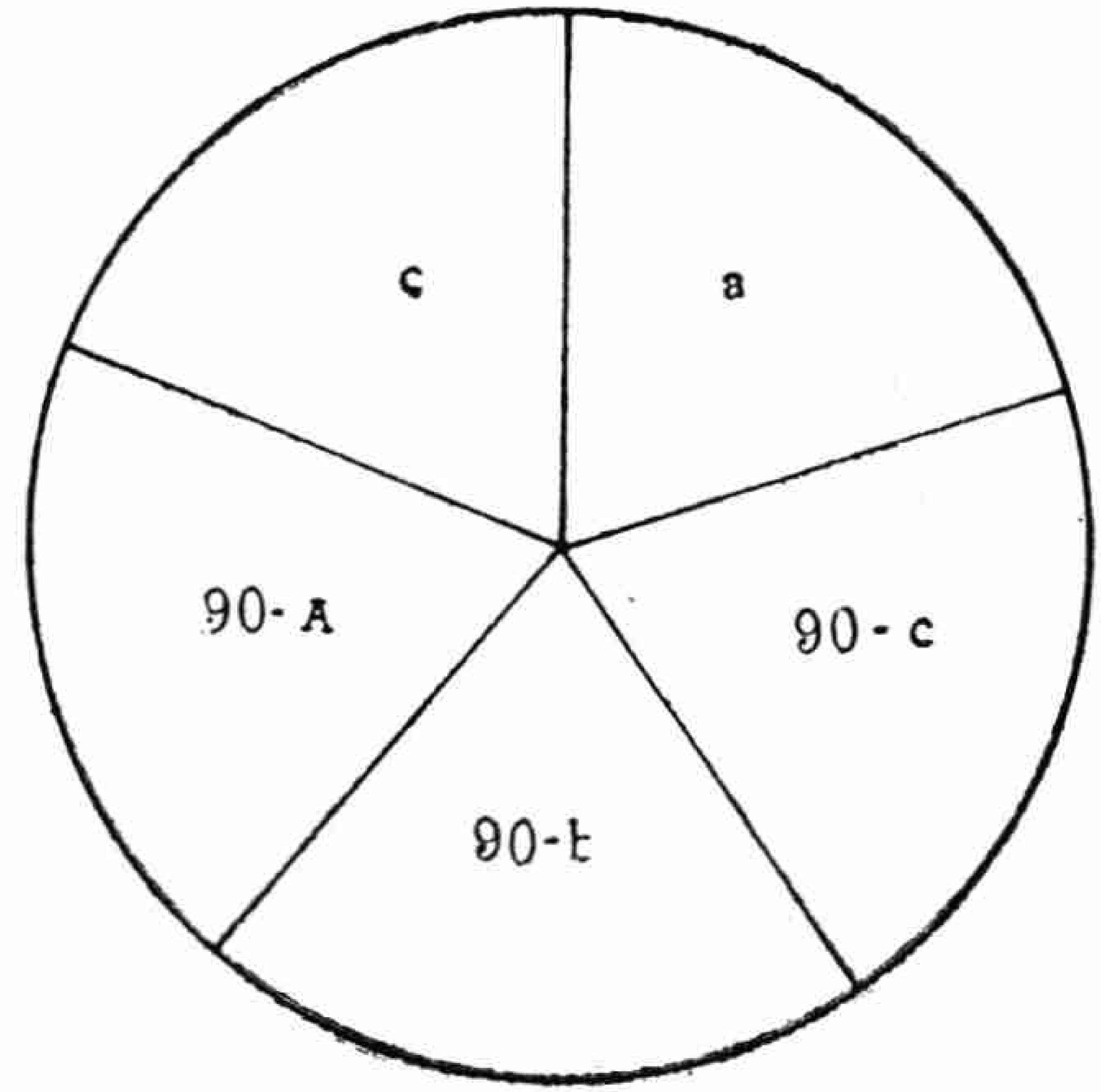
చిత్రము 154
లంబకోణగోళీయ త్రిభుజము

చిత్రము 155 లో త్రిభుజ భాగములకు సంబంధించిన అంశములు అమర్చబడి ఉన్నవి. లంబకోణము B ని విడిచి పెట్టి, క్రమముగా భాగములను $a, c, 90-A, 90-b, 90-c$ అని తీసికొని క్రింది సూత్రముల ప్రకారము కావలసిన ఫలితములను సాధింపవచ్చును.

మధ్యభాగము యొక్క జీవ =
పార్శ్వముల స్పర్శజీవల లబ్ధము =
ఎదుటికోటిజీవల లబ్ధము

ఆ విధముగ

$$\sin a=\tan c\tan(90-c)$$
$$=\cos(90-A)\cos(90-b)$$



చిత్రము 155

ఏ భాగమునైనను మధ్యభాగముగా తీసికొని, సూత్రములు వాడవచ్చును. ఎస్. సూ. ప్ర.

గోవిందస్వామి : ఆర్యభట సంప్రదాయమందు అత్యంత గౌరవపాత్రుడు గోవిందస్వామి. శంకరనారాయణుడు తన లఘుభాస్కరీయ వ్యాఖ్యానమందు ఇతని గ్రంథముల నుండి తరుచుగ శ్లోకముల నుద్ధరించిఉన్నాడు. ఈతని నామ నిర్దేశము ఎల్లప్పుడును తదనుయాయులచే ఆచార్యపదపూర్వకముగ చేయబడుచుండెడిది. నీలకంఠుడు కూడ ఇతనిని బహుమానపురస్సరముగ పేర్కొనుచుండెడివాడు. శంకరనారాయణుని కాలము క్రీ. శ. 869 గనుక గోవిందస్వామి క్రీ. శ. 800 - 850 మధ్య జీవించియుండ వచ్చునని ఊహించవచ్చును.

ఈతని గ్రంథములలో భాస్కరాచార్య-II మహాభాస్కరీయమునకు వ్రాయబడిన వ్యాఖ్యానము, పారాశర హోరా వ్యాఖ్యానము, గోవింద పద్ధతి, గోవిందకృతి యనునవి కొన్ని. ఇందు మహాభాస్కరీయ వ్యాఖ్యానమొక్కటియే ప్రత్యుద్ధరింపబడి ప్రచురింపబడినది. నీలకంఠుని, శంకరనారాయణుని, నారాయణుని గ్రంథములందు కన్పట్టు అసంఖ్యాకములగు ఉద్ధృత శ్లోకముల వలన ఈతని ఇతర గ్రంథముల నామములు మట్టుకు తెలియ వచ్చినవి. సరస్వతి

గాస్ (1777 - 1855) : ఆర్కిమీడీజ్, న్యూటన్‌లతో పాటు గాస్ అను జర్మనీ గణితజ్ఞుడు కూడ సార్వకాలిక గణితవిద్యావిశారదుడు. అతడు చాల పేద కుటుంబమున జన్మించెను. అతని తండ్రితాతలు తోట పనివాండ్రు.

చాల చిన్నతనమునందే ఈతని బుద్ధ్యౌజ్జ్వల్యము బయట పడినది. మూడేండ్ల వయసులో నున్న గౌస్ తన తండ్రి వ్రాసి పెట్టిన జీతపు పట్టికలో ఉన్న మొత్తము తప్పని చూపించెను. మాటలు నేర్చుటకు పూర్వమే లెక్కలు నేర్చుకొనినానని హాస్యపూర్వకముగ తన్ను గురించి గౌస్ చెప్పుకొను చుండెడి వాడు. పది ఏండ్ల వయస్సులో ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొత్తమును స్వతంత్రముగా గణించ గలిగెను. పదునా రేండ్ల ప్రాయమున యూక్లిడ్ జ్యామితిని సాధించి, యూక్లిడేతర జ్యామితులను గురించిన భావములను గుర్తించెను. మూడేండ్ల పాఠశాల చదువులో ఆయ్‌లర్, లాగ్రాన్జ్ గ్రంథములందు, ముఖ్యముగా న్యూటన్ ఉపజ్ఞమగు ప్రిన్సిపియా గ్రంథమందు పారంగతుడయ్యెను. అతని గణితలోకప్రసిద్ధికి హేతుభూతమైన అంకవాదమునందు 19 ఏండ్లనాడే పరిశోధనలు ప్రారంభించి, గౌస్ ద్విఘాత వ్యుత్క్రమతా నియమమును కనుగొనెను. ఈ నియమమునకు అంకగణిత రత్నమని ప్రసిద్ధి. ఈ పర్యవసానమునకు ఇతడు 6 ఉపపత్తులను కల్పించెను. నాటికి ఒక ఏడాది వెనుక కనిష్ఠ వర్గ విధానమును కనుగొని, 11 ఏండ్లకు పూర్వము ఆ విధానమునే స్వతంత్రముగా కనుగొనిన లెజాండర్‌తో ఈ ఆవిష్కరణ కీర్తిని గౌస్ పంచుకొనినాడు. సాంఖ్యక శాస్త్రముతో పరిచయముగల వారికి ఇతడు చర్చించిన ఘంటాకృతికల ప్రమాదనార్మల్ విభజనవక్రము తెలియనిది కాదు.



గౌస్
చిత్రము 156

20 ఏండ్ల ప్రాయము రాకమునుపే గౌస్ ఇంకొక సుప్రసిద్ధ ఆవిష్కరణమును చేసినాడు. కేవలము రూలర్, కాంపస్ సాధనములతో 17 భుజములు గల క్రమబహుభుజిని నిర్మించుటకు విధానమును కనుగొనెను.

ఈ కాలమందే గణితశాస్త్ర చరిత్రలోకెల్ల అమూల్యమగు తన డైరీని గౌస్ వ్రాయ నారంభించెను. ఇతడు మరణించిన 40 ఏండ్లకు ఈ దినచర్యాగ్రంథము ప్రచారములోనికి వచ్చినది. ఇందు అతని 146 ఆవిష్కరణముల సంగ్రహ సంఖ్యానములు కలవు. దీనివలన 19 వ శతాబ్దమందు వెలుగు చూచిన గణిత విజ్ఞానములో చాల భాగము, ఉదా: దీర్ఘవృత్తఫలములు, యూక్లిడేతర జ్యామితివంటి ప్రకరణములు గౌస్ ఆకాంక్షించి ఉన్నట్లు మనకు విశదమగుచున్నది. కాని ఈ ఆవిష్కరణములను ఆతడు ప్రచురించక మిన్నకుండెను. దీనికి కారణము ఆతనికి కీర్తికాంక్ష లేకుండుట. ప్రచురణకు పూర్వమాతడు తన ఆవిష్కరణలను పునశ్శోధించి, మెరుగుపెట్టి, వాటికి సంపూర్ణరూపమును ఇచ్చుటయందు బద్ధాదరుడై ఉండుట మరియొక కారణము. అతడు తాను కనుగొన్న గణిత ఫలములను ప్రచురించి ఉండినచో నేడున్న స్థితికి ఏబదియేండ్ల పురోగతిని గణితశాస్త్రము అధిగమించి ఉండెడిది. n వ తరగతికి చెందిన ప్రతి సమీకరణమునకు వాస్తవ, సంకీర్ణ, అభ్యస్తమూలములతో సహా n మూలములు ఉండు నను బీజగణిత విషయమును ఈతడు తన డాక్టరేట్ పరిశోధన పత్రమున చర్చించెను.

అంకవాదమునకు అంకిత మొనర్పబడిన గ్రంథము ఈతని ప్రౌఢతమరచన. దీనిపేరు డిస్క్వెజిష యోనిస్ అరిత్మెటికా. ఉపన్యాస సమగ్రతకు, అనుశీలన సంపూర్ణత్వమునకు ఆకరములగు ఆర్కిమిడీజ్ గ్రంథములతో, న్యూటన్ ప్రిన్సిపియాతోపాటు వన్నెకెక్కిన దీ గ్రంథము. అందువలన పఠన, అవబోధనలకు చాల దుర్గమమైన గ్రంథము.

ఉన్నత అంకగణితమునందే కాక, ఇతడు 1811 లో సంకీర్ణచలరాశి సిద్ధాంతమునందు కూడ మూలభావములను కనిపెట్టెను. ప్రత్యవేక్షణాంశ సామగ్రివలసినంతగా లేని కాలముననే గౌస్ సిరీస్, పాలాస్ అను లఘుగ్రహముల కక్ష్యలను గణించుటయే కాక, అవి ఆకసమందెక్కడ చక్షుర్గోచరమగునో అట్టి నిర్దేశకములను కావించెను.

ఈతని నిర్వాహము వలన పెంపుగన్న ఇతర క్షేత్రములు: అనంత పరంపరలు, ఎలిప్సాయిడ్‌ల పరస్పరాకర్షణ, తలముల సిద్ధాంతము, విద్యుద్గతిశాస్త్రము, చాక్షుషశాస్త్రము మొదలైనవి.

గౌస్ మహత్త్వము గొప్పగా ప్రశంసింపబడినది. తన కాలమందలి గణితజ్ఞకోటిలో తలమానికమని అతడు పరిగణింపబడుచుండెడివాడు, గాటింజన్ వేధశాలకు దర్శకుడుగా పనిచేయుచు ఆ విశ్వకళాపరిషత్తు విద్యార్థులకు గణితోపన్యాసముల నిచ్చుచుండెడివాడు. అ. న.

గ్రహణములు : గగన దృశ్యవికారములలో గ్రహణములు ప్రతి మానవుని దృష్టిని ఆకర్షించి, విస్మయము పొందించును. ప్రాచీన కాలమునం దివి మానవులను భయభ్రాంతులుగ చేసెడివి. ఆ దినములలో గ్రహణముల సంభవమును గురించి పలువురు పలు విధములుగా భావించెడివారు.

రాహు, కేతువులు సూర్య చంద్ర బింబములను కబళించుటచే గ్రహణములు సంభవించునని కొందరు తలంచెడివారు. మరికొందరు భయంకర పన్నగమేదో సూర్య చంద్ర బింబములను మింగివేయుటచే గ్రహణములు సంభవించుచున్నవని భావించెడివారు. అందుచేతనే, వారు గ్రహణములు సంభవించు మాసములను నాగమాసములనెడివారు.

రాహు కేతువులను, లేదా ఆ నాగమును భయపరచి, సూర్య చంద్రులకు విముక్తిని కలుగచేయుటకు, గ్రహణ సమయమున వారు డప్పులు, ఢంకాలు వాయించుచు, బాణ విహారము చేసెడివారు. ఈ విధముగ చేయనివారిని రాజులు శిక్షించెడివారట.

కాల్డియన్‌లు, అసిరియన్‌లు, బాబిలోనియన్‌లు ఖగోళ విద్యాపారంగతులు. గ్రహణ ఆవృత్తికాలము 18 సంవత్సరముల 10 లేదా 11 దినములు అని వారు అనుభవముచే సిద్ధాంతీకరించిరి.

వరాహ మిహిరాచార్యుడు తనకు పూర్వగులగు గర్గ, వసిష్ఠ, దేవల, వ్యాస, వృద్ధ గర్గ, మను మొదలగు జ్యోతిష్కుల సిద్ధాంతములను వివరించి యున్నాడు. ఋగ్వేదము (5-40-9)లో గ్రహణ విషయము వివరింపబడి యున్నట్లు వ్రాసియున్నారు.

"యం వై సూర్యం స్వర్భానుః తమసా అవిధ్యత్ ఆసురః
అత్రయః తం అను అవిందన్ నహి అన్యే అశక్నువన్"

'అసురుడగు స్వర్భానువు, హే సూర్యా, నిన్ను తమస్సుచే ఆవరించినపుడు లోకములు భ్రమించి ఇతరులను కనుగొనజాలవు'.

ఈ మంత్రమువలన గ్రహణమునకు కారణము ఛాయ యని తెలియుచున్నది.

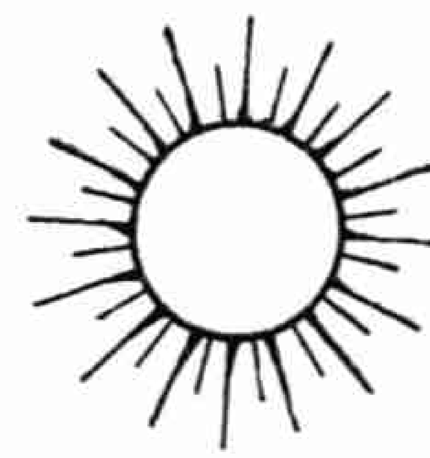
సూర్యగ్రహణములు : సంవత్సరములో ఒక దినమున దివ్యతేజముతో ప్రకాశించుచున్న సూర్యుడు క్రమేణ తేజమును కోలుపోయి అసంపూర్ణ బింబమగును. కొన్ని సమయములందు పూర్తి బింబము అదృశ్యమగును. అట్టి సమయములందు మనలను కారుచీకటులు క్రమ్ముకొనును. గగనమున తారలు ప్రకాశించును. ప్రతి జీవరాశి తలవని తలంపుగ రాత్రి వచ్చినట్లు భావించును. అట్టి సమయములందు మసిపూసిన అద్దముతో సూర్యబింబమును పరీక్షించిన ఎడల, సూర్యబింబము నుండి కొంత వృత్తాకారభాగము ఖండించబడినట్లు గోచరమగును. కొన్ని సమయములందు తేజోహీన అపారదర్శక దివ్యమూర్తిచే పూర్ణబింబమంతయు మరుగు పరచబడినట్లు చూచెదము. ఈ అపారదర్శక దివ్యమూర్తి మన చంద్రుడే. చంద్రుడు భూ సూర్యులకు మధ్య వచ్చినప్పుడు సూర్యగ్రహణము సంభవించును. తరచుగ అసంపూర్ణ సూర్యబింబము, అరుదుగ పూర్ణ సూర్యబింబము మరుగు పరచబడుచుండును.

చంద్రుడు భూ సూర్యుల మధ్యనుండి, భూ సూర్య చంద్రులు ఒకే రేఖపై ఉన్నప్పుడు మాత్రమే, చంద్రుడు సూర్యబింబమును మరుగుపరచ గలడు. ప్రతి అమావాస్య దినమున సూర్యచంద్రులు ఒకచో ఉండి, కాంతిహీన చంద్రభాగము మనవైపు తిరిగి ఉండును (చూ. చంద్రుడు). అయిన ఎడల ప్రతి అమావాస్య దినమున సూర్యగ్రహణము ఎందుచేత సంభవించుట లేదు ?

హిపార్కస్ చంద్రుని పథము క్రాంతి వృత్తమునకు 5° కోణములో ఉండునని నిర్ణయించెను. చిత్రము 157 లో చూపినట్లు ప్రతి అమావాస్య దినమున చంద్రుడు సూర్యునకు మిక్కిలి అధోగతముగనో, ఉపరిగతముగనో ఉన్న ఎడల సూర్యబింబమును మరుగుపరచలేడు. చిత్రము 157 ఒకదినమున చంద్రుని, సూర్యుని, భూమిస్థితులను సూచించుచున్నవి. చంద్రుని కాంతిహీన భాగము పూర్తిగా భూమివైపు తిరిగి ఉన్నది గనుక, ఆ దినమున అమావాస్య అని తెలియుచున్నది. కాని భూ సూర్యులను కలుపు రేఖపై చంద్రుడు లేడు. అందుచేత గ్రహణము సంభవించదు. భూ, సూర్య, చంద్రులు ఏదో ఒక పాతము వద్దకు అనగా రాహువు వద్దకుగాని, కేతువు వద్దకుగాని దాదాపు ఏక కాలమున వచ్చినప్పుడు మాత్రమే అవి మూడు ఒక రేఖపై ఉండుట సంభవించును.



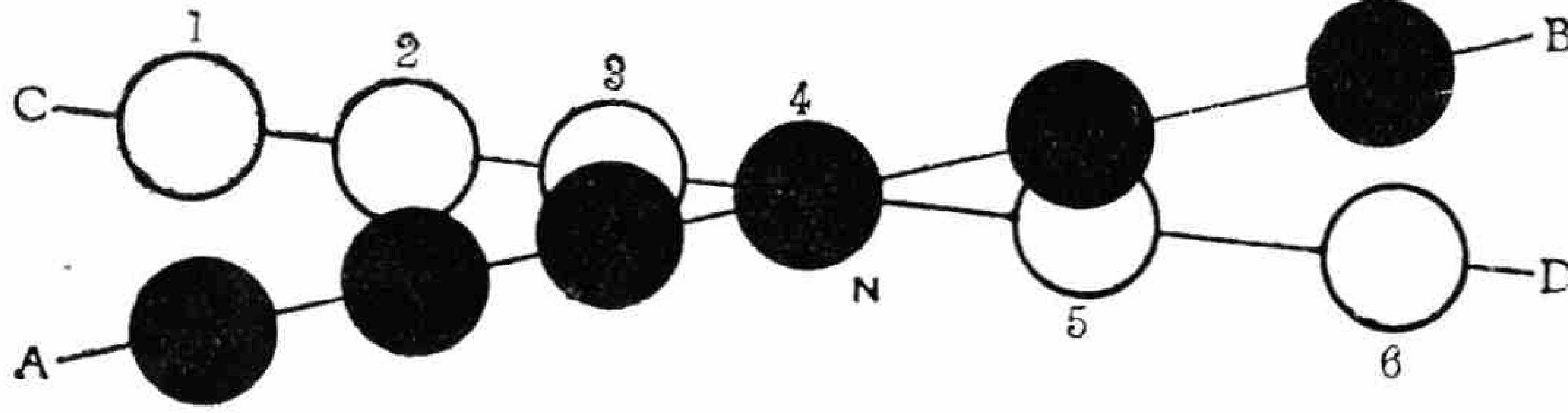




చిత్రము 157

సూర్యగోళ పరిమాణము చంద్రగోళ పరిమాణము కన్న చాల పెద్దది. కాని, భూమికి చంద్రుడు చాల దగ్గరగ ఉండుటచేత, మనకు సూర్య, చంద్రబింబ పరిమాణములు సమానముగా గోచరించు చున్నవి. సూర్యగ్రహణము సంభవించు విధమును 250 వ పుటలోని చిత్రము 158 లో పరిశీలించుదము.

క్రాంతివృత్తము అనగా సూర్యుని పథము CD, చంద్రుని పథము AB, N వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. సూర్యుడు క్రాంతివృత్తముపై మందగమనముతో పోవుచుండగా, చంద్రుడు AB పథములో అతి వేగముతో పోవుచుండును.



చిత్రము 158 సూర్యగ్రహణము

1 వ స్థానములో సూర్యునకు చంద్రుడు చాల దూరమున ఉండుటచే సూర్యబింబమును మరుగుపరచలేదు.

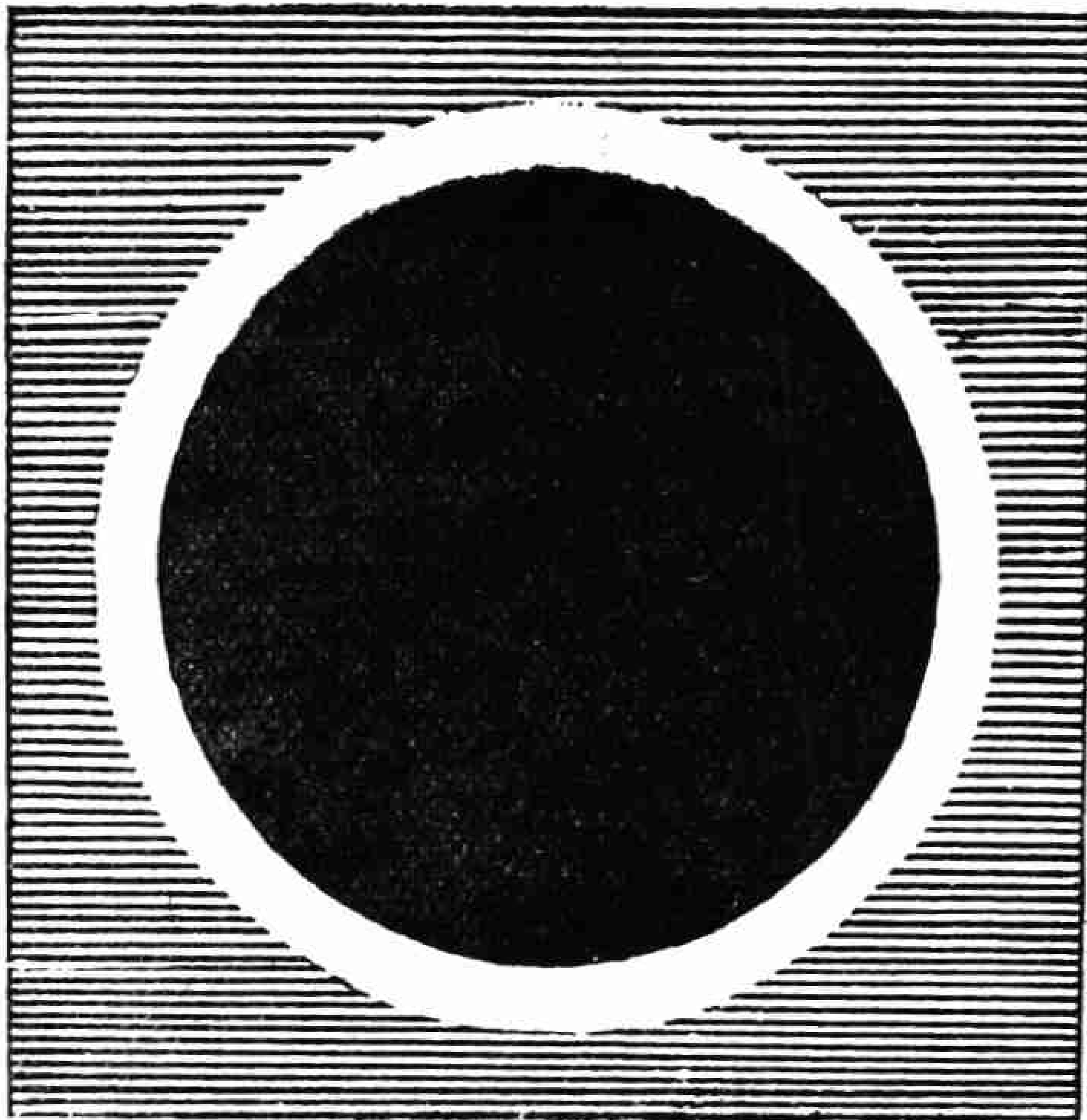
2 వ స్థానమునందు సూర్య, చంద్రబింబములు స్పర్శించుకొను చున్నవి. ఆ సమయమునుండి గ్రహణము ప్రారంభమగును.

3 వ స్థానమునందు సూర్యబింబము ఆంశికముగ చంద్రబింబముచే మరుగుపరచబడుచున్నది. అప్పుడు అసంపూర్ణ గ్రహణము గోచరించును.

4 వ స్థానమున సూర్యబింబము పూర్తిగ మరుగుపరచబడినది.

N వద్ద గ్రహణము పూర్ణమయినది. అనంతరము చంద్రుని పథము క్రాంతి వృత్తమునకు ఉపరి భాగముగా పోవును. క్రమేణ గ్రహణము తగ్గిపోవును.

మనకు చిత్రము 158 పూర్ణసూర్యగ్రహణ మెట్లు సంభవించునో విశదము చేయుచున్నది. పూర్ణసూర్యగ్రహణము



చిత్రము 159 సూర్యకంకణగ్రహణము

అరుదుగా వచ్చుచుండును. అసంపూర్ణ సూర్యగ్రహణములు తరచుగా వచ్చుచుండును. పూర్ణసూర్యగ్రహణము సంభవించునప్పుడు రెండు సంగతులను విచారించవలయును. చంద్రుని పథము దీర్ఘవృత్తము అగుటచేత చంద్రుడు భూమికి కొన్ని సమయములందు సమీపముగాను, మరి కొన్ని సమయములందు దూరముగాను ఉండును. చంద్రుడు మనకు సమీపమున ఉన్నప్పుడు చంద్రబింబము సామాన్య పరిమాణము కన్న పెద్దదిగా కనిపించును. అప్పుడు చంద్రబింబము సూర్యబింబమును పూర్తిగా మరుగుపరచగలదు. అట్టి సమయములందు సంభవించు సూర్యగ్రహణము సంపూర్ణగ్రహణము. మరికొన్ని సమయములందు మనకు చంద్రుడు దూరముగాను, సూర్యుడు సమీపముగాను ఉందురు. అట్టి సమయములందు సూర్యబింబము పెద్దదిగాను, చంద్రబింబము చిన్నదిగాను గోచరించును. ఈ పరిస్థితులలో పూర్ణసూర్యగ్రహణము వచ్చినచో సూర్యబింబ మధ్యభాగము మాత్రమే మరుగుపరచబడి, అంచు భాగము (చూ. 159 వ చిత్రము) మనకు గోచరించును.

ఇట్టి గ్రహణములను కంకణ (అన్యులర్) సూర్యగ్రహణములని అందురు. ఏ సూర్యగ్రహణము అయినను ప్రపంచమంతట గోచరించదు. హైదరాబాదులో కన్పించు సూర్యగ్రహణము బొంబాయిలోగాని, కరాచీలోగాని కన్పించక పోవచ్చును.

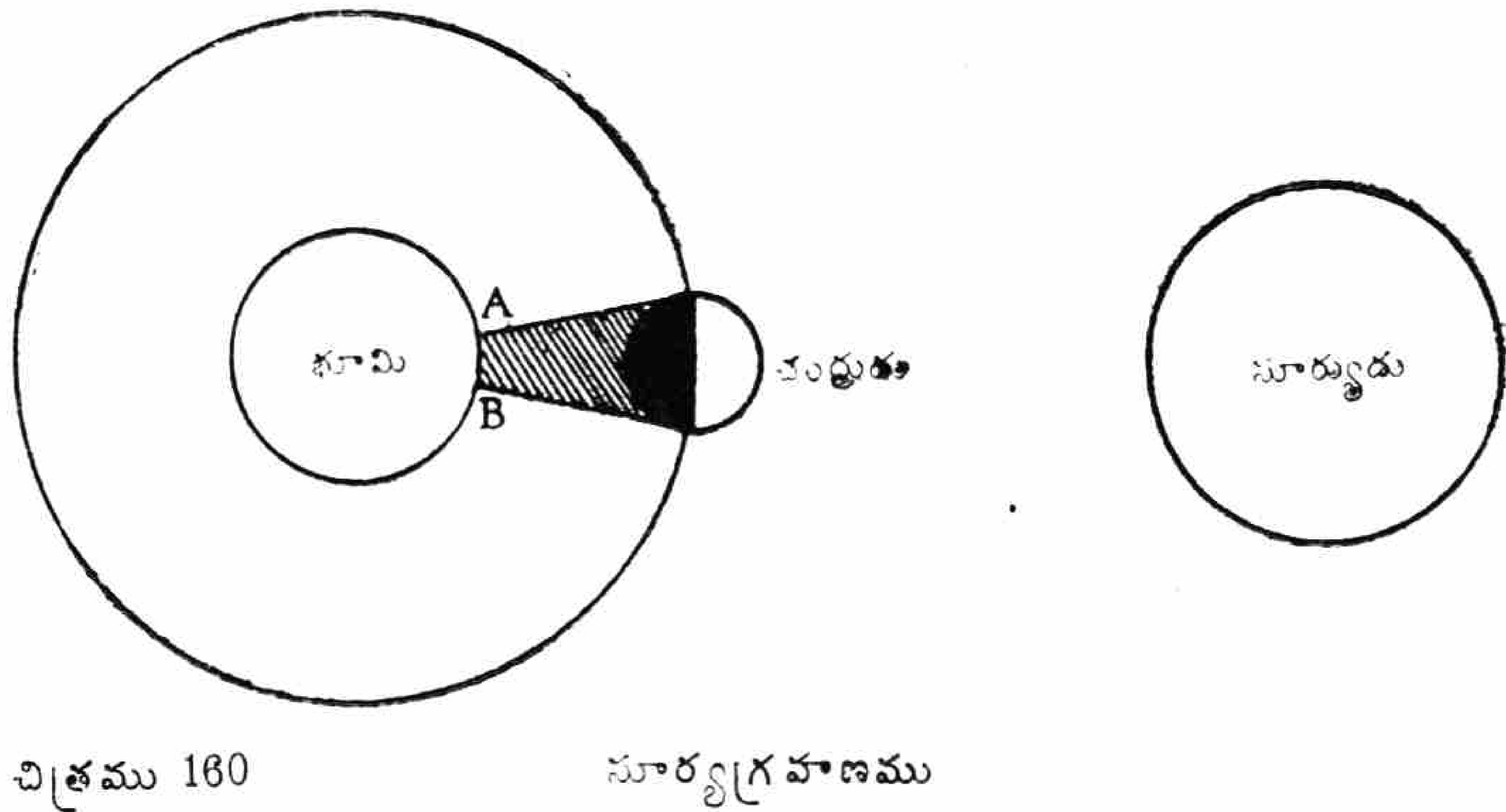
చిత్రము 160 (పు. 251) నందు పూర్ణసూర్యగ్రహణములు అన్నిప్రదేశములందు ఎందుచేత గోచరించవో విశదీకరించబడినది. భూమిచుట్టు చంద్రుడు పరిభ్రమించుచున్నాడు. సూర్యచంద్రులచే ఏర్పడు ఛాయా శంకువు భూమిని AB వద్ద తాకుచున్నది. AB ప్రదేశమున ఉన్నవారికి మాత్రమే గ్రహణము పూర్ణగ్రహణముగా గోచరించును. దానికి బాహ్యమున ఉన్నవారికి పూర్ణగ్రహణము ఉండదు.

ఇంతవరకు గ్రహణములను గురించి వర్ణనాత్మకముగ మాత్రమే తెలుసుకొని ఉన్నాము. ఇక కొంచెము గణిత రీతిగ తెలుసుకొందము.

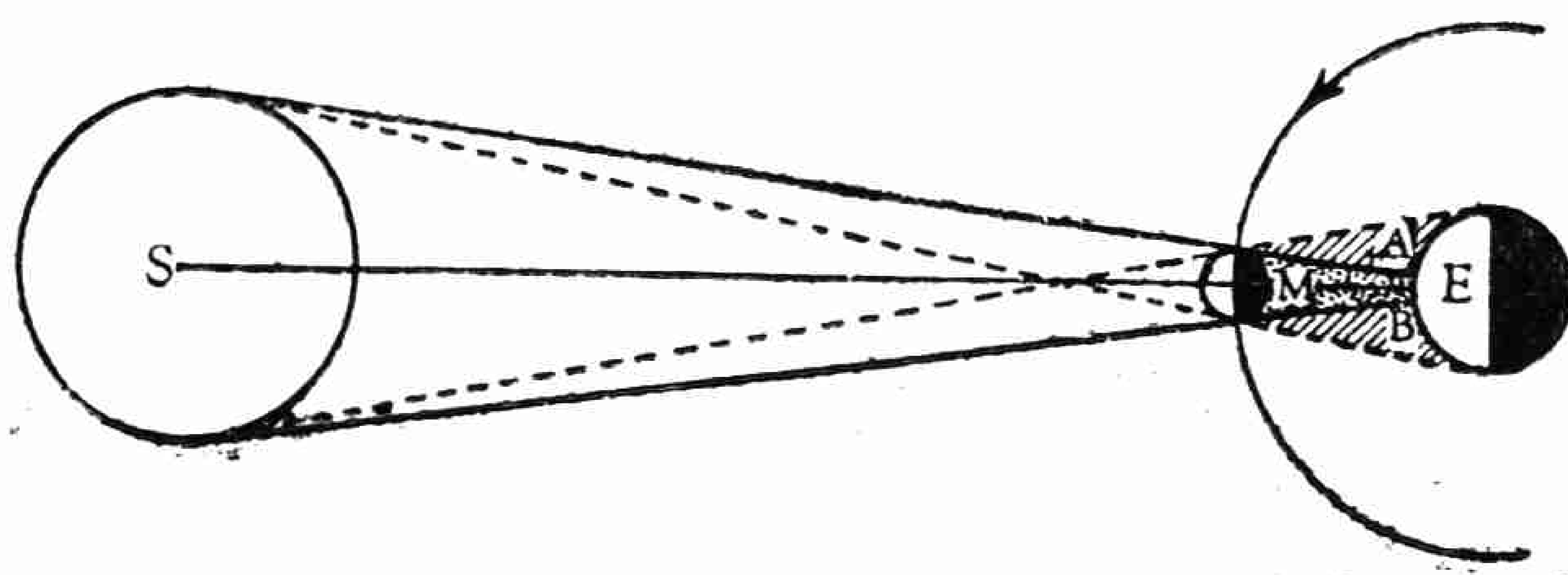
సూర్యుని చుట్టు భూమి దీర్ఘవృత్త మార్గములో భ్రమించుచున్నది గదా! సూర్యుడు భూమికి మిక్కిలి దూరములో ఉన్నప్పుడు సుమారు 15,29,00,000 కిలోమీటరుల దూరములోను, కనిష్ఠదూరములో ఉన్నప్పుడు 14,64,00,000 దూరములోను ఉండును. చంద్రుడు కూడ భూమి చుట్టు దీర్ఘవృత్తములో భ్రమించుచున్నాడు గదా! భూమికి

సమీపమున ఉన్నప్పుడు 3,57,000 కిలోమీటరుల దూరములోను గరిష్ఠ దూరములో ఉన్నప్పుడు 4,07,000 కిలోమీటరుల దూరములోను ఉండును.

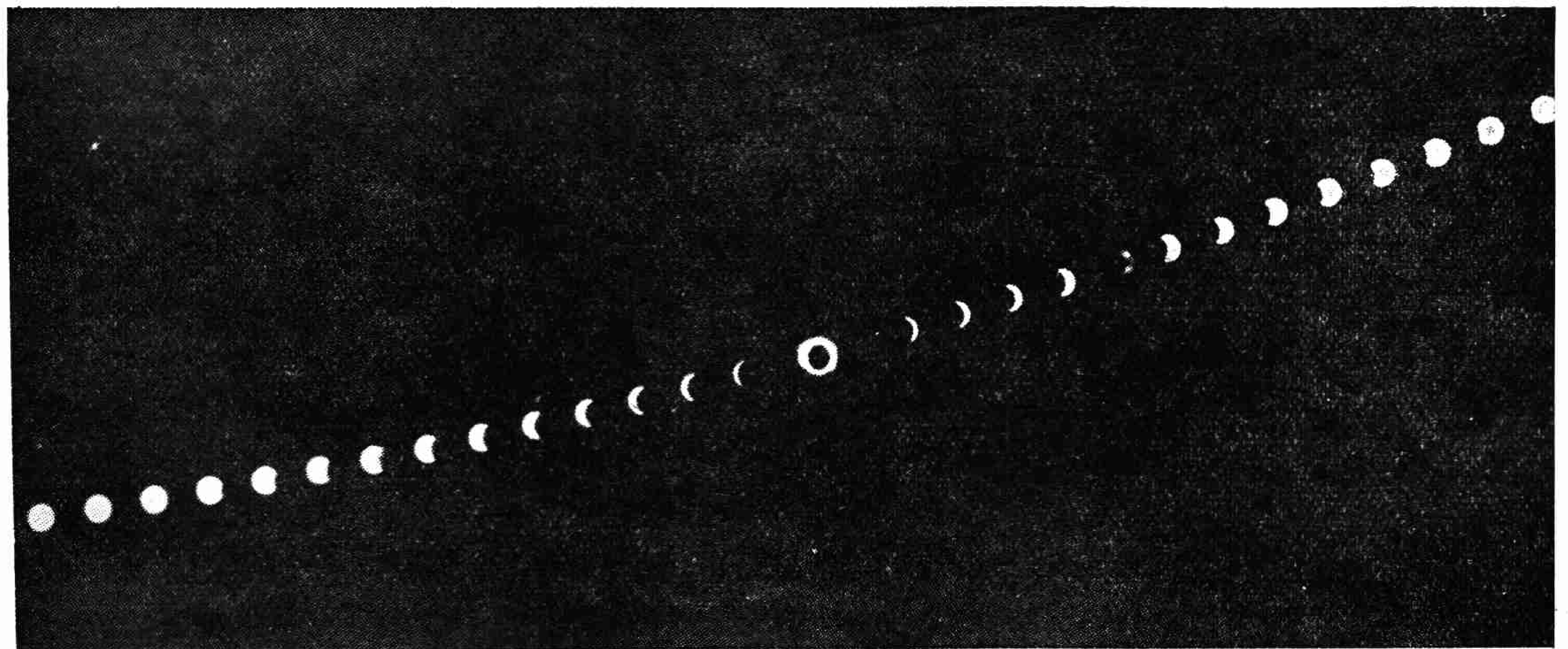
చంద్రుని ఛాయ యొక్క నిడివి (160వ చిత్రము) 3,67,000 కిలోమీటరుల నుండి 3,80,000 కిలోమీటరుల వరకు మారుచుండును. కొన్ని సమయములందు ఆ ఛాయ భూమి వరకు విస్తరించును (చూ. చిత్రము 161). మరి కొన్ని సమయములందది భూమివరకు విస్తరించదు. భూమిని చేరు ఛాయ వెడల్పు AB, 257 కిలోమీటరులకు మించదు. మిక్కిలి అనుకూల పరిస్థితులందే, అనగా భూమికి సూర్యుడు గరిష్ఠ దూరములో ఉండి, చంద్రుడు కనిష్ఠ దూరములో ఉన్నప్పుడు మాత్రమే - ఆఛాయ నిడివి 257 కిలోమీటరులు ఉండును. చంద్రుడు తన పథమున పడమర నుండి తూర్పునకు గంటకు 3,200 కిలోమీటరుల వేగముతో పరిభ్రమించుచుండును. అదే దిశలో అదే వేగముతో చంద్రుని ఛాయ 257 కిలోమీటరులు భూమిని ఆవరించును. పూర్ణగ్రహణము గోచరించు ప్రాంతమున కిరువైపుల గల కొన్ని ప్రదేశములందు ఖండగ్రహణము గోచరించును. చంద్రుడు సూర్యునకు సమీపముగను, భూమికి దూరముగను ఉన్నప్పుడు సూర్యచంద్రులచే ఏర్పడు ఛాయాశంకువు భూమిని చేరదు. అప్పుడు AB ప్రదేశమున ఉన్నవారికి గ్రహణము కంకణగ్రహణముగ గోచరించును (చూ. చిత్రము 159). ఈ కంకణ గ్రహణము గోచరించు ప్రాంతము యొక్క వెడల్పు ఇంచుమించు 360 కిలోమీటరులు. ఈ ప్రాంత బాహ్యమున ఖండ గ్రహణము మాత్రమే గోచరించును. కంకణగ్రహణము మొత్తము కాలము సుమారుగ 12 నిమిషములు; పూర్ణసూర్యగ్రహణ కాలము సుమారుగ $7\frac{1}{2}$ నిమిషములు.



చిత్రము 160 సూర్యగ్రహణము



చిత్రము 161 సూర్యగ్రహణము



చిత్రము 162 ప్రతి ఐదు నిమిషములకు (ఎడమనుండి కుడివైపునకు) 1937 పూర్ణసూర్యగ్రహణ వృద్ధిక్షీణతలక్రమము

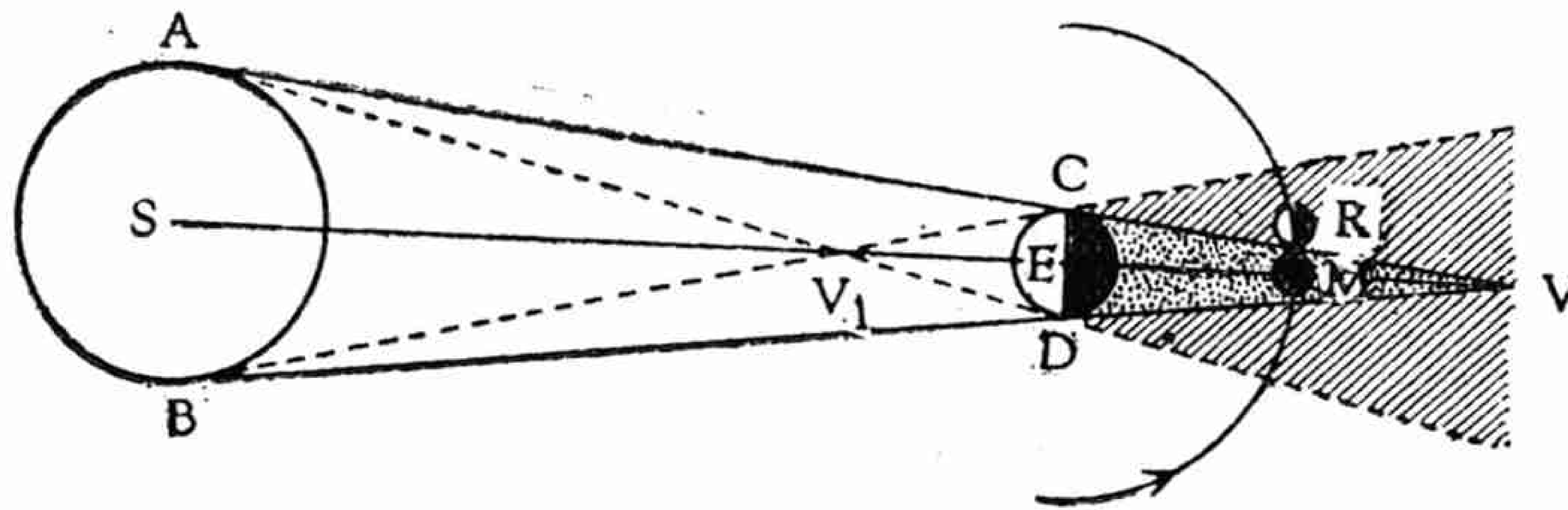
సూర్యగ్రహణముల ప్రాముఖ్యము : నిర్దిష్ట ప్రదేశమున చంద్ర గ్రహణములవలె సూర్యగ్రహణములు సంభవింపవు. పూర్ణసూర్యగ్రహణములు వచ్చుట అరుదు. పూర్ణసూర్య గ్రహణము సంభవించినను అది కొలది నిమిషములు మాత్రమే ఉండును. అయినను, పూర్ణసూర్యగ్రహణము దృష్టిగోచరమగు ప్రదేశమునకు ప్రపంచమందలి ప్రఖ్యాత ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు గ్రహణసమయమునకు వచ్చెదరు. వీరందరు ఆ ప్రదేశమునకు రావలసిన ఆవశ్యకత ఏదో అరయుదము.

చిత్రము 163

1. సూర్యుని పరివేష్టించి ఉండు మకుటము (కరోనా), బింబ పరిధి భాగము సూర్యుడు ప్రకాశించు సమయమున మనకు గోచరించవు. పూర్ణ సూర్యగ్రహణ సమయమున మాత్రమే మనము వానిని చూడగలిగి, వాని ఛాయా చిత్రములను తీయగల్గెదము.

2. ఆ సమయమున మాత్రమే, బుధగ్రహముకన్న ఏదేని మరొక గ్రహము సూర్యునకు సమీపమునఉన్నదేమో అని పరీక్షింప వీలగును.

3. రెండు సూర్య గ్రహణముల మధ్య కాలమును ఆ గ్రహణ కాలముల మధ్య గల చాంద్ర మాసముల సంఖ్యచే భాగించినచో చాంద్రమాస కాలము శుద్ధముగ తెలియును.



చిత్రము 164 చంద్రగ్రహణము

4. ఐన్‌స్టయిన్ సాపేక్షతాసిద్ధాంతప్రకారము సూర్యుని చుట్టిఉన్న గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము ప్రక్కగా ఏదేని కాంతి కిరణముపోవుచో లోపలకు వక్రీభవించును (చూ. చిత్రము 163). పూర్ణసూర్యగ్రహణ సమయమున సూర్యునకు సమీపమునఉన్న తారల ఛాయా చిత్రమునుతీసి, అదే ప్రాంతమందు సూర్యుడు లేనప్పుడు తీసిన తారల ఛాయా చిత్రముతో పోల్చినచో సాపేక్షతా సిద్ధాంతము రుజువగును. ఈరుజువు 1919లో సొబ్రాల్ అగ్రమువద్ద సంపూర్ణగ్రహణమును పరిశోధించిన ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులచే చేయబడినది.

చంద్ర గ్రహణములు : చంద్రుడు స్వయంప్రకాశకుడు కాడు; సూర్యకిరణముల పరావర్తన వలన ప్రకాశించుచున్నాడు (చూ. చంద్రుడు). చంద్రుడు భూచ్ఛాయలోనికి ప్రవేశించినచో చంద్రగ్రహణము సంభవించును. అనగా చంద్రగ్రహణము సంభవించుటకు (1) ఆ దినము పూర్ణిమ అయి ఉండవలయును; (2) సూర్య, చంద్రుల మధ్యకు భూమి వచ్చి, అవి మూడును సుమారుగా ఒకే ఋజురేఖపై ఉండవలయును (చిత్రము 164). S సూర్యుని, E భూమిని, M చంద్రుని సూచించు చున్నవి. AVB భూ సూర్యుల అనులోమ స్పర్శ రేఖలచే ఏర్పడు శంకువు. ఈ ఛాయా శంకువునందు E, V ల (V ఛాయాశంకు శిఖరము) మధ్యభాగము సూర్యుని నుండి, ఏ మాత్రము కాంతిని పొందజాలదు. ఈ భాగమును పూర్ణచ్ఛాయ (అంబ్రా) అందురు. భూ సూర్యుల ప్రతిలోమ స్పర్శ రేఖలచే ఏర్పడు ఛాయా శంకు శిఖర (V_1) ము, S, E ల మధ్య ఉండును. పూర్ణచ్ఛాయకు బాహ్యముగ నున్న ఛాయా శంకు భాగమును పరిచ్ఛాయ (పెనంబ్రా) అందురు. ఈ భాగము, సూర్యబింబము యొక్క కొన్ని భాగముల నుండి మాత్రమే కాంతిని పొందగలదు. ఈ ఛాయా శంకువు యొక్క నిడివి (EV) సుమారు 13,80,000 కిలోమీటరులు. కాని, భూ చంద్రుల గరిష్ఠ దూరము 4,07,000 కిలోమీటరులకు మించదని పైనతెలిసికొని ఉన్నాము కదా! అందుచేత సూర్యుడు, చంద్రుడు, భూమి ఒకే ఋజురేఖలోనికి వచ్చినప్పుడు చంద్రుడు భూచ్ఛాయలోనికి పోవలయును. ఛాయలోనికి ప్రవేశించిన చంద్రబింబ భాగము చీకటి పడుటచే గ్రహణము సంభవించును. చంద్రబింబము పూర్తిగా ప్రవేశించినచో పూర్ణగ్రహణమును, ఆంశికముగా ప్రవేశించినచో అసంపూర్ణ గ్రహణమును సంభవించును.

చంద్రబింబము ఛాయలోనికి ప్రవేశించుటకు పూర్వము పరిచ్ఛాయలోనికి ప్రవేశించును. పరిచ్ఛాయలోనికి ప్రవేశించినప్పటి నుండి క్రమేణ కాంతి విహీనమగుచు, ఛాయను ప్రవేశించిన తరువాత ఆ భాగము పూర్తిగా చీకటి పడును. గ్రహణము పూర్ణచ్ఛాయలో పూర్తి అగు

సనీ తెలియుచున్నది. పూర్ణచ్ఛాయనుండి బయట వెడలిన వెంటనే చంద్రుడు మరల పరిచ్ఛాయను ప్రవేశించును. కనుక క్రమేణ గ్రహణము తగ్గిపోవునని తెలియుచున్నది. చంద్రుడు ఛాయలో ప్రయాణము చేయవలసిన దూరము దాదాపు 91,700 కిలోమీటరుల వ్యాసముకలదై ఉండును. చంద్రుని వ్యాసము సుమారు 3,460 కి. మీ॥లు. అందువలన పాతముల వద్ద గ్రహణములు సంభవించునప్పుడు గ్రహణ పూర్తి కాలము 4 గంటల 13 నిమిషములయినప్పటికి చంద్రుడు పూర్ణచ్ఛాయలో సుమారు 2 గంటలు మాత్రమే ఉండును. కొన్ని సమయములందు చంద్రబింబము భూ ఛాయలోనికి ప్రవేశింపకుండ స్పర్శించుచు పోవును. అట్టి సమయములందు చంద్రగ్రహణము సంభవింపదు.

గ్రహణముల తారతమ్యము : (1) సూర్యగ్రహణమందు చంద్రునిచే సూర్యబింబము మరుగుపరచబడును. కాని, చంద్రగ్రహణమునందు భూ ఛాయలోనికి ప్రవేశించిన చంద్రబింబ భాగము వాస్తవికముగ కాంతి విహీన మగును.

(2) భూ ఉపరి భాగమున ఉన్న వారందరి దృష్టి నుండి సూర్యబింబమును చంద్రుడు మరుగుపరచలేడు, కనుక సూర్యగ్రహణము కొన్ని ప్రాంతములందు మాత్రమే గోచరించును. చంద్ర గ్రహణము సంభవించునప్పుడు చంద్రుడే భూ ఛాయలోనికి ప్రవేశించి కాంతి విహీన మగుటచే చంద్ర గ్రహణము అందరికి గోచరించును.

(3) సూర్యగ్రహణము కొందరికి పూర్ణగ్రహణముగ గాని, లేదా కంకణ గ్రహణముగగాని గోచరించును. మరి కొందరికి అసంపూర్ణగ్రహణముగ గోచరించును ; ఇంకను కొందరకు గ్రహణమే ఉండదు. కాని, చంద్రగ్రహణము అన్ని ప్రాంతములందున్న వారికి అసంపూర్ణ గ్రహణముగ గాని, పూర్ణగ్రహణముగ గాని ఒకే విధముగ గోచరించును.

(4) నిర్ణీత కాలములో చంద్ర గ్రహణములకన్న సూర్య గ్రహణములే హెచ్చుగా సంభవించును. కాని, నిర్ణీత ప్రదేశమునందున్నవారు ఆ సమయమందు సూర్యగ్రహణ ములకన్న చంద్ర గ్రహణములనే హెచ్చుగా కాంచెదరు.

సాధారణముగా ఒక సంవత్సర కాలములో (అనగా 365 దినములలో) నాలుగు గ్రహణములు వచ్చుచుండును. కాని ఒక సంవత్సరకాలములో ఏడు గ్రహణముల వరకు సంభవించుటకు అవకాశమున్నది. సంవత్సరారంభములో సూర్యగ్రహణము వచ్చినచో ఆ సంవత్సరములో ఐదు సూర్యగ్రహణములు, రెండు చంద్ర గ్రహణములు సంభవింప వచ్చును. సంవత్సరారంభమున చంద్ర గ్రహణము సంభవించినచో ఆ సంవత్సరములో నాలుగు సూర్య గ్రహణములు, మూడు చంద్ర గ్రహణములు సంభవింపవచ్చును.

గ్రహణ యుగము : గ్రహణములు ఆశ్చర్యాకరమగు మార్పును కలుగచేయుచుండుటచేత, గ్రహణములు వచ్చు దినములను ముందుగా తెలుసుకొనుటకు ఎందరో ప్రయత్నించిరి. చిట్టచివరకు కాల్డియన్‌లు గ్రహణములు వచ్చు దినములను తెలుసుకొనుటకు ఒక సూత్రమును కనుగొనగల్గిరి. చాంద్రమాసమునకు 29.53 మాధ్యమిక సౌర దినములు ; అటువంటి 223 చాంద్రమాసములు 6585.32 దినములకు సమానము. ఒక పాతమును సూర్యుడు రెండు సారులు సంక్రమించుటకు మధ్యకాలము 346.62 దినములు. 19 అట్టి సంక్రమణములకు 6585.78 దినములు. అందుచేత 6585.32 దినములలో లేదా 18 సంవత్సరముల 10 లేదా 11 దినముల 8 గంటల కాలములో సూర్యుడు, చంద్రుడు పాతములు తిరిగి, తిరిగి, తమ సాపేక్షస్థానములను చేరుచుండును. అనగా ఒక దినమున వచ్చిన గ్రహణము మాదిరి గ్రహణము మరల 18 ఏండ్ల 10 లేదా 11 దినముల 8 గంటలకు సంభవించును. ఈ అవృత్తి కాలమును, గ్రహణ యుగము (సరోసు) అందురు.

20 వ శతాబ్ద ఉత్తరార్ధ భాగమున సంభవించు పూర్ణసూర్యగ్రహణములు

గ్రహణము సంభవించు దినము	పూర్ణగ్రహణ కాలము (నిమిషములలో)	అపూర్ణగ్రహణము కనబడు ప్రదేశములు
1965 మే 30	5.3	పసిఫిక్ మహాసముద్రము.
1966 నవంబర్ 12	1.9	బొలీవియా, అర్జెంటీనా, బ్రెజిల్.
1970 మార్చి 7	3.3	మెక్సికో, జార్జియా, ఫ్లోరిడా,
1972 జూలై 10	2.7	ఈశాన్య ఆసియా, ఈశాన్య అమెరికా, అట్లాంటిక్ మహాసముద్రము.
1973 జూన్ 30	7.2	దక్షిణఅమెరికా, ఆఫ్రికా, అట్లాంటిక్ మహాసముద్రము.
1974 జూలై	5.3	నైరుతి ఆస్ట్రేలియా, హిందూ మహాసముద్రము.
1976 అక్టోబరు 23	4.9	ఆఫ్రికా, ఆస్ట్రేలియా, పసిఫిక్, హిందూమహాసముద్రములు.
1977 అక్టోబరు 12	2.8	వెనిజ్యులా, పసిఫిక్ మహాసముద్రము.
1979 ఫిబ్రవరి 27	2.7	యునైటెడ్‌స్టేట్స్, ఉత్తరధ్రువ సముద్రము.

గ్రహణము సంభవించు దినము	పూర్ణగ్రహణ కాలము (నిమిషములలో)	అపూర్ణగ్రహణము కనబడు ప్రదేశములు
1980 ఫిబ్రవరి 16	4·3	ఆఫ్రికా, అట్లాంటిక్, హిందూ మహాసముద్రములు, ఇండియా.
1981 జూలై 31	2·2	పసిఫిక్ మహాసముద్రము, ఆసియా.
1983 జూన్ 11	5·4	జావా, అట్లాంటిక్ మహాసముద్రము.
1984 నవంబరు 22	2·1	పసిఫిక్ మహాసముద్రము, పాటగోనియా.
1987 మార్చి 29	0·3	అట్లాంటిక్ ప్రాంతము ఆఫ్రికా.
1988 మార్చి 18	4·0	పసిఫిక్, హిందూ మహాసముద్రములు.
1990 జూలై 22	2·6	ఫిన్లాండ్, ఉత్తర అట్లాంటిక్ ప్రాంతము.
1991 జూలై 11	7·1	పసిఫిక్ మహాసముద్రము, హవాయీ, మధ్య అమెరికా.
1992 జూన్ 30	5·4	దక్షిణ అట్లాంటిక్ ప్రాంతము.
1994 నవంబరు 3	4·6	పసిఫిక్ మహాసముద్రము, దక్షిణ అమెరికా.
1995 అక్టోబరు 24	2·4	పసిఫిక్, హిందూ మహాసముద్రములు.
1997 మార్చి 9	2·8	ఈశాన్య ఆసియా, ఆర్కటిక్ మహాసముద్రము.
1998 ఫిబ్రవరి 26	4·4	పసిఫిక్, అట్లాంటిక్ మహాసముద్రములు, మధ్య అమెరికా.
1999 ఆగస్టు 11	2·6	యూరప్‌నందలి మధ్య, దక్షిణ భాగములు, ఇంగ్లండు.

పా. ల. నా.

గ్రహములు : చూ. సౌరకుటుంబము.

గ్రీక్ గణితము (క్రీ. పూ. 610 - 500) : తొలి గ్రీక్ గణితజ్ఞులు వారి జ్యామితి, ఖగోళశాస్త్రజ్ఞానము ఈజిప్టు బాబిలోనియా దేశముల నుండి సంపాదించినదిగా అంగీకరించిరి. తేలీజ్, పితాగొరస్, డెమోక్రిటస్, యుడాక్సస్ వీరందరు ఈజిప్టు, బాబిలోనియా దేశములందు తిరిగినవారలేగాని, ఈ దేశముల నుండి వారు సంగ్రహించిన గణితజ్ఞానమును ప్రభవస్థానపు గురుతులు ఏ మాత్రము లేకుండునట్లు వృద్ధిపొందించి, వికసింపజేసిరి.

గ్రీక్ సప్తర్షులలో ప్రధానుడు తేలీజ్. ఈతడు దార్శనికుడు. రాజనీతిజ్ఞుడే కాక, లోకవ్యవహార నిర్ణేతకూడను. క్రీ. పూ. 585 లో సూర్యగ్రహణమును ముందుగ అతడు చెప్పగలిగెనని యొక ప్రథగలదు. ఈ పూర్వనిర్దేశము బహుశః బాబిలోనియన్‌ల సరోసు లేదా అష్టాదశసంవత్సర ఆవృత్తిని ఆధారముగాగొని ప్రకటించబడి యుండనోపును. సర్వసమ త్రిభుజముల సూత్రమును వినియోగించి సముద్రముపై ఉన్న రెండు నావల మధ్య దూరమును లెక్కగట్టినాడందురు. జ్యామితి విచారమందు 'ఉపపత్తి' ని ప్రవేశపెట్టినవా డీతడే యని యందురు.

సామాస్ నివాసియగు పితాగొరస్ (క్రీ. పూ. 550) అనునతడు పౌరాణిక పురుషుడై ఉండవలెను. ఈతడు గణితజ్ఞుడు, దార్శనికుడును. కఠిన పరీక్ష, శిక్షాయుత జీవనయాత్ర, జంత్వాహార పరివర్జనము అంశములుగా గల ఒక భ్రాతృసమాజ వ్యవస్థను ఈతడు స్థాపించెను. గణితశాస్త్రము వీరి మతాచారములో ప్రధానాంశము. ఏకత్వమే ఈశ్వరుడు; ప్రపంచము నానాత్వము; నానా విరుద్ధ భాగములకు ఏకత్వమును చేకూర్చు సంఖ్యా నిష్పత్త్యాత్మక దివ్య సామరస్యమే ప్రపంచము. ఈ సంఖ్యా సామరస్యమును తెలిసికొనగల వాడు దివ్యుడు, అమర్త్యుడు అగును. సంఖ్యేంద్ర జాలము, గూఢార్థతయందు వీరికి మిక్కిలి నమ్మకముకలదు. సంఖ్య 6 దాని విభాజకములగు 1, 2, 3 అంకెల సంకలన ఫలమగుట చాలచోద్యము. అందువలన 6 ను వారు సంపూర్ణసంఖ్య యనినారు. కీ. శ. 100 ఏండ్ల నాడు మనిన ఇటీవలి పితాగొరియన్‌లు అట్టి సంపూర్ణ సంఖ్యలకు నాలుగు దృష్టాంతములనిచ్చిరి. అవి 6, 28. 496, 8128. జ్యామితిశాస్త్రము విషయములలో పితాగొరస్ బహుశః యూక్లిడ్ ప్రబంధముయొక్క మొదటి రెండు పుస్తకములలో నిక్షిప్తమైయున్న సమానాంతర రేఖలు, త్రిభుజములు, సమానాంతరచతుర్భుజములు వీటినిగురించిన జ్ఞానముతో పరిచయముగలిగి దానిని శిష్యులకు బోధించి యుండవలెను. లంబకోణ త్రిభుజమున కన్వయించి, అతని పేరున పిలువబడుచున్న ప్రసిద్ధ సిద్ధాంతమును ఆతడు సోపపత్తికముగ స్థాపించెను. కాని ఇది యూక్లిడ్ ఇచ్చిన ఉపపత్తి కాదు. అది ఆతని స్వోపజ్ఞమే. కాని ఈ ఫలము మోళీగా బాబిలోనియన్‌ల కాలమునుండి గణితజ్ఞులకు సుపరిచితమే. పితాగొరస్‌నకు సంగీతశాస్త్రీయ గణితమందు ఆదరము మెండు. ఒక స్వరమును, దాని పంచమ, అష్టమ వికృతులును ఇచ్చు తీగల పొడవులు 2, 3, 4 అను నిష్పత్తిలో ఉండునని అతనికి తెలియును. అతనికి చిత్రముల, అంకెల ఐంద్రజాలికధర్మములందు విశ్వాస మెక్కువ.

గ్రీక్ గణితము కాలిక సంక్షేపము

సాధారణ చరిత్ర	దార్శనికులు, చరిత్రకారులు	గణితజ్ఞులు, ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు
క్రీ. పూ. 610 నూతన బాబిలోనియన్ సామ్రాజ్య ప్రారంభము. క్రీ. పూ. 540 పారసీక సామ్రాజ్య ప్రారంభము.	థేలీజ్, అనాక్సిమాండర్	క్రీ. పూ. 585 థేలీజ్ క్రీ. పూ. 550 పితాగొరాస్ అనాక్సిమాండర్
క్రీ. పూ. 500 అయోనియన్‌ల తిరుగుబాటు క్రీ. పూ. 480 పారసీక యుద్ధములు. క్రీ. పూ. 450 పెరిక్లీజ్ క్రీ. పూ. 420 పెలొపనీసియన్ యుద్ధము	హెరాక్లీటజ్ క్రీ. పూ. 450 అనాక్సగొరస్ క్రీ. పూ. 430 పరమాణువాదులు క్రీ. పూ. 410 థ్యూసిడైడీజ్	క్రీ. పూ. 500-350 పితాగొరియన్‌లు, అనాక్సగొరస్ క్రీ. పూ. 430 హిపొక్రెటీజ్ డెమొక్రిటస్, థియోడోరస్
క్రీ. పూ. 370 ఎపామినాండాస్	క్రీ. పూ. 399 సాక్రటీజ్, ప్లేటో ఆవ్ పాంటస్, అరిస్టాటిల్, యుడీమస్	క్రీ. పూ. 390 ఆర్కిటాస్ క్రీ. పూ. 370 యుడోక్సస్ క్రీ. పూ. 350 మినేక్మస్
క్రీ. పూ. 333 అలెగ్జాండర్ ది గ్రేట్	స్టోయిక్‌లు	క్రీ. పూ. 300 యూక్లిడ్ క్రీ. పూ. 286 అరిస్టార్కస్ క్రీ. పూ. 250 ఆర్కిమిడీజ్ క్రీ. పూ. 240 ఎరాటోస్తనీజ్ క్రీ. పూ. 210 అపలోనియస్ క్రీ. పూ. 150 హిపార్కస్.
క్రీ. పూ. 60 జూలియస్ సీజర్ క్రీ. శ. 1 అగస్టస్ క్రీ. శ. 40 వలసపోవుట	నియోపితాగొరియనులు, నియోప్లేటొనిస్టులు, ప్రోక్లస్.	క్రీ. శ. 60 హెరాన్ క్రీ. శ. 100 మెనిలేయస్ క్రీ. శ. టాలెమీ క్రీ. శ. 250 డయోఫాంటస్ క్రీ. శ. 320 పాపస్.

క్రీ. పూ. 5, 4 శతాబ్దములు : పితాగొరస్ తరువాత ప్రసిద్ధికెక్కినవాడు ఆర్కైటీస్ (క్రీ. పూ. 400). ఈతడు కప్పీ యొక్క సిద్ధాంతమును స్థాపించెను. ఒక దత్త ఘనపరిమాణమునకు రెండింతల ఘనపరిమాణము గల ఘనము యొక్క అంచు పొడవును కనుగొను సమస్యను ఇతడు మొదటగా సాధించినవాడు. ఇది ప్రాచీన ప్రసిద్ధ సమస్యలలో ఒకటి. దీనిని కేవలము రూళ్లకర్ర, కాంపస్‌తో సాధించుట దుర్ఘటము (చూ. సమీక్ష : గ్రీక్ గణితము పు. 31). ఒక స్తూపము, ఒక శంకువు, తన స్పర్శరేఖచుట్టు ఒక వృత్తము భ్రమించుటవలన ఫలించు తలము వీటి పరస్పర ఛేదనమును ఉపయోగించి పై సమస్యను ఇతడు సాధించెను. ఈ కాలమునకు చెందిన ఇంకొక గణితజ్ఞుడు థియోడోరస్. ఇతడు $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ ఇవి యన్నియు కరణీయ సంఖ్య లని రుజువు చేసెను. $\sqrt{2}$ యొక్క కరణీయత ఇంతకు పూర్వము తెలిసినవిషయమే. ఈ కాలమందే చలనము యొక్క అసాధ్యతను మరిరెండు ప్రసిద్ధ విరోధాభాసలను ప్రకటించి జీనో జీవించెను.

క్రీ. పూ. 420 - 300 మధ్య ఏథెన్స్‌నగరము గణితశాస్త్ర ప్రవృత్తికి గొప్ప కేంద్రమైనది. హిప్పియస్ ఒక కోణమును త్రిభాగించుటకు గాని, లేదా, అనేక సమభాగముల క్రింద విభజించుటకుగాని సాధనమగు ఒక వక్రరేఖను కనుగొని ప్రసిద్ధిని గాంచెను. గణితజ్ఞుడు, దార్శనికుడును అగు ప్లేటో ఈసంప్రదాయమునకు చెందినవాడే. ఇంకొకడు గణితశాస్త్రమందు ఔన్నత్యమును గణించిన యుడాక్సస్. ఇతడు యూక్లిడ్ 5 వ పుస్తకమందు కరణీయ సంఖ్యా సిద్ధాంతమంతటిని సంపూర్ణముగ చర్చించెను. ఈకాలములో

ముఖ్యముగా చెప్పతగిన వైదుష్యము గల గణితజ్ఞుడు మనేమేకస్ (క్రీ. పూ. 375 - 325); శాంకవముల ధర్మములు చర్చించిన వారలలో నితడు ప్రథముడు.

$x^3 = 2a^3$ అను సమీకరణమును సాధించుటకు (ఘన ద్విగుణీకరణము) శాంకవమును ఎట్లు ఉపయోగించ వచ్చునో తెలిపినాడు.

ఆలెగ్జాండ్రియా సంప్రదాయము : క్రీ. పూ. 300 మొదలు 30 వరకు యూనివర్సిటీ స్థాపనకు తొలి యత్నములు ఆలెగ్జాండ్రియా నగరమందు వెలుగు చూచినవి. ఈ యూనివర్సిటీ పోషణకై ప్రభూత ధనము వితరించ బడినది. అందు బోధన శాలలు, గ్రంథాలయములు, వస్తు ప్రదర్శన శాలలు, ఉద్యానములు మెండుగా ఉండెడివి. ఇది గ్రీక్ దేశము యొక్క బౌద్ధిక కేంద్రముగా ఒక వేయి వత్సరములవరకు విలసిల్లినది. దాని ఉనికి మొదటి శతాబ్దములో ముగ్గురు గణితశాస్త్ర మహా ప్రతిభావంతులను ఉద్భవింపజేసినది. వారు యూక్లిడ్, ఆర్కిమిడీజ్, అపలోనియస్. క్రీ. పూ. 300 ప్రాంతములో నగరము, యూనివర్సిటీ కూడ ఆలెగ్జాండర్ ది గ్రేట్ చే నెలకొల్పబడినవి. ఆలెగ్జాండ్రియన్ సంప్రదాయమునకు చెందిన అతి ప్రసిద్ధుడగు యూక్లిడ్ యాజమాన్యమున గణితశాస్త్రశాఖ ఉంచబడినది. క్రీ. శ. 641 లో ఆ నగరమును ఆ యూనివర్సిటీ అరబ్బులు విధ్వంసము గావించిరి. గ్రంథాలయమందు 600,000 చుట్టలుగా ఉన్న గ్రంథములు ఉండెడివి. ప్రజల స్నానపు గదులందు గ్రంథములు తగుల బెట్టబడినవి అనియు, ఆ గ్రంథములన్నియు తగులబడుటకు ఆరు నెలలు కాలము పట్టినది అనియు చెప్పుదురు.

యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్ : ప్రపంచ వాఙ్మయమునందు ఈ గ్రంథము అత్యుత్తమ విజయముగ రూపొందినది. దీనినుండియే ప్రపంచమంతయు జ్యామితిని అలవరచు కొనినది. ఆలెగ్జాండ్రియాలో గణితశాస్త్ర బోధకుడుగా నుండినాడని తప్ప, యూక్లిడ్ వ్యక్తి జీవితమునుగురించి మన కెద్దియు తెలియదు. అతడు పొచ్చెములేని నీతి పరుడు, దాక్షిణ్యముతో కూడిన విమర్శకుడు, భయమెరుగని ధీరస్వాంతుడు. జ్యామితి అధ్యయనమునకు రాజ మార్గ మేదియును లేదని టాలెమీ ప్రభువును హెచ్చరించినాడు. ఈతని ఎలిమెంట్స్ క్రీ. పూ. 300 ప్రాంతమున వ్రాయబడినవి. తక్కిన రచయితలనుండి మిక్కిలి కఠినమైన భాగముల సంగ్రహించెను, కాని వాటిని ఒకవరుసగా సవరించుటలో అతడు తన నిశిత విమర్శనాశక్తి నుపయోగించి, ఎక్కువ కఠినమైన భాగముల (కరణీయసంఖ్యల సిద్ధాంతము వంటివి) చివర పుస్తకముల పొందుపరచి, జ్యామితి ముఖ్యభాగములను నిష్పత్తి సిద్ధాంతముల నుపయోగించకుండ మొదటి నాలుగు పుస్తకములందు చర్చించెను. ఇంతకాలమైన తరువాతకూడ ఏ భాగములు యూక్లిడ్ కనిపెట్టినవో ఏవి ఇతరులనుండి అతడు సంగ్రహించినవో చెప్పుట కష్టము.

ఈ గ్రంథముగాక యూక్లిడ్ 'దత్తములు' (డేటా) అను పేరుగల బీజగణిత విషయకమైన మరియొక గ్రంథమును కూడ రచించెను, గ్రీక్ల అలవాటు చొప్పున బీజగణిత సమస్యలన్నియు జ్యామితి సమస్యలట్లు ఇందు చర్చించ బడినవి.

యూక్లిడ్ రచించిన మరియొక గ్రంథము ' జ్యామితి చిత్రముల విభజన ' అనునది. ఇది అరబ్బీ భాషానువాదము లోనే లభ్యము.

త్రెపీజియమును దాని ఆధారమునకు సమానాంతరముగా ఉండు భుజరేఖచే ద్విభాగము చేయుటవంటి బాబిలోనియన్ సమస్యలను ఈ గ్రంథము చర్చించినది వినియుక్త గణితమునకు అంకితమైన అతని గ్రంథములు 'యథాదర్శన' విచారము, దర్పణతల పరావర్తనము, సంగీత శాస్త్రసిద్ధాంతము - వీటిని గురించి విమర్శించును.

ఆర్కిమిడీజ్ (క్రీ. పూ. 287-212) : గ్రీక్ గణితజ్ఞులలో ఆర్కిమిడీజ్ అత్యున్నతవ్యక్తి. ఈతనికి సాటి నవీన యుగమందు వెలసిన గౌస్, న్యూటన్, ఐన్‌స్టయిన్‌లు. వీరందరివలె ఆర్కిమిడీజ్ కూడ తన శాస్త్రమందు ఎనలేని వాడు (చూ. ఆర్కిమిడీజ్-పు. 151 ; భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు - పు. 184).

ఆర్కిమిడీజ్ గణితశాస్త్ర విషయ నిరూపణ నిరుపమానము, హృదయంగమము, పాఠకుని చిత్తమందు విస్మయమును పుట్టించును. స్థితిశాస్త్ర నిరూపణ, ఉత్ప్లావిత వస్తువుల గురించిన నియమ ప్రకటన ఈతని ముఖ్య నిర్వాహములు ; కాని పరవలయ ఖండము, గోళీయ తలము వీటి వైశాల్య గణనము, గోళ ఘన పరిమాణ నిర్ణయమునకు అతడు కనుగొనిన నియమములు మొదలగు జ్యామితి ఆవిష్కరణములు, అతని సమకాలీనులను ఎక్కువగా ఆకర్షించినవి. జ్యామితియందు వృత్త వైశాల్యము $\frac{1}{2} r\ (2\pi r)$ అని అతడు చూపెను. ఒక వృత్తమందు పరిలిఖింపబడిన 96 పార్శ్వములుగల క్రమ బహుభుజిని పరీక్షించి $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ అని అతడు నిరూపించెను. గుణకార శ్రేణియొక్క సంకలిత ఫలముగ మార్చి పరావ ఖండముయొక్క వైశాల్యమును అతడు కనుగొనెను.

సర్పిలరేఖలపై అతడు గావించిన పరిశోధనయందు 28 ఉపపాదనలు గలవు. ఇందీతడు $r = c\,\theta$ అను వక్రము యొక్క ధర్మములను చర్చించెను. ఒక శాంకవము స్వీయాక్షము చుట్టు చేయు భ్రమణమువలన రచింపబడు గోళాభముయొక్క ఘన పరిమాణములను అతడు లెక్క గట్టెను. రోమన్‌లు ఈతని సమాధిస్థలముపై ఒక భాసుర మగు గోరీని నిర్మించిరి. దానిపై అతడు బ్రతికి ఉన్నపుడు కోరిన రీతిని, ఒక స్తూపమందు పరిలిఖితమైన గోళముగల ఘన చిత్రమును చెక్కించిరి. వీటి ప్రత్యేకతల వైశాల్యములు సమానములు; కాని, గోళ ఘనపరిమాణము స్తూప ఘన పరిమాణములో మూడింట రెండు వంతులని అతడు రుజువుచేసిన విషయమునకు స్మారకచిహ్నముగ ఈ గోరీ చిత్రము చెక్కించబడినది.

ఆర్కిమీడీజ్ తరువాత ఎరాటోస్తెనీజ్, నికోమీడిస్, డైయోక్లీస్‌లు కొంత ప్రతిభావంతులైన గణితజ్ఞులు. ఇందు మొదటివాడు ప్రధాన సంఖ్యలను పర్చుట కొక జల్లెడవంటి సాధనమును నిర్మించెను. రెండవవాడు తన పేరును మోయుచున్న కాంగ్‌కాయిడ్ అను నొక వక్రమును కనుగొనెను. డైయోక్లీస్ సిస్సాయిడ్ అను వక్రమును ఆవిష్కరించెను. ఈ వక్రములో మొదటిదియగు కాంగ్‌కాయిడ్ ఒక కోణమును మూడు సమభాగములుగ విభజించుట సాధనముగ దాని నిర్మాత ఉపయోగించెను. రెండవది ఘనమును ద్విగుణీకరించుటకు పనికివచ్చినది (చూ. సమీకు-పు. 34). ప్రాచీన గ్రీక్‌గణిత ప్రసిద్ధ సమస్యలీ రెండును. తరువాతి ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్రవేత్త అపలోనియస్ (క్రీ. పూ. 260–200). శాంకవ వక్రముల గురించి ఈతడు సువ్యవస్థిత గ్రంథమున వివరించినవాడు. ఈ చర్చ శాంకవముల జ్ఞానమును యూక్లిడ్‌చే సంవాదితమైన దానికన్న చాల దూరము విస్తరింపజేసినది.

హిపార్కస్ (క్రీ. పూ. 150) టాలెమీ (మరి మూడు వందల పండ్ల తరువాత) ఇద్దరు మంచి పరిశోధనల గావించినను, అపలోనియస్ తరువాత గ్రీక్ గణితము శీఘ్రముగ క్షీణించినదనే చెప్పవలెను. శుద్ధ గణితమందు చెప్పుకో తగిన విమర్శలు జరుగలేదు. అయినను, పూర్ణాంకమయము లగు సమీకరణముల సాధనను గురించి డయోపాంటస్ చర్చించెను.

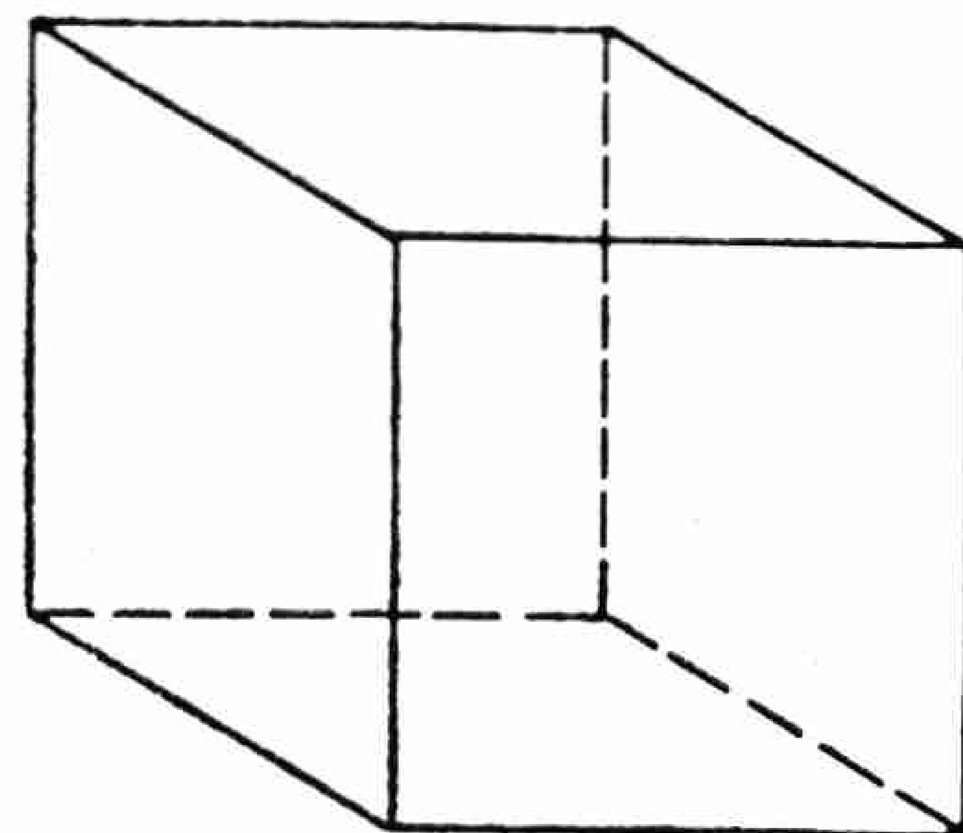
ఈ కాలమందు మనిన ఇతర గణితజ్ఞులలో పాపుస్ (క్రీ. శ. 320), డెసార్గ్యూస్‌లు విశ్లేషజ్యామితి శాస్త్ర బీజములు జల్లిరి. ఒక సంక్షిప్తబీజగణితీయసాంకేతిక పద్ధతి లేకుండుట గణితశాస్త్రపురోగతికి అవరోధము కల్పించినది. ఆ. న.

గ్రీనిచ్ వేధశాల: ఇది ప్రాచీనతమమైన వేధశాల, 1675లో ఛార్లెస్ - II చే స్థాపింపబడినది. మొదట ఇది లండను నగరమునకు ఆగ్నేయ దిశగా తేమ్స్‌నది ఒడ్డున ఒక గుట్టపై నెలకొల్పబడెను. నావికులు సముద్రయానమున తమ స్థానములను నిర్ణయము చేసికొనుటకు చంద్రుని యొక్క, నక్షత్రముల యొక్క స్థానములను గూర్చి కచ్చితమయిన పట్టికలను తయారుచేయు ఉద్దేశముతో ఈ వేధశాల నిర్మింపబడెను. లండనులోని విద్యుద్దీపములు పరిశోధనలకు అంతరాయము కలిగించుటచే ఇది 1946 లో ససెక్స్ మండలములోని ఒక కోటకు తరలింపబడెను.

గ్రీనిచ్ వేధశాలా నియంత్రణాధికారికి బ్రిటిష్ ప్రభుత్వము ఎస్ట్రానమర్ రాయల్ అను బిరుదము ప్రసాదించును. ఇంగ్లీషు ఖగోళ శాస్త్రవేత్తలలో అగ్రగణ్యుడైన వ్యక్తి ఆపదవియందు నియోగింపబడును. సుప్రసిద్ధ బ్రిటిష్ ఖగోళ శాస్త్రవేత్తలు ఈ పదవిని అలంకరించిరి. వారిలో మొట్టమొదటివాడు జాన్ ఫ్లామ్‌స్టీడ్. 1675 - 1719 వరకు ఆయన ఆపదవిని నిర్వహించి, చంద్రచారమును గూర్చి కావించిన నిర్దుష్టములయిన అవలోకనములు న్యూటన్ గురుత్వాకర్షణనియమమును ప్రతిపాదించుటకు సహాయకారులయ్యెను. అతనితరువాత ఆపదవియందు నియుక్తుడైన ఎడ్మండ్ హేలీ, జేమ్స్‌బ్రాడ్లీ, హేలీధూమకేతువును, కాంతి విపథనమును కనిపెట్టి, సుప్రసిద్ధులయిరి.

నౌకాయానమునకు సంబంధించిన సమస్యలతోపాటు, ఇతర ఖగోళశాస్త్ర విషయములు కూడ గ్రీనిచ్ వేధశాలలో పరిశోధింపబడును. అందు శుద్ధముగా తయారు చేయబడిన దూరదర్శనులు అనేకములు కలవు, కాని అవి అంత పెద్దవికావు. ఆ. వెం.

ఘనము (క్యూబ్): 6 సమాన చతురస్రములు ముఖములుగా కల రూపము ఘనము. దీనియందు ఏ రెండు ఆసన్న ముఖములు అయినను లంబ కోణము చేయుచుండవలెను.



చిత్రము 165 ఘనము

దీనికి 6 ముఖములు, 8 శీర్షములు, 12 అంచులుఉండును. ప్రతి శీర్షము 3 అంచుల మీదను, 3 ముఖముల మీదను ఉండును; ప్రతి అంచు రెండు శీర్షములనుచేర్చుచు రెండు ముఖములమీద ఉండును. ప్రతి ముఖము 4 శీర్షములమీదను, 4 అంచులమీదను ఉండును,

దీని భుజము a యూనిట్లు అయినచో, సంపూర్ణతల వైశాల్యము $6a^2$ అగును; ఘనపరిమాణము a^3 అగును.

ప్రాచీనగ్రీకులకు తెలిసిన క్రమబహుతలకములలో ఇది ఒకటి. క్రమబహుతలకములలో దీనికి జోడీ అయిన బహుతలకము అష్టతలకము. పా. ల. నా.

ఘాతాంకము (ఎక్స్పొనెంట్): ఘూతాంక భావమును డేకార్ట్ 1637 లో ప్రవేశపెట్టెను.

గణితములో ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో ఎన్నిసార్లు గుణించవలెనో సూచించుటకు ఆ సంఖ్యకు కుడివైపున పై భాగములో వ్రాయు సంఖ్యను ఘూతాంకము అందురు. ఉదా: $9^3 = 9 \times 9 \times 9$. అట్లే $a^3 = a \cdot a \cdot a$. అదే విధముగ $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$ (n సార్లు). ఇచ్చట a^n ను 'a యొక్క n వ ఘూతము' అని చదువవలెను. ఈ గణిత సులభపద్ధతిని ఉపయోగించి 420,000,000,000,000 అను సంఖ్యను తప్పులేకుండ ఇమిడికగా $4 \cdot 2 \times 10^{14}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఆధునిక విజ్ఞానములో వచ్చు ఇట్టి పెద్ద సంఖ్యలను లేదా అతిసూక్ష్మ సంఖ్యలను ఇమిడికగా చెప్పుటకు ఈ సంగ్రహ సంకేత విధానము చాల ఉపయోగకరమైనది. ఉదా: 0·000000143 అను సూక్ష్మసంఖ్యను $\frac{143}{1{,}000{,}000{,}000}$ అనిగాని, లేదా $\frac{143}{10^9}$ అనిగాని, లేదా $1 \cdot 43 \times 10^{-7}$ గా గాని వ్రాయవచ్చును.

ఘూతాంకములతో కూడిన పరికర్మలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన నియమములకు కట్టుబడి ఉండును:

i. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

ఉదా: $x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$.

ii. $(x^a)^b = x^{ab}$

ఉదా: $(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2) = x^6$.

iii. $(xy)^a = x^a y^a$

ఉదా: $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy)$
$= x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y = x^3 y^3$.

iv. $y \neq 0$ అయినచో,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

ఉదా: $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x^3}{y^3}$.

v. $x \neq 0$ అయినచో,

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

ఉదా: $\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x \cdot x \cdot x = x^3$.

vi. $x \neq 0$ అయి, $-n$ అనునది ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయిన,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

ఉదా: $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

vii. $x \neq 0$ అయిన $x^0 = 1$

ఉదా: $\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 = 1$.

viii. p/q అనునది, q అను ధనాత్మకహారముతో కూడిన ఏదో ఒక అకరణీయ సంఖ్య (రేషనల్ నంబర్) అయినచో $x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p$ అగును.

ఉదా: $x^{-2/3} = \sqrt[3]{x^{-2}} = (\sqrt[3]{x})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$.

ix. a అనునది ఏదో ఒక కరణీయసంఖ్య (ఇర్రేషనల్ నంబర్) అయిన, $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots \ldots, x^{a_n}$, అను వరుస అవధి x^a అగును. ఇచ్చట $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots, a_n$, మొదలగునవి a యొక్క ఒక స్థానము, రెండు స్థానములు, మూడు స్థానములు, ... n స్థానముల స్థూలవిలువలు. ఉదా: x^π అనునది $x^3, x^{3.1}, x^{3.14}, x^{3.141}, x^{3.1416}, \ldots \ldots$ అను వరుస అవధి విలువ.

$a + ib$ రూపములో వ్రాయనగు సంఖ్యలను సంకీర్ణ సంఖ్యలు అందురు. ఇచ్చట a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు; $i = \sqrt{-1}$. సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఘూతాంకములుగా తరచుగా వచ్చుచుండును. ఏ సంఖ్యనైనను ... ... లాగరిదమ్‌లకు (బేస్) అగు $e = 2 \cdot 718 \ldots$ యొక్క ఘూతముగ వ్రాయవచ్చును. e కు సంకీర్ణ ఘూతాంకము ఉన్నప్పుడు, e^{a+ib}, పైన ఈయబడిన (i) వ నిబంధన ప్రకారము $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$ అగును. e^{ib} యొక్క విలువను ఈ దిగువ నీయబడిన సమీకరణములో x కు బదులు ib ని ప్రతిక్షేపించి పొందవచ్చును:

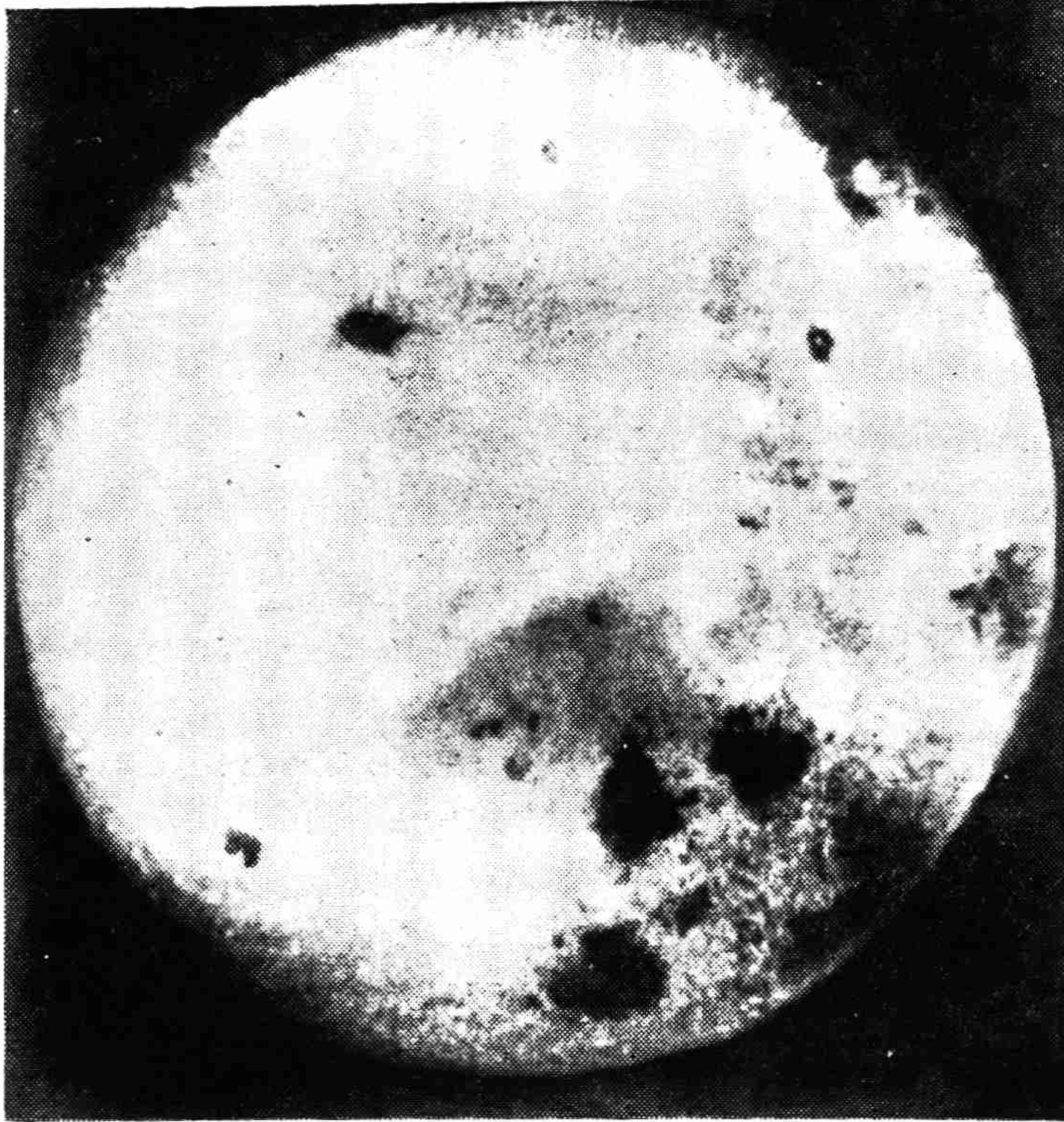
$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \cdots$$

వాస్తవ భాగమును, కల్పిత భాగములను వేరుచేయగా $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ అను ఆయిలర్ సమీకరణము లభించును. ఆ విధముగ $e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$ అగును. పా. ల. నా.

చంద్రుడు: దివ్యమూర్తులు అందరిలో మనకు సన్నిహితుడైన మూర్తి చంద్రుడు. చంద్రుడు భూమికి మిక్కిలి చేరువగా ఉన్నప్పుడు భూచంద్రుల నడిమి దూరము

3,57,000 కిలో మీటరులు. మిక్కిలి దూరముగా ఉన్నప్పుడు ఆ దూరము 4,07,000 కిలోమీటరులు. చంద్రమండల వ్యాసము 3460 కిలోమీటరులు; ఇది సూర్యమండల వ్యాసములో $\frac{1}{400}$ వంతు. చంద్రుని ద్రవ్యరాశి భూగోళ ద్రవ్యరాశిలో $\frac{1}{82}$ వంతు. చంద్రుడు భూమిచుట్టు ప్రదక్షిణము చేయు ఉపగ్రహము అని అందరు ఎరిగిన విషయమే. చంద్రుని కక్ష్య ఒక విలోపము (దీర్ఘవృత్తము).

భౌతిక లక్షణములు: చంద్రునికి స్వయం ప్రకాశములేదు; సూర్యకాంతిచే ప్రకాశించును. చంద్రమండలములో మిట్టపల్లములు ఎక్కువ అగుటవలన సూర్యుని వెలుతురు చంద్రబింబముపైపడునపుడు కొన్ని చోట్ల నీడలు పర్వడును. అవియే ప్రాచీన భారతీయులకు కుందేలు రూపమున కనిపించినవి. పాశ్చాత్యులు ఈ నీడలను సముద్రములని ఎంచి, వాటికి వేరువేరు పేర్లు పెట్టిరి. చంద్రమండలములో ఎత్తగు పర్వతములు, లోతగులోయలు కలవు, పర్వతములు అన్నియును అగ్ని పర్వతములు; వాటి సంఖ్య 30,000 పైగా ఉండును. వాటిలో కొన్నిటి ముఖవ్యాసము కొన్ని వందల కిలోమీటరులు. అచట అఖాతములు ఎక్కువగా కలవు; అవి సన్నగా దాదాపు 350 - 450 కిలోమీటరుల పొడవు కలవిగా ఉండును.



చిత్రము 166 చంద్రమండలముయొక్క వెనుక ముఖము

చంద్రలోకములో గాలి బొత్తిగాలేదు. చంద్రలోక ఆకర్షణ బలము భూలోక ఆకర్షణ బలములో 6 వ భాగము మాత్రమే. అందువలన అచట కల వాతావరణము అంతయు అంతరాళములో లీనమైపోయినది. అచట నీరు లేదు. కాబట్టి చెట్టుచేమలు ఉండవు. చంద్రమండల తలము అంతటను లావాతప్ప మరేమియులేదు.

రేడియో ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు రాడార్ తరంగములను చంద్రుని తలము తాకునట్లు పంపించి, వాటి పరావర్తితరూపముల పరిశీలనమువలన చంద్రతలము అంతయును సన్నని ఇసుక పొరతో కప్పబడి ఉన్నట్లును, మిట్టపల్లముల ఎత్తులలో భేదములు చాల తగ్గి ఉన్నట్లును కనుగొనిరి. ఒక శాస్త్రజ్ఞుడు చెప్పినట్లు మన భూతలముచంద్ర తలమువలె కన్పట్టుటకు దానిని హంసపాదు కాగితముతో నునుపు చేసి, శుభ్రీకరించి, సూక్ష్మజీవి రహితముగ చేయవలసి ఉండును.

భూమియందు పలాయనవేగము సెకనునకు 11·25 కిలోమీటరులు. చంద్రలోకములో అది 2·5 కిలోమీటరులు మాత్రమే. అందువలన చంద్రమండల వాతావరణ స్థితిలో లోపము సంభవించినది. చంద్రగోళము మధ్యాహ్న తాపక్రమము 100°C; అచ్చట అర్ధరాత్రమునందు అది −150°C వరకు పడిపోవుచుండును. కాబట్టి అట్టి తాప వికారములలో ప్రాణులు ఉండుట సందేహాస్పదము.

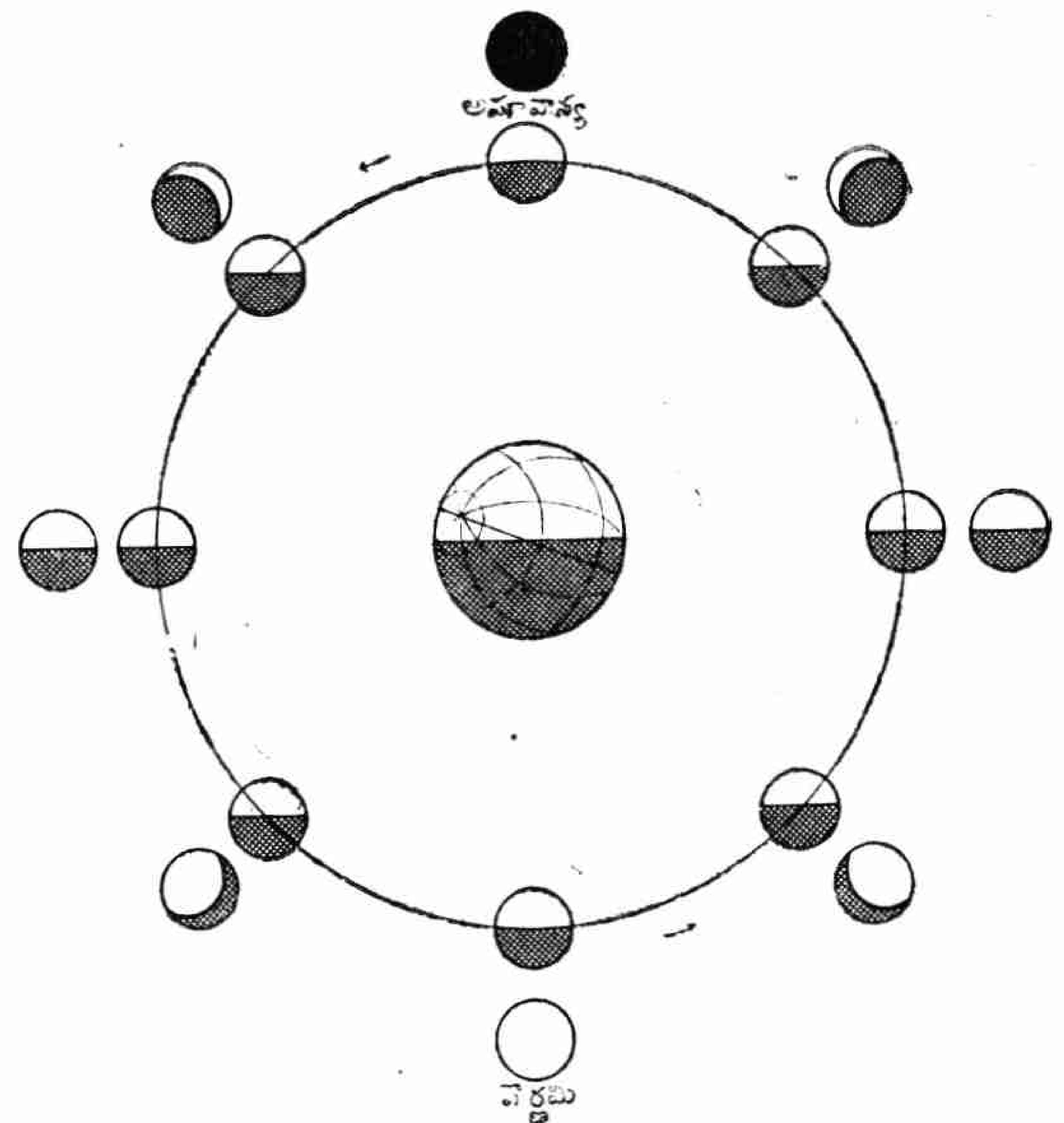
చంద్రలోకములో తలములు అట్లుండుటకు అగ్నిపర్వత స్ఫోటనము కారణమని కొందరును, ఉల్కాపాతములు కారణమని కొందరును ప్రతిపాదించిరి. రెండవ పక్షమయిన ఉల్కాపాత స్ఫోటవాదమే పెక్కుఖగోళ వైజ్ఞానికులచే ఆమోదింపబడినది. చాలవేగముతో ఉల్కలు చంద్రమండల

ము పై పడి ప్రేలినందున తలమునందు బిలములు ఏర్పడినవి అనియు, వాతావరణరాహిత్యముచే ఆ పల్లములు భూమి మీద వాటివలె పూడ్చుకొని పోలేదనియు ఈ వాదము నందలి సారాంశము.

చంద్రమండల భ్రమణము : చంద్రమండలముఖము ఎల్లపుడును ఒకేవిధముగ మనకు కనబడుచుండును. దాని యందు మార్పేమియు కన్పించదు. అందువలన చంద్రుని భ్రమణకాలము, పరిభ్రమణకాలము-రెండును సమానము అని విశదమగుచున్నది. చంద్రగోళము యొక్క అవతలివైపు మనకెప్పుడు పూర్తిగా కనపడదు. కాని పరిభ్రమణము నందు వేగములో మార్పుదల ఉండుటవలన ఆవైపు కొంత గోచరించును (చూ. చిత్రము 166 - పు. 259). చంద్ర మండల తోలనము[1] చే అక్షప్రదేశములందు ఎక్కువ భాగము దృక్పథమునపడును. సుమారు 59% వరకు చంద్ర గోళము మనకు కనిపించును. చంద్రుని ఒకే ముఖము కనపడుటకు కారణము దాని భ్రమణ పరిభ్రమణ కాల ములు సమానము అగుట కాదనియు, దానిని కక్ష్యలో ఉంచు గురుత్వాకర్షణబలములు ఒక ముఖమును రెండవ ముఖమునుకన్న ఎక్కువబలముతో ఆకర్షించుటతో దాని పరిభ్రమణము నిరుద్ధమగుచున్నది అనియు ఒక సిద్ధాంత మును ఇటీవలి ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు ప్రతిపాదించుచున్నారు[2].

చంద్రమండలపరిభ్రమణము : చంద్రుడు భూమిచుట్టు నక్షత్రములకు సాపేక్షముగ 27·32116 దినములలో తిరుగును. ఈ వ్యవధికి చాంద్రనాక్షత్ర మాసమని పేరు. సూర్యునికి సాపేక్షముగ చంద్రుడు భూమిచుట్టు తిరుగుటకు 29 దినములు, 12 గంటలు, 44 నిమిసములు పట్టును. రెండు అమావాస్యలకుగాని, రెండు పూర్ణిమలకుగాని నడుమకల ఈ కాలమే చాంద్రమానమాసము.

చంద్రకళలు : సూర్యకాంతి తనపై పడుటచేతనే చంద్ర గోళము ప్రకాశించుచున్నది. చంద్రగోళములో సూర్యుని వైపుతిరిగి ఉన్న సగముభాగము మీదనే సూర్యకాంతి పడుటకు అవకాశముకలదు. భూమిచుట్టు చంద్రుడు పరి భ్రమించుటలో భూమివైపునకు ఎల్లప్పుడు దాని ఒకే అర్ధభాగము ప్రదర్శితమై ఉండును. భూచంద్రకక్ష్యలు ఒకదానికి ఒకటి పరస్పరము 5° ఏటవాలుగ ఉండుటవలన మనకు గోచరించు చంద్రుని అర్ధగోళములో సూర్యునిచే దీప్తిమంతము అగుభాగము యొక్క విస్తృతి మారు చుండును. ఆవిధముగా చంద్రునికి కళలు ఏర్పడుచున్నవి.



చిత్రము 167 చంద్రకళలు

భూచంద్రుల భిన్నపరిభ్రమణవేగములవలన, భూమినిబట్టి సూర్యచంద్రుల సాపేక్షస్థానములలో మార్పు వచ్చుటవలన చంద్రుడు కళలను ప్రదర్శించును (చూ. చిత్రము 167).

పంటల పౌర్ణమి : సెప్టెంబరు 23 వ తేదీ సాయన తులాయన ప్రవేశకాలము. అస్తమానకాలమున తులా బిందువు అస్తమించుచుండును. అపుడు సూర్యుడు కూడ అచట ఉండును. పౌర్ణిమనాడు చంద్రుడు మేషవిషు బిందువుతో ఉదయించును. శరత్పౌర్ణిమనాడు సూర్యుడు అస్తమించుచుండగా చంద్రుడు ఉదయించును. మరునాడు (పాడ్యమి) సూర్యుడు అస్తమించిన తరువాత మామూలు కాలము కంటె వేగముగ చంద్రోదయము అగును. పాశ్చాత్యులు ఈ పౌర్ణిమను పంటల పౌర్ణిమ అని అందురు. అప్పుడు కోతకాలము కాబట్టి, సాయంకాలమున మామూలు కాలముకంటె వేగముగ చంద్రోదయము అగుట పొలములలో పనిపాటులు చేసికొను రైతులకు అది చాల అనుకూలము. మరుచటి పౌర్ణిమ వేటకు అనుకూలము. కావున దానిని వేటల పౌర్ణిమ అని వ్యవహరింతురు. పి. సూ. నా.

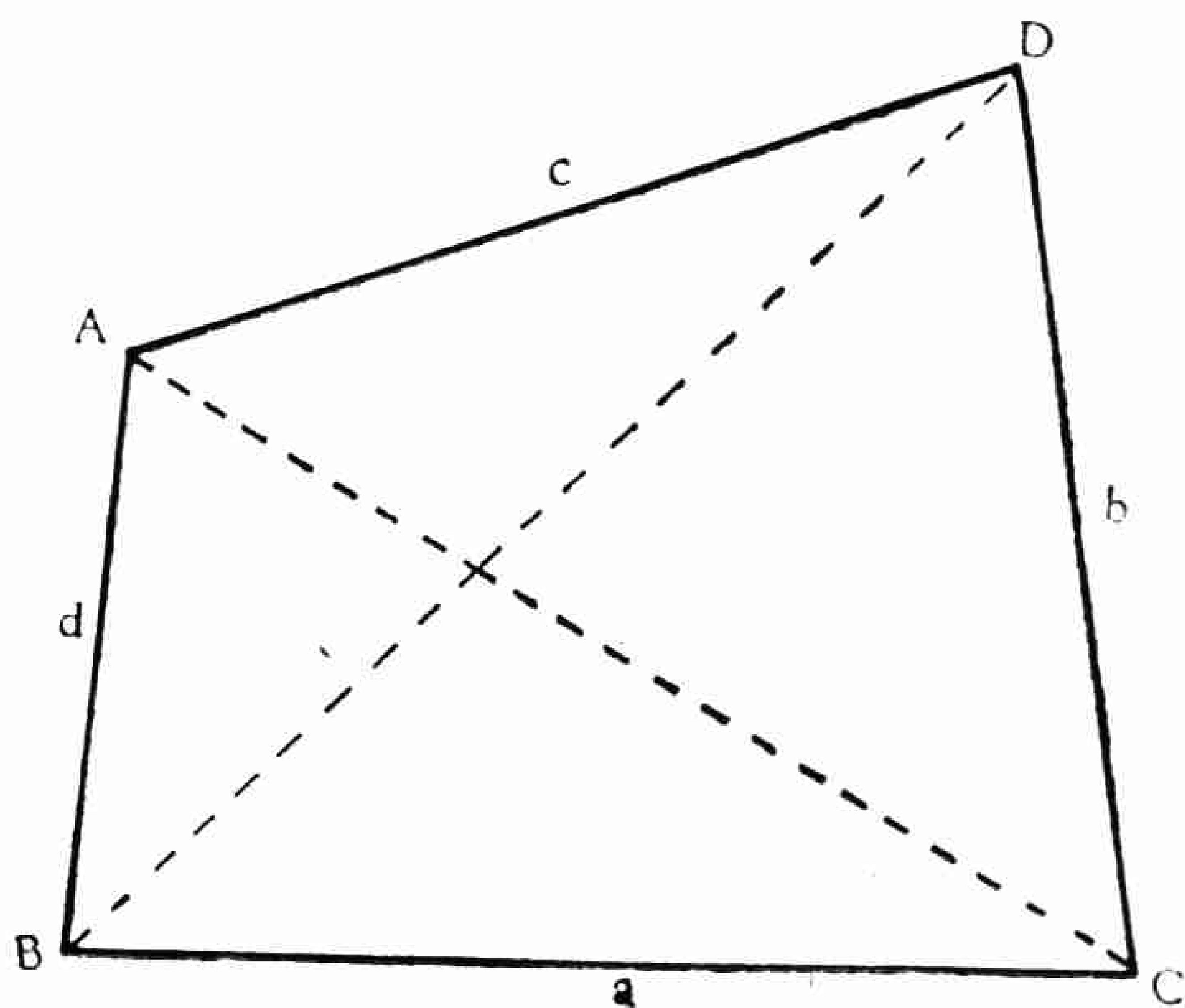
చతురస్రము (స్క్వేర్) : సమాన భుజములు, సమాన కోణములు కలిగి ఉండు చతుర్భుజమును చతు రస్రము అందురు. దీని కోణములు నాల్గును లంబకోణ ములు ; ఎదుటి భుజములు సమానాంతరములు ; దీని

1. తోలనము అనుమాటకు ఇక్కడి అర్థము చంద్రుని యొక్క వాస్తవిక, లేదా, వ్యక్తస్పందనము. అనగా ఒక ప్రక్కనుండి మరియొక ప్రక్కకు ఊగుట

2. చూ. రేడియో ఖగోళశాస్త్రము (పెలికన్ బుక్ - పుట 162) గ్రంథకర్త - ఎఫ్. జి. స్మిత్.

వికర్ణములు కూడ సమానములు. అవి సమద్విఖండన చేసికొనును. చతురస్రము యొక్క భుజము a అయినచో దాని వైశాల్యము a^2; వికర్ణము $(d) = a\sqrt{2}$; చుట్టు కొలత $4a$. పా. ల. నా.

చతుర్భుజము (క్వాడ్రిలేటరల్) : 4 భుజములు కల బహుభుజి చతుర్భుజము. 4 ఋజురేఖా ఖండములచే ఏర్పడు సంవృతచిత్రము 'చతుర్భుజము'. ఆ ఋజురేఖా



చిత్రము 168 చతుర్భుజము

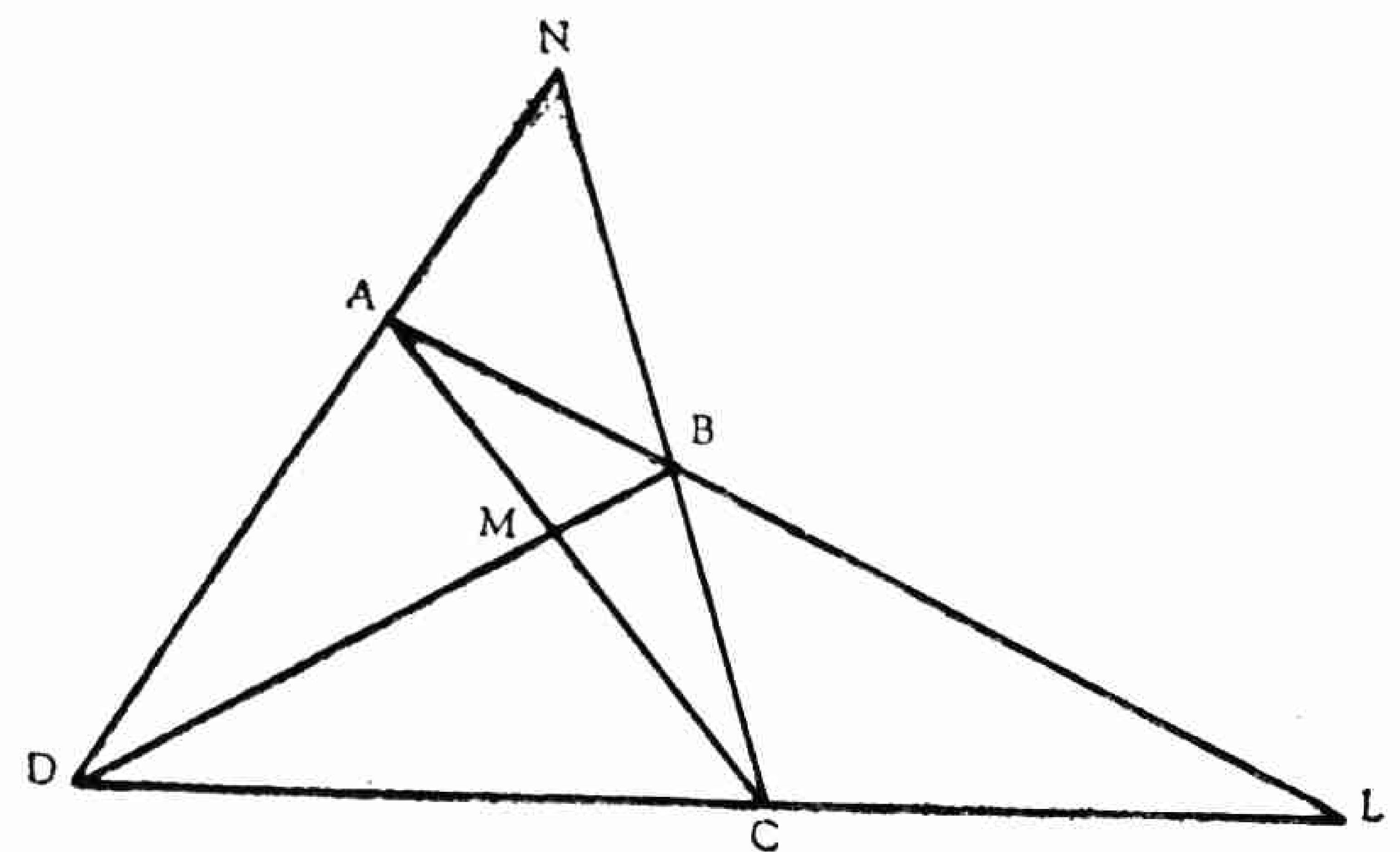
ఖండములను భుజములు అని, ఎదుటికోణీయ బిందువులను కలుపు రేఖలను వికర్ణములు (డయగ్నల్స్) అని అందురు. చతుర్భుజము యొక్క భుజములు a, b, c, d అయినచో దాని వైశాల్యము

$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha}$

అను సూత్రము సహాయముతో కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట $2s = a+b+c+d$; 2α ఏదో ఒకజత ఎదుటికోణముల మొత్తము (చూ. చతురస్రము; ట్రెపీజియమ్; దీర్ఘచతురస్రము; రాంబస్; సమాంతర చతుర్భుజము). పా. ల. నా.

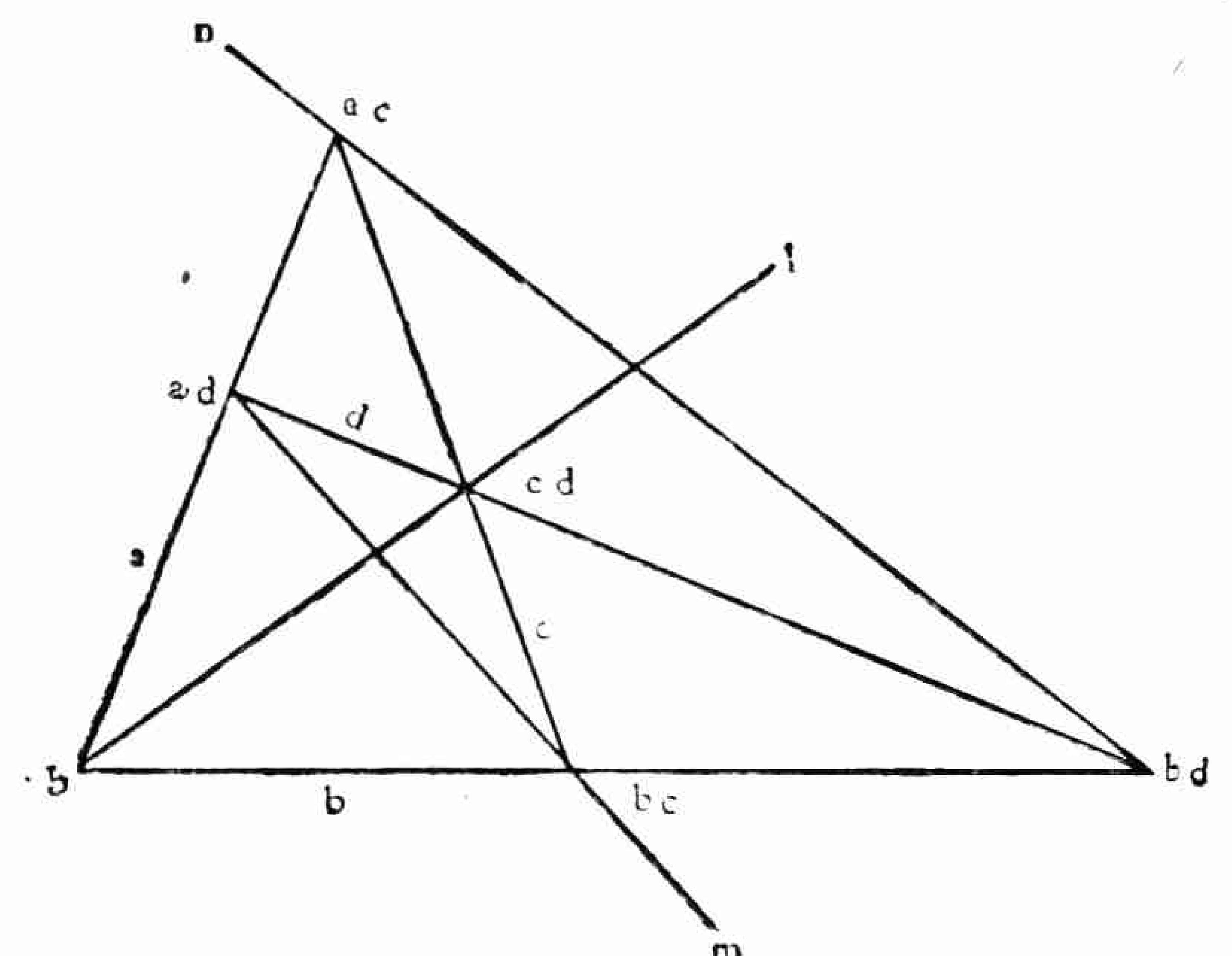
చతుష్కోణము (క్వాడ్‌రాంగెల్) : 4 వ్యాపక బిందువులతోను, వాటిని జతలుజతలుగా కలుపు 6 రేఖలతోను ఏర్పడు చిత్రమును పూర్ణచతుష్కోణము అని అందురు. ఇది విక్షేపకజ్యామితి భావము. నవీనజ్యామితిలో చతుష్కోణము నుండి చతుర్భుజము ఈ క్రింది విధముగ వేరగుచున్నది.

చతుష్కోణములో A, B, C, D అను 4 బిందువులు ఉండును. వీటిని AB, AC, AD, BC, BD, CD అను 6 విధములుగ జతలుజతలుగా కలుపవచ్చును. అందుచేత చతుష్కోణమునకు 6 భుజములు ఉండును: వీటిలో AB, DC; AC, BD; AD, BC ఎదురెదురు భుజములు. ఎదురెదురు భుజముల ఛేదనబిందువును వికర్ణబిందువు (డైయగ్నల్ పాయింట్) అని అందురు. ఆ విధముగ L, M, N అను మూడు వికర్ణబిందువులు చతుష్కోణమునకు ఉండును (చూ. చిత్రము 169). అటులనే చతుర్భుజ



చిత్రము 169 చతుష్కోణము

మునకు a, b, c, d అను 4 భుజములు ఉండును. ఇవి ab, ac, ad, bc, bd, cd అను 6 శీర్షములలో రెండు రెండుగా ఛేదించును. ఈ శీర్షములలో (ab, cd), (ac, bd),



చిత్రము 170 చతుర్భుజము (నవీన జ్యామితి)

(ad, bc) ఎదురెదురు శీర్షములు. ఎదురెదురు శీర్షములను చేర్చు రేఖను వికర్ణ రేఖ (డైయగ్నల్ లైన్) అందురు. ఆ విధముగ చతుర్భుజమునకు l, m, n అను 3 వికర్ణ రేఖలు ఉండును (చూ. చిత్రము 170). పా. ల. నా.

చయనకలనము (ఇంటెగ్రల్ కాల్క్యులస్) : చయనీకరణము అంతరీకరణము యొక్క విలోమ కర్మ. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ అని తెలియును. చయనీకరణములో ఏ ఫలమును అంతరీకరణము చేసిన x^2 లభించును అను సమస్యను సాధించుట ముఖ్యవిషయము. చయనీకరణ చిహ్నము $\int (\quad) dx$. ఇచ్చట dx ఏ చలరాశిని చయనీకరణము చేయవలయునో గుర్తించును. ఇపుడు

$\int 2x\, dx = x^2$; మరియు $\frac{d}{dx}(x^2 + k) = 2x$;

కాబట్టి $\int 2x\,dx = x^2 + k$ అనియు వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట k చయనీకరణ స్థిరరాశి.

$2x$ యొక్క చయనీకరణము వ్యాపకరూపములో $x^2 + k$ అని వ్రాయవలయును. k ఒక అనియత స్థిరరాశి. దానికి ఏ విలువ నిచ్చినను అది ఒక సాధనమగుచున్నది. కనుక ఈ చయనీకరణమునకు అనియతచయనీకరణ మని పేరు. ఫలములకు అంతరీకరణ గుణకములు లేదా వ్యుత్పన్నములను కనుగొను సూత్రము నుండి విలోమముగా చయనసూత్రములను కనుగొందము. ఇవి అన్నియు అనియత చయనములు :

(a, b) గుండ వెళ్లినట్లు తీసికొనిన అపుడు నియత చయనము మనకు లభించును.

కొన్ని ముఖ్యసూత్రములు : నిర్వచనము నుండి క్రింది ఫలితములు విశదమగును.

$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ ఇచ్చట a ఒక స్థిరరాశి.

$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

చయనీకరణ విధానములు : చయనరాశి ఎల్లపుడును పైన వ్రాసిన రూపములో ఉండదు. అట్టి సమయమున చయనరాశిని అట్టి రూపములోనికి మార్చుకొనవలయును. ఆ మార్గములు క్రింద విమర్శింపబడును.

అంతరీకరణము	చయనీకరణము
$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)\,x^n$	$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + k$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + k$
$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + k$
$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \log x + k$
$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + k$
$\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1} = (n+1)(ax+b)^n \cdot a$	$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + k$

ఇట్లే ఇతర ఫలములకు చయనము కనుగొనవచ్చును.

వ్యాపకముగా $\frac{d}{dx} f(x) = f'x$ అయినచో

$\int f'(x)\,dx = f(x) + k$; ఇచ్చట k చయనీకరణ స్థిరరాశి. $y = f(x) + k$ అను సమీకరణము తీసికొనిన, అది k యొక్క వివిధ విలువలకు ఒక వక్రముల కుటుంబమును గుర్తించును. ఈ వక్రములన్నియు ఏదో ఒక వక్రము $y = f(x)$ నుండి అన్ని బిందువులను y అక్షదిక్కులో ఒక నిర్దిష్టదూరము k జరుపుటవలన ఉద్భవించును. $y = f(x) + k$ ఒక అనియత చయనము. k యొక్క విలువ కనుగొనుటకు ఈ వక్రము ఒక దత్తబిందువు

బీజీయ ఫలములు : హారము వర్గఫలము : హారము మొదటి తరగతి ఫలము $(ax+b)$ అయిన, చయనీకరణము చాల సులభము.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log(ax+b)$$

హారము $ax^2 + bx + c$ అయినపుడు చయనరాశిని ఖండ భిన్నములుగా మార్చవలయును. అపుడు రెండు సందర్భములు ఏర్పడును. (1) $ax^2 + bx + c$ కి వాస్తవ విభాజకములు ఉండుట ; (2) వాస్తవ విభాజకములు లేక యుండుట ; అనగా సంకీర్ణములుగా ఉండుట.

ఈ క్రింది ఉదాహరణముల గమనింపుము :

(i) $\int \frac{dx}{x^2+7x+10} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+5} = \frac{1}{3} \log \frac{x+2}{x+5}$.

(ii) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+2^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x+3}{2}$.

హారమునందు ఒక బీజీయ ఫలముండి, దాని తరగతి 2 గాని, అంతకు ఎక్కువగాని ఉండిన, లవమును హారముతో భాగించిన తర్వాత పై విధానమును అవలంబింపవలయును. అందు భాగఫలము ఒక బహుపద మగును.

ప్రతిక్షేప విధానము : దీనివలన చయనరాశి తగిన రూపము పొందును.

(i) $\int (x^2+a^2)^n x\,dx$, $x^2+a^2=y$ అని ప్రతిక్షేపించుము. అప్పుడు $2x = \frac{dy}{dx}$. దీనినే $2x\,dx = dy$ అని వ్రాసెదము.

కాబట్టి $\int (x^2+a^2)^n x\,dx = \frac{1}{2}\int y^n \cdot dy$

$= \frac{1}{2(n+1)} y^{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}(x^2+a^2)^{n+1}$

(ii) $\frac{dx}{(ax+b)^n}$ ఇచ్చట $ax+b=y$ అని ప్రతిక్షేపించినచో, $dx = \frac{dy}{a}$, $(ax+b)^n = y^n$. కనుక

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^n} =$$

$$\frac{1}{a}\int y^{-n}\,dy = \frac{1}{a}\frac{y^{-n+1}}{-n+1}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)a}(ax+b)^{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}}$$

(iii) $\int \sec^4 x\,dx$; $y = \tan x$ అని తీసికొనినచో $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$; $dy = \sec^2 x\,dx$. కనుక $\int \sec^4 x\,dx = \int (1+y^2)\,dy = y + \frac{y^3}{3} = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$.

త్రికోణమితీయ ప్రతిక్షేపములు : (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ దీనిలో $x = a\sin\theta$ అని ప్రతిక్షేపించుము. $\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$. కనుక $dx = a\cos\theta\,d\theta$; $\sqrt{(a^2-x^2)} = a\cos\theta$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \int \frac{a\cos\theta\,d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

(ii) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\cdot dx}{2\tan\frac{x}{2}}$. ఇచ్చట $\tan\frac{x}{2} = t$ అని ప్రతిక్షేపించుము. అపుడు $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}.\ dx = dt$ అగుచున్నది.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

అట్లే $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ లేదా $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ యొక్క చయనీకరణమును కనిపెట్టవచ్చును.

ఖండ చయనీకరణము : x యొక్క రెండు ఫలములు u, v లను తీసికొనుము.

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ అని మనకు తెలియును.

పై సూత్రమును

$d(uv) = u\,dv + v\,du$ అని వ్రాసెదము.

అనగా, $v\,du = d(uv) - u\,dv$. అనగా,

$\int v du = uv - \int u\,dv$ దీనికి ఖండ చయన విధానమని పేరు.

ఉదా : $\int x\cos x\,dx$.

$\cos x$ యొక్క చయనము $\sin x$. ఇచ్చట $v = x$, $u = \sin x$ అని తీసికొనుము. $dv = dx$; $du = \cos x\,dx$.

కాబట్టి

$\int x\cos x\,dx = \int v\,du = uv - \int u\,dv = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$.

దీనిని సరి చూచెదము :

$\frac{d}{dx}(x\sin x + \cos x) = x\cos x + \sin x - \sin x \equiv x\cos x$.

ఉదా. 2 : $\int \log x\,dx$. ఇచ్చట $v = \log x$, $du = dx$, అనగా $u = x$ అని తీసికొనుము.

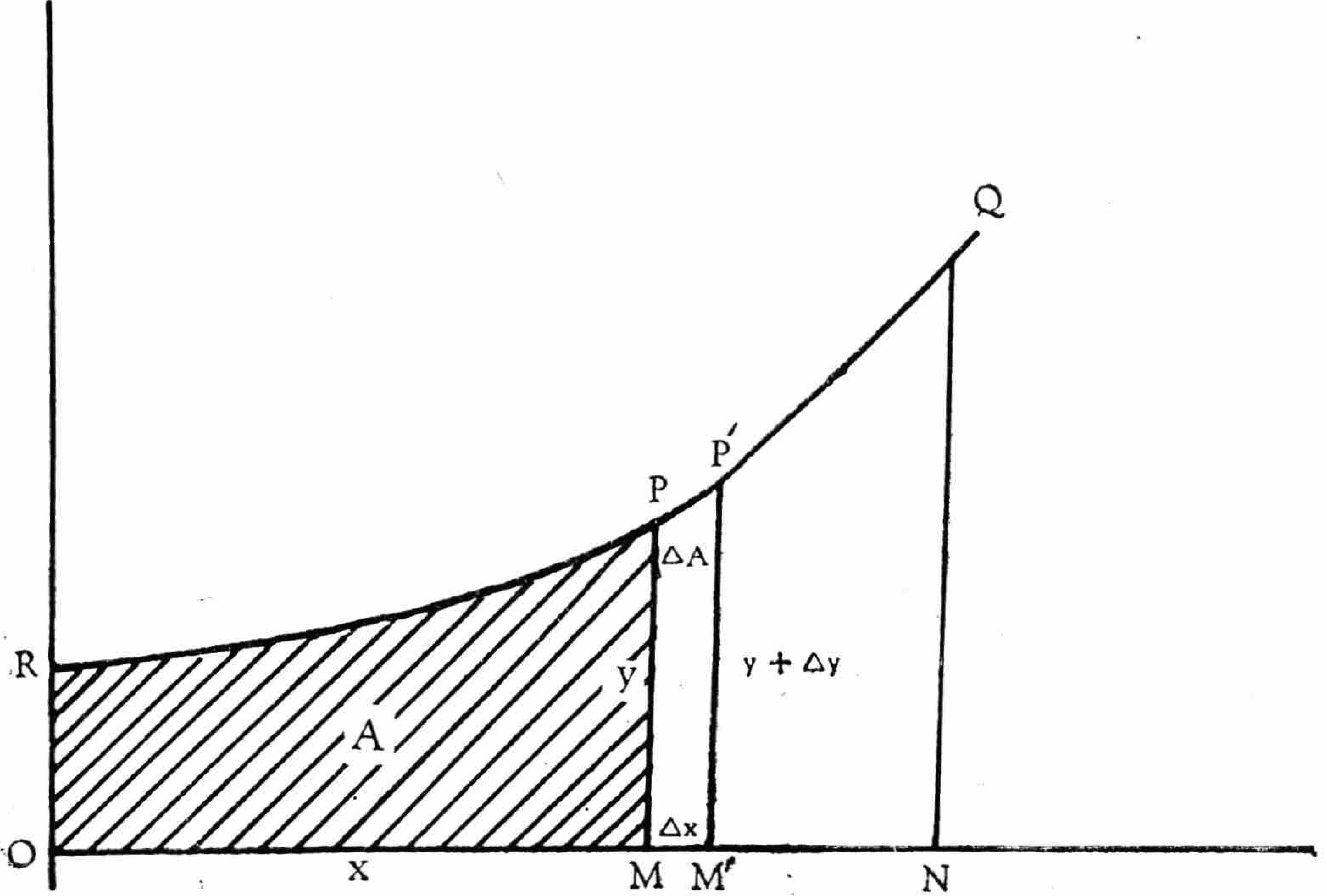
కనుక $\int \log x\,dx = \int v du = uv - \int u dv$.

అయితే $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$. కనుక $dv = \frac{dx}{x}$

$$\int u dv = \int x \cdot \frac{dx}{x} = \int 1 \, dx = x.$$

$$\therefore \int \log x \, dx = x \log x - x.$$

నియత చయనము : చిత్రము 171 లో వక్రము RP యొక్క సమీకరణము $y = f(x)$ అని తీసికొనుము.



చిత్రము 171

x అక్షము, ఋజురేఖ PM, వక్రము PR, y అక్షము - వీటి మధ్యను ఉండు వైశాల్యమును క్రింది విధముగ కనుగొనవచ్చును.

P యొక్క నిరూపకములు x, y అని తీసికొనిన $OM = x$, $MP = y$, వక్రము RP పై Pకి సమీపబిందువు P' తీసికొనుము. దాని నిరూపకములు $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ రేఖ $P' M'$ గీయుము. అపుడు $MM' = \Delta x$; $M'P' = y + \Delta y$.

చిత్రము 171 లో OMPR యొక్క వైశాల్యముA అని తీసికొనిన. $MM'P'P$ యొక్క వైశాల్యము ΔA అనెదము. చిత్రమునుండి $y \Delta x < \Delta A < (y + \Delta y) \Delta x$. అనగా $y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y$.

Δx శూన్యమును సమీపించునపుడు, అనగా $\Delta y \longrightarrow 0$ అగునపుడు $\frac{dA}{dx} \longrightarrow y$ అగుచున్నది.

అనగా $A = \int y \, dx = \int f(x) \, dx = F(x) + c$. c చయనీకరణ స్థిరరాశి ; c యొక్క విలువ కనుగొనుట సులభము.

$OM = x = 0$ అయినపుడు $A = 0$;

అనగా $\int f(x) \, dx = 0$; $\therefore F(0) + c = 0$

$c = -F(0)$

$$\therefore A = \int f(x) \, dx = F(x) - F(0)$$

పై చిత్రములో MP, NQ రేఖలు తీసికొని మధ్య వైశాల్యము కనుగొందము.

$OM = a$, $ON = b$ అయిన,

వైశాల్యము $ORQN = F(b) - F(0)$

వైశాల్యము $ORPM = F(a) - F(0)$

కాబట్టి వైశాల్యము $MPQN = F(b) - F(a)$

$x = a$ నుండి $x = b$ వరకు చిత్రములో వైశాల్యము కనుగొనవలయునని గుర్తించుటకు $\int_a^b f(x) \, dx$ అని వ్రాయుదుము.

కనుక $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. దీనినే $\Big[F(x)\Big]_a^b$ అని కూడ వ్రాయుదురు.

ఇందు $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

$\Big[F(x)\Big]_a^b$ యొక్క అర్థము $F(x)$ లో a, b లు ప్రతిక్షేపించి $F(b)$ లో నుండి $F(a)$ తీసివేయవలయును.

$\int_a^b f(x)\,dx$ ను నియతచయన మందురు.

నియతచయన ముఖ్యసూత్రములు :

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$

$$-\Big[F(a) - F(b)\Big] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(ii) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$

$a - x = y$ అని ప్రతిక్షేపించుము; $x = 0$ అయిన $y = a$; $x = a$ అయిన $y = 0$; $-dx = dy$.

$$\therefore \int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(y)\,dy =$$

$$\int_0^a f(y)\,dy.$$

నియతచయనము అవధులవిలువలపై ఆధారపడి ఉండుటచే చలరాశి y గాని x యొక్క ఫలము కాదు.

$$\therefore \int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

ఉదా : $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx =$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$\int_a^b f(x)$ లో a అధమ అవధి అనియును b ఉత్తమ అవధి అనియు చెప్పుదురు.

అనంత అవధి : $b \longrightarrow \infty$ అయినపుడు అవధి అనంతమని చెప్పుదురు.

ఉదా : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^{\infty} =$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2a}.$$

చయనీకరణము చేయు ఫలము ఒక బిందువునందు అనంత విలువను పొందునపుడు కూడ చయనీకరణము చేయవచ్చును. ఉదా : $\log x$ తీసికొందము. x శూన్యమును సమీపించునపుడు $\log x \longrightarrow \infty$. కాని చయనీకరణము సాధ్యమగును. $\int \log x\,dx = x \log x - x$ అని మనకు ఇదివరలో తెలుసును. $x = 0$ బిందువందు $\log x$ అనంతమగుటవలన $\int_0^a \log x\,dx$ ను $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a \log x\,dx$, అని నిర్వచనము చేసెదము.

$$\therefore \int_\varepsilon^1 \log x\,dx = \Big[x \log x - x\Big]_\varepsilon^1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$$

$$\Big[x \log x - x\Big]_\varepsilon^1 \longrightarrow -1 - 0 = -1.$$

కొన్ని కఠిన చయనములు :

(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx$

ఖండచయనరీతిగా ఇది $\Big[\sin^{n-1} x\,(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} +$

$$(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

$$\therefore\ n\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$$

ఇది ఆవర్తన సూత్రము. కాబట్టి,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \times f(n)$$

n సరి సంఖ్య అయిన $f(n) = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2.$

n బేసి సంఖ్య అయిన $f(n) = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1.$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx = \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1} \cdot 1$$

$$\left[\text{గమనిక : } \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx\right]$$

$$\text{(b)} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \left[+e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\cdot(-a)\, dx$$

[ ] మధ్య నుండు రాశి రెండు అవధులందును శూన్యము. కాబట్టి

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = +\frac{a}{b}\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx =$$

$$\left[\frac{a}{b}\, e^{-ax}\left\{-\frac{\cos bx}{b}\right\}\right]_0^{\infty} + \frac{a}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\cdot(-a)\, dx =$$

$$\frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx \, dx$$

$$\therefore \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{b^2}$$

$$\text{కాబట్టి} \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

ప్రయోగములు : చయనకలనము ఉపయోగపడని గణిత శాఖ లేదు. వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణము, గురుత్వకేంద్రము, గతిశాస్త్రము మొదలగు వానిలో ఇది అత్యంత ఉపయోగకరము.

వైశాల్యములు : ఇదివరలో $A = \int y \, dx$ అని తెలిసికొంటిమి. ఇపుడు ఒక వృత్త వైశాల్యమును కనుగొందము.

O కేంద్రముగా గల వృత్తము OX, OY అక్షములను A, B లలో ఖండింపనిమ్ము. $OA = r$ అయిన, వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=r^2$. నిరూపక అక్షములు వృత్తమును 4 సమభాగములు (పాదములు) గా విభజించును.

వృత్త వైశాల్యము = 4 × వృత్త పాదము OBC.

వృత్త పాదము OBC యొక్క పరిధిపై P బిందువు తీసికొనుము. OBC యొక్క వైశాల్యము $= \int_0^r y\, dx$

$x^2+y^2=r^2$ అయినందున $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$.

$$\therefore \int_0^r y\,dx = \int_0^r \sqrt{(r^2-x^2)}\,dx$$

$x = r\sin\theta$ అని ప్రతిక్షేపించుము. $x=0$ అయిన $\theta=0$; $x=r$, అయిన $\theta=\pi/2$ $dx = r\cos\theta\, d\theta$.

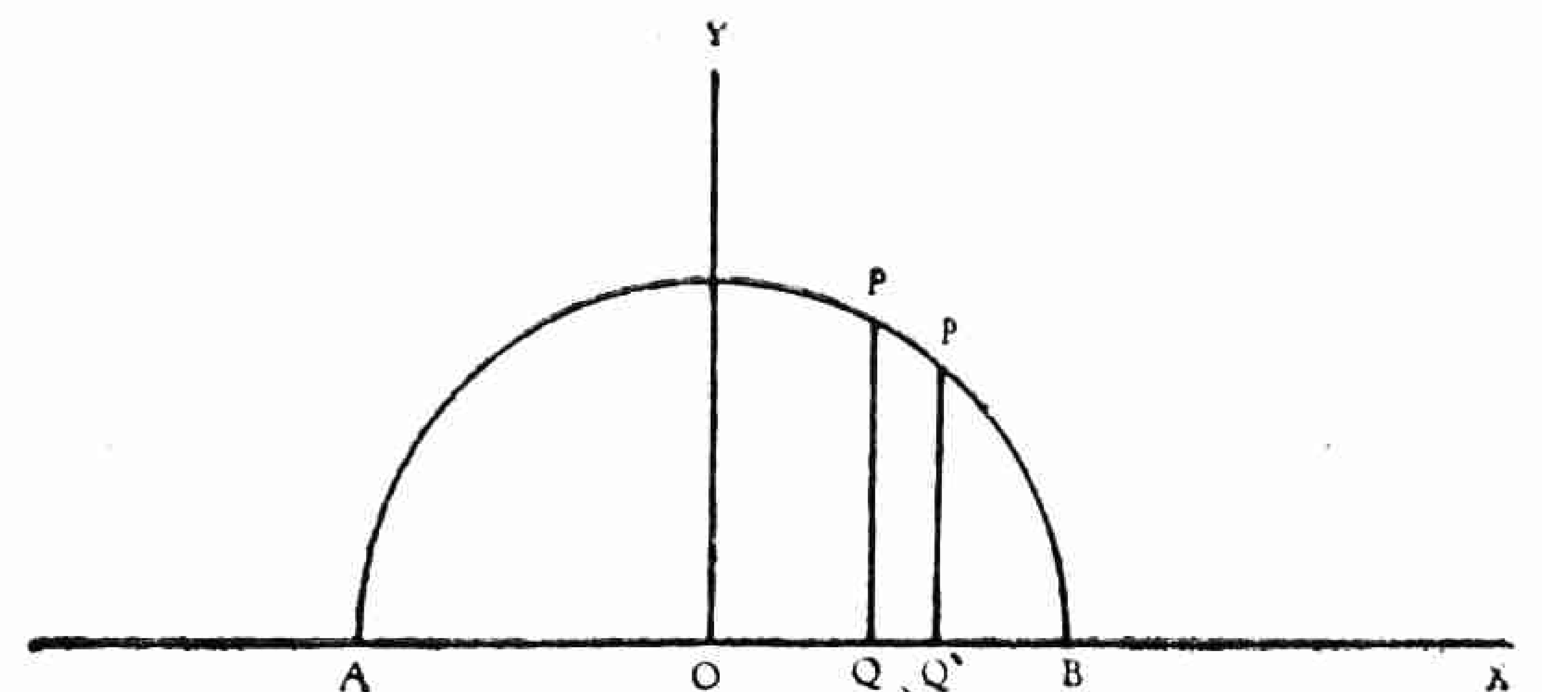
$$\therefore \int_0^r \sqrt{(r^2-x^2)}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{(r^2-r^2\sin^2\theta)}\; r\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} r\cos\theta.\ r\cos\theta\, d\theta =$$

$$r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{r^2\cdot 1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$\therefore \text{వృత్త వైశాల్యము } 4\cdot\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2.$$

భ్రమణఘనముల ఘనపరిమాణము : స్తూపము, శంకు, గోళము ఇవి అన్నియు తగిన సమతల చిత్రముల భ్రమణముచే ఏర్పడునని చూపవచ్చును. వీటి ఘన పరిమాణము కనిపెట్టు విధానము చూపుటకు ఒక గోళమును తీసికొనెదము.

గోళము : అర్ధవృత్తము ACB, వ్యాసము AB అక్షముగా భ్రమణము చేసిన గోళము ఏర్పడును. వృత్త కేంద్రము O అయిన, OB, OC లను x, y అక్షములుగా



చిత్రము 172

తీసికొనుము. అర్ధవృత్తము ACB పై దగ్గర ఉన్న PP′ బిందువులు తీసికొనుము. OB కి లంబము PQ, P′Q′. P యొక్క నిరూపకములు x, y అయిన $OQ = x$, $QP = y$, వ్యాసార్ధము a అయిన $OB = a$; అర్ధవృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=a^2$.

$PP'Q'Q$ వైశాల్యమును తీసికొనుము. ఇది AB అక్షము వెంబడి, భ్రమణము చేయునపుడు ఒక పలుచని స్తూపపు బిళ్ల ఏర్పడును.

దాని దళసరి = Δx, వ్యాసార్ధము = y అయిన ఘన పరిమాణము = $\pi y^2 \Delta x$ అగును.

గోళ ఘన పరిమాణము = $\Sigma \pi y^2 \Delta x = \pi \int_{-a}^{a} y^2\, dx$

అచట x యొక్క అవధి $-a$ నుండి $+a$ వరకు.

$$\int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

గోళ ఖండము : h దట్టముగల గోళ ఖండము యొక్క ఘన పరిమాణము కనుగొనుటకు పూర్వపు మార్గమును అనుసరింపవచ్చును.

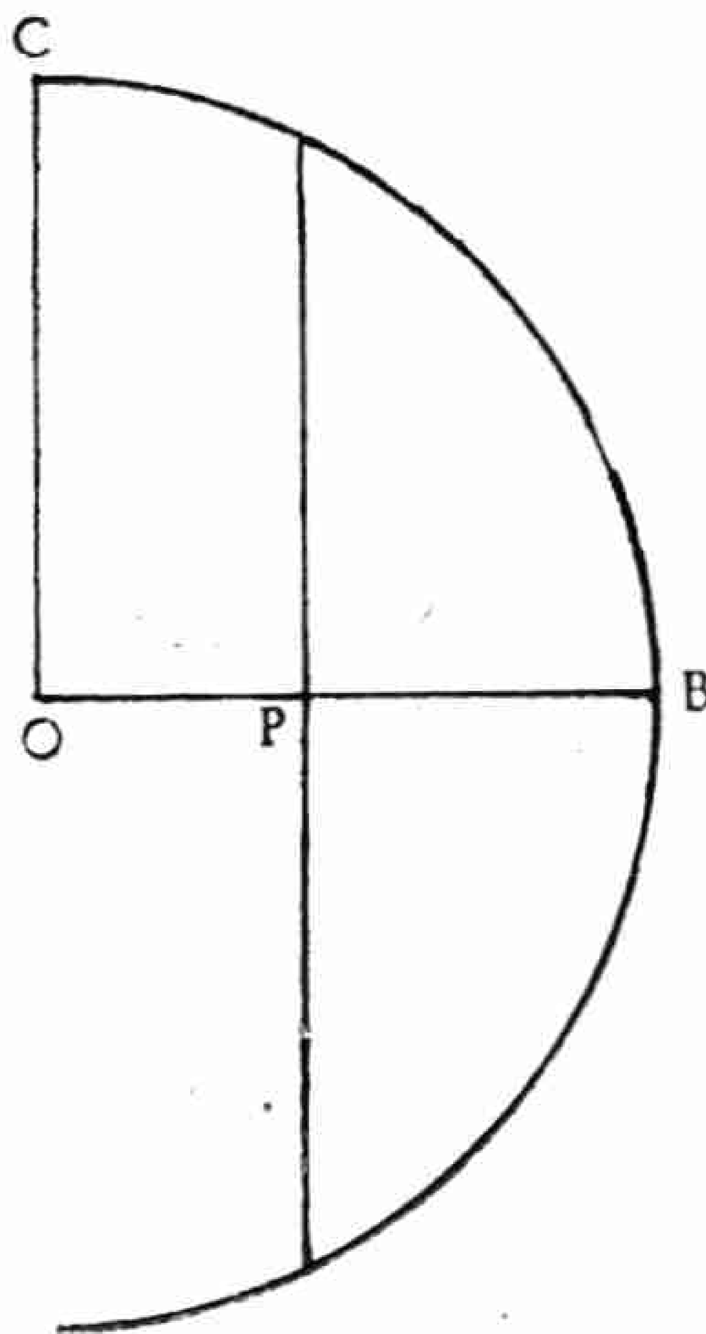
$PB = h$ అయినచో $OP = a - h$, $OB = a$.

ఘన పరిమాణము

$$\pi \int_{a-h}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{a-h}^{a}$$

$$= \pi \frac{h^3}{3}(3a - h)$$



చిత్రము 173

గోళ తలము : ఒక అర్ధవృత్తము ABC, వ్యాసము AB అక్షముగా భ్రమణముచేసిన గోళ తలము ఏర్పడును (చూ. చిత్రము 172). P బిందువు x, y అర్ధవృత్తముపై PP' ఒక ధనుస్సు, దాని పొడుగు Δs. అది భ్రమణము చేయునపుడు $2\pi y \Delta s$ వైశాల్యము గల ఒక మండలము ఏర్పడును.

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$ అయిన గోళ తల పరిమాణము :

అవధి $\Sigma 2\pi y \Delta s$, అనగా $\int 2\pi y\, ds$

$\angle POB = \theta$ అయిన,

$x = OQ = r\cos\theta$, $y = OP = r\sin\theta$,

$dx = -r\sin\theta\, d\theta$, $dy = r\cos\theta\, d\theta$.

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2 (d\theta)^2 \quad \therefore ds = r\, d\theta$

$y = r\sin\theta$ అయినందున $y = 0$ అయినపుడు $\theta = 0$, $y = r$ అయినపుడు $\theta = \pi/2$.

$$\text{కాబట్టి } 4\pi \int y\, ds = 4\pi \int_0^{\pi/2} r\sin\theta\, r\,d\theta =$$

$$4\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = 4\pi r^2$$

పూర్ణగోళ ఉపరితల పరిమాణము = $4\pi r^2$

గురుత్వకేంద్రము : స్థితిశాస్త్రరీత్యా $m_1, m_2 \ldots \ldots m_n$ ద్రవ్యరాశిగల కణముల నిరూపకములు (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots \ldots (x_n, y_n)$ అయినచో గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకములు $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\bar{x} = (\Sigma m_n x_n) / \Sigma m_n$$

$$\bar{y} = (\Sigma m_n y_n) / \Sigma m_n$$

ఉదా : ACB ఒక అర్ధవృత్త దళము ; సమానమగు దళసరి కలది. దాని గురుత్వకేంద్రము కనుగొందము : వృత్తకేంద్రము O ;

అర్ధవృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$; సౌష్ఠవ న్యాయమున గురుత్వకేంద్ర బిందువు y అక్షముపై అనగా OC పైన ఉండును. కనుక $\bar{x} = 0$. $\bar{y}$ కనుగొనుటకు AB కి సమానాంతరముగ దానిని సన్నని పట్టీలుగా కత్తిరింపుము. P యొక్క నిరూపకములు x, y అయిన, ఒక పట్టీయొక్క పొడవు $2x$. దాని వెడల్పు Δy. కనుక పట్టీయొక్క వైశాల్యము = $2x\,\Delta y$. యూనిట్ వైశాల్యము యొక్క ద్రవ్యరాశి m అయిన ఈ పట్టీయొక్క ద్రవ్యరాశి = $2mx\,\Delta y$ అగును.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} = \frac{\Sigma 2x\,\Delta y\, m \cdot y}{\Sigma 2x\,\Delta y \cdot m} = \frac{\int_0^r 2xy\, dy}{\int_0^r 2x\, dy}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ అయినచో $dy = r\cos\theta\, d\theta$.

$y = 0$ అయినపుడు $\theta = 0$, $y = r$ అయినపుడు $\theta = \pi/2$.

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^{\pi/2} r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\, d\theta}$$

$$= r\frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta} = \frac{4r}{3\pi}$$

కె. మ. రా.

చయన సమీకరణములు : చయనీకరణ సంజ్ఞ లోపల ఒక అవిదితఫలము ఉన్నప్పుడు ఆ సమీకరణము నకు చయనసమీకరణము అని పేరు. ఆ అవిదిత ఫలమును కనుగొను విధానమును సమీకరణసాధన అని చెప్పుదురు. గణితమునందు చయనసమీకరణములను మొట్టమొదట ఉపయోగించినది లాప్‌లాస్ అను ఫ్రెంచ్ గణితజ్ఞుడు. అతడు విమర్శించిన సమీకరణము :

$$f(x) = \int e^{xt} \phi(t)\, dt : g(x) = \int t^{x-1} \phi(t) dt \cdots (1)$$

ఇచట $f(x), g(x), e^{xt}, t^{x-1}$ తెలిసిన ఫలములు ; అవిదిత ఫలము $\phi(t)$. చయనసమీకరణములు మొదట మనకు ఫోరియర్ పరంపరలో కనపడును. ఆ సమీకరణము

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, \phi(t)\, dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

దాని సాధనము $\phi(x) = 2/\pi \int_0^{\infty} \cos(ux) f(u)\, du$. $\cos(xt)$ సరిఫలము అయినందున $f(x)$ కూడ సరిఫలమై ఉండవలెను.

తరువాత ఆబెల్ యొక్క యాంత్రిక సమస్యా పరిశోధనలో మరియొక చయన సమీకరణము లభించెను. దానికి సాధనములు రెండు. ఆ తరువాత అంతరీకరణ సమీకరణములను సాధించు సందర్భమున లూయీవిల్‌కు ఒక చయనసమీకరణము లభించెను. ఆ సమీకరణమును సాధించు విధానమునుకూడ అతడే కనుగొనెను.

గణితశాఖలు అనేకములలో చయనసమీకరణములు చాల ప్రధానస్థితిని పొందినవి. ఇందు వాడబడు చలరాశులు వాస్తవికములు. ఫలములు వాస్తవికములు, అవిచ్ఛిన్నతా లక్షణము కలవై ఉండును. వ్యాపక రూపకములో ఉండు ఒక చయన సమీకరణము

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\, \phi(t)\, dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ఇచట $f(x)$ ఒక అవిచ్ఛిన్నఫలము. $k(x, t)$ కొన్ని విధింపబడిన నిబంధనలకు లోబడినది. $k(x, t)$ ఫలమునకు సమీకరణకేంద్రకము అని పేరు. ఇట్టి సమీకరణములు రేఖీయ సమీకరణముల సముదాయముయొక్క అవధి రూపమని భావింపవచ్చును. ఈ మార్గమును అనుసరించి ఫ్రెడ్‌హోమ్ పై సమీకరణమును సాధించెను.

లూయీవిల్ మార్గము : సమీకరణము 3 లో $\phi(t)$ కి బదులు $\phi(x)$ గుర్తించు ఫలమును ప్రతిక్షేపించుచు పొమ్ము. ఉపసరణ పరంపర లభించును. ఎమ్. వి. సు.

చయనీకరణ విధానములు : చయనీకరణము అంతరీకరణమునకు విలోమకర్మ అనునది ఒక నిర్వచనము. దీని ప్రకారము $y = F(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ అయితే, $f(x)$ యొక్క చయనీకరణమువలన $F(x)$ లభించును. దీనినే $F(x) = \int f(x)\, dx$ అని వ్రాయుదుము. ఇది $f(x)$ యొక్క అనిశ్చితచయనము. $\int_a^b f(x)\, dx$ అని వ్రాసినచో, $F(b) - F(a)$ అని అర్థము. అనగా $f(x)$ ను చయనీకరించి, ఆ లబ్ధఫలము $F(x)$ లో మొదట b తరువాత a, xకు బదులు ప్రతిక్షేపించి, వాటివ్యత్యాసమును తీసికొనినచో $\int_a^b f(x)\, dx$ దొరకును. దీనికి మరియొక అర్థమున్నది. $y = f(x)$ అను వక్రమును వ్రాసి, ఆ వక్రము, x అక్షము, $x = a$, $x = b$ అను రెండు ఋజురేఖలు, ఈ నాలుగు రేఖల మధ్యనుండు వైశాల్యమే $\int_a^b f(x)\, dx$ అగును.

ఈ నిర్వచనమునుండి, $\int_a^b f(x)\, dx$ యొక్క విలువను ఒక సంకలన పరంపర అవధిగా పొందవచ్చును. ఎటులన, పైన వివరించిన క్షేత్రమును, y అక్షమునకు సమానాంతరముగ గీయబడిన రేఖలచే n భాగములుగ విభజించెదము. అనగా $x = a$, $x = a + h$, $x = a + 2h$, $x = a + 3h$, … $x = a + nh = b$ అని, బిందువులను x అక్షముపై తీసికొని, ఈ బిందువులద్వారా y అక్షమునకు సమానాంతర రేఖలు గీయుము. ఇట్లు దత్తక్షేత్రము n భాగములుగా విభజింపబడినది. దీనిలో ఒక్కొకటి సుమారుగ దీర్ఘచతురస్రరూపములో ఉన్నది. n పెద్దసంఖ్య అగునపుడు $x = a + rh$, $x = a + (r+1)h$ వీటిమధ్యనున్న అంతరముపై నిలిచియుండు దీర్ఘచతురస్రముయొక్క వైశాల్యము సుమారు $hf(a + rh)$ అనవచ్చును. కనుక అన్ని దీర్ఘచతురస్రముల మొత్తము వైశాల్యము

$$h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f\{a + (n-1)h\}\right]$$

అగుచున్నది. $n \longrightarrow \infty$ అగునడు h శూన్యమును సమీపించును. పై పరంపరయొక్క పదములు అనంతమగును. h శూన్యమును సమీపించునపుడు పై పరంపర విలువ ఒక అవధిని పొందిన ఎడల, ఈ అవధినే $\int_a^b f(x)\, dx$ అని చెప్పుదుము. ఈ విధానమునకు రీమాన్ చయన విధానమని పేరు.

రీమాన్ చయనీకరణము : దీనినే నిశితమైన రీతిగా క్రింది విధముగ వర్ణింపవచ్చును :

(a, b) అను అంతరములో $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < b = x_n$ అని $(n-1)$ బిందువులను తీసికొనుము.

$x_{r+1} - x_r$ ను Δx_r అని గుర్తించుము. $x_r \leq x \leq x_{r+1}$ అంతరములో $f(x)$ యొక్క గరిష్ఠవిలువ M_r అనియు కనిష్ఠవిలువ m_r అనియు వ్రాయుదుము. ఇపుడు

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots \dots m_n \Delta x_n$$

$$S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots \dots M_n \Delta x_n$$

అని తీసికొని s_n, S_n విలువలను కనిపెట్టుము. ఈ విలువలు n సంఖ్యమీదను, మనము తీసుకొను బిందువులు $x_1 . x_2 \dots x_n$ పైనను ఆధారపడి యుండును. ఇట్లు అన్నివిధములైన s_n, S_n లను తీసికొనుము. $n \longrightarrow \infty$ అయి, ఉప అంతరములు Δx_1, $\Delta x_2, \dots \Delta x_n$ అన్నియు శూన్యమును సమీపించునపుడు, అన్ని s_n లకు ఒక కనిష్ఠ ఉపరిసీమ s ఒకటి ఉండును. అటులనే అన్ని S_n లకును ఒక గరిష్ఠ అధరసీమ S ఒకటి ఉండును. ఈ విలువలు S, s సమానమైతే ఈ ఉమ్మడి విలువయే $\int_a^b f(x)\,dx$ అనబడును. S, s వేర్వేరైతే, $f(x)$ ఫలమునకు (a, b) అంతరములో నిశ్చితరీమాన్ చయనము లేదు అందుము.

ఇట్లు రీమాన్ విధానముచే చయనీకరణము సాధ్యము కాని ఫలమునొకటి ఇచ్చట ఉదాహరింతుము. $a = 0$, $b = 1$ అని తీసికొనుము. ఈ అంతరములో అనగా $0 \leq x \leq 1$ లో x చలరాశికి ఎన్నో కరణీయ విలువలును, ఎన్నో అకరణీయ విలువలును ఉన్నవి. x ఒక కరణీయ సంఖ్య అగునపుడు $f(x) = 1$ అనియు, x ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగునపుడు $f(x) = 0$ అనియు అగునట్లు ఒక ఫలమును తీసికొనుము. ఉదా: $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0, f\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1$. ఇపుడు ఉప అంతరములు Δx_1, $\Delta x_2, \dots \Delta x_n$ ఎటుల తీసికొనినను, ఒక్కొక ఉప అంతరములోను కరణీయ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నవి. అనగా ఎంత చిన్నదైనను ఒక్కొక ఉప అంతరములోను $f(x) = 1$ విలువను కొన్ని చోట్లలోను, $f(x) = 0$ విలువను మరి కొన్నిచోట్లలోను తీసికొనును.

కనుక $M_1 = M_2 = \dots M_n = 1$, $m_1 = m_2 = \dots m_n = 0$.
$\therefore s = 0, S = 1\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n\right) = 1. s \neq S$.
ఈ ఫలమునకు రీమాన్ చయనము సాధ్యము కాదు!

ఇటువంటి రీమాన్ చయనము సాధ్యముకానిఫలములలో కొన్నిటినైనను చయనీకరించు ప్రయత్నములోనే లెబేగ్ విధానము ఉద్భవించినది.

ఇచ్చట ఒక ఫలము $f(x)$ ను, ఒక దత్త అంతరము $a \leq x \leq b$ కు బదులు, ఒక దత్త బిందుసమితి (సెట్ ఆవ్ పాయింట్స్) పై చయనీకరించెదము.

లెబేగ్ విధానమును వివరించుటకు మునుపు ఒక బిందు సమితి యొక్క 'కొలత' (మెజర్) అను క్రొత్త భావమును ప్రవేశపెట్టవలెను. ఇది ఎటలుండవలెనన్న (i) బిందుసమితి ఒక అంతరము (ఇన్టర్వల్) (a, b) గా ఉన్నపుడు (దీనిలో కడపటిబిందువులు $x = a, x = b$ ఉన్నను, లేకున్నను, ఒకటిమాత్రమున్నను), దానికొలత ఆ అంతరముయొక్క నిడుపు $(b - a)$ గ నుండవలెను, (ii) రెండు సమితులు A, B లందు ఉమ్మడి బిందువులు లేనిచో, అనగా $A \cap B = 0$ అగునపుడు, వాటి సంకలనసమితి $(A \cup B)$ యొక్క కొలత, ప్రత్యేక A, B సమితులకొలతల సంకలనముగా నుండవలెను. ఇటువంటి గుణములు గల 'కొలత' భావమును క్రింద వివరించినవిధముగా లెబేగ్ నిర్వచించెను.

ఒక బిందుసమితియొక్క లెబేగ్ కొలత: ఒక పరిమిత అంతరము $(-L, L)$ లో ఒక బిందుసమితి A ను తీసికొందము. A లోని బిందువులన్నిటిని కప్పునట్లు వివృత అంతర సమూహమును తీసికొనుము. అనగా A లోని ఒక్కొకబిందువు ఏదో ఒక అంతరములోని లోపలి బిందువుగా నుండవలెను. ఇట్టి సమూహములోని అన్ని అంతరముల నిడుపుల సంకలనము ఒక సంఖ్య అగును. ఇట్లు ఎన్నోవిధములుగా కప్పుటవలన ఎన్నో సంకలన సంఖ్యలు లభించును. ఈ సంఖ్యలన్నిటికి ఒక అధరసీమ s ఉన్నదనుకొందము. అపుడు A బిందుసమితియొక్క 'బయటి కొలత' s అందుము. అటలనే $(-L, L)$ అంతరములో నుండి, A సమితి బిందువులను తీసివేసినచో, మరియొక బిందుసమితి A' దొరకును. A' సమితియొక్క పైన వివరించిన బయటికొలతను కనిపెట్టుము. దీనిని t అందుము. ఇపుడు $2L - t$ ను A యొక్క 'లోపలి కొలత' అందుము. ఒక బిందుసమితి A కు, 'బయటి కొలత' 'లోపలి కొలత' సమమైతే, (అనగా $t + s = 2L$ అయితే,) A బిందుసమితి 'కొలతకలది' లేదా 'కొలవ సాధ్యమైనది' అనియు దాని కొలత s అనియు చెప్పుదుము. $s + t \neq 2L$ అయితే, A బిందుసమితి కొలతలేనిది (నాన్ మెజరబుల్) అందుము.

ఉదా: $x -$ అక్షములో $(-1, +1)$ అంతరములో నున్న అకరణీయ సంఖ్యా సమూహమును తీసికొనుము. $x -$ అక్షముపై నున్న ఒక్కొకబిందువునకు ఒక నిరూపక సంఖ్య x ఉన్నందువలన, మనము ఒక బిందుసమితిని సంఖ్యాసమితిగనో, లేదా సంఖ్యాసమితిని బిందుసమితిగనో తలంపవచ్చును. అకరణీయ సంఖ్యల నన్నిటిని ఒక వరుసగా $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \dots$ వ్రాయవచ్చునని ఒక సిద్ధాంతమున్నది (చూ. క్రాంతపరిమితసంఖ్యలు-పు. 199) కనుక $(-1, +1)$ అంతరములో నున్న అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను

ఒక వరుస $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ రూపముగా వ్రాయ వచ్చును. ఇపుడు ఈ బిందువులను కప్పుటకు అంతరములను

$$(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon), (a_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon, a_2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

$$\left(a_3 - \frac{\varepsilon}{4}, a_3 + \frac{\varepsilon}{4}\right), \dots \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}\right)$$

తీసికొనుము. ఇచ్చట ε ఏదో ఒక ధనాత్మక చిన్నసంఖ్య. ఈ అంతరముల నిడుపులు $2\varepsilon_1, \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \dots \frac{\varepsilon}{2^{n-2}} \dots$

ఇది ఒక గుణోత్తరశ్రేఢి. ఈ శ్రేఢి సంకలనఫలము 4ε అయితే ε ఎంత చిన్నసంఖ్యగనైన తీసికొనవచ్చును. కనుక దత్తఅకరణీయ బిందు సమితియొక్క బయటికొలత s శూన్యమగును. $(-1, 1)$ లో నుండి ఈ బిందువులను తీసి వేసినచో, మిగిలిన కరణీయసంఖ్యలన్నియు $(-1, +1)$ అను అంతరములోనున్నవి. దీని నిడుపు $2 = t$. ఇచ్చట $t + s = 2$ అగుటచే, ఈ రెండు సమితులు కొలవదగిన వనియు, $(-1, +1)$ అంతరములోనున్న అకరణీయ బిందుసమితి కొలత శూన్యమనియు, కరణీయ బిందువుల కొలత 2 అనియు విశదమగుచున్నది.

ఇటులనే ఏ సమితిలోని అన్ని బిందువులు ఒక వరుసగా వ్రాయసాధ్యమైతే ఆ సమితియొక్క కొలత శూన్యమని పైవిధముగ నిరూపించవచ్చును.

ఉదా: బీజీయ సంఖ్యలు (ఆల్జిబ్రిక్ నంబర్స్), (అనగా పూర్ణాంకములు $a_0, a_1, \dots a^n$ గుణకములుగా గల సమీకరణము $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ యొక్క మూలములు) ఒక వరుసగా వ్రాయవచ్చును. వాటి క్రాంతపరిమిత సంఖ్య $\aleph_0$ అగుచున్నది. కనుక ఏ అంతరములోనున్న బీజీయ సంఖ్యల కొలత శూన్యమగును.

లెబేగ్ చయనీకరణము: ఇపుడు ఒక అంతరము $-L \leq x \leq L$ లో ఏదో ఒక సంఖ్యా సమితి A ను తీసి కొందము. A కు చేరిన ఒక్కొక సంఖ్యయందును ఒక వాస్తవిక విలువ $f(x)$ ఉన్నదనుకొందము. ఈ ఫలము $y = f(x)$ ను ఈ సమితి A పై చయనీకరణము లెబేగ్ విధానము ప్రకారము ఎట్లుచేయుట అని వివరించెదము.

A సమితి సంఖ్యలలో $f(x)$ విలువలన్నియు p, q అను రెండు విలువలకు మధ్య ఉన్నవనుకొందము. y అక్షములో నున్న ఈ అంతరము (p, q) ను చిన్నచిన్న అంతరములు $(pp_1), (p_1 p_2), (p_2 p_3) \cdots (p_{n-1}, q)$ అని విభజించుము. ఈ అంతరముల నిడుపులు $(pp_1) = \Delta y_1, (p_1 p_2) = \Delta y_2 \cdots (p_{n-1} q) = \Delta y_n$ అందుము. $f(x)$ విలువలు Δy_1 ఉప అంతరములో నుండునట్లు x విలువలు ఎన్నో ఉన్నవి. ఈ x బిందుసమితియొక్క కొలత m_1 ను కనిపెట్టుము. అటులనే $f(x)$ విలువలు Δy_2 అంతరములోనుండునట్లు x విలువలు ఎన్నో ఉన్నవి. ఈ బిందు ఉపసమితియొక్క కొలత m_2 ను కనిపెట్టుము. ఇటులనే మిగిలిన ఉపఅంతరములకును. ఇపుడు $m_1 \Delta y_1 + m_2 \Delta y_2 + \dots m_n \Delta y_n$ అను సంకలనము తీసికొనుము. ఉపఅంతరముల నిడుపులు $\Delta y_1, \Delta y_2 \dots \Delta y_n$ శూన్యమును సమీపించునపుడు పైసంకలనముయొక్క అవధియే $f(x)$ ఫలముయొక్క A సమితిపై చయన ఫలము.

ఉదాహరణమునకు మనము రీమాన్ చయనీకరణము సాధ్యముకాని ఫలముగ తీసికొనిన ఫలము:

$f(x) = 0$, x అకరణీయ సంఖ్యఅయితే

$f(x) = 1$. x కరణీయ సంఖ్యఅయితే

$0 \leq x \leq 1$ అంతరములో లెబేగ్ చయనీకరణ ఫలమును కనిపెట్టవలెను.

ఇచ్చట $f(x)$ విలువలు రెండుమాత్రమే ఉన్నవి. అవి $y = 0$, $y = 1$. $y = 0$ విలువను $f(x)$ తీసికొను x బిందు సమితి $(0, 1)$ లోని అకరణీయ సంఖ్యాసమితి. దీనికొలత శూన్యము. $y = 1$ విలువను $f(x)$ తీసికొను x బిందుసమితి $(0, 1)$ లోని కరణీయ సంఖ్యాసమితి. దీని కొలత 1. కనుక $\int_0^1 f(x)\, dx$, లెబేగ్ విధానము ప్రకారము 1 అగు చున్నది. కనుక ఈ ఫలమునకు రీమాన్‌చయనము లేక పోయినను లెబేగ్ చయనమున్నది. ఈ రెండు కాక వేరు విధానములు కూడ ఉన్నవి. ఆ. న.

చలకలనము (కాల్‌క్యులస్ ఆవ్ వేరియేషన్): గణితశాస్త్ర పరిచయము లేనివారికి బోధపరచుటకు అత్యంత దుర్లభమగు గణితశాస్త్ర భాగములలో ఒకటి చలకలనము. కాని దాని ప్రధాన విచారవిషయములు, ముఖ్యవిధానములు ప్రతిమనుజునికి అవగాహన పరిధిలో ఉన్నవియే. ఇచ్చిన పొడవుగల వక్రరేఖలచే ఆవృతమైన క్షేత్రములన్నిటిలో వృత్తము గరిష్ఠ వైశాల్యముగలది. ఈ ప్రతిపాదనకు తిరుగులేని ఉపపత్తిని స్థాపించు శాస్త్ర భాగమే చలకలనము.

ఈ శాస్త్రభాగము తొలి పర్యవసానము ప్రచురించిన వాడు న్యూటన్. ఒక వస్తువు గాలిలో పారునపుడు అది కొంత నిరోధమును ఎదుర్కొనవలసి ఉండును. ఈనిరోధము గాలివలన కలుగునదియని స్పష్టము. కాని ఆ వస్తువు ఎదుర్కొను నిరోధము, దాని ఆకారమునుబట్టి ఉండును. ఈ విషయమై న్యూటన్ లేవదీసిన ప్రశ్న: వస్తువుయొక్క ఏ ఆకారము నిరోధము కనిష్ఠమగునట్లుచేయును? ఈప్రశ్న

యొక్క వినియోగములలో నొకటి తుపాకినుండి పేల్చబడిన గుండుయొక్క ఆకారము అది ఎదుర్కొను నిరోధము కనిష్ఠముగా నుండునట్లు ఆ గుండుకు రూపమియ్యవలెను. ఈ సామాన్య సమస్యయొక్క విశిష్టపక్షము నొకదానికి యథార్థ పరిష్కారమును న్యూటన్ సాధించగలిగెను. ఈ నిరోధము ఎదుర్కొను తలముయొక్క ఆకారము ఒక అక్షముచుట్టు ఒక రేఖను భ్రమింపజేయుటచే లభ్యమగునని అతడు కనుగొనెను. కాని అతడు ఈ పర్యవసానమున కెట్లు వచ్చినాడో చెప్పలేదు.

17 వ శతాబ్దమందు బెర్నౌలీ సోదరులు సూత్రీకరించి (ఫార్ములేట్) పరీక్షించిన ఇంకొక సమస్యతో ఒక నూతన గణితశాఖ ఆవిర్భవించినది. గురుత్వ ప్రభావమున ఒక కణము గరకులేని వక్రరేఖపై ఒక బిందువునుండి మరియొక దానికి చలించుచున్నచో అది ఆ రెండు బిందువుల మధ్యదూరమును దాటుటకు తీసికొను కాలము అది అనుసరించు వక్రమునుబట్టి ఉండును. అనగా ఆ వస్తువు ఒక ఋజురేఖపై అనగా ఒక వాలుబల్లపై చలించునపుడు తీసికొను కాలము, అది వర్తులరేఖపై తీసికొను కాలము వేరువేరుగా ఉండును. ఏ త్రోవలో ఆ వస్తువు చలించుటకు కనిష్ఠ కాలమును తీసికొనును ? అనునదియే బెర్నౌలీ ప్రశ్న. ఋజురేఖపై ఆ వస్తువు పయనము శీఘ్రతమమని మనమొకవేళ ఊహింపవచ్చును. కాని, ఋజురేఖపైకన్న కొన్ని ఇతర రేఖలపై తీసికొనబడిన కాలము అల్పతరమని గెలిలియో ఇదివరకే కనుగొనెను; ఇపుడు ఈ కనిష్ఠ కాలమున ప్రయాణించు రేఖయొక్క ఆకారమును బెర్నౌలీ సోదరులు కనుగొనిరి. ఇది జ్యామితి శాస్త్రమందిదివరకే ప్రసిద్ధిచెందిన సైక్లాయిడ్ వక్రము (చూ. వక్రములు).

ఇట్టి సమస్యలకు ఆధారసూత్రమిది: ఒక రేఖాకుటుంబమునకు చెందిన ప్రతిరేఖతో ఒక సంఖ్య సంగతమైయుండును. న్యూటన్ దృష్టాంతములో అట్టి రేఖతో సంగతమైయున్న ఒక వస్తువు గాలిలోఎదుర్కొను నిరోధమే ఆ సంఖ్య. బెర్నౌలీ దృష్టాంతములో రెండు ఇచ్చిన బిందువుల కలుపు రేఖల సంతానమే రేఖాకుటుంబము; ఇందు ప్రతిరేఖతో సంగతమగు సంఖ్య ఆ రేఖననుసరించి వస్తువు దత్త బిందువులలో పై బిందువునుండి క్రింది బిందువు చేరు గమనకాలము. ఇది గరిష్ఠమైనను, కనిష్ఠమైనను కావచ్చును. న్యూటన్ దృష్టాంతములో ఆ విలువ కనిష్ఠ నిరోధము, బెర్నౌలీ దృష్టాంతములో కనిష్ఠకాలము.

గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు సంబంధించిన సమస్యల అనుశీలన అంతరీకరణ కలనములో నిరూపించియుంటిమి. ఒక వక్రరేఖ నిచ్చినచో దానిలో నిమ్నతమ బిందువు ఎక్కడ నుండును? ఉచ్చతమ బిందువు ఎక్కడ నుండును? అనునదియేప్రశ్న. లేదా ఒక ఇచ్చిన తలములో మిట్టలెక్కడనున్నవి? వక్రముయొక్కగాని, తలముయొక్కగాని ప్రతిబిందువుతో ఒక ప్రత్యేక సంఖ్య సంగతమైయుండును. ఇది ఒకక్షైతిజాక్షముపైగాని, లేదా క్షైతిజ తలముపైగాని, ఆ బిందువు యొక్క ఉన్నతిగా నుండవచ్చును. అనగా ఈ ఉన్నతి ఎచ్చట కనిష్ఠమో, ఎచ్చట గరిష్ఠమో ఆ బిందువుల కనుగొనుటకు యత్నించుచున్నాము. అంతరీకరణ కలనమందు మనమిటుల బిందు ఫలములకు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను కనుగొందుము. అనగా, బిందువులతో సంగతములగు సంఖ్యలనన్వేషింతుము. చలకలన మందు వక్రముల కనిష్ఠ, గరిష్ఠ మూల్యములు అన్వేషణ విషయము అనగా వక్రములతో సంగతమైన సంఖ్యలు లేదా తలములవంటి ఇంతకన్న క్లిష్టతరమైన జ్యామితీయ భావములతో సంగతమగు సంఖ్యలకొరకై యత్నింతుము.

ఒక చిన్న తీగతో సంవృతవక్రము నొకదానిని నిర్మించి, సబ్బునీటిలో ముంచిన, దానియందొక సబ్బు నీటి పొర అమరుకొనును. ఈ పొర కనిష్ఠవైశాల్యముగల తల రూపమును స్వీకరించును.

ప్రకృతి తరచుగా గొన్ని మహత్త్వముల కనిష్ఠీకరించుటయందు, కొన్నిటిని గరిష్ఠీకరించుటయందు పని గలిగియుండును. సబ్బునీళ్లతో మన మూదినబుడగ కనిష్ఠ ఉపరితలమును స్వీకరించును. కాంతి ఎల్లపుడును హ్రస్వతమ చలన పథమును స్వీకరించును. పరావర్తితమైనను, వక్రీభూతమైనను, అది మరల లంఘించుటకు కనిష్ఠకాలము పట్టు మార్గమును పట్టును; యాంత్రిక వ్యవస్థలలో జరుగు చలనముల, అవి ఏ రూపమున కనిష్ఠ యత్నమువలన సిద్ధించునోఅట్టి రూపముల ప్రకృతి తీసికొనును. 150 ఏండ్ల క్రిందట చలకలన నియమితములైన కొన్ని కనిష్ఠీకరణ సూత్రములనుండి భౌతికశాస్త్రమంతయు నిగమించబడవచ్చునని భౌతికశాస్త్రజ్ఞులు నమ్ముచుండెడివారు. అనగా ప్రకృతికి వారు క్రియా లాఘవప్రావణ్యము నారోపించుచుండెడివారు.

ఈ శతాబ్దమందు, ఐన్‌స్టయిన్ సాపేక్షతా సిద్ధాంతమందు, మరల మనకీ కనిష్ఠీకరణ సూత్రము తారసిల్లుచున్నది. మన దిక్కాల ప్రపంచముయొక్క జ్యామితి ఎంత క్లిష్టముగా నున్నను, కాంతి కిరణములు, పై బలములకు గురిగాని వస్తువులు హ్రస్వతమ రేఖలపై చలించును.

చలకలనమందు కనిష్ఠత్వ సమస్యల పరిష్కారమునకై వివిధ పద్ధతులు వాడుదురు. ప్రాతదియగు సాంప్రదాయిక

విధానమందు ఒక ఇచ్చిన వక్రముతో సంగతమైయున్న సంఖ్య కనిష్ఠమూల్యమును స్వీకరించునా, గరిష్ఠ మూల్యమును స్వీకరించునా అని నిర్ధరించుట ప్రయోజనమై యున్నది. అట్టి నిర్ధారణకు, చర్చావిషయమైన వక్రమును కొంచెము మార్చుట అవసరము. ఈ మార్పు ఇందు ముఖ్యమగుటవలన ఈ గణితపద్ధతికి చలకలనము అనిపేరు వచ్చినది.

ఒక స్వీకృతసమస్య పరిష్కార్యము కాదా అను సామాన్యపరిశీలన చలకలనమందు స్వీకృతమైన మరియొక సమస్య ; దృష్టాంతమునకు ఈ క్రింది రెండు అతిసరళ సమస్యలు తీసికొందము : రెండు బిందువుల కలుపు రేఖలనేకములు సాధ్యములు ; వీటిలో ఏది హ్రస్వతమము ? ఏది దీర్ఘతమము ? మొదటి ప్రశ్నకు సమాధానము సులభము. ఈ రెండు బిందువులను కలుపు రేఖలలో ఋజురేఖాఖండము హ్రస్వతమము. రెండవప్రశ్నకు సమాధానము లేదు. ఏలన ఆ రెండుబిందువుల కలుపు దీర్ఘతమరేఖ లేదు. ఎందుచేతనన, వాటిని కలుపురేఖ ఎంత పొడవైనదైనను, అంతకన్న పొడవైనది ఒకటి యుండనేయుండును. పొడవు అనునది ప్రతి వక్రముతోను సంగతమైన ఒక సంఖ్య. ఈ సంఖ్య ఎన్నడు సాంత గరిష్ఠతను స్వీకరించదు.

అయినను ఇదేప్రశ్న ఒక గోళతలముపై అడుగవచ్చును. అనగా దత్తగోళతలముపై రెండు బిందువులు A, B తీసికొని, వీటినిచేర్చు గోళతలముపైనున్న పథములలో ఏది గరిష్ఠతమ పొడవు గలది ? ఏది కనిష్ఠతమ పొడవుగలది ? అని అడుగవచ్చును. ఈ రెండుప్రశ్నలకు ప్రత్యుత్తరము లున్నవి. ఈ రెండుపథములు AB గుండ వెళ్ళు గురువృత్తముయొక్క రెండు భాగములే. ఇదేప్రశ్న గోళతలముకాక వేరు వక్రతలము గురించి అడుగవచ్చును. అట్టి హ్రస్వతమరేఖలను చలకలనశాస్త్ర రీతిగనో వక్రతల అంతరీకరణశాస్త్రరీతిగనో సాధింపవచ్చును.

ఒక సమతలముపై A బిందువు $(0, 0)$ గను B బిందువు $(1, 0)$ గను తీసి కొందము. దీనిని చేర్చు పథము $y = f(x)$ అను సమీకరణముగలదై యుండనిమ్ము. అపుడు $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ గ నుండవలెను. ఇటువంటి వక్రములు ఎన్నియో ఉన్నవి. AB పథము యొక్క నిడుపు $= \int ds = \int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$ అగును. కనుక ఏ ఫలము $f(x)$ తీసికొనిన పైసూచించిన నియతచయనము అతికనిష్ఠ విలువను తీసికొనును అనుటయే ప్రశ్న.

ఇదేరీతిగా A బిందువు $(0, 0)$ గను, B బిందువు (a, b) అనియు, x అక్షదిక్కు క్షైతిజమనియు తీసికొనెదము. AB ను చేర్చు ఉదగ్రతలములో నుండు రేఖ $y = f(x)$ అని తీసికొందము. ఒక బరువైన కణము B యందు బయలుదేరి A వరకు ఈ రేఖపై ఘర్షణము లేదా జారినచో, ఈ ప్రయాణమునకు కావలసిన కాలము

$$\int dt = \int \frac{ds}{(ds/dt)} = \int_0^a \left\{\frac{1 + \{f'(x)\}^2}{2g\,(b-y)}\right\}^{1/2} ds$$

అను నియతచయనముద్వారా తెలియబడును. ఏ ఫలము $f(x)$ కు ఈ విలువ తక్కువ ? అనుటయే ప్రశ్న.

సాధారణముగ చలకలనశాస్త్రములో $\int \phi(x, y, y')dx$ వంటి నియతచయనము ఏ ఫలము $y = f(x)$ కు కనిష్ఠమొ, గరిష్ఠమొ అగునను ప్రశ్నయే. ఇచ్చట ϕ అనునది దత్త $x,\ y,\ y' = \dfrac{dy}{dx}$ చలరాశులుగా గల ఫలము.

కొన్ని ప్రశ్నలందు $y = f(x)$ అను ఏకచలరాశికి బదులు $z = f(x, y)$ అను బహుచలరాశులుగల ఫలమును కనిపెట్టవలసియుండును.

ఉదా : $\iint \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{1/2} dx\, dy$ ను కనిష్ఠతమముచేయు $z = f(x_1 y)$ ఫలము ఏది ? ఇట్టి ప్రశ్నలలో, $f(x, y)$ ఇతర నిబంధనలను తృప్తిచేయవలసియుండును.

చలకలనశాస్త్ర ప్రశ్నలను సాధించుటకు త్రోవచూపిన వారిలో ఆయిలర్, లాగ్రాంజ్, వియర్‌స్ట్రాస్ ముఖ్యులు (చూ. ఆయిలర్ - పు. 146 ; లాగ్రాంజ్). ఆ. న. ; మే. వ. న.

జంబూద్వీప ప్రజ్ఞప్తి : సూర్య, చంద్ర ప్రజ్ఞప్తుల వలె ఇదికూడ జైనుల సిద్ధాంతవాఙ్మయమునకు చెందిన ఉపాంగములలో ఒకటి. ఇది మొదటి రెండింటితో సమాన ప్రాచీనతకలది, లేదా వాటికన్న కూడ ప్రాచీనతరమై ఉండవచ్చును. గణితశాస్త్రదృష్టిలో ఇది ఆ రెండింటికన్న అధిక మహత్త్వముకలది. నేడు మనకు లభ్యమయిన మూలము పై రెండింటియందుగల విషయములు అన్నిటిని 7 వ భాగములో తడవుటయేగాక తక్కిన భాగములలో జైనవిశ్వోల్లేఖనము, భూగోళశాస్త్రము గురించి చర్చించుచున్నది. సూక్ష్మభిన్నాంకములవరకు వృత్తముయొక్క విచ్ఛేదకముల వైశాల్యములు గణింపబడుటయేకాక, అవి కొన్ని గణితములచే విశేషించబడినవి. దీనివలన చాపములు వ్యాసములకు సాపేక్షముగ సమానపరిమాణములు కావు అను జ్ఞానము వారికి ఉన్నట్లు తెలియుచున్నది.

జైనవిశ్వోల్లేఖనమందు గోచరించు పెద్దసంఖ్యలు ఇచ్చట కూడ తారసిల్లును. అదిగాక 'ప్రలయోపమ' వంటి బృహత్‌కాలపరిచ్ఛేదములు కూడ కానవచ్చును. వృత్తమాపనవిషయమైగాని, పరంపరాకలనవ్యాపారము

గురించికాని సూత్రములు ఇందులేవు. కాని అట్టి సూత్రములు అనేకములతో రచయితకు పరిచయము ఉండవచ్చును. ఏలన పద్మనందినియొక్క జంబూద్వీప ప్రజ్ఞప్తి సంగ్రహము (క్రీ. శ. 10 వ శతాబ్దప్రాంతము) నందు ఇట్టి సూత్రములు కలవు.

$$\text{వృత్త వైశాల్యము} = \pi \frac{d^2}{4}; \quad \text{వృత్త పరిధి} = \pi\, d;$$

$$c = \sqrt{4h\,(d-h)}\,; \quad a = \sqrt{6h^2 + c^2}\,;$$

$$h = \frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{2}\,; \quad d = \frac{c^2}{4h} + h\,;$$

ఇచ్చట d = వ్యాసము, c = జ్యా, h = ఎత్తు, a = చాప దైర్ఘ్యము. కర్ణవర్గసిద్ధాంతము, సదృశములగు చిత్రముల ధర్మములు తరుచుగ చర్చయందు వినియుక్తములైనవి, అంక, గుణోత్తర శ్రేఢులు సుపరిచితములే; ఏలన ఈ రెండు పరంపరల మొత్తములు, n వ పదములు ఈయబడినవి.

సరస్వతి

జగన్నాథ సమ్రాట్టు : ఇతడు రాజపుత్ర స్థానములోని జయపుర సంస్థానమునకు ప్రభువును, ఖగోళశాస్త్ర విశారదుడు, పోషకుడును అయిన జయసింహుని ఆస్థాన విద్వాంసుడు. జయసింహుడు 1686 మొదలు 1743 వరకు జీవించియుండుటచే, ఇతడు 18 వ శతాబ్దము పూర్వార్ధమునకు చెందినవాడు. ఈయన గొప్ప గణితశాస్త్రవేత్త; అరబ్బీ సంస్కృతభాషలలో నిష్ణాతుడు; అరబ్బీగ్రంథములను ఆధారముచేసికొని సమ్రాట్ సిద్ధాంతము అను గణిత గ్రంథమును రచించెను. ఇతడు సంస్కృతములో జ్యామితిపై ఒక గ్రంథమును వ్రాసెను. ఇది అరబ్బీభాషలోనికి అనువదింపబడిన యూక్లిడ్ గ్రంథమునకు సంస్కృతీకరణము అగుట నిస్సంశయము. కాని గ్రంథకర్త అది భాషాంతరీకరణము అని చెప్పలేదు; అది పూర్వము బ్రహ్మదేవునిచే విశ్వకర్మకు ఉపదేశింపబడిన శిల్పశాస్త్రము అని, గురుశిష్య పారంపర్యముగ భూలోకమున మిగిలియున్న ఆ శాస్త్రమును విచ్ఛిన్నము కాకుండచేయుటకు జయసింహ మహారాజు ఆజ్ఞానుసారము గణితశాస్త్రవిదుల ఆనందము కొరకు తాను గ్రంథస్థముచేసెనని చెప్పుకొనెను. ఆంధ్రుడు, రసగంగాధరకర్తయు అగు పండితరాయులు ఈయనయే అని తెలియుచున్నది (చూ. జయసింహుడు). ఆ. వెం.

జయసింహుడు (1686 - 1743) : భారతదేశములో ఐదు ప్రధాన నగరములందు వేధశాలలను నిర్మించి, ప్రసిద్ధఖగోళ అవేక్షణలనుచేసి, నిర్దుష్టఖగోళశాస్త్ర పట్టికలను తయారుచేయుటకు కృషిచేసిన ప్రముఖ భారతీయ విజ్ఞానవేత్త; రాజకీయవేత్త; జైపూర్ మహారాజు సవాయి జైసింగ్. ఇతడు 1686 లో జన్మించి 13 ఏండ్ల



చిత్రము 174 జయసింహుడు

ప్రాయమున అంబర్ సంస్థానాధీశుడు అయ్యెను. ఆదిలో కొన్ని కష్టముల పాలయినను ఇతడు 1708 నాటికి సంస్థానము నంతటిని తన అదుపులోనికి తీసికొనిరాగల్గెను. 1719 లో ఆగ్రా సంస్థాన గవర్నర్ గాను, ఆ తరువాత మాల్వా గవర్నర్ గాను, ఇతనిని మహమ్మద్ షా నియోగించెను. 1734 లో తిరిగి మాల్వా గవర్నర్ అయి, అదే సంవత్సరములో ఆ పదవిని పీష్వాకు అప్పజెప్పి తాను విరమించుకొనెను. రణరంగములో కంటె రాజకీయ రంగములో ఎక్కువ ప్రజ్ఞను చూపి అపర చాణక్యుడని ఖ్యాతిపొందెను. ఇతడు జైనగర్ లేదా జయపూర్ నగరమును నిర్మించి దానిని విజ్ఞాన అధ్యయన కేంద్రముగా రూపొందించెను.

చిన్ననాటినుండి జయసింహునికి ఖగోళ శాస్త్రాభిలాష ఉండెను; అప్పటికి వాడుకలోఉన్న ఖగోళశాస్త్ర పట్టికలు దోషభూయిష్ఠములని గుర్తించి, నిర్దుష్ట పట్టికలను తయారు చేయవలెనని సంకల్పించుకొనెను. ఈ సంకల్పముతో ఏ ఒక ఖగోళశాస్త్రమును లేదా ఏ ఒక సిద్ధాంతమును మాత్రమే ప్రమాణముగా తీసికొనక తనకు లభ్యమైన అన్ని గ్రంథము

లను సేకరించి, హిందూ, ముస్లిమ్, యూరోపియన్ పద్ధతులను అన్నింటిని నిష్పక్షపాతముగ, క్షుణ్ణముగా చదివెను. తనకు లభ్యమైన గ్రంథములలో ప్రధానమైనవాటిని సంస్కృతము లోనికి అనువదింప జేసెను. జగన్నాథ సమ్రాట్టువంటి విజ్ఞాన నిధులైన వారిని తన సహాయకులుగా నియమించుకొని, వారిలోకొందరిని విదేశములకు ఖగోళశాస్త్ర విషయసేకరణకై పంపెను. యూరప్ దేశముల నుండి, తదితర దేశములనుండి ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులను జైపూర్‌కు ఆహ్వానించి, వారితో విజ్ఞానగోష్ఠి జరిపెను.

జయసింహుడు పఠించిన ప్రధానగ్రంథములు : టాలెమీ ఆల్మజెస్ట్, ఉలూగ్ బేగ్ ఖగోళశాస్త్రపట్టికలు, ఎస్ట్రొలేబ్ పై కొన్ని ప్రధాన గ్రంథములు, లాహోర్ ఖగోళశాస్త్ర పట్టికలు, ఫ్లేమ్‌స్టీడ్ 'హిస్టోరియా సెలిస్టిస్ బ్రిటాన్నికా', యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్, సమతల, గోళీయ త్రికోణమితుల పైన, లాగరిదమ్‌ల పైన కొన్ని పాశ్చాత్య గ్రంథములు మొదలగునవి.

ప్రముఖ ఖగోళశాస్త్రవేత్తలలో టాలెమీ ఒకడు అని జయసింహుడు భావించి, టాలెమీ 'ఆల్మజెస్ట్' ను సంస్కృతములోనికి 'సమ్రాట్ సిద్ధాంతము' అనే పేరుతో తన ప్రధాన సహాయక ఖగోళశాస్త్రజ్ఞుడగు జగన్నాథునిచే వ్రాయించెను. 'సమ్రాట్‌సిద్ధాంతము ఆల్మజెస్ట్‌కు అనువాదము మాత్రమే కాదు, జయసింహుని ఖగోళశాస్త్ర దృక్పథములను వ్యక్తపరచునది' అని జగన్నాథుడే తన పీఠికలో పేర్కొనినాడు. గోళములతో, ఇతర ఖగోళ శాస్త్ర పరికరములతో నూతన పద్ధతులను ప్రదర్శించు ప్రజ్ఞ జయసింహునికి కలదని అతడు పేర్కొనెను.

జయసింహుడు వేధశాలకు ఉపయోగకరమైన పరికరములుగా నాడీయంత్రము (సూర్యఘటి); గోళయంత్రము (గోళము); దిగంశయంత్రము (అజిమత్ ఇన్‌స్ట్రుమెంట్) దక్షిణదిగ్భిత్ (మురల్ క్వాడ్రెంట్), వృత్తషష్టాంశకము (మెరీడియన్‌లో ఉంచబడిన 60 డిగ్రీల చాపము); సమ్రాట్ యంత్రము (ఈక్వినాక్టికల్ డయల్) జయప్రకాశ్ (సర్వ యంత్రశిరోమణి) మొదలగునవి.

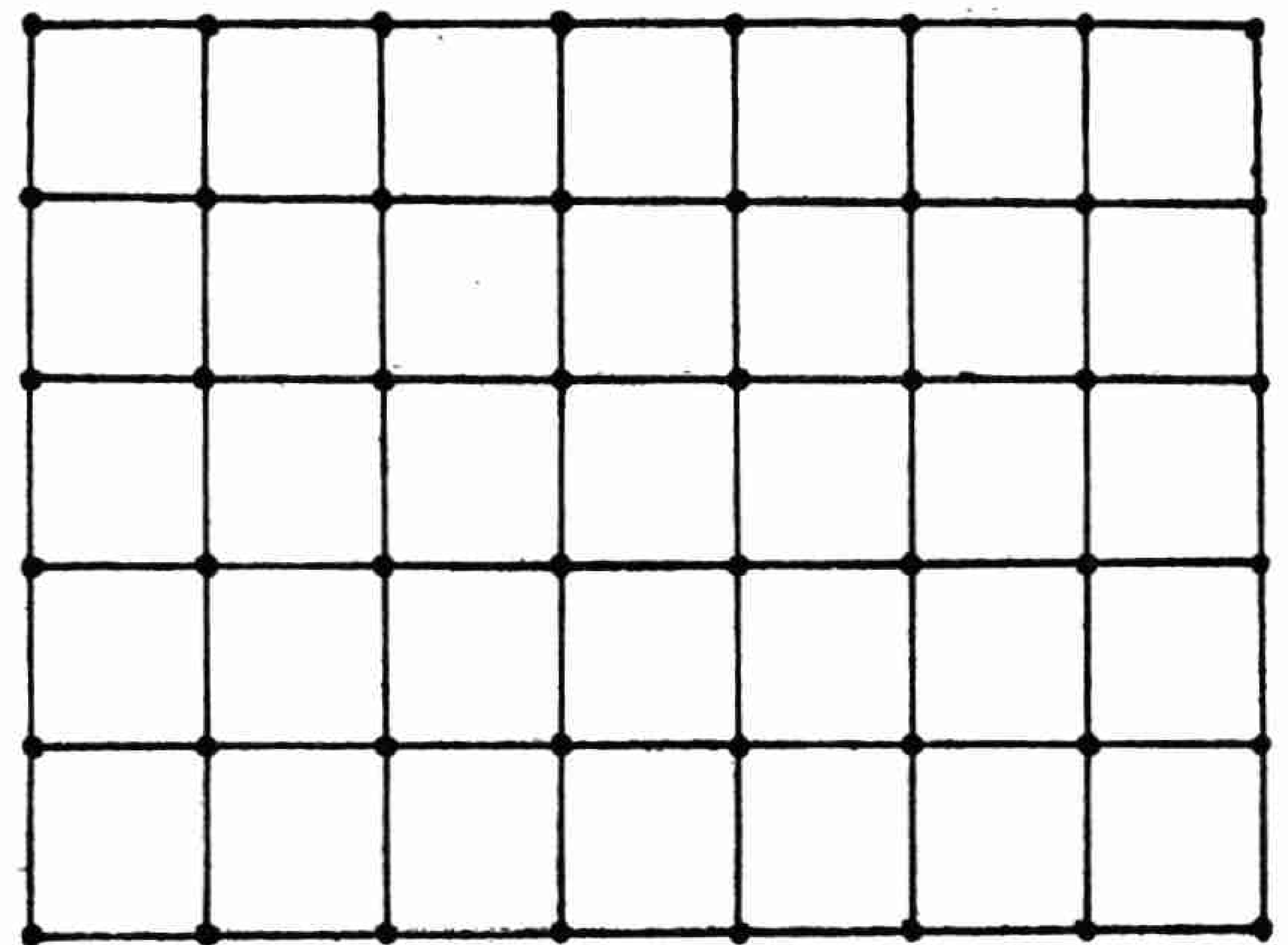
జయసింహుడు మొదట ఢిల్లీ వేధశాలను (1724) నిర్మించి నక్షత్రపట్టికలను తయారుచేయుటకు 7 సంవత్సరాలు తదేక దీక్షతో ఖగోళ అవేక్షణలుచేసెను. ఆ తరువాత జైపూర్, ఉజ్జయని, బెనారెస్ (కాశీ), మధుర* వేధశాలలను నిర్మించెను.

అతడు ముస్లిమ్ గ్రంథములనాధారముగా ఎస్ట్రొలేబ్ వంటి ఇత్తడి పరికరములను తొలుత తయారుచేయించెను. ఈ నాటికి జైపూర్ వేధశాలలో ఆ లోహపరికరముల జట్టు ఉన్నది. వీనిలో కొన్నింటిని ఢిల్లీనుండి ఇచ్చటకు జయసింహుడే మార్పించినట్లు భావించబడుచున్నది. లోహపరికరములు పరిమాణములో చిన్నవి అగుటచే వాటిపై సూక్ష్మభాగములను గుర్తించుటకు అవకాశము లేదనియు, వాటి అక్షములు, వృత్తకేంద్రములు మొదలగు వాని స్థానములు వాతావరణ ప్రభావముచే మారుచుండునని ఇతడు భావించి స్థిరముగా ఉండెడి రాతికట్టడములతో నూతన పరికరములను నిర్మించెను. అవి కొన్ని మీటరుల ఎత్తునుండి 28 మీటరుల ఎత్తువరకు నిర్మింపబడినవి.

జయసింహుడు స్వయముగా కల్పించి నిర్మింపచేసిన వానిలో ప్రధానమైనవియగు సమ్రాట్ యంత్రము, జైప్రకాశ్, రామయంత్రము అతనిమేధాశక్తిని ప్రదర్శించుచున్నవి. ఇవి జంతర్ మంతర్ (ఢిల్లీ వేధశాల) లోను, జైపూర్ వేధశాలలోను మాత్రమేఉన్నవి. 'జిజ్ మహమ్మద్ షాహీ' అను ఖగోళశాస్త్ర పట్టికలు జయసింహుని పర్యవేక్షణలో తయారుచేయబడి మహమ్మద్ షా చక్రవర్తి పేరుతో ప్రకటించబడినవి. 1743 లో జయసింహుడు మృతి నొందెను (చూ. జగన్నాథసమ్రాట్టు; వేధశాల). పొ. ల. నా.

జాల బిందువులు (లాటిస్ పోయింట్స్) : జాల బిందువాదము గణితవిశ్లేషణమునందు ఇపుడు చాల ఉపయోగకరమయినది. అంకవాదము, ఫలవాదము, స్ఫటిక శాస్త్రములందు ఉపపత్తులు జాల బిందువాదముపై ఆధారపడియుండును.

భుజము ఒక యూనిట్ ప్రమాణముగల చతురస్రములుగ ఒక తలమును విభజించిన ఎడల చతురస్రముల శీర్షములచే జాల బిందువులు ఏర్పడునట్లు చెప్పుదురు. చిత్రము 176 లో

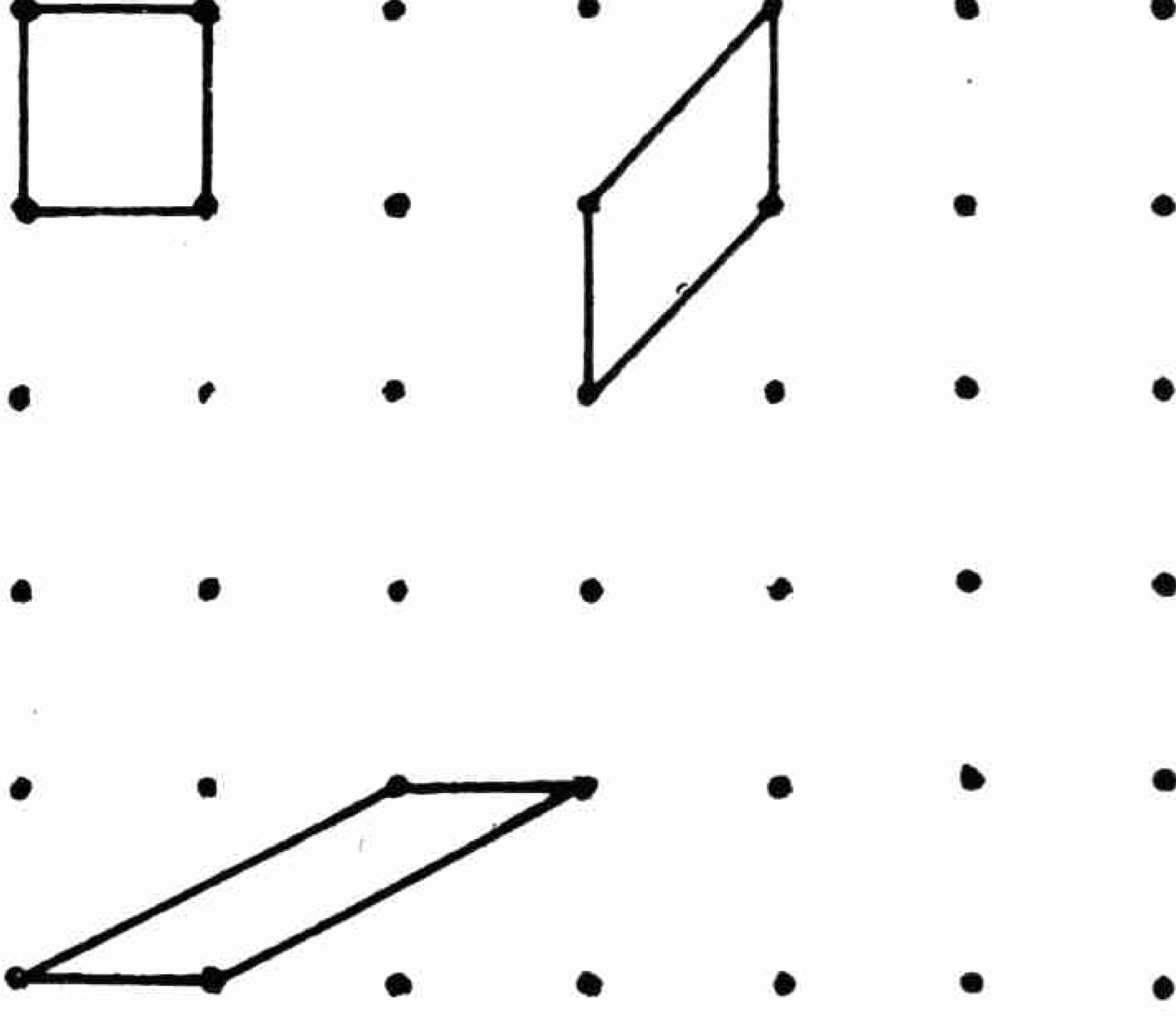


చిత్రము 175

చదరపుగళ్లు అమర్చబడి యున్నవి. గళ్లమూలలు జాల బిందువుల గుర్తించును. మరియు కార్టీసియను తల నిరూపక

* ఉత్తర మధుర.

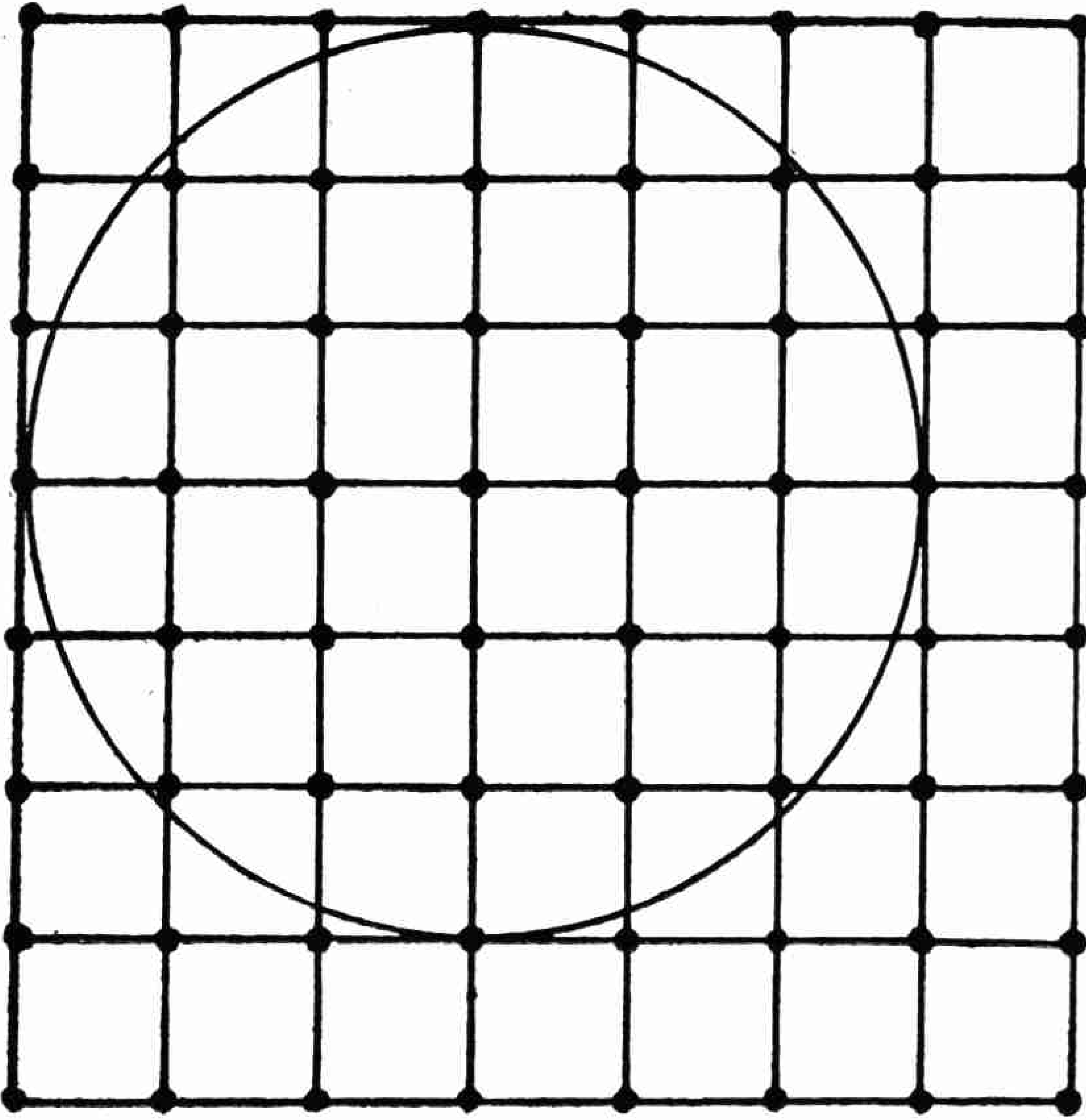
ములు పూర్ణసంఖ్యలయిన, ఆ నిరూపక బిందువు లన్నియు జాలబిందువుల గుర్తించును. జాలబిందువుల గుర్తించుటలో చతురస్రములు, సామ్యచతుర్భుజములు, రాంబస్‌లు, సమ భుజ త్రిభుజములు వాడవచ్చును. కాని వాని విస్తీర్ణము



చిత్రము 176

మాత్రము జనకచతురస్రము యొక్క విస్తీర్ణమునకు సమానమయి యుండవలయును.

గణిత పరిశోధనయందు జాలబిందువాదము చాల ఉపయోగపడుచున్నది. ఇట్లు ఉపయోగించిన వారలలో గౌస్ ప్రథమ స్థానమును వహించును. r వ్యాసార్థముగల వృత్తములోను, పరిధిపైనను కల జాలబిందువుల సంఖ్య



చిత్రము 177

$f(r)$ కనుగొనుటకు అతడు ప్రయత్నించెను; వృత్త కేంద్రము ఒక జాలబిందువై యుండవలయును. r పూర్ణ సంఖ్య: ప్రాయోగికమార్గమున అతడు $f(r)$ ను r యొక్క పలువిధ విలువలను కనుగొనెను.

$r =$	10	20	30	100	200	300
$f(r) =$	317	1257	2821	31417	125629	282697

$f(r)$ ఫలము అవధియందు π యొక్క విలువను ఇచ్చునని గౌస్ తలచెను. ఇట్లు తలచుటకు కారణము సులభ గ్రాహ్యము: ప్రతి జనకచతురస్రముయొక్క వైశాల్యము ఒక యూనిట్; కాబట్టి $\frac{f(r)}{r^2}$ అవధిలో π యొక్క విలువకు సమానము కావలయును. దీనికి **ఉపపత్తి** చాల సులభము.

$f(r)$ పరిగణనలో వృత్తములోపల నుండునట్టి జాలబిందువులను, పరిధిపై నుండు జాలబిందువులను లెక్కలో తీసికొంటిమి. వృత్తము యొక్క సరిహద్దులో నుండు చతురస్ర భుజములను కొన్నిటిని వృత్తపరిధి భేదించుకొని వెళ్లును. ఇట్టి చతురస్రముల యొక్క నాలుగు కోణముల నుండు జాలబిందువు లన్నియును $f(r)$ లో చేరియుండవు. కొన్ని వదలబడి యుండును. అవి ఎన్ని? వానిని $A(r)$ చే గుర్తించుము. $A(r)$ యొక్క విలువను ఎట్లు కనుగొనవచ్చును? ప్రతి ప్రమాణ చతుర్భుజము (జనక చతుర్భుజము) లో రెండు బిందువుల గరిష్ఠ మధ్యదూరము $\sqrt{2}$ కంటె ఎక్కువ ఉండదు.

ఇపుడు $r-\sqrt{2}$, $r+\sqrt{2}$ వ్యాసార్థములుగల రెండు సకేంద్రవృత్తములచే ఏర్పడు కంకణము తీసికొనుము. దాని వెడల్పు $2\sqrt{2}$; దాని వైశాల్యము

$$\pi(r+\sqrt{2})^2 - \pi(r-\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}\,\pi r$$

$A(r)$ కంటె ఈ వైశాల్యము ఎక్కువ.

కాబట్టి $A(r) < 4\sqrt{2}\,\pi r$.

ఇపుడు $|f(r) - \pi r^2| \leq A(r) \leq 4\sqrt{2}\,\pi r$

$$\therefore \left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| < \frac{4\sqrt{2}\,\pi}{r}.$$

ఇది అవధిలో, అనగా $r \longrightarrow \infty$ అయినపుడు, శూన్య విలువ కలదగును.

కాబట్టి, $\frac{f(r)}{r^2} \longrightarrow \pi$.

ప్రతిజనక సామ్యచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము ఒక యూనిట్: ఈ సామ్యచతుర్భుజములచే చతురస్ర జాలబిందుతలము ఏర్పడుచున్నది. కాబట్టి రెండు వైశాల్యములు సమానమని నిరూపించుట సులభము.

వృత్తములోని ప్రతి జాలబిందువును జనకసామ్య చతుర్భుజము యొక్క శీర్షముగ తీసికొనుము. జనక సామ్యచతుర్భుజ వైశాల్యము a అని తీసికొనిన $a = 1$ అని నిరూపింపవలయును.

ఒక సామ్యచతుర్భుజములోని రెండు బిందువుల గరిష్ఠ మధ్యదూరము c అని తీసికొనుము. $r + c$, $r - c$ వ్యాసార్ధములు గల సకేంద్ర వృత్తముల మధ్యనుండు కంకణము యొక్క వైశాల్యము $= B(r)$ అని తీసికొనిన,

$$B(r) = \pi (r + c)^2 - \pi (r - c)^2 = 4\pi cr.$$

వృత్తములో సామ్యచతుర్భుజముల వైశాల్యము $= a f(r)$

కాబట్టి $[a f(r) - \pi r^2] < B(r) = 4\pi cr.$

$$\therefore \frac{a f(r)}{r^2} - \pi < \frac{4\pi c}{r}$$

$r \longrightarrow \infty$ అయినపుడు,

$$\frac{a f(r)}{r^2} - \pi = 0$$

$$\therefore \frac{f(r)}{r^2} = \pi / a$$

కాని $\dfrac{f(r)}{r^2} = \pi$ అని ఇదివరలో నిరూపించితిమి.

కాబట్టి $a = 1$

సాధారణ ప్రమాణ యూనిట్ జాలములు : ఇష్టసామ్య చతుర్భుజముతో జాలము నిర్మింపవచ్చును ; కాని సామ్య చతుర్భుజముల వైశాల్యము ఒక ప్రమాణ యూనిట్‌నకు సమానమై యుండవలయును. ఈ జాలనిర్మాణమునకు ఎట్టి విధమైన చతుర్భుజము తీసికొనవచ్చును ? అట్టి సామ్యచతుర్భుజముల వైశాల్యములు సమానములై యుండవలయును.

ఒక ప్రమాణ జాలము తీసికొనిన, అందుండు రెండు బిందువుల అధమ దూరము c అనుకొనుము. c యొక్క విలువకు ఒక హద్దుకలదు. సామ్యచతుర్భుజమునకు బదులు ఒక జనక దీర్ఘచతురస్రము తీసికొనుము. దాని ఆసన్న భుజములు c, $\dfrac{1}{c}$ అయిన, $c \longrightarrow 0$ అయిన, $\dfrac{1}{c} \longrightarrow \infty$.

కాబట్టి c కి ఒక పైహద్దు (ఉపరిసీమ) ఉండవలయును.

రెండు సమభుజ త్రిభుజములచే నేర్పడిన ఒక సామ్య చతుర్భుజము తీసికొనుము. ప్రతి భుజము పొడవు c.

త్రిభుజ వైశాల్యము $= \dfrac{c^2}{2} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ అయినందున, సామ్య

చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \dfrac{\sqrt{3}c^2}{2}$.

ఇది ఒక యూనిట్ అయిన,

$$c^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ అనగా } c \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

c యొక్క విలువ అనంతము అగుటకు వీలులేదు. జనక సామ్యచతుర్భుజములు రెండు సమభుజ త్రిభుజములచే నేర్పడిన, $c \leq \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ లభించును ; అది ఒక రాంబస్ - సమచతుర్భుజము అని జ్ఞప్తి యుండనిమ్ము. ఇట్లే ప్రతి జాలబిందువును కేంద్రముగ తీసికొని $c/2$ వ్యాసార్ధముగ వృత్తముల గీయవచ్చును. జాలబిందువులు వృత్తము లోపల నుండవు. వృత్తములు పరస్పరము స్పృశించుచుండును.

జాలతలములో వృత్తములు చాల దట్టముగ అమర్పబడి యుండును.

$$\text{సాంద్రత} = D = \frac{\text{వృత్తముల వైశాల్యము}}{\text{జాలతల వైశాల్యము}}$$

లైబ్నిట్జ్ పరంపర : $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

అంకవాదమునకు జాలబిందువాదమును ఉపయోగింతము.

ఇదివరలో తీసికొనినట్లు ఒక జాలబిందు కేంద్రముగ r (పూర్ణసంఖ్య) వ్యాసార్ధము గల ఒక వృత్తము తీసికొనుము. దాని లోపలను, పరిధిపైన నుండు బిందువుల సంఖ్య $f(r)$ అని తీసికొనుము. వృత్త కేంద్రమును మూల బిందువుగ తీసికొని, పూర్ణసంఖ్యలగు కార్టీసియను నిరూపకములచే ప్రతి బిందువును గుర్తింపుము. ఒక బిందు నిరూపకములు x, y అయిన $x^2 + y^2 \leq r^2$ లో ఇమిడియుండు x, yల సంఖ్యచే ప్రతి r కును $f(r)$ గుర్తింపబడును. కాబట్టి r^2 కు తక్కువగ నుండు పూర్ణ సంఖ్యల జతలను తీసికొని వాని వర్గముల మొత్తమును ఎన్ని విధములుగ వీలగునో అన్ని విధముల తీసికొనినచో వచ్చిన మొత్తము $f(r)$ యొక్క విలువ నిచ్చును. ఉదా :

$$25 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2 = (\pm 4)^2 + (\pm 3)^2$$

ఇందు 8 విధములుగ గణనచేయవలసి వచ్చును. ఇట్టి సిద్ధాంతముతో క్రింది అంకవాద ప్రమేయము తీసికొనుము.

ఒక పూర్ణసంఖ్య $n = a^2 + b^2$ అయిన, a, bల సంఖ్య $4k + 1$ యూనిట్‌లో నుండు n యొక్క విభాజకము లకును, $4k + 3$ యూనిట్‌లో నుండు విభాజకములకును గల అంతరమునకు నాలుగు రెట్లు. మన వృత్తమునకు సంబంధించిన జాలబిందువులు $= f(r) - 1$.

[$f(r)$ నుండి కేంద్రబిందువు మినహాయింపబడినది]

$4k + 1$ యూనిట్‌లో నుండు సంఖ్యలు 1, 5, 9, 13...

$4k+3$ యూనిట్‌లో నుండు సంఖ్యలు 3, 7, 11...

r^2 లో ఇట్టి సంఖ్యలు ఎన్ని సారులు వచ్చును ?

ఒకటి r^2 లో r^2 సారులు కనబడును.

r^2 లో 5, $\frac{r^2}{5}$ సారులు కనబడును; 9, $\frac{r^2}{9}$ సారులు కనబడును.

$4k+1$ యూనిట్‌లోనుండు విభాజకముల మొత్తము

$$= r^2 + \frac{r^2}{5} + \frac{r^2}{9} \cdots \cdots$$

$4k+3$ యూనిట్‌లో నుండు విభాజకములు

$$= \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{7} + \cdots \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left\{f(r)-1\right\} = r^2 - \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{5} - \frac{r^2}{7} + \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left\{\frac{f(r)}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right\} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ఈ వాదమును త్రివిమా, చతుర్విమాలకు అన్వయింపవచ్చును. ఆచార్య

జీటాఫలము : $s = \sigma + it$ అయినపుడు పరంపర $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ను $\zeta(s)$ ఫలము అని చెప్పుదురు. ఇది ఉపసరణతను పొందుటకు $\sigma > 1$ గా ఉండవలెను. ఈ ఫలము సంఖ్యావాదమునందు చాల ఉపయోగపడును. ఇది ఆయ్‌లర్ చే కనిపెట్టబడి, విపులముగ రీమాన్‌చే విశదీకరింపబడెను.

విశాలీకృత జీటాఫలము : a ఒక స్థిరరాశి అయినచో $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)}$ విశాలీకృత జీటాఫలము. దీనిని ఒక అనంత చయనముగా వ్రాయవచ్చును.

$$(a+n)^{-s}\,\Gamma(s) + \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(m+a)x}\,dx$$

మునుపటి నిబంధనలు s కు అన్వయించును.

కాబట్టి $\Gamma(s)\,\zeta(s, a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx$

(ఇందు సూక్ష్మతరమగు నవీన నిశిత విధానము అవలంబింపలేదు).

$a = 1$ అయిన $\zeta(s, a) = \zeta(s)$ అగుచున్నది.

హర్విట్జ్ సూత్రము :. సూత్రము మాత్రమే ఇచ్చితిమి. దాని ఉపపత్తికి ప్రౌఢగణిత గ్రంథములను చూడవచ్చును.

$$\zeta(s, a) = 2\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left\{\sin\left(\frac{S\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi an}{n^{1-s}} + \cos\left(\frac{S\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi an}{n^{1-s}}\right\}$$

$a = 1$ అని తీసికొనినచో

$$\zeta(s) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \cdot \sin\left(\frac{S\pi}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}} = \frac{2\,\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \cdot \sin\frac{S\pi}{2}\,\xi(1-s)$$

$$\zeta(s)\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \cdot \sin(S\pi)\,\zeta(1-s)$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1-s}} \cdot \zeta(1-s)$$

$\left[\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin S\pi}\right.$ అను సూత్రము స్మృతికి తెచ్చుకొనవలయును (చూ. గామా ఫలము - పు. 235)].

$$\therefore 2^{1-s}\,\zeta(s)\cos\frac{S\pi}{2} \cdot \Gamma(s) = \pi^s\,\zeta(1-s)$$

ఇది రీమాన్ సూత్రము.

ఆయ్‌లర్ ఇచ్చిన గుణకార పరంపర : $\zeta(s)$ కు ప్రధాన సంఖ్యలు 2, 3, 5 ... ... p ... ... తీసికొనుము. వీటినుండి గుణకారపరంపర

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right) \cdots \cdots \left(1-\frac{1}{p^s}\right) \cdots \cdots$$ ను

పొందవచ్చును. ఈ అనంత గుణకార లబ్ధఫలము $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

కనుక $\frac{1}{\zeta(s)} = \Pi\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$.

ఇందు p అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలను గుర్తించును.

జీటాఫలము యొక్క శూన్యములు : $s = \sigma + it$ అయిన $\sigma > 1$ అయినపుడు జీటా ఫలమునకు శూన్యపు విలువలు లేవు.

$\sigma < 0$ అయినపుడు శూన్యములు $s = -2, -4, -6, \ldots \ldots$ విలువలకు లభించును.

తక్కిన శూన్యపు విలువలు $0 \leq \sigma \leq 1$ ప్రదేశములో ఉండునని గణితజ్ఞుల అభిప్రాయము. కాని దీనికి ఉపపత్తి ఎవరును ఈయలేదు. ఎమ్. వి. సు.

జేకోబీ విలోప ఫలములు : వక్రముల ధనుస్సు (ఆర్క్)ను కనుగొనుటకు చయనకలనము అత్యంతావశ్యకము. ధనుస్సు సూత్రము $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ నుండి లభించును. అనగా

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ఒక వృత్తము $x^2 + y^2 = a^2$ యొక్క ధనుస్సు కనుగొనునపుడు $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ అని (1) లో ప్రతిక్షేపించినచో

$$s = \int \sqrt{1 + x^2/y^2} \cdot dx = \int \frac{a}{y} dx =$$

$$\int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$ లభించును.

ఇపుడు $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ విలోమ జీవ $\frac{x}{a} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

కాబట్టి, జీవ, కోటిజీవ ఫలములను వృత్తీయఫలములు అని చెప్పుదురు. ఇవి ఏకావర్తనములు, ఆవర్తనమానము $= 2\pi$.

విలోపము (దీర్ఘవృత్తము) యొక్క ధనుస్సు కనుగొనుటలో విలోప ఫలములు లభించును. అవి ద్విరావర్తనములు.

ఒక విలోపము యొక్క సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అయినచో లభించు అనురూపచయనము =

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = S_n^{-1}(x, k)$$

∴ ఇది $\sin^{-1} x$ కు అనురూపము.

ఇందుండి S_n, C_n, D_n ఫలములు ఆవిష్కరింపబడినవి. వాటికి విలోప ఫలములు అనిపేరు. ఈ ఫలములను వాడక విలోపముల ధనుస్సు కనుగొనుటకు వీలుకాదు. కాబట్టి నామకరణము సార్థకము.

ఇవి ద్విరావర్తనములు : ఆవర్తనముల విలువ $4k$, $2ik'$. ఒక ఆవర్తనము వాస్తవికరాశి, రెండవది కల్పితరాశి.

$k \longrightarrow 0$ అయినపుడు $S_n(u, k) \longrightarrow \sin u$; $C_n(u, k) \longrightarrow \cos u$; $D_n(u, k) \longrightarrow \tan u$.

ఇచట $4k$, $2ik$ యొక్క విలువలు k పై ఆధారపడి ఉండును. k విలోప ఫలముల యొక్క మాపాంకము. వీటికి తీటా ఫలములకు సంబంధము కలదు.

మరికొన్ని ఫలితములు క్రింద ఇవ్వబడినవి :

$$S_n^2(x) + C_n^2(x) = 1$$

$$k^2 S_n(x) + D_n^2(x) = 1$$

$$S_n(0) = 0 ; \; C_n(0) = D_n(0) = 1$$

$$\frac{d}{dx} S_n(x) = C_n(x) \, D_n(x)$$

$$\frac{d}{dx} C_n(x) = -S_n(x) \, D_n(x)$$

$$\frac{d}{dx} D_n(x) = -k^2 S_n(x) \, D_n(x)$$

సంకలన సిద్ధాంతములు :

$$S_n(x + y) = \frac{C_n x \, D_n x \, S_n y + C_n y \, D_n y \, S_n x}{1 - k^2 s_n^2(x) \, S_n^2(y)}$$

$$C_n(x + y) = \frac{C_n(x) \, C_n(y) - S_n(x) \, S_n(y) \, D_n(x) \, D_n(y)}{1 - k^2 \, S_n^2(x) \, S_n^2(y)}$$

ఆచార్య

జ్యామితి : చూ. అంతరీకరణ జ్యామితి - పు. 111; నవీన జ్యామితి; నిరూపక జ్యామితి; యూక్లిడేతర జ్యామితి; విమాత్రయ జ్యామితి.

జ్యోతిషము - ఫలభాగము : జ్యోతిషము అనగా సాధారణముగ భారతీయులకు ఫలభాగమే స్మరణకు వచ్చును. దీనివలన ఒక మానవుని జీవితములో కలుగు కష్టసుఖములు, లాభనష్టములు మొదలగు విషయములను కనుగొనవచ్చునని మనఋషుల అభిప్రాయము. ఇందు జాతకభాగము, ప్రశ్నభాగము అని రెండు భాగములు కలవు. జాతకభాగము జననకాలగ్రహస్థితిని గురించిన శాస్త్రము. ప్రశ్నభాగము ప్రశ్నవేయుకాలపు గ్రహస్థితిని అనుసరించి ఉండును. ఇపుడు గ్రహములనుండి మానవ జీవిత సమస్యలను ఎట్లు సాధింపవచ్చును అను మార్గమును పరిశీలింతము.

రాశులు, గ్రహములు సూర్యమండలముచుట్టు తమతమ విలోపఆకార కక్ష్యలలో భ్రమణము చేయుచుండును. ప్రతి గ్రహమును ఒక భ్రమణములో 360° సూర్యునిచుట్టు వెళ్లును. విషువిందువునుండి ప్రారంభించి ఈ కక్ష్య 12 సమ భాగములుగ చేయబడినది. ఒక్కొక్క భాగమునకు ఒక రాశి అనిపేరు. గగన మండలములో గ్రహకక్ష్యలు ఉండు ప్రదేశమునకు 'శింశుమారవృత్తము' (జోడియకల్ బెల్ట్) అనిపేరు. కక్ష్యలు - విలోపఆకారములు; వృత్త

ములు గీయుట కష్టము అయినందున భారతదేశములో రాశులను గుర్తించుటకు క్రింది రాశిచక్రమును గీయుదురు.

12	1	2	3
11			4
10			5
9	8	7	6

చిత్రము 178

ఉచ్చరాశులలో గ్రహములకు పూర్ణబలము; మూలత్రికోణరాశులు స్వక్షేత్రములు - అనగా అధిపతులుగ గల రాశులు. ఉచ్చరాశికి ఏడవరాశి నీచరాశి - నిష్ఫలరాశి.

హృదయము, సింహము కడుపు, కన్య నడుము, తుల బొడ్డుకు క్రింది భాగము, వృశ్చికము స్త్రీ పురుష చిహ్నములు, ధనుస్సు తొడ, మకరము మోకాళ్లు, కుంభము పిక్కలు, మీనము పాదములు.

వర్గములు : జ్యోతిష ఫలములను సూక్ష్మముగ చెప్పుటకు రాశులను మరల భాగములుగ చేసి ఉన్నారు. అట్టి భాగములకు 'వర్గములు' అని పేరు.

రాశి : అట్లే తీసికొనుట ;

హోరా : రాశిని రెండు భాగములు చేయుట. ఒక్క భాగప్రమాణము 15°. బేసి రాశులలో మొదటి హోరకు సూర్యుడు, రెండవ హోరకు చంద్రుడు అధిపతులు. సరి రాశులలో మొదటి హోరకు చంద్రుడు, రెండవ హోరకు సూర్యుడు అధిపతులు.

ద్రేక్కాణము : రాశిని మూడు భాగములు చేయుట. ఒక భాగమునకు 10°. అధిపతులు వరుసగా 1, 5, 9వ రాశుల అధిపతులు. అనగా మేషద్వితీయ ద్రేక్కాణమునకు సూర్యుడు, వృషభ తృతీయ ద్రేక్కాణమునకు శని (మకర రాశి అధిపతి) అధిపతులు.

రాశులు, రాశుల అధిపతులు మొదలగు విషయముల పట్టిక :

రాశులు	అధిపతులు	ఉచ్చ	నీచ	మూలత్రికోణము
మేషము	కుజుడు	సూర్యుడు	శని	కుజుడు
వృషభము	శుక్రుడు	చంద్రుడు	...	చంద్రుడు
మిథునము	బుధుడు	...	...	...
కర్కాటకము	చంద్రుడు	గురుడు	కుజుడు	...
సింహము	సూర్యుడు	...	...	సూర్యుడు
కన్య	బుధుడు	బుధుడు	శుక్రుడు	బుధుడు
తుల	శుక్రుడు	శని	సూర్యుడు	శుక్రుడు
వృశ్చికము	కుజుడు	...	చంద్రుడు	...
ధనుస్సు	గురుడు	...	...	గురుడు
మకరము	శని	కుజుడు	గురుడు	...
కుంభము	శని	...	...	శని
మీనము	గురుడు	శుక్రుడు	బుధుడు	...

బేసిరాశులు క్రూరములు, పురుషరాశులు; సరిరాశులు సౌమ్యములు, స్త్రీ రాశులు. రాశుల వర్ణములు క్రమముగా ఎరుపు, తెలుపు, ఆకుపచ్చ, తెలుపు మించిన ఎరుపు, పొగ రంగు, చిత్రవర్ణము, నలుపు, పసుపు పచ్చ, పింగళవర్ణము, మిశ్రవర్ణము, నలుపు తెలుపు కూడిన వర్ణము, స్వచ్ఛవర్ణము. మేషాది రాశులను మనుష్యుని వివిధ అంగములకు సరిపోల్చిరి. మేషము శిరస్సు, వృషభము ముఖము, మిథునము భుజములు, కర్కాటకము

నవాంశ : ఇది ముఖ్యమగు భాగము. రాశిని తొమ్మిది భాగములు చేయుట. ఒక్కొక్క భాగమునకు $3\frac{1}{3}°$. 12 రాశులకు $12 \times 9 = 108$ నవాంశలు. వీని నన్నిటిని రాశి చక్రమునందే వరుసగ గుర్తింతురు. 9 సార్లు చుట్ట వలయును. అనగా మేష రాశియొక్క నవాంశలను రాశి చక్రములో మేషము నుండి ధనుస్సు వరకును, తరువాత వృషభ నవాంశలను మకరము నుండి కన్యవరకును, మిథున నవాంశలను తుల నుండి మిథునము వరకును,

కర్కాటక నవాంశలను కర్కాటకము నుండి మీనము వరకును వ్రాయుదురు. ఉదా : మిథున ద్వితీయ నవాంశలో ఉండు గ్రహమును నవాంశ కుండలిలో వృశ్చికములో వ్రాయవలయును.

వర్గోత్తమస్థితి : రాశిలోను, నవాంశకుండలిలోను ఒకే చోటఉండు గ్రహము వర్గోత్తమస్థితిలో ఉండునని చెప్పుదురు. మేష ప్రథమ, వృషభ పంచమ, మిథున అంత్యనవాంశలు వర్గోత్తమాంశలు. 'శుభం వర్గోత్తమం జన్మ' అని శాస్త్రము చెప్పును. రాశులన్నియు చర, స్థిర, ద్వి స్వభావములని క్రమముగ వర్ణింపబడినవి. మకరము చరము; సింహము స్థిరము; కన్య ద్విస్వభావము కలది. ఆది, మధ్య, అంత్యనవాంశలు క్రమముగ చర, స్థిర, ద్వి స్వభావరాశుల వర్గోత్తమములు.

ద్వాదశాంశలు : రాశిని 12 భాగములు చేయుట. ప్రతి భాగమునకు $2\frac{1}{2}^{\circ}$. అధిపతులను ప్రతి రాశి నుండి 12 వ రాశి వరకు తీసికొనవలయును. వృషభ చతుర్థ ద్వాదశాంశ సింహములో పడును; సూర్యుడు దానికి అధిపతి.

త్రింశాంశలు : ఒక రాశిని 30 భాగములు చేయుట. ఓజి (బేసి) రాశిలో 5°, 5°, 7°, 8°, 5° లకు క్రమముగ కుజ, శని, గురు, శుక్ర, బుధులు అధిపతులు. సరి రాశిలో 5°, 8°, 7°, 5°, 5° తీసికొని విలోమ వరుసలో అధిపతులను తీసికొనవలయును. అనగా బుధ, శుక్ర, గురు, శని, కుజులు ఈ భాగలకు క్రమముగా అధిపతులు. ఒక జాతకుని గుణములను త్రింశాంశాధిపతి నుండి కనుగొన వచ్చును.

నక్షత్రములు : శింశుమార చక్రమును 27 సమభాగములు చేసిన 27 నక్షత్రములు ఏర్పడును. ఒక నక్షత్ర ప్రమాణము $13^{\circ} 20'$ లేదా $800'$. ఒక నక్షత్రమునకు 4 పాదములు. ఒక్కొక్క పాదము $3^{\circ} 20' = 200'$. కాబట్టి ఒక రాశికి 9 పాదములు. పంచాంగములో గ్రహములు ఉండు నక్షత్ర పాదములు ఈయబడినందున గణిత జ్ఞానము ఎక్కువలేనివారు సులభముగ జాతక కుండలిని వ్రాయుదురు; నవాంశకుండలి కూడ వ్రాయుదురు. ద్వాదశాంశ, త్రింశాంశలు వ్రాయుటకు గ్రహస్ఫుటము అంశలు, కలల వరకు కనుగొనవలయును.

ఉత్తరదేశ జ్యోతిష్కులు అతి సూక్ష్మముగ గ్రహస్థితిని గణింతురు. వారు అంశలు (డిగ్రీలు), కలలు (మినిట్స్), పరలు (సెకనులు), తత్పరలు (సెకనులో 60 వ భాగము) గుర్తింతురు.

నక్షత్రములు : అశ్విని, భరణి, కృత్తిక, రోహిణి, మృగశిర, ఆరుద్ర, పునర్వసు, పుష్యమి, ఆశ్లేష, మఖ, పుబ్బ, ఉత్తర, హస్త, చిత్త, స్వాతి, విశాఖ, అనూరాధ, జ్యేష్ఠ, మూల, పూర్వాషాఢ, ఉత్తరాషాఢ, శ్రవణం, ధనిష్ఠ, శతభిషం, పూర్వాభాద్ర, ఉత్తరాభాద్ర, రేవతి.

ఈ నక్షత్ర భాగములను ఆకాశములో పరీక్షించిన ప్రతి భాగమునందును కొన్ని నక్షత్రములు కలవు. చిత్త, స్వాతి ఏక నక్షత్రములు. ఆరుద్ర ప్రవాళమువలె ఉండు ఒక ఎరుపు నక్షత్రము. కృత్తిక ఒక గుంపు నక్షత్రము. పుష్యమిలో నాళిక (నెబ్యులా) కలదు. పుబ్బ, ఉత్తరలు మంచపుకోళ్లవలె 4 నక్షత్రములు. అట్లే పూర్వాషాఢ, ఉత్తరాషాఢలును, పూర్వాభాద్ర, ఉత్తరాభాద్రలును నాలుగు నాలుగు నక్షత్రములు.

గ్రహములు : మన పూర్వులు వాడిన గ్రహములు ఏడు. అవి : చంద్ర, బుధ, శుక్ర, సూర్య, కుజ, గురు, శనులు. రాహు కేతువులు ఛాయాగ్రహములు. నవీనముగ మూడు గ్రహములు ఆవిష్కరింపబడినవి. అవి : ఇంద్రుడు (యురేనస్), వరుణుడు (నెప్ట్యూన్), యముడు (ప్లూటో). పాశ్చాత్య జ్యోతిష్కులు ఈ గ్రహములను కూడ వాడుచున్నారు; కాని, మన జ్యోతిష్కులు పూర్వాచారపరాయణులు కావున వాటిని వాడరు.

గ్రహలక్షణములు

గ్రహము	వర్ణము	లింగము	గుణము	* స్వభావము
సూర్యుడు	పాటల వర్ణము	పురుషుడు	సత్త్వగుణము	—
చంద్రుడు	తెలుపు	స్త్రీ	సత్త్వగుణము	—
కుజుడు	ఎరుపు	పురుషుడు	తమోగుణము	పాపి
బుధుడు	ఆకుపచ్చ	నపుంసకుడు	రజోగుణము	శుభుడు
గురుడు	పసుపు చాయ	పురుషుడు	సత్త్వగుణము	శుభుడు
శుక్రుడు	నానా వర్ణములు	స్త్రీ	రజోగుణము	శుభుడు
శని	నలుపు	నపుంసకుడు	తమోగుణము	పాపి

* సూర్యుడు ఎక్కువ పాపికాడు. చంద్రుడు శుక్లపక్షదశమి మొదలు కృష్ణపక్ష పంచమివరకు పూర్ణశుభుడు; తరువాత పాపి. బుధుడు పాపగ్రహముతో చేరిన పాపి అగును.

గ్రహలోహములు : క్రమముగ రాగి, మణి, బంగారము, వెండి, ఇనుము, సీసము సూర్యాది గ్రహములకు లోహములు అని చెప్పబడినవి.

ఉపయోగములు : ఏ రాశిలో శుభగ్రహము అధిపతిగ ఉండునో ఆ రాశికి తగిన దేహభాగము పుష్టిగాను, పాపసంబంధభాగము రోగాక్రాంతముగాను ఉండును. గుణమును కనుగొనవచ్చును. జీవనము ఎట్లు అను విషయము ఊహించు మార్గము క్రింద చెప్పబడును.

కారకత్వము : సూర్యుడు - తండ్రి ; శుక్రుడు - తల్లి (పగటియందు) ; కుజుడు - తోబుట్టినవాడు ; శుక్రుడు - కళత్రము. రాత్రిలో శని తండ్రిని, చంద్రుడు తల్లిని గుర్తించును.

గ్రహదృష్టులు : అన్ని గ్రహములు తమ ఏడవరాశిని పూర్ణదృష్టితో చూచును. శని 3, 10 రాశులను, గురుడు 5, 9 రాశులను, కుజుడు 4, 8 రాశులను పూర్ణదృష్టితో చూచును. అన్ని గ్రహములకు 3, 10 రాశులకు పాద దృష్టి ; 5, 9 రాశులకు అర్ధదృష్టి ; 4, 8 రాశులకు త్రిపాద దృష్టి. శుభగ్రహదృష్టి శుభమనియు, పాపగ్రహ దృష్టి క్రూరమనియు చెప్పుదురు. కాని, పాశ్చాత్యులు తాచక శాస్త్రమును అనుసరించి 30°, 60°, 120° కోణ దృష్టులు శుభకరములనియును, 45°, 90°, 135°, 180° కోణదృష్టులు హానిప్రదము లనియును చెప్పుదురు.

భావములు : తూర్పున ఉదయించు రాశికి 'లగ్నము' అని పేరు. ఒక దినములో పూర్తిగ రాశులు అన్నియును ఒకసారి లగ్నమగును. ఉచ్చయందు ఉండు రాశి దశమ లగ్నము లేదా దశమము ; పడమట అస్తమించు లగ్నము అస్తలగ్నము. ఇది లగ్నమునకు 6 రాశులు లేదా 180° దూరములో ఉండును. దశమమునకు 6 రాశుల దూరములో ఉండు రాశిని 4వ రాశి అనియును చెప్పుదురు. లగ్నమునుండి దశమము గుండ అస్తలగ్నము వరకు ఉండు రాశులు క్షితిజమునకు పైనను, తక్కినవి క్రిందను ఉండును. పైన ఉండు రాశులు దృశ్యములు ; క్రింద నుండు రాశులు అదృశ్యములు.

లగ్నము నుండి దశమమునకు ఉండు అంశలను మూడు సమభాగములు చేయుదురు. అట్లే ఇతర ఖండములకు కూడను. అనగా లగ్నము నుండి చతుర్థము ; చతుర్థము నుండి అస్తమమువరకు ; అస్తమము నుండి దశమమువరకు భాగించిన భావ మధ్యములు లభించును. రెండు భావ మధ్యముల నడుమ భావములు సంధించును. ఉదా : లగ్నము నుండి చతుర్థమువరకు 3 సమభాగములు చేసిన, రెండవ మూడవ భావముల మధ్య బిందువులు ఏర్పడును. రెండవ మూడవ భావ మధ్యలో రెండవ భావము ముగిసి మూడవ భావము ఆరంభించును. ఇట్లే అన్నిటికి 12 రాశులలో ఏ రాశి అయిన లగ్నముగ ఉండవచ్చును.

భావలక్షణములు

భావము	లక్షణము
1వ భావము	లగ్నము, దేహము, కీర్తి, గుణము గుర్తించును.
2వ భావము	కన్ను, వాక్కు, ధనము.
3వ భావము	తోబుట్టినవారు, పరాక్రమము.
4వ భావము	గృహము, వాహనము, విద్య, తల్లి.
5వ భావము	బుద్ధి, విద్య, పుత్రులు.
6వ భావము	రోగము, ఋణము, ఈతిబాధలు, శత్రువులు.
7వ భావము	కళత్రము, యాత్ర.
8వ భావము	ఆయుస్సు, మరణము.
9వ భావము	ధర్మము, మంత్రసిద్ధి, పితృస్థానము, ఆచార్యుడు.
10వ భావము	కర్మము, జీవనము, పితృస్థానము (తాచకశాస్త్రరీత్యా).
11వ భావము	లాభము, జ్యేష్ఠ సహోదరులు.
12వ భావము	వ్యయము, గుప్తశత్రువులు.

[దశమమును, ఆస్థానాధిపతిని అనుసరించి ఒక జాతకుని జీవన విధానమును గుర్తింపవచ్చును.]

1, 4, 7, 10 భావములకు కేంద్రములు అనియు 5, 9 భావములకు కోణములు అనియు పేరు. శుభగ్రహములు కేంద్రకోణములందు, పాపగ్రహములు 3, 6, 11 స్థానముల లోను ఉండిన శుభము. 3, 6, 10, 11 స్థానములు వృద్ధి స్థానములు; 8, 12 బాధాస్థానములు ; 2, 6 కొన్ని సమయము లందు సమత్వఫలము ఇచ్చునని చెప్పుదురు. లగ్నాధిపతి ఎల్లప్పుడును శుభుడు. లగ్నము, లగ్నాధిపతి, చంద్రుడు శుభ త్రింశాంశలలో నుండిన జాతకుడు సద్గుణవంతుడు అందురు. దశమాధిపతి బలవంతుడై శుభవర్గములందుండిన జీవనము సుఖముగ జరుగుననియు, దశమములో శుభ గ్రహములు ఉండినను అట్లే అనియు చెప్పవచ్చును.

శత్రుమిత్రత్వము : ప్రతి గ్రహముయొక్క త్రికోణాధి పతి మిత్రగ్రహము ; తక్కినవి శత్రువులు లేదా ఉదాసీనములు. సూర్యుడు, చంద్రుడు, కుజుడు, గురుడు పరసర్పర మిత్రులు. శని, బుధ, శుక్రులు పరస్పర మిత్రులు. రాహు కేతువులు తాము ఉండు రాశి అధిపతి

యొక్క లక్షణములుకలవారు అగుదురు. రాహువు ఐహిక సుఖములను, కేతువు ఆధ్యాత్మిక సుఖములను ఇచ్చును.

గ్రహబలములు : ఇవి 5 విధములు :

1. సూర్య, చంద్ర, శుక్ర, గురు, బుధ, కుజ, శనులు అవరోహణ క్రమమున సహజ వీర్యవంతులు.

2. కాలబలము : రాత్రియందు చంద్ర, కుజ, శనులు ; బుధుడు ఎల్లప్పుడును ; తక్కినవి పగటియందును బలవంతులు.

3. చేష్టాబలము : ఉత్తరాయనమున సూర్యచంద్రులు; తక్కిన గ్రహములు వక్రించునపుడును ; చంద్రునితో కూడినపుడును బలవంతులు. కుజాది పంచ గ్రహములు పరస్పరము చేరిన యుద్ధము సంభవించును; అందు ఉత్తరపు దిశలో ఉండు గ్రహము జయమును పొందును.

4. స్థానబలము : ఉచ్ఛ, మిత్ర, స్వక్షేత్ర, త్రికోణ రాశులందు, నవాంశలందు బలము కలవి.

5. దిగ్బలము : తూర్పు అనగా లగ్నమందు బుధ గురులు ; దక్షిణము అనగా దశమమునందు సూర్య కుజులు ; పశ్చిమము (సప్తమము) నందు శని ; ఉత్తరము (నాలుగు) లో చంద్ర, శుక్రులు బలవంతులు. ఈ స్థానములకు ఎదుటి అనగా ఏడవ స్థానమున ఈ గ్రహములు బలహీనములు.

గ్రహ దశలు : ప్రతి జాతకునకు ఎపుడు మంచికాలము, ఎపుడు కష్టకాలము అని కనుగొనుటకు మార్గములు అనేకములు కలవు. అందులో ప్రధానమైనది ఉడుదశ. ఇది నక్షత్రముపై ఆధారపడి ఉండును. కృత్తిక నుండి ఆరంభించును. తరువాత ఉత్తర, ఉత్తరాషాఢల నుండి ఆరంభించును. 27 నక్షత్రములు 27 (3 × 9) గణములుగ విభజింపబడినవి. కృత్తిక నుండి వరుసగ సూర్యుడు (6), చంద్రుడు (10), కుజుడు (7), రాహువు (18), గురుడు (16), శని (19), బుధుడు (17), కేతువు (7), శుక్రుడు (20) దశలు ఆరంభించును. తరువాత ఉత్తర, ఉత్తరాషాఢల నుండి ఆరంభించును. ఆరుద్రలో చంద్రుడు ఉండిన, జన్మకాలములో రాహుదశ ఆరంభము. మిథునములో చంద్రుడు $12^{\circ} 10'$ యందు ఉండిన, మిథునములో ఆరుద్ర $6^{\circ} 41'$ లో నుండి ఆరంభించును. కాబట్టి జననమునకు పూర్వము ఆరుద్రలో గడచిన అంశలు $5^{\circ} 29' = 329'$. ఇంకను జరుగవలసినవి $800' - 329' = 471'$. కాబట్టి జనన కాలములో రాహు దశా శేషము $\frac{471}{800} \times 18$ సంవత్సరములు. తరువాత గురు, శని, బుధుల దశలు క్రమముగ సాగును. ఇట్లే సూర్య స్ఫుటమునుండి, లగ్నము నుండి కూడ తీసికొనవలయునని పండిత వాక్యము కలదు.

తాచకమును అనుసరించు పాశ్చాత్యులు 'దినవర్ష' పద్ధతి అవలంబింతురు. ఒక జాతకుని 40 వ సంవత్సరపు ఫలమును కనుగొనవలయుననిన అతని జన్మదినము నుండి 40 వ దినములో గ్రహస్థితులు సాధించి, జన్మకాల గ్రహములకును, వీనికిని గల పరస్పర సంబంధమును చూచి, శుభాశుభ ఫలములు చెప్పుదురు. ఇందు గ్రహముల చారము, గోచారమును కూడ తీసికొనవలయును.

జైమిని పద్ధతి : ఇందు గ్రహదశలు, దృష్టికి బదులు రాశి దశలు, రాశి దృష్టి కలవు. ఉత్తమశాస్త్రమయినను దీనికి ప్రచారము తక్కువ.

ముహూర్త భాగము : జయప్రదము అగునట్లు ఒక కార్యము ఆరంభించుటకు ఇది ఉపయోగపడును. దీనికి సాధారణముగ లగ్నము, తిథివారనక్షత్రములు అనుకూలముగ ఉండునట్లు చూచి, ప్రతి కార్యమును ప్రారంభింపవలయును అని మన పూర్వుల ఆశయము. ఒక జాతకుడు పుట్టినపుడు గ్రహములు అనుకూలముగ లేనిచో విద్యారంభమందును, వివాహమందును శుభముహూర్తమును చూచిన, జన్మకాలదోషములను చాలవరకు తగ్గింపవచ్చును. 'ముహూర్త చింతామణి' అను గ్రంథమునందు వివాహమును గురించి ఒక ఉదాహరణము ఈయబడినది. ఒకకన్యకు వివాహము చేయుటకు తండ్రి ఒక జ్యోతిష్కుని వద్దకు వెళ్లినపుడు అతడు ఆ సమయమునకు లగ్నమును సాధించి రాశి చక్రములో గ్రహములను అమర్చవలయును ; శుభగ్రహములు కేంద్రములనుండి, లగ్నాధిపతికి చంద్రుడు ఉపచయములో ఉండిన వివాహమువలన క్షేమము కలుగుననియు ; సప్తమమున పాపగ్రహమును, కుజుడు 7, 8 స్థానములందును, సప్తమాధిపతి అష్టమమునను, అష్టమాధిపతి సప్తమమునను ఉండిన కన్యకు వైధవ్యము నిశ్చయము అనియు చెప్పవలయును. కాని ఈ దోషమునకు శాంతి కలదు. రహస్యముగ ఆ కన్యను కుంభము, అరటిచెట్టు లేదా అశ్వత్థమునకు వివాహముచేసి, వైధవ్యక్రియలను ముగించి, తగిన శాంతిపూజలు చేసి, మరల మంచి ముహూర్తమున దీర్ఘాయురారోగ్యము గల ఒక వరునికి ఇచ్చి పెండ్లి చేసిన దోషము పరిహారమగును అని చెప్పబడి ఉన్నది. విద్యకు ఆటంకము చూపునట్టి జాతకముగల ఒక బాలునికి విద్యారంభముగాని, ఉపనయనముగాని మంచి ముహూర్తములో చేసిన ఆ బాలుడు మంచి విద్యావంతుడు అగుటకు సందేహమేలేదు. మన ఋషులు మంచి సుగుణవంతులగు పుత్రులను పొందుటకు మార్గములను చెప్పి ఉన్నారు. కొడుకులు, కూతుండ్రు పనికి మాలినవారై ఉండుటకు కొంతవరకు తలిదండ్రులే కారణమని నిశ్చయ

ముగ చెప్పవచ్చును. ఇట్టి ఆశ్చర్యకరములగు పనుల సాధించుట లగ్న తిథివార నక్షత్రములపై ఆధారపడి ఉండును.

లగ్నము : శుభ సంబంధమై ఉండవలయును. కేంద్రము లందు శుభగ్రహములు, 3, 6, 10, 11 స్థానములలో పాప గ్రహములు చంద్రుడు ఉండిన చాల మంచిది. గృహప్రవేశము, యాత్ర, విద్యారంభములలో అష్టమము శుద్ధిగాను, వివాహమునందు సప్తమము శుద్ధిగాను ఉండవలయును. చంద్రుడు చాలా శీఘ్రచారముగల గ్రహమగుటచే, అది ఏ కార్యమునకును లగ్నమందు ఉండకూడదు.

తిథి: విదియ, తదియ, పంచమి, సప్తమి, దశమి, త్రయోదశి చాల ఉత్తమ తిథులు. పాడ్యమి, చవితి, అష్టమి, చతుర్దశి తిథులు దోషయుక్తములు షష్ఠి, నవమి, ఏకాదశి రెండవ పక్షము, ద్వాదశి ప్రయాణమునకు తప్ప తక్కిన కార్యములకు మంచిది. అమావాస్య, పౌర్ణమి తిథులను విధిలేక వాడుదురు. ఈ తిథులు నిర్ణయించుటలో, చంద్రునికి మంచిబలము ఉండవలయునని ఉద్దేశము. చతుర్థి, ద్వాదశి, అష్టమి, పౌర్ణమి తిథులలో చంద్రునికి, సూర్యునికి అంతరము 45°, 135°, 90°, 180° ఉండును.

నక్షత్రములు : నక్షత్రములు అధిపతులననుసరించియు, గుణములను అనుసరించియు శుభాశుభకర్మలకు నిర్ణయింపబడును. విషయములు పూర్తిగ గ్రహించుటకు ముహూర్త చింతామణి, కాలామృతాది గ్రంథములను చూడవలయును. కాని, ఉదా : భరణికి యముడును, కృత్తికకు అగ్నియును అధిపతులు. కాబట్టి శుభకార్యములకు ఇవి తగవు. యుద్ధారంభమునకు ఇవి తగినవి.

నక్షత్రములు క్షిప్రములు, దారుణములు, మృదువులు, స్థిరములు, ఉగ్రములు, సాధారణములు, చరములు అని విభజింపబడినవి :

గుణము	నక్షత్రములు
క్షిప్రములు	అశ్విని, హస్త, పుష్యమి
దారుణములు	మూల, ఆరుద్ర, జ్యేష్ఠ, ఆశ్లేష.
మృదువులు	చిత్త, రేవతి, మృగశిర, అనూరాధ.
స్థిరములు	రోహిణి, ఉత్తర, ఉత్తరాషాఢ, ఉత్తరాభాద్ర.
ఉగ్రములు	భరణి, మఖ, పుబ్బ, పూర్వాషాఢ, పూర్వాభాద్ర.
సాధారణములు	కృత్తిక, విశాఖ.
చరములు	స్వాతి; పునర్వసు, శ్రవణము, ధనిష్ఠ, శతభిషము.

వీటి ఉపయోగము : దారుణ నక్షత్రములలో దారుణ కార్యములను చేయవలయును. శుభకార్యములు చేయకూడదు. క్షిప్రనక్షత్రములలో ఆరంభించిన కార్యము శీఘ్రముగ ముగియును; స్థిరనక్షత్రములలో ఆలస్యమగును. జ్యోతిష్కుడు ఈ విధముగ యోచించి ముహూర్తమును నిర్ణయించిన శ్రేయస్కరమగును.

ప్రశ్నభాగము : ఒక పృచ్ఛకుడు జ్యోతిష్కుని వద్దకు వెళ్లి తన కార్యము జయమగునా కాదా అని అడుగునపుడు అతడు ఆ సమయమునకు కుండలివేసి గ్రహములను పరీక్షింపవలయును.

జాతకము లేనట్టి ఒక మనుష్యుని జీవితముకూడ ప్రశ్నమూలముగ వివరింపవచ్చును.

కార్యసాధనకు ఉపచయములందు చంద్రుడు, పాప గ్రహములును, కేంద్రకోణములలో శుభగ్రహములును ఉండవలయును. కొన్ని సమయములందు ఇట్లుండవు. అపుడు గ్రహముల బలాబలముల నిర్ణయించి ఫలమును చెప్పవలయును. అట్టి సమయములందు పొరబాట్లు జరుగుటచే జ్యోతిషము నమ్మతగినది కాదని కొందరి వాదము. అది సరికాదు. ప్రతిరోగికి అవసానకాలములో వైద్యము చేయుచున్నారు. ప్రతి మనుష్యుడు ఎపుడో ఒకపుడు మరణింపవలయును. అది నిశ్చయము. అందుచే వైద్యశాస్త్రము సత్యముకాదని చెప్పుట యుక్తియుక్తము కాదు కదా !

ఎవరు ఎట్లుచెప్పినను, జ్యోతిష్కులు పొరబాట్లు చేయుచుండినను, జ్యోతిషములో నమ్మకములేని వారి సంఖ్య చాల స్వల్పము అని నొక్కిచెప్పవచ్చును. ఆచార్య

జ్యోతిషము - వేదాంగము : పాశ్చాత్యులు, వారిని అనుసరించిన భారతీయ విద్వాంసులు ఆర్యభటుని యుగములు, వాని కాలపరిమాణములు అతనిచే నూతనముగ సృజింపబడినవని, వానికి ఆధారము లెవ్వియు (వారి దృష్టిలో) కానరావని సిద్ధాంతము చేసిరి. కాని, మన ఋషులు శాస్త్రములు, స్మృతులు, పురాణములు వేదజన్యములని చెప్పిరి. మనకు వేదములు అపౌరుషేయములు, విజ్ఞాననిధులు. వేదవాక్యములు సాధారణ మానవులకు అగమ్యములు. వేదార్థము నిరుక్తము మూలముననే తెలిసికొనవలయును. కాని నిరుక్తముల ప్రచారము అడుగంటినది. నిరుక్తములు వేదములలోని శాస్త్రార్థములను చెప్పునని, శాస్త్రవిరోధములగు పౌరాణిక గాథలు వేదార్థముగ ప్రచారములోనికి వచ్చెనని కొందరి అభిప్రాయము. వారిలో ముఖ్యుడు స్వామి దయానంద సరస్వతి.

వేదములలోని కొన్ని వాక్యములకు తారుమారగు వ్యాఖ్యానములు ప్రచారములో ఉన్నవి.

మూ. గౌరావస్కంది న్నహల్యాయై జారః

'ఇంద్రుడు గౌతముని భార్యయగు అహల్యతో జారత్వము చేసెను' అని ప్రచారములో ఉన్నది.

గౌరావస్కంది అనగా చంద్రుడు; రాత్రి వలన అహస్సు (పగలు) లయమగుచున్నది, కాబట్టి అహల్య అనగా రాత్రి. రాత్రియందు చంద్రుడు సర్వభూతములకు ఆహ్లాదము కలిగించుచు, స్త్రీ పురుషసంబంధమును అనుసరించుచు, రాత్రితో జారత్వమును అనగా వయోక్షీణతను అనుభవించెను. ప్రకృతి వర్ణనయగు పై మంత్రమునకు కల్పింపబడిన అపార్థము ఇట్లు ప్రచారమునకు వచ్చెను.

వేదములో అనేక మంత్రములు జ్యోతిషశాస్త్రమునకు మూలకారణములగు నట్టివి కలవు. బ్రహ్మయొక్క ఆయుః పరిమాణము పురాణములందున్నట్లే వేదమునందుకూడ చెప్పబడినది.

మూ. శతం తేఽయుతం హాయనాన్ ద్వే యుగే త్రీణి చత్వారి కృణ్మః (అథ. 8-2-21)

'బ్రహ్మయొక్క ఆయుస్సు 100 సంవత్సరములు, ఒక మహాయుగము 432 × 10000 = 4320000 సంవత్సరములు'

మూ. గౌరీః మిమాయ సలిలాని తక్ష త్యేకపదీ ద్విపదీ సా చతుష్పదీ అష్టాపదీ నవపదీ బభూవుషీ సహస్రాక్షరా పరమే వ్యోమన్ (ఋగ్వే. 1-164-41)

'గౌరి లేదా దినముయొక్క మానము (1 + 2) × 4 × 8 × 9 × 1000 = 864000 అక్షరములు.

సూర్యసిద్ధాంతము ప్రకారము 1 దినము = 60 గ. = 3600 వి. గ. = 21600 ప్రాణములు = 216000 గుర్వక్షరములు = 864000 అక్షరములు.

వారములు: వారములు అన్యదేశములనుండి భారతదేశమునకు వచ్చినవి అను వాదము ప్రచారములో కలదు. కాని, ఋగ్వేదములోని కొన్ని సూక్తములు ఈ వాదము పొరపాటని చూపుచున్నవి.

మూ. అస్య వామస్య పలితస్య హోతు స్తస్య భ్రాతా మధ్యమో అస్త్యశ్నః తృతీయో భ్రాతా ఘృతపృష్ఠో అస్యాత్ర అపశ్యం విశ్పతిం సప్తపుత్రమ్ (ఋగ్వే. 1-164)

'విశ్పతికి ఏడుగురు పుత్రులు. వీరే సప్తహోతలు. వారిలో పలితుని (తెల్లని లేదా చంద్రుని) ఎడమవైపు ఘృతపృష్ఠుడు (అగ్ని లేదా అంగారకుడు) కలడు. అతడు మధ్యమ భ్రాత. వారములకు సంబంధించిన జ్యోతిష జ్ఞానము లేనిచో ఈ మంత్రమునకు అర్థము తెలియదు. ఋగ్వేద ఋషులకు వారజ్ఞానము ఉన్నట్లు ఇందువలనే విశదమగు చున్నది.

మూ. సూర్యం తమసా అపవ్రతేన తురీయేణ బ్రహ్మణా అవిందత్ అత్రిః

ఋగ్వేదము 5-40-6 లో అత్రి (శని) తన నాల్గవ మంత్రములో సూర్యునిచే కనుగొనబడినట్లున్నది. నవగ్రహముల వరుసలో సూర్యునికి శని నాల్గవగ్రహముగదా?

ఋగ్వేదము 1-164-2 లో క్రాంతివృత్తమునకు త్రినాభి (రెండునాభులు, ఒక కేంద్రము కలది) అని పేరు కలదు.

ఋగ్వేదములోని అనేకమంత్రములు ఆనాటి ఋషుల జ్యోతిష పాండిత్యమును వెల్లడించుచున్నవి.

మూ. ఇంద్ర ఆయాహి చిత్రభానో సుతా ఇమే త్వాఽయవః (ఋగ్వే. 1-3-4)

'తులావిషుబిందువునకు 'ఇంద్ర' లేదా 'చిత్రభాను' అనిపేరు. చిత్రభాను అనగా చిత్తా నక్షత్రస్థిత సూర్యుడు. చిత్త యొక్క పుత్రుడు అనగా తర్వాత వచ్చు నక్షత్రము వాయువు అధిపతిగ గల స్వాతినక్షత్రము.

మూ. అశ్వినా పిబతం మధు దీద్యాగ్నీ శుచివ్రతా. (ఋగ్వే. 1-15-11)

వసంత ఋతువునందు మధు (మేష) మాసములో అగ్ని (విషుబిందువు) అశ్వినియందున్నది.

మూ. యావాం కశా మధుమత్యా శ్వినా సూనృతావతీ తయా యజ్ఞం మిమిక్షతం (ఋగ్వే. 1-22-3)

సూర్యుడు మధు (మేష) రాశిలో త్రీఘ్రోచ్చ యందుండును. సంవత్సరారంభము మేషరాశి అశ్విని నక్షత్రమునందుకదా!

మూ. తద్విష్ణోః పరమం పదం సదా పశ్యంతి సూరయః

సూరయః = ఉత్తర ధ్రువవాసులు, తద్విష్ణోః పరమం పదం = విషువృత్తమును, సదా పశ్యంతి = ఎల్లప్పుడు చూచెదరు.

మూ. త్వమగ్నే ప్రథమో అంగిరా ఋషిః దేవోదేవానా మభవః శివః సఖా. (1-31-1)

అగ్ని (విషుబిందువు) మేషాది యందుండెను. దేవతలు వారి స్థానములలో ఉండిరి. అనగా అశ్విని, చిత్త మధ్య నుండు క్రాంతి వృత్తము విషు వృత్తమునకు ఉత్తరమున ఉండెను.

మూ. ద్విమాతా శయుః. (1-31-2)

అగ్ని ద్విమాతృక, అనగా అగ్ని (విషుబిందువు) విషువృత్త, క్రాంతివృత్తములచే ఏర్పడుచున్నది.

మూ. వయంహితే అమన్మహి ఆ అంతాత్ ఆ అపరాకాత్
అశ్వేన చిత్రే అరుషి.

(1-30-21)

సంవత్సరారంభము సూర్యుడు అశ్వినిలో ఉండునపుడు చైత్రమాసమున ఆరంభించును. ఇది విషుబిందువుపై ఆధారపడి ఉండదు.

మూ. అభిత్యం మేషం పురుహూత మృగ్మియ మింద్రమ్.

ఈ మంత్రములు మేషములో పురుహూతుడగు ఇంద్రునికి తృప్తినిచ్చును. ఇది మేషరాశిలో నుండు విషుబిందువును గురించిన వర్ణన.

మూ. మేనా భవో వృషణా అశ్వస్య సుకృతో
మేష వృషణా శ్వస్య మేనే

(ఋగ్వేదము)

వృషణాశ్వ మనగా మేషము అని రెండవ మంత్రము వలన తెలియుచున్నది. మొదటి మంత్రమునుండి ఇంద్రుడు (విషు) వృషణాశ్వదుహిత యగుమేన (మీన) అయ్యెను. ఇందువలన విషుచలనమును గురించి మన ఋషులకు తెలిసి ఉండవలయునని తోచుచున్నది.

మూ. అజో హ వైదశ్వినా

(ఋగ్వే. 1-117-16)

ఇందువలన అశ్వినులకును, మేష రాశికిని గల సంబంధము తెలియుచున్నది. ఉత్తరదేశములందు సూర్యుడు అశ్వని లేదా మేషరాశి ప్రవేశించినపుడు వసంతఋతువు ఆరంభను. భూమి పుష్కలముగ పండును.

తైత్తరీయ ఆరణ్యకమునందు సూర్యుడు కన్యారాశిని విడిచినపుడు శరదృతువు ఆరంభమగునని చెప్పబడినది.

మూ. విప్రసన్నే కనీనికే ... శరదృతో పదృశ్యతే.

రామాయణమునందు శనివారమును గురించి చెప్పబడినది.

త్వరహే సౌమ్య ముహూర్తోయం ధ్రువశ్చ దివసః
అవ్యయం, (అయోధ్యాకాండ 56-25)
ధ్రువశ్చ దివసః = శనివారముకదా!

కాబట్టి జ్యోతిషశాస్త్రము అన్యదేశీయము కాదని, వేద భాగమే అని నిశ్చయమగుచున్నది.

కేయి పండితవాద ఖండనము : పాశ్చాత్యులు భారతీయ జ్యోతిషమును గురించి వ్రాసిన దానినంతయు క్రోడీకరించి యుగమానమును గురించి వ్రాయుచు, కేయి పండితుడు కాలనిర్ణయము చేసెను. అతడు భారతీయజ్యోతిష ప్రాచీనతను తిరస్కరించుచు, జ్యోతిషవిద్యనంతయు భారతీయులు గ్రీకుల నుండియో, చీనావారినుండియో గ్రహించినారని వ్రాసినాడు. అతడు కావించిన కాల నిర్ణయము ఇట్లున్నది.

యుగము	గ్రంథము	కాలము
1. 5 సం॥లు.	వేదాంగ జ్యోతిషము పితామహసిద్ధాంతము	క్రీ. శ. 200 వరకు.
2. 2850 సం॥లు.	రోమక సిద్ధాంతము	క్రీ. శ. 400
3. 180000 సం॥లు.	పూర్వసూర్యసిద్ధాంతము	క్రీ. శ. 400
4. 1800000 సం॥లు.	పూర్వసూర్యసిద్ధాంతము	క్రీ. శ. 400
5. 4320000 సం॥లు.	నవీనసిద్ధాంతములు	క్రీ. శ. 500 తర్వాత
6. 4320000000 సం॥లు.	బ్రహ్మగుప్త, సూర్య సిద్ధాంతములు మొదలగునవి.	క్రీ. శ. 628 తర్వాత

ఈ వాదము బలపడినది. మనపూర్వులు వ్రాసినదంతయు విశ్వసనీయము కాదని అందరు నమ్మసాగిరి. దీనికి కారణము వేదములు సరియగు మార్గమున ప్రచారము కాకుండుట , నిరుక్తముల పఠనము లోపించుట.

వేద మంత్రములు అనాదిగ ప్రచారములో ఉన్నవి. అవి అపౌరుషేయములు. క్రమేణ వాని అర్థము మరుగున పడినది. గణితజ్ఞానము లేనందున కొన్నిచోట్ల వ్యాఖ్యానములు అర్థములేని మాటలయ్యెను. సాయనాచార్యులు కూడ ఇట్లు పొరబడిరని కొందరి పెద్దల అభిప్రాయము. క్రింది మంత్రమును తీసికొందము.

మూ. శిఞ విభిందో అస్మై చత్వారి అయుతాదదత్
అష్టపరః సహస్రా. (ఋగ్వే. 8-2-41)

దీనికి విల్సన్ పండితుని అర్థము : ఉదారుడవగు ఓవిభిందూ! నీవు నాకు నాలుగుసారులు పదివేలును, తర్వాత ఎనిమిది వేలును ఇచ్చితివి. ఈ వాక్యము పదముల ప్రోగు, అర్థరహితము. వేదమంత్రములకు ఈ విధమున తారుమారుగ అర్థముల్రాసి తప్పుడు సిద్ధాంతములు లేవదీయుచున్నారు. ఈ మంత్రమునకు వేరు విధమున అన్వయక్రమము వ్రాసిన సరియగు అర్థము నిచ్చుచున్నది.

'శిఞ విభిందో అస్మై దదత్‌చత్వారి అష్టాపరః
అయుతః సహస్రా'.

'విద్యా దేవతవగు ఓ విభిందూ! నీవు నాలుగు ఎనిమిది సార్లు నాలుగు పదివేల వేలు నాకు ఇచ్చితివి'. అనగా విభిందుజ్ఞానము 4,320,000,000 నకు సమానము. ఇది కల్పమానము. ఈ అర్థమునే పురాణములు, ఇతిహాసములు ప్రచారము లోనికి తెచ్చినవి. వానిని నమ్మ కూడదని పాశ్చాత్య విద్వాంసులు నిశ్చయించిరి. వారి నిశ్చయము అమోఘము! మరియొక మంత్రము తీసికొందము.

మూ. ఇత్థా ధీవంతమద్రివః కాణ్వం మేధ్యాతిథిమ్ మేషో
భూతోఽభి యన్నయః (ఋగ్వే. 8-2-40).

దీనికి విల్సన్ పండితుని అనువాదము : 'మేక రూపమున వచ్చుచు ఉరునుల రేడు కణ్వవంశజుడగు మేధాతిథిని చేరెను. అతనిని తృప్తిపరచెను'. జ్యోతిష్కులకు ఈ మంత్రమువలన విషు చలనమువలన ఇంద్రుడు కల్పములో చేయు భ్రమణములను గురించి తెలియగలదు.

మూ. 'సుబ్రహ్మణ్యోం సుబ్రహ్మణ్యోం, సుబ్రహ్మణ్యోం,
ఇంద్రాగచ్ఛ హరివ, అగచ్ఛ మేధాతిథే
మేషవృషణా శ్వస్య మేనే'.

అర్థము : సుబ్రహ్మణ్యుడు కార్తికేయుడు, కృత్తికానక్షత్రముతో సంబంధము కలవాడు. ఇంద్రుడు (విషు బిందువు), కృత్తికా నక్షత్రమునందుండెను; తర్వాత మేషమునుండి మీనమునకు జారెను,

జ్యోతిషశాస్త్రజ్ఞానము సమగ్రముగా లేనందున సాయనాచార్యులుకూడ ఇట్టి ఘట్టములందు కొంత పొరబడిరి. ఇతర విద్వాంసుల గురించి చెప్పనేల? భారతదేశ చరిత్రను సాధ్యమైనంత అర్వాచీనముగ జేయవలయును అను పూనికయందు పాశ్చాత్యులు నిమగ్నులైఉండిరేకాని, నిరుక్తకారుల భావమునుగాని, వేదవాక్యము లందుండు గూఢార్థములను గాని కనుగొనుటకు ప్రయత్నము చేయని వారైరి.

జ్యోతిషము వేదాంగమని ఇకమీదటనైన అందరు విశ్వసించెదరు గాక! ఆచార్య

టాలెమీ (సుమారు క్రీ. శ. 100 - 170) : భూ కేంద్ర సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించిన ప్రఖ్యాత ఈజిప్టు ఖగోళ శాస్త్రవేత్త, గణితశాస్త్రవేత్త, భూగోళ శాస్త్రవేత్త టాలెమీ ప్రాచీనకాలప్రముఖ ఖగోళశాస్త్రవేత్తలలో చివరివాడు.

ఇతడు ఈజిప్టునందలి టాలెమీనస్ నగరమున జన్మించెను. ఇతని జీవితమునకు సంబంధించిన వివరములు అలభ్యములు. కాని, ఇతడు అలిగ్జాండ్రియా నగరముననే తన పరిశోధనలు చేసినట్లు, తన రచనలు వ్రాసినట్లు తెలియుచున్నది.

13 సంపుటములలో వ్రాయబడిన 'అల్మజెస్ట్' అను గ్రంథము టాలెమీ రచనలలో మిక్కిలి ప్రసిద్ధిపొందినది. 'గొప్ప నిర్మాణము' అను అర్థమునిచ్చు ఈ గ్రంథనామము అరబ్ పదము. ఈ గ్రంథమునందు తన ఖగోళశాస్త్ర పద్ధతిని టాలెమీ విపులీకరించెను. ఇతడు గ్రీక్ ఖగోళశాస్త్రవేత్త హిపార్కస్ భావములను ఆధారముగచేసికొని తన సిద్ధాంతమును వృద్ధిచేసెను.

"విశ్వమునకు కేంద్రస్థానమున భూమి స్థిరముగఉన్నది. 48 తారామండలములతో కూడిన విశ్వగోళము, చంద్రుడు, బుధుడు, శుక్రుడు, సూర్యుడు, కుజుడు, గురుడు, శని అను ఏడు గ్రహములు భూమిచుట్టు భ్రమణము చేయుచున్నవి." ఇది టాలెమీ భూకేంద్ర సిద్ధాంత సారాంశము. దాదాపు 1400 సంవత్సరముల కాలము యూరప్ అంతట పై సిద్ధాంతము ఆమోదింపబడినది. తుదకు పోలిష్ ఖగోళ శాస్త్రవేత్త కోపర్నికస్ టాలెమీ సిద్ధాంతము తప్పు అని నిరూపించెను. చంద్రకక్ష్యలో చంద్రచారమునందలి లోపములను గుర్తించుట టాలెమీ పరిశోధనలలో గొప్పది. దీనిని 'ఇవెక్షన్' అందురు. అనగా సూర్యుని ఆకర్షణచేత చంద్రచారములో ఏర్పడు అసమానతలు.

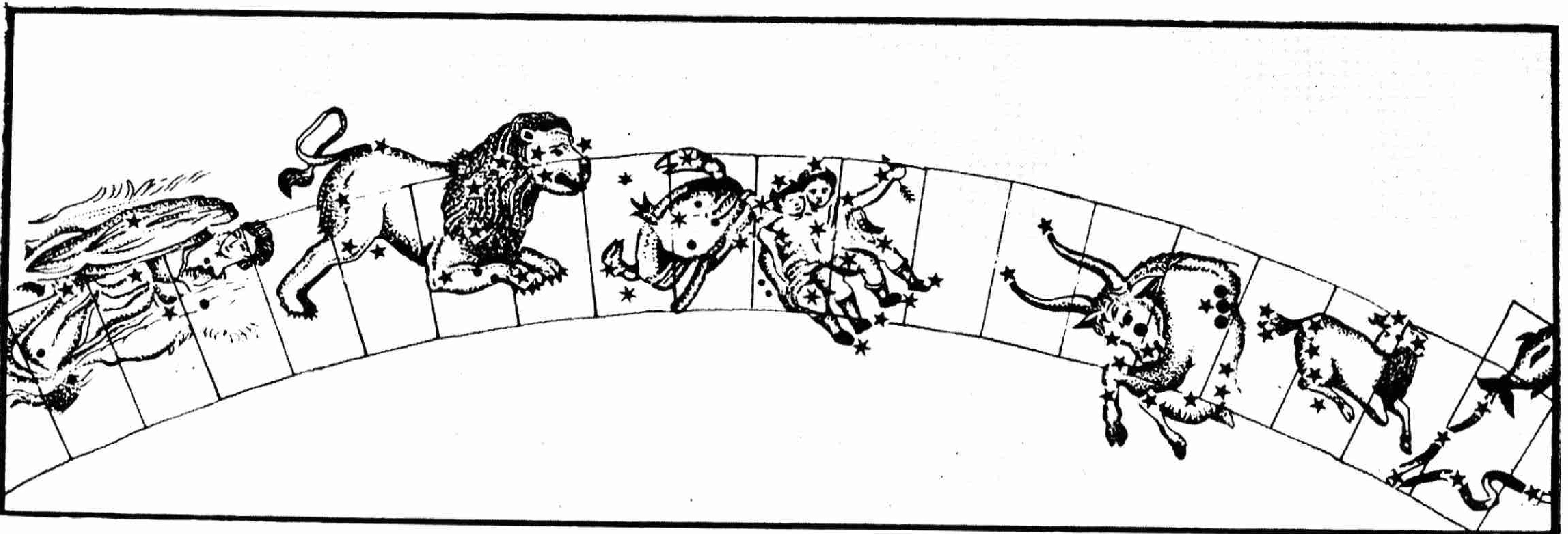
ఎనిమిది సంపుటములలో టాలెమీ వ్రాసిన భూగోళ శాస్త్రమే, ఆ శాస్త్రమును విజ్ఞానముగ పరిగణించుచు చేసిన ప్రథమ ప్రయత్నము. ఈ గ్రంథములో ఎరాటోస్తెనీజ్, హిపార్కస్ మొదలగు విజ్ఞానవేత్తల భూగోళ పద్ధతులను సవరించి, తన ప్రాచీనులకు తెలిసిన భూతల లక్షణములను పేర్కొనెను. క్రిస్టాఫర్ కొలంబస్ తన ప్రసిద్ధ నౌకాయాత్రలతో టాలెమీ పేర్కొనిన భౌగోళిక లక్షణములు లోప భూయిష్టములని నిరూపించు వరకు టాలెమీ భూగోళశాస్త్రమే ప్రమాణపాఠ్య గ్రంథము. టాలెమీ ప్రధాన నిరక్షరేఖ స్థాననిర్ణయము తప్పు అగుటచే, అతడు ఇచ్చిన ప్రదేశ అక్షాంశ, రేఖాంశములు తప్పులయినవి. కాని, టాలెమీ ఆ గ్రంథములో గీచిన 26 దేశపటములు, ప్రపంచపటము అతని కాలమునకు మించిన విజ్ఞానమును వెల్లడిచేయుచున్నవి.

జ్యోతిషమును 4 సంపుటముల గ్రంథముగ టాలెమీ రచించెను.

భారతీయ ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులవలె, ఇతడు తన ఖగోళ శాస్త్రమునకు కావలసిన విషయ సేకరణ లక్ష్యముతో గణితశాస్త్రమును పఠించెను. కాని, గణితశాస్త్రములో టాలెమీ చేసిన రచనలే అతని ఖగోళశాస్త్ర రచనలకన్న శాశ్వత విలువను పొందినవి. సమతల గోళీయ త్రికోణమితుల మార్గదర్శిగా టాలెమీ పేరు పొందెను (చూ. కోపర్నికస్ - పు. 198). పా. ల. నా.

టెన్సార్ కలనము : వేగము, త్వరణము, బలము వంటి భావములు కొన్నింటికి పరిమాణమే కాక ఒక నిర్దిష్ట దిశ కూడ కలదు. అట్టి వాటిని సదిశరాశులు (వెక్టార్స్) అని పిలిచెదము.

ఒక లంబకోణీయ నిరూపక వ్యవస్థలో i, j, k ల ద్వారా x, y, z దిక్కులలోని సదిశరాశులను నిరూ





టాలెమీ వర్ణించిన రాశిచక్రమునందలి పండ్రెండు తారామండలములు

Blank Page

పించితిమేని, ఏ సదిశరాశి v నైనను $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ అను రూపములో వివరించవచ్చును. రెండు సదిశ రాశులను సంకలనము చేయవచ్చును. ఇదిగాక A, B అను రెండు సదిశ రాశులను రెండు విధములుగ గుణించవచ్చును. అందులో $A . B$ అనునది ఒకటి. ఇచ్చట $A . B = B . A$. ఇది ఒక సామాన్య సంఖ్య. ఇంకొొక విధమైన గుణకారములో $A \times B$ అనునది ఒక సదిశరాశి. ఇచ్చట $A \times B$ అను గుణకార లబ్ధము $- B \times A$ కు సమానము.

సదిశ రాశుల గుణకార వ్యవహారమందు ఇప్పుడు ఇంకొక విధమును నిర్వచింతుము. దీనికి టెన్సార్ గుణకారము అని పేరు. రెండు సదిశరాశుల టెన్సార్ గుణకార ఫలము AB ని చుక్కను గాని, గుణకార సంకేతము $\times$ ను గాని లేకయే లిఖింతుము. ఇచ్చట AB కి, BA కు విలువలు వేరు. అవి సామాన్య సంఖ్యలు కావు, టెన్సార్ అంశములు. $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$; $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ కానిమ్ము. విభజన న్యాయమును అనుసరించి, పై రెండు రాశులను ఒకదానిచే వేరొక దానిని గుణించి, ఆ ఫలమును ఇట్లు వ్రాయుదము :

$$AB = a_1 b_1 ii + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 jj + a_2 b_3 jk + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 kk.$$

ఇచ్చట $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ లు సామాన్య సంఖ్యలు. అందువలన $a_1 b_1 = b_1 a_1$; $a_1 b_2 = b_2 a_1$ మొదలైనవి సిద్ధించును. కాని ij, ik మొదలైనవి టెన్సార్‌లు; ij వేరు, ji వేరు. ఇట్లు రెండు సదిశ రాశులను ఒకటి ప్రక్కన మరి ఒకటి వ్రాసిన సంకేతములకు టెన్సార్‌లు అని పేరు.

$$\alpha = a_{11} ii + a_{22} jj + \ldots\ldots + a_{12} ij + a_{21} ji + \ldots\ldots$$

అనునది రెండవ తరగతి వ్యాపక టెన్సార్ అగును. దీనికి 9 అంశములు $a_{11}, a_{12} \ldots$ కలవు.

ఒక సదిశరాశిని $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ అని వ్రాయునట్లే, ఒక రెండవతరగతి టెన్సార్‌ను $a_{11} ii + a_{12} ij + \ldots + a_{33} kk$ అని వ్రాయవచ్చును. దీని తొమ్మిది అంశములు అగు $a_{11}, a_{12} \ldots$ లను ఒక చతురస్రాకార మాతృక (మాట్రిక్స్) రూపమున ఇట్లు వ్రాయవచ్చును :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ఇట్టి ప్రతిమాతృక ఒక రెండవ తరగతి టెన్సార్‌నకు ప్రతినిధిగా ఆచరించును. సదిశరాశులను మొదటి తరగతి టెన్సార్‌లు అని భావించవచ్చును.

నిరూపక వ్యవస్థను i, j, k ల నుండి i', j', k' లు అను వానికి మార్చినచో ఈ క్రొత్త ఏకాంకములలో టెన్సార్ α ను సంపాదించుటకు i, j, k ల విలువలను క్రొత్త ఏకాంకములు i', j', k' ల ద్వారా వ్రాయవలెను.

సదిశరాశులపై ప్రవర్తించు పరికర్మములే టెన్సార్‌లు : సదిశరాశులపై పనిచేసి వాటిని ఇతర సదిశరాశులుగా మార్చుటకు రెండవతరగతి టెన్సార్‌లను ఉపయోగింపవచ్చును. ఉదాహరణమునకు AB అను టెన్సార్‌ను C అను సదిశ రాశితో బిందురీతిలో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధము $(AB) . C$ ని పరిశీలించెదము. దీనిని $A(B.C)$ అని తీసికొందము. అనగా ఆ బిందువునకు ఈవల, ఆవల ఉన్న రెండు సదిశ రాశుల బిందు గుణకారము చేయవలెను. అట్లు లభించు సంఖ్య $B . C$. ఇదియొక వాస్తవసంఖ్య. కనుక $A(B . C)$ ఒక సదిశ రాశి. కనుక (AB) అను పరికర్మము C ని $(B . C) A$ గా మార్చినది. $C. (AB)$ అనగా $(C . A) B$ అని అర్థము. ఇదియు ఒక సదిశరాశి. $C (AB)$, $(AB). C$ ఇవి రెండును వేర్వేరు. ఇటులనే $\alpha = a_{11} ii + a_{12} ij + a_{21} ji + \ldots$ ను B అను సదిశరాశిపై పనిచేయు పరికర్మగా ఉపయోగించి, ఇంకొక సదిశరాశి C ని పొందవచ్చును. ఇట్లు పొందినది $\alpha \cdot B$, మరియొకటి $B \cdot \alpha$.

$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ అయినచో అప్పుడు

$$\alpha \cdot B = (a_{11} ii + a_{12} ij + a_{21} ji + \ldots\ldots)(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

ఇది $a_{11} b_1 i + a_{22} b_2 j + a_{33} b_3 k + a_{12} b_2 i + a_{21} b_1 i + a_{22} b_2 j + a_{33} b_3 k + a_{12} b_2 i + a_{21} b_1 j + \ldots \ldots$ ను ఇచ్చును.

$\alpha \cdot B$ ని $c_1 i + c_2 j + c_3 k$ అను దానిచే తెలిపినచో

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

అని గ్రహించవచ్చును.

$C = B \cdot \alpha$ అని తీసికొనినచో మాతృకా సంకేతములో

$$\begin{bmatrix} c_1, & c_2, & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

అని లభ్యమగును.

యాంత్రిక శాస్త్రమునుండి టెన్సార్‌లకు దృష్టాంతములు : ఒక సదిశరాశిని వేరొక సదిశరాశిగా మార్చు కారకములను వాడుకచేయు ఘట్టములు అనేకములు గణిత, భౌతికశాస్త్రములందు కలవు. దృష్టాంతమునకు ఒక వస్తువు రూపము వికృతిని చెందుచున్నది అనుకొందము. ఈ మార్పులో కేంద్రబిందువు (0, 0, 0) స్థిరముగా ఉండి, x - అక్షమునకు సమానాంతరములు అగు అన్ని పొడవులును రెండింతలై, y - అక్షమునకు సమానాంతరముగా ఉన్న పొడవులు మూడింతలై, z - అక్షమునకు సమానాంతరముగా ఉన్నవి అయిదింతలై పెరిగినవి అని అనుకొందము. ఇట్టి వికృతికి సమఘాత వికృతి అనిపేరు. దీని వలన (x, y, z) బిందువు $(2x, 3y, 4z)$ గా మారుటవలన స్థలసదిశరాశి అగు $R = ix + jy + kz$ మార్పువలన $2ix + 3jy + 5kz$ గా మారును

$a = 2ii + 3jj + 5kk$ అను టెన్సార్‌ను ఉపయోగించి, R అను సదిశరాశి $a \cdot R$ గా మారుచున్నది అని వర్ణించవచ్చును. ఇచ్చట $a \cdot R = R \cdot a = R'$ ఇట్టి మార్పులలో ఋజురేఖలు ఋజురేఖలుగనే మారును. కనుక విపర్యయముగ ఋజురేఖలు ఋజురేఖలుగా మారు మార్పులు అన్నియు 2వ తరగతి టెన్సార్ గుణకారము వలన జనించవచ్చును.

ఒక దృఢవస్తువు ఒక బిందువు O చుట్టు స్వీకరించు భ్రమణమందు ఆ వస్తువుయొక్క కోణీయగతి భారము (అంగ్యులర్ మోమెన్టమ్) H చాల ముఖ్యమైన సదిశరాశి. బిందువు O చుట్టు పరిభ్రమించు వస్తువుయొక్క కణముల గతిభారములను O అపేక్షయా బిభ్రమిషల సంకలనము అని H ను నిర్వచింతము. ఆ వస్తువు కోణీయవేగమును ω అను సదిశరాశిచే తెలియపరచినచో $a \cdot \omega$ అను కారకమును ఉపయోగించి, కోణీయగతిభారమును పొందవచ్చును. ఇచ్చట a ను జడత్వీయ (ఇనర్షియల్) టెన్సార్ అని అందుము.

ఉన్నత తరగతులకు చెందిన టెన్సార్‌లు : $ii, ij, \ldots$ వంటి జంట సమ్మేళనములను తీసికొనుటకుబదులు మూడింటి సమ్మేళనములను తీసికొందము. ఈ మూడేసి చొప్పున గ్రహింపబడిన సమ్మేళనముల ప్రస్తారసంఖ్య 27. అవి $iii, iij, iik, jii \cdots$; $a_{111} iii + a_{112} iij + \cdots$ ఒక టెన్సార్ : ఇచ్చట a_{111}, a_{112} మొదలైనవి 3వ తరగతి టెన్సార్ యొక్క అంశములు. ఈ టెన్సార్‌ను కారకముగా ఉపయోగించవచ్చును.

$a_{111} iii + a_{112} iij + \cdots a_{333} kkk$ టెన్సార్‌కును $(v_1 i + v_2 j + v_3 k)$ అను సదిశరాశికిని బిందుగుణకారము చేయుదము. మునుపటివలెనే $iii.i$ ను $ii(i.i) = ii(i.i = 1$ కనుక) అని వివరించవలెను. అనగా బిందువునకు దానికి సాక్షాత్తుగా కుడి ఎడమల ఉండు సదిశరాశులే గుణకరించు కారకము. i, j, k సదిశరాశుల క్రమమును తారుమారుచేయకుండ, ఈ గుణకారము చేయవలెను. ఇట్లు $a_{111} v_1 ii + a_{112} v_2 ii + a_{113} v_3 ii + a_{121} v_1 ij + \cdots$ అను 2వ తరగతి టెన్సార్ లభించును. ఇట్లు సదిశరాశులకును 3వ తరగతి టెన్సార్‌లకును బిందు గుణకారము వలన 2వ తరగతి టెన్సార్‌లభించును. 3వ తరగతి టెన్సార్‌నకు ఒక సదిశరాశితోగాని, లేదా 2వ తరగతికి చెందిన రెండు టెన్సార్‌లచేగాని బిందువులేని గుణకారము చేసినచో 4వ తరగతి టెన్సార్ లబ్ధమగును. టెన్సార్ గణితములో వజ్రగుణకారము లేదు.

టెన్సార్‌కలన ప్రక్రియా వినియోగములు : టెన్సార్ కలనగణిత వికాసమందు తరువాతిమెట్టు నిరూపకములలో ఒక దానికి సాపేక్షముగ ఒక టెన్సార్‌ను అంతరీకరించుట. ఈ పరికర్మమువలన టెన్సార్ యొక్క తరగతి ఎక్కువగును.

వక్రరేఖీయ (కర్వీలినియర్) నిరూపకములను ఉపయోగించు సందర్భములలో టెన్సార్‌లు మిక్కిలి సదుపాయకరములు. ఇవి అంతరీకరణ జ్యామితియందు, సాపేక్షతా సిద్ధాంత గణితమందు విరివిగా వాడుకలో ఉన్నవి.

గోళోపరితలమువంటి ఏ వక్రతలమందైన x_1, x_2 అను అక్షాంశ, రేఖాంశలవంటి నిరూపకములు వాడినపుడు (x_1, x_2), $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ అను రెండు బిందువుల మధ్య దూరము $ds^2 = g_{11} (dx_1)^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} (dx_2)^2$ అగును. ఇచ్చట g_{11}, g_{12}, g_{22} అనునవి కొలతకు సంబంధించిన టెన్సార్ అంశములు. వక్రతలమునకు చెందిన అంతరీకరణ జ్యామితి చర్చలలో ఈ టెన్సార్ ప్రధాన పాత్రను వహించుచున్నది (చూ: అంతరీకరణ జ్యామితి - పు. 111).

ఆ. న.

టేలర్ పరంపర-I (సంకీర్ణవాదము):

ఈ సిద్ధాంతము టేలర్ చే 1715లో ప్రతిపాదింపబడెను. ఇది వాస్తవికచలరాశులకును, సంకీర్ణచలరాశులకును అన్వయించును. ఇచ్చట కోషీ ప్రతిపాదించిన మార్గమున సంకీర్ణ చలరాశులతో ఉపపత్తి ఈయబడును.

బిందువు $z = a$ పరిసర ప్రాంతమున విశ్లేషణ లక్షణము కల ఒక ఫలము $f(z)$ తీసికొనుము. z సమతలములో a కేంద్రముగా, అద్వితీయ బిందువులు లోపల లేనట్లు ఒక వృత్తము C గీయుము. ఇపుడు C లోపలను, పరిధి

పైనను $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణము కల ఫలము. వృత్తము C లోపల $z = a + h$ బిందువును తీసికొనుము. అపుడు

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\,dz \left\{ \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \dots \dots + \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \right\} =$$

$$f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,h^{n+1}\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

వృత్తము C పైన z ఉండునపుడు $\frac{f(z)}{z-a-h}$ యొక్క మాపాంకము అవిచ్ఛిన్నత కలదై ఉండును. కాబట్టి మర్యాదితమై ఉండును. దాని విలువ G కంటె ఎక్కువ ఉండదు. కాబట్టి,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\,h^{n+1}\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \right| \leq \frac{G\, 2\pi r}{2\pi} \left(\frac{|h|}{r} \right)^{n+1}$$

ఇచట C వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము r; చయనీకరణ మార్గము యొక్క పొడవు $2\pi r$; వృత్తము C యొక్క పరిధిపై $|z-a| = r$.

$|h| < r$ అయినందున n అనంతమగునపుడు $\left\{ \frac{|h|}{r} \right\}^{n+1} \longrightarrow 0$. కాబట్టి

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \dots$$

ఇది ఒక అనంత పరంపర.

$a + h = z$ అయిన, $h = z - a$, అపుడు

$$f(z) = f(a) + (z-a) f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^n(a) + \dots \dots$$

z వాస్తవికరాశి అగునపుడు ఈ సిద్ధాంతమును మాధ్యమ మూల్యసిద్ధాంతము యొక్క వ్యాపక రూపముగా సాధింపవచ్చును.

మెక్లారిన్ పరంపర: టేలర్ పరంపరలో $a = 0$ అని ప్రతిక్షేపించినచో మెక్లారిన్ పరంపర లభించును:

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

ఇదియును ఒక అనంతపరంపర. దీనిని ప్రయోగించి క్రింది పరంపరలు సాధింపవచ్చును.

ద్విపద సిద్ధాంతము:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \dots$$

ఘాతాంకీయ పరంపర:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \dots + \frac{x^n}{n!}$$

లఘుగుణక (లాగరిదమ్) పరంపర:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \dots$$

జీవ పరంపర:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \dots$$

కో. జీవ పరంపర:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \dots$$

ఆచార్య

టేలర్ పరంపర - II (వాస్తవిక వాదము):

x యొక్క ఫలము $f(x)$ నిరూపకాక్షముల మూలబిందువు నుండి కాకుండ a అను ఏ బిందువునుండియైన విస్తరింపబడవచ్చును. అనగా $f(x)$ ను ఈ క్రింది రూపముగల పరంపరగా వ్రాయవచ్చును.

(1) $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \dots$

గుణకములు a_i పై సమీకరణము పదే పదే అంతరీకరణము చేసి $x = a$ అను బిందువు వద్ద విలువలు కనుగొనుటచే లెక్కింపబడవచ్చును.

(2) $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots \dots + n a_n (x-a)^{n-1} + \dots \dots$

(3) $f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \dots \dots + n(n-1) a_n (x-a)^{n-2} + \dots \dots$

(4) $f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1)!\,(x-a) + \dots$

వీటినుంచి $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; $n = 0, 1, 2 \dots \dots$

బిందువు a ప్రాంతమందు $f(x)$ యొక్క విస్తరణ పరంపర క్రింది విధమున ఉండును.

$$(5)\ f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \cdots\cdots$$

దీనికే టేలర్ పరంపర అని పేరు. $a = 0$ అయినప్పుడు ఈ పరంపర మెక్లారిన్ పరంపర అగును. దీని రూపము టేలర్ పరంర I లో ఇవ్వబడినది. అది వ్యక్తముగా ప్రస్థాన బిందువు నుండి కాని, దాని సమీపమున నుండి కాని చేయబడిన విస్తరణము.

$x = a + h$ అని తీసికొన్నచో టేలర్ పరంపర యొక్క ఇంకొక రూపము లభించును :

$$(6)\ f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

టేలర్ పరంపర యొక్క వినియోగములు (అతిశయముల లెక్కించుట): భేదకములలో $\Delta y \sim f'(x)\Delta x$ అగును. దీని సుస్పష్టరూపము మీద ఇచ్చిన సమీకరణమునందు $a = x$, $h = \Delta x$ పెట్టినచో లభ్యమగును.

$$(1)\ f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \cdots$$

ఇప్పుడు $f(x)$ ను ఎడమవైపుకు తీసికొనిపోయి, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ అని వ్రాయవచ్చును. సమీకరణము (1) అప్పుడు దిగువ రూపము దాల్చును.

$$(2)\ \Delta y = f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots\cdots \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \cdots\cdots$$

దీనినుండి మొదటి ఆసన్న విలువగ చిన్న అతిశయములకు $dy \sim \Delta y \sim f'(x)\,dx$.

రెండవ ఆసన్న విలువ $dy \sim \Delta y \sim f'(x)\,dx + \frac{f''(x)}{2!}\cdot(\Delta x)^2$.

ఇంకను యథార్థమునకు దగ్గర విలువలు కావలయుననినచో రెండవ సమీకరణమందు ఎక్కువ పదములను తీసికొని సాధించవచ్చును.

ఇంకొక వినియోగము త్రికోణమితీయ, ఘాతాంకీయ ఫలముల పథకములను నిర్మించుట. దృష్టాంతము. నేపియర్ లాగరిదమ్‌లకు ఆధారమైన e యొక్క విలువ గణించుట. e^x యొక్క మెక్లారిన్ విస్తరణము :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

ఇందులో $x = 1$ ప్రవేశ పెట్టిన పై పరంపర క్రింది రూపమును ధరించును :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}$$

$$= 1 + 1 + 0.5 + 0.166667 + 0.041667 + 0.008333 + 0.001389$$

కనుక $e = 2.718254$. ఇది నాలుగు దశమాంశస్థానములకు యథార్థముగ ఉన్నది. మే. వ. న.

టైకో[బాహి (1546 - 1601) : డేనిష్ గణిత, ఖగోళ శాస్త్రవేత్త ; డెన్మార్క్ దేశమునందలి 'క్నడ్‌స్ట్రప్' (ప్రస్తుతము స్వీడన్ దేశమున ఉన్నది) నగరమున, ఒక సంపన్న వంశమున 1546 డిశంబర్ 14 వ తేదీన టైకో[బాహి జన్మించెను.


చిత్రము 179 టైకో[బాహి

రాజకీయవేత్త కావలెనను తలంపుతో, 12 ఏండ్ల ప్రాయమున న్యాయశాస్త్ర అధ్యయనమునకై కోపెన్‌హేగన్ యూనివర్సిటీలో టైకో[బాహి చేరెను. ఇచ్చట విద్యను అభ్యసించు కాలములో ([బాహికి 14 ఏండ్ల వయస్సులో) సూర్యగ్రహణమును ఇతడు చూచెను. ఈ సంఘటన [బాహి మనస్సును న్యాయశాస్త్రము నుండి ఖగోళశాస్త్రము వైపునకు మరల్చినది. గ్రహణకాల నిర్ణయ విధమును తెలుసుకొనవలెనను జిజ్ఞాసతో గణిత, ఖగోళశాస్త్రములను దీక్షతో చదివెను. టాలెమీ భూకేంద్ర సిద్ధాంతముపై ఆధారపడిన ఖగోళశాస్త్ర పట్టికలన్నియు లోప భూయిష్టములని టైకో[బాహి గ్రహించెను; నిర్దుష్టమైన గ్రహచార పట్టికలను తయారు చేయవలెనని సంకల్పించుకొనెను ; కోపెన్‌హేగన్ యూనివర్సిటీలో

పట్టభద్రుడై, జర్మనీ వెళ్లి లైప్‌జిగ్, రాస్టాక్ యూనివర్సిటీ లలో ఉన్నతవిద్యను అభ్యసించెను.

1572 వ సంవత్సరము నవంబరు 11 వ తేదీన కాసియో పియా తారామండలములో అతికాంతిమంతమైన ఒక నక్షత్రమును టైకోబ్రాహి చూచెను. ఈ నక్షత్రమును టైకోబ్రాహితో కూడ ఇతరు లనేకులు గుర్తించిరి. కాని ఆ నక్షత్ర స్థానమును, ప్రకృతిని సమగ్రముగా పరిశీలించినది బ్రాహియే. అందుచేతనే ఆ నక్షత్రమునకు 'టైకోస్టార్' అను పేరు స్థిరపడిపోయినది. ఇట్టి నక్షత్రములు ఖగోళమున ఆకస్మికముగ ప్రత్యక్షమై కొంతకాలము మహోజ్వలమైన దీప్తితో ప్రకాశించి పిమ్మట క్రమముగా తమ దీప్తిని కోల్పోయి ప్రదేశములో మరుగుపడిపోవును. ఇట్టి నక్షత్రములను ఇప్పుడు నవతారలు (నోవాలు) అనుచున్నారు.

ఈ నవతార ఆవిష్కరణ 'నక్షత్రములన్నియు స్థిరమైన గోళమందు పొదుగబడి ఉన్నవి; ఆ గోళము నందున్న నక్షత్రములు నశించుటగాని, లేనివి జనించుటగాని అసంభవము' అని చెప్పు అరిస్టాటిల్ వాదమునకు గొడ్డలి పెట్టు వంటిదైనది. ఈ నవతార అన్వేషణతో టైకోబ్రాహి కీర్తి యూరప్ ఖండమంతట వ్యాపించినది. డెన్మార్క్ రాజు ఫ్రెడరిక్-II బ్రాహి కృషికి సంతోషించి, వేన్ ద్వీపమునందు గొప్ప వేధశాలను (1576) నిర్మింపచేసి, ఇతోధికముగా ధనము నొసంగి ఖగోళ పరిశోధనలు కొనసాగించవలసినదిగా టైకోబ్రాహిని ప్రోత్సహించెను. 'యురానిబోర్గ్' లేదా 'ఖగోళ సౌధము' అనబడు ఈ వేధశాలలో టైకోబ్రాహి 20 సంవత్సరముల కాలము అవిరత పరిశోధనలు చేసెను. సూర్యుడు, చంద్రుడు, ధూమకేతువులు, గ్రహములు - వీటిపై ఇతని ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనాఫలితములు దూరదర్శని నిర్మాణకాల పూర్వమునకు జరిపిన వానిలో ఉన్నతములు, నిశితములు అయినవి. సెక్సంట్; క్వాడ్రెంట్ అను ఖగోళ అవేక్షణా పరికరములను ఇతడు నిర్మించెను.

కోపర్నికస్ సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతమును అంగీకరించక, టాలెమీ భూకేంద్ర సిద్ధాంతములో కూడ కొన్ని లోపములు ఉన్నవని, టైకోబ్రాహి సూచించెను. టైకోబ్రాహి సిద్ధాంతము ప్రకారము విశ్వమునకు కేంద్ర స్థానమున భూమి స్థిరముగ ఉన్నది. చంద్రుడు, సూర్యుడు భూమి చుట్టు భ్రమణము చేయుచుందురు. కాని తక్కిన గ్రహములు సూర్యుని చుట్టు భ్రమణము చేయుచుండును. ఈ సిద్ధాంతమును 1577 లో కనిపించిన ధూమకేతువు పై వ్రాసిన గ్రంథములో ఆతడు ప్రచురించెను.

ఫ్రెడరిక్-II మరణానంతరము రాజస్థానమున పరిస్థితులు తనకు ప్రతికూలములు కాగా టైకోబ్రాహి 1597 లో డెన్మార్క్ వీడి జర్మనీ వెళ్ళెను.

రోమన్ చక్రవర్తి రుడాల్ఫ్-II. టైకోబ్రాహి ప్రతిభను గుర్తించి అతనిని తన ఆస్థాన గణితశాస్త్రవేత్తగా నియమించి, ప్రేగ్ నగరమునకు 36 కి. మీ. దూరములో ఉన్న బెనట్కి దుర్గములో ఇతనికై ఒక వేధశాలను నిర్మించెను. బ్రాహి తన కుటుంబమును, పరికరములను ఈ స్థలమునకు 1600 లో తరలించి తిరిగి తన ఖగోళ అవేక్షణలను కొనసాగించెను; తనకు సహాయకుడుగ కెప్లర్‌ను నియమించుకొనెను. వీరిరువురు కలిసి గ్రహచార పట్టికలను పూర్తి చేయవలెనని దీక్షతో పనిచేయుచుండగా, ఆకస్మికముగ 1601 అక్టోబర్, 13 వ తేదీన టైకోబ్రాహి రోగగ్రస్తుడయ్యెను. తన మరణశయ్యపై నుండి గ్రహచార పట్టికలను పూర్తిచేసి తనకు ఆశ్రయమిచ్చిన రుడాల్ఫ్ రాజ గౌరవార్థము 'రుడాల్ఫైన్ టేబుల్స్' అనే పేరుతో ప్రచురించవలసినదిగా కెప్లర్‌ను బ్రాహి వేడుకొనెను. 1601 అక్టోబర్ 24 వ తేదీన 55 వ ఏట టైకోబ్రాహి మరణించెను. టైకోబ్రాహి చేసిన వేలాది ఖగోళ అవేక్షణా ఫలితములు ఆధారముగా 'రుడాల్ఫైన్ టేబుల్స్'ను కెప్లర్ 1627 లో ప్రచురించెను (చూ. కెప్లర్ - పు. 193, టాలెమీ - పు. 286). పా. ల. నా.

టొపాలజీ (స్థలశాస్త్రము): టొపాలజీ అనగా విక్షేప జ్యామితివలె పొడవులకు, కోణములకు కొలత భావము నుపయోగించకయే ఉపపాదించబడిన గణితమని చెప్పవచ్చును. ఇవియేకాక ఋజురేఖ లేదా సమతలము అను భావమును కూడ ఉపయోగించని జ్యామితి టొపాలజీ అనవచ్చును. ఇచ్చట పరామర్శ్య విషయములు ఒక చిత్రము యొక్క అవిచ్ఛిన్న గుణములు. కోతలు, అంటించడము చేయక అవిచ్ఛిన్న మార్పులకు గురి చేయబడినపుడు ఒక చిత్రము యొక్క ఏ గుణములు స్థిరముగ నుండునో వాటి చర్చయే టొపాలజీ (చూ. సమీక్ష - పు. 49). పై నిర్వచనము అస్పష్టముగా నున్నను, గణితశాస్త్రశాఖలన్నింటిలో టొపాలజీ మిక్కిలి ఫలవంతము, విజయవంతమును.

వక్రరేఖల టొపాలజీ: ఒక వక్రరేఖ యొక్క స్థలశాస్త్ర ధర్మములో ఒకటి అది వివృతముగా నుండుటయో (అనగా దానికి అర్ధ వృత్తమునకు వలె నుండు చివరలుండుట), లేదా చివర బిందువులు లేదా వృత్తమువంటి సంవృత రూపమును కలిగి యుండుటయో అగును. అది (8 వలె) తనను తాను ఖండించుకొనునో, లేదో అనునది ఇంకొక ధర్మము. ఒక తలమందున్న ఒక సంవృత వక్ర

రేఖ యొక్క ఇంకొక ధర్మము, వెలుపల లోపల అనబరగు రెండు మండలముల క్రింద ఆ రేఖ ఆతలమును విభాగించుట, ఈ మండలము లెట్టివన ఆ వక్ర రేఖను దాట కుండ వెలుపలి మండలమున ఉన్న ఒక స్థానము నుండి లోపల మండలమున ఉన్న ఒక స్థానమునకు పోవుటకు వీలు పడదు. ఈ ధర్మము చాల సరళముగా అగుపడుచున్నది. కాని, దాని నుపపాదించుట చాల కష్ట సాధ్యము. ఏలన సాధారణతమ పక్షములో 'వక్ర రేఖ' 'లోపల' 'బయట' అను పదముల ఉచితముగా నిర్వచించుటలో చాల చిక్కులున్నవి. తలము గాని, వక్రము గాని, అవిచ్ఛిన్నముగా వికృతిని చెందినపుడు పై ధర్మము మారదు. కనుకనే అది టొపాలజీ ధర్మ మగుచున్నది.

ఆకాశమండలి సంవృత వక్రముల టొపాలజీకి వివిధ జాతుల ముడుల వర్గీకరణముతో సంబంధమున్నది. దారము కత్తిరించకుండ అట్టముడిని విప్పి ఒకటి వృత్త రూపమును పొందుట అన్ని ముడులకును సాధ్యము కాదు.

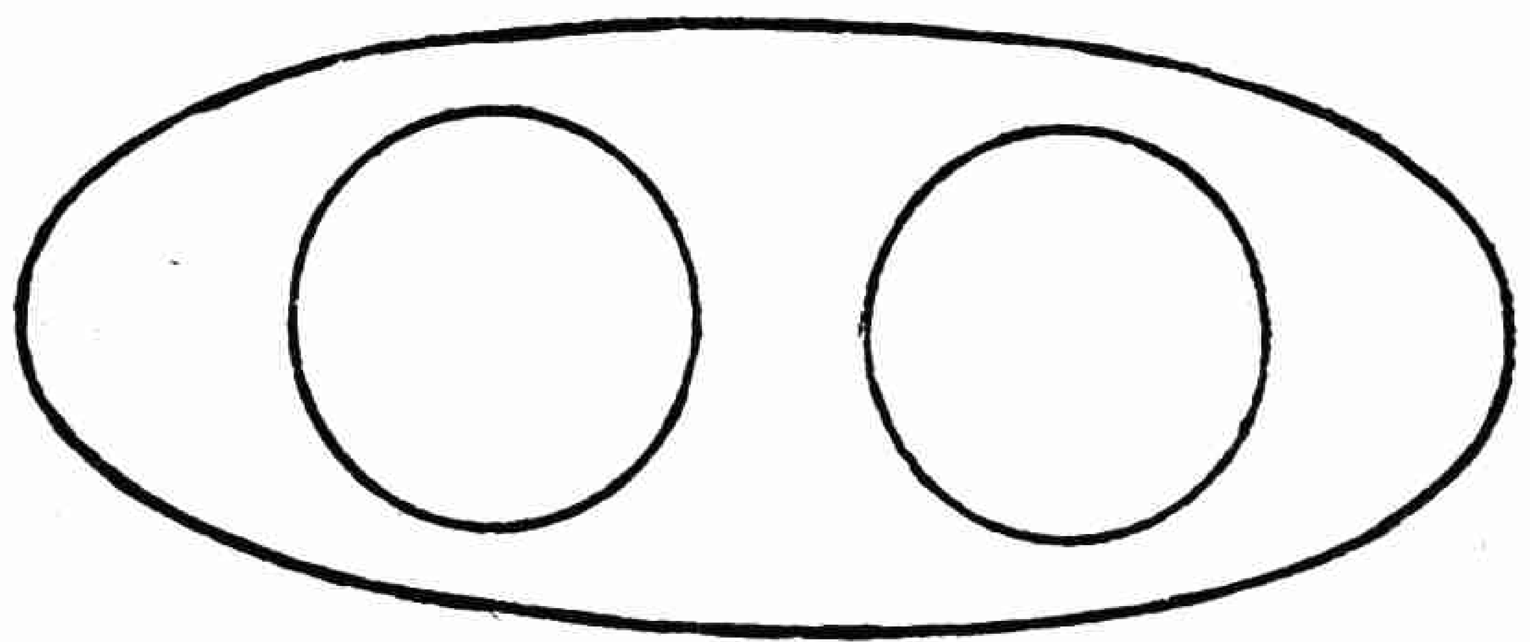
బహు తలకముల గురించిన ఆయ్‌లర్ సిద్ధాంతము: బహుతలక మనగా సమతల బహు కోణముఖముల నేక ములచే సీమితమైన యొక ఘనము. అందు రంధ్రములు లేక పోయినచో, దానిని సరళ బహుతలక మందుము. ఇంకొక విధమున చెప్పవలెననిన అవిచ్ఛిన్నముగ దానిని ఒక గోళరూపముగా మార్చ సాధ్యమైన బహుతలకము 'సరళము'.

ఆ బహుతలకమునకు శిఖరముల సంఖ్య V, అంచుల సంఖ్య E, ముఖముల సంఖ్య F అగుచో ఆయ్‌లర్ కనిపెట్టిన సిద్ధాంతము $V-E+F=2$ అనుటయే. ఒక ఘనమును తీసికొందము. దీనికి $V=8$, $E=12$. $F=6$. ఇచ్చట $V-E+F=8-12+6=2$ అని సరిచూచెదము. ఆ ఘనము రూప మార్పులను చెంది దాని సమతలములు వక్రములై, దాని అంచులు కూడ వక్రములైనపుడు, శిఖరముల, వక్రముఖముల, వక్రములగు అంచులు వీటి సంఖ్యలు మారకనే యుండును. అందువలన పై సమీకరణము ఇంకను సత్యమే యగును. కనుక పైచెప్పిన సిద్ధాంతము ఒక టొపాలజీ ధర్మము. ఇప్పుడు మనము ఆ ఘనపు ఒక ముఖము నుండి ఎదురుగా నున్న ముఖమునకు ఒక చతురస్రాకారము గల కన్నము కొట్టుదము. కన్నము కొట్టిన తరువాత $V=16$, $E=32$ $F=16$ అగును. కనుక ఇప్పటి $V-E+F$ యొక్క మూల్యము $= 16-32+16=0$ కన్నములున్న తలములకు ఆయ్‌లర్ విశాలీకృత సూత్రము $V-E+F=3-h$. ఇచ్చట h అనునది తలము యొక్క సంబద్ధత. (దీని నిర్వచనము ముందు గలదు). ఘనమునకు $h=0$; ఒక కన్నము గల ఘనమునకు $h=3$.

సంవృత వక్రతలముల సంబద్ధత: ఇపుడు గోళతలము, లంగరు తలము వంటి సంవృత (అనగా అంచులు లేని) వక్రతలముల టొపాలజీని పరిశీలించెదము.

గోళతలముపై ఏ సంవృత వక్ర రేఖను గీచినను అది గోళతలమును రెండు మండలములుగా విభాగించును. రెండు మండలములకును ఉమ్మడి సీమ మనము గీచిన వక్ర రేఖయే. ఒక మండలములో నున్న బిందువు నుండి వెడలి మరియొక మండలము నందుండు బిందువును చేరవలె నంటె ఈ సీమను దాటియే తీరవలెను. ఈ సీమ ననుసరించి గోళతలమును కత్తిరించినచో, అది రెండు ప్రత్యేక ముక్కలుగా విభజించబడును.

లంగరు తలముపై నున్న పరిస్థితి వేరు. ఇచ్చట తలము పై రెండు విధములైన సంవృత వక్రములు P, Q ఉన్నవి. వాటిలో నేదైనను గీచినయెడల, లంగరు వక్ర తలము రెండు ప్రత్యేక మండలములుగా విభజించబడదు. ఒక విధమైన సంవృత వక్రము P, గోళ తలములోని భూమధ్య రేఖవంటిది. ఇది లంగరు చుట్టు వెళ్ళు గురువృత్తము.



చిత్రము 180

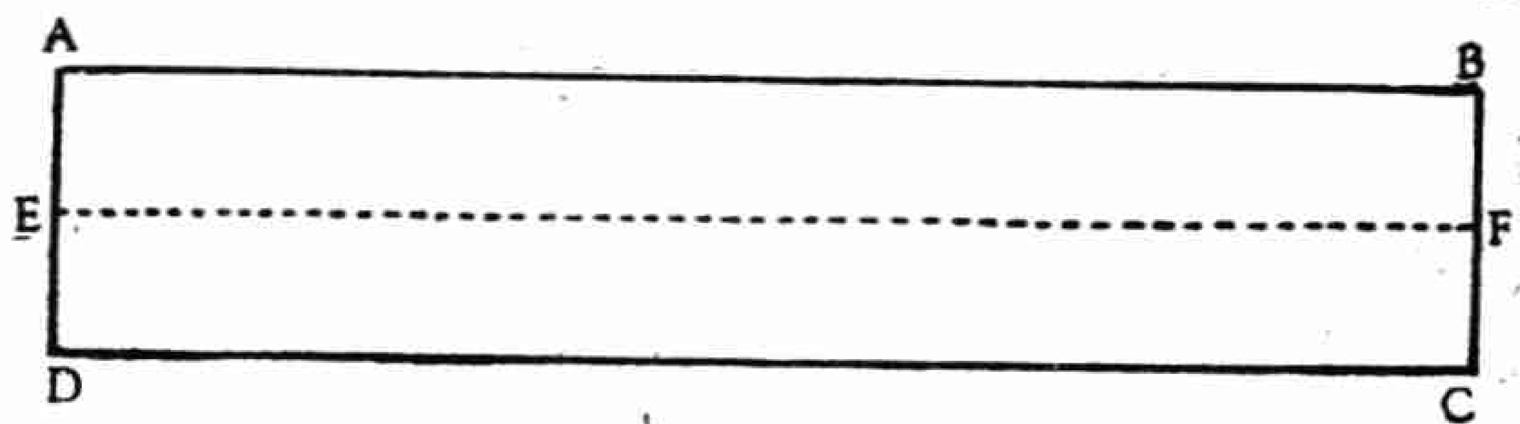
మరియొకటి యగు Q ఒక చిన్న వృత్తము. లంగరు భ్రమ ణాక్షము ద్వారా ఒక సమతలము తీసికొనినచో ఇది లంగరు తలమును రెండు ఎదురెదురుగ నున్న వృత్తములలో ఖడించునని స్పష్టమగును. దీనిలో ఏదో ఒకటిని Q గా తీసికొనవచ్చును. కనుక టొపాలజీ దృష్టిలో లంగరు తలమును, గోళ తలమును వేర్వేరు జాతికి చేరినవి.

గోళ తలము సంబద్ధత $h=1$ అనెదము. ఏలన ఒక సంవృత రేఖ గోళతలమును ప్రత్యేక మండలములుగా విభజించుచున్నది. అటులనే లంగరు తలము యొక్క సంబద్ధత $h=3$ అనెదము. ఏలన ఆతలమును విభజింపకయే 2 సంవృత వక్రములు దానిపై గీయవచ్చును. అయితే మూడవ సంవృత వక్రమును గీచిన యెడల లంగరు తలము విభజింపబడుచున్నది.

ఒక గోళతలము తీసికొని, దానిని చదునుగా అదిమి దాని యందు రెండు రంధ్రములు చేసి ఆ రంధ్రపు అంచులను కుట్టినచో చిత్రము 180 లోని సంవృత తలము లభించును. దీనిని ప్రత్యేక భాగములుగ ఖండించకయే 4 సంవృత రేఖలవెంట కత్తిరించవచ్చును. వాటిలో ఉన్నటువంటి మొదటి రెండు రేఖలు ఒక్కొక కన్నమును మాత్రము పరివేష్టించును. మరి రెండు ఒక్కొక కన్నములో దూరివచ్చునవి. ఈ నాలుగు కత్తిరింపులు కాక, ఏ ఐదవ సంవృతరేఖ ద్వారా చేయు కత్తిరింపు అయినను ఆ వక్రతలమును రెండు భాగములుగ ఖండించును. కనుక రెండు కన్నములు గల ఈ తలము యొక్క సంబద్ధత $h=5$ అనెదము. మరియొక కన్నము చేసినట్లయితే, దాని సంబద్ధత $h=7$ అగును. ఒక్కొక కన్నమునకు, సంబద్ధత సంఖ్య 2 ను చేర్చుము. గోళతలము లేదా బహుతలకమందును ఇట్లు కన్నములు చేయవచ్చును. సంబద్ధత సంఖ్య పైన వివరించినట్లు ఒక్కొక కన్నమునకు 2 చే హెచ్చగును. ద్వారములేని బహుతలకమునకు $h=1$. ఇపుడు h సహాయముతో ఆయిలర్ సిద్ధాంతమును క్రింది రూపముగా విశాలీకరించవచ్చును. ఒక బహుతలకములో n కన్నములున్నచో దాని సంబద్ధత $h = 2n+1$. ఆ బహుతలకమునకు $V-E+F=3-h = 2-2n$ అగును.

h ఒకే విలువగల ద్విపార్శ్వతలము లన్నియు టోపాలజీ దృష్టిలో వ్యత్యాసము లేనివి. ఏలన అవిచ్ఛిన్న మార్పుల నుపయోగించి ఒకటిని మరియొకటిగా మార్చవచ్చును. అయితే h విలువలు వేర్వేరుగ నున్నచో ఇట్లు మార్చుట సాధ్యము కాదు. వానిని వేర్వేరు జాతియని చెప్పవలెను.

ఏకపార్శ్వతలములు : అర్ధగోళ, లేదా స్తూపాకార తలములలో లోపల, వెలుపల అను రెండు పార్శ్వములున్నవి. ఈ రెండింటిలో ఒక పార్శ్వమునకు తెల్ల రంగు, వేరొక దానికి నల్ల రంగు పూయవచ్చును. అందుచేత ఈ తలములను ద్వి పార్శ్వ తలములందుము. అట్టి తలములలో ఒక దాని నుండి ఇంకొక దానికి పోవుట నిర్విరామముగ తలమునకు కన్నము పొడవ కుండ లేదా అంచును దాటకుండ సాధ్యము కాదు. ఒక పార్శ్వము నుండి ఇంకొక దానికి కన్నము పొడవకుండ లేదా అంచును దాటకుండ తలముమీదనే పోవుటకు వీలైన ఏక పార్శ్వ తలములున్నవా యని అడగ వచ్చును. దీనికి సమాధానము అట్టివి ఉన్నవని. వీటికి సరళతమ దృష్టాంతము మోబియస్ పట్టీ; క్రింది విధానమువలన దీనిని రచించ వచ్చును. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారముగు పొడుగాటి కాగితపు పీలిక A, B, C, D ని తీసికొని, AD ను అటులనే ఉంచి, BD అంచుకు 180 డిగ్రీల మెలితిప్పి అనగా BC అంచు CB అగునట్లు దాని రెండు చిన్న అంచులు ఏకీభవించునట్లు



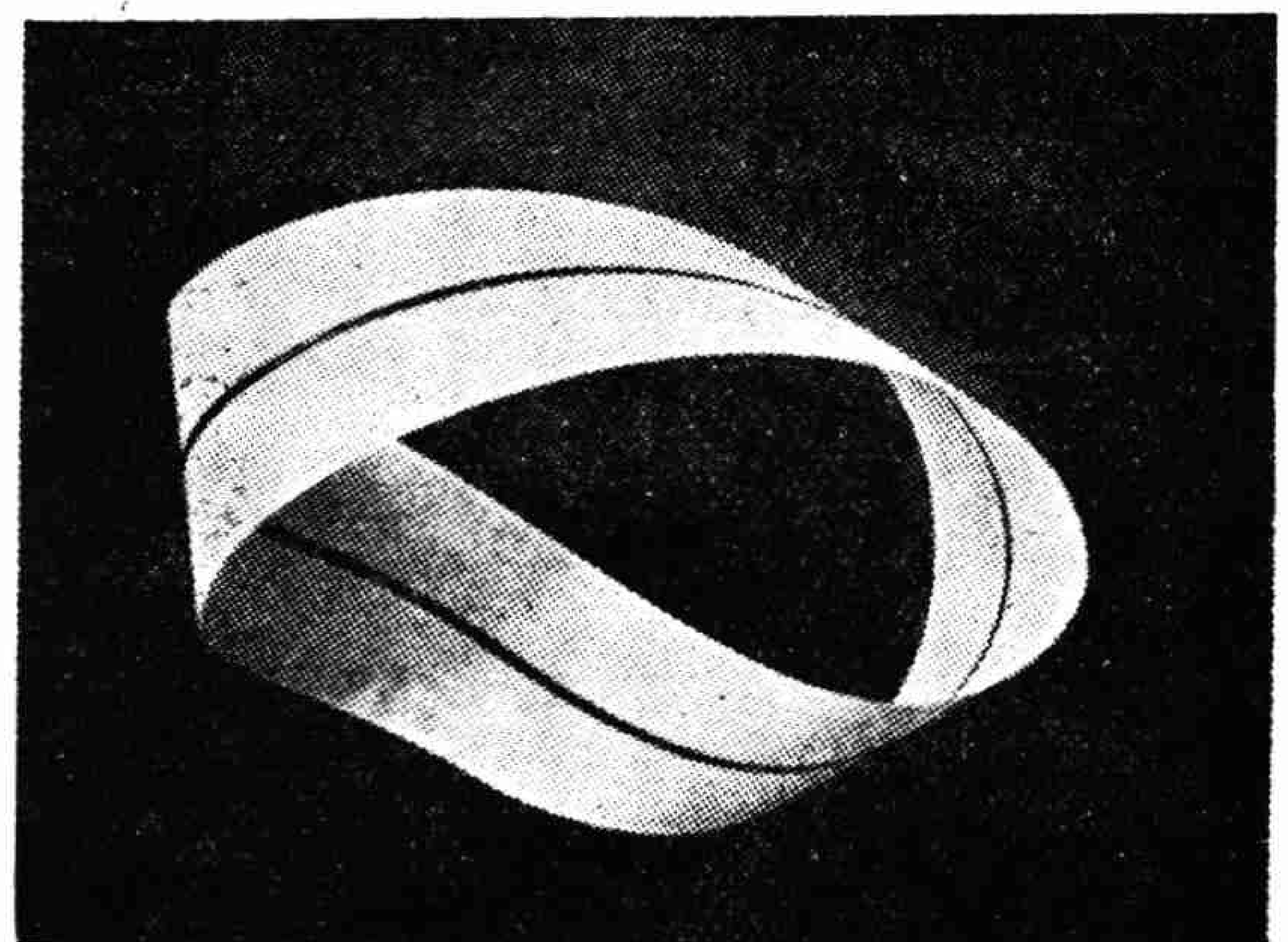
చిత్రము 181

అంటించినచో మోబియస్ పట్టీ లభ్యమగును. అంటించిన తరువాత A బిందువు C మీద ఏకీభవించును. D బిందువు B మీద ఏకీభవించును (చూ. చిత్రము 181).

ఇట్లు రచించ బడిన పట్టీకి క్రింద ఇవ్వబడిన విచిత్రమైన ధర్మము లుండును :

(i) కాగితపు పట్టీని అంచులు దాటకుండ గాని, లేదా కన్నము పెట్ట కుండ గాని ఒక ప్రక్కనుండి ఇంకొక ప్రక్కకు నిర్విరామముగ పోనీయవచ్చును. ఒక ప్రక్కకు రంగు పూత మొదలిడితిమేని, రెండవ ప్రక్కకుకూడ క్రమముగ నల్లపూత సంక్రమించును.

(ii) స్తూపమునకు వృత్తరూపమున రెండు అంచు లుండును. అయితే ఈ మోబియస్ పట్టీలో, మెలి

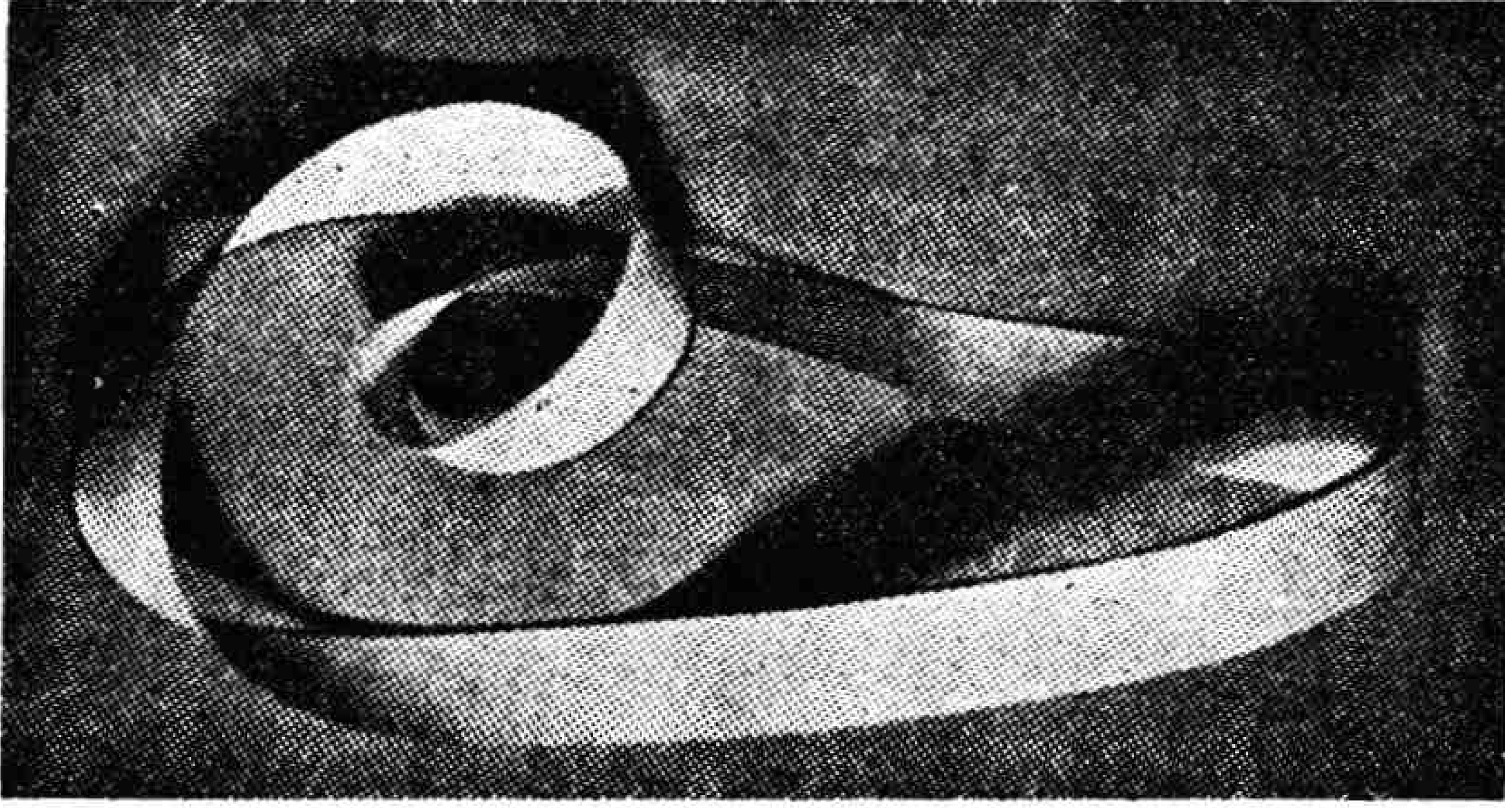


చిత్రము 182

పొందిన వక్రరేఖ యగు ఒక్కటే యంచున్నది (చూ. చిత్రము 182).

(iii) ఈ పట్టీని నల్లగీత వెంబడి కత్తిరించినచో, అది రెండు ముక్కలుగా విడిపోదు. అది ఒక ముక్కగానే మిగిలి యుండును. కాని దాని యందొక 360° మెలి యుండును (చూ. చిత్రము 183 - పు. 294).

180° సగము మెలికి బదులు పూర్తిగ 360° కోణము రచించునట్లు రెండు మెలుల ABCD అను ఆ పట్టీకి ఇచ్చి



చిత్రము 183

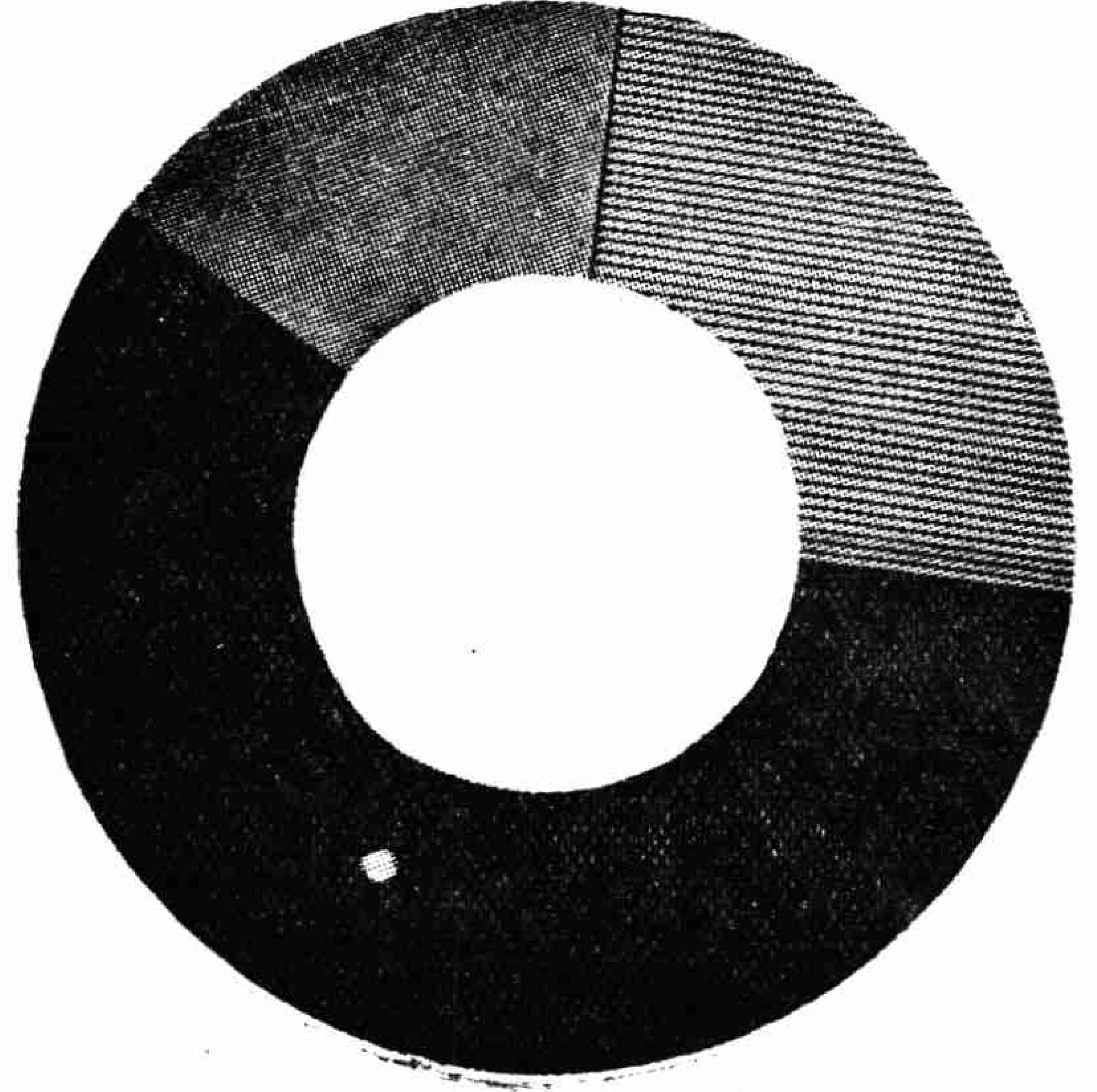
మరల అంటించినచో A మీద B, C మీద D ఏకీభవించును. ఇప్పుడు రెండు ప్రక్కలు గల తలము లభ్యమగును. మధ్య రేఖ EF వెంట ఈ పట్టీని కత్తిరించిన ఎడల అది రెండు వేరు వేరు, ఒక దానితో నొకటి పెనవేసికొనిన మెలులుగల పట్టీలుగా విడివడును. ABCD మరల నొక సగము మెలి అనగా మరియొక 180° త్రిప్పి (మొత్తము 540°) అంటించినచో మరల నొకే పార్శ్వము గల తలము లభ్యమగును. ఇట్లే ఏకపార్శ్వ, ద్విపార్శ్వ తలములు ఏకాంతరముగ లభించుచుండును.

ఒక తలము ఏకపార్శ్వకమా ? ద్విపార్శ్వకమా ? అను భూతార్థమును, దాని సంబద్ధతసంఖ్యను టోపాలజీ రీతిగా ఆ వక్రతలమును సంపూర్ణముగా నిర్వచించును. అనగా ఈ రెండు టోపాలజీ గుణములు సమానముగ గల రెండు తలములను అవిచ్ఛిన్నముగా ఒకటి నింకొకటిగా మార్చవచ్చును.

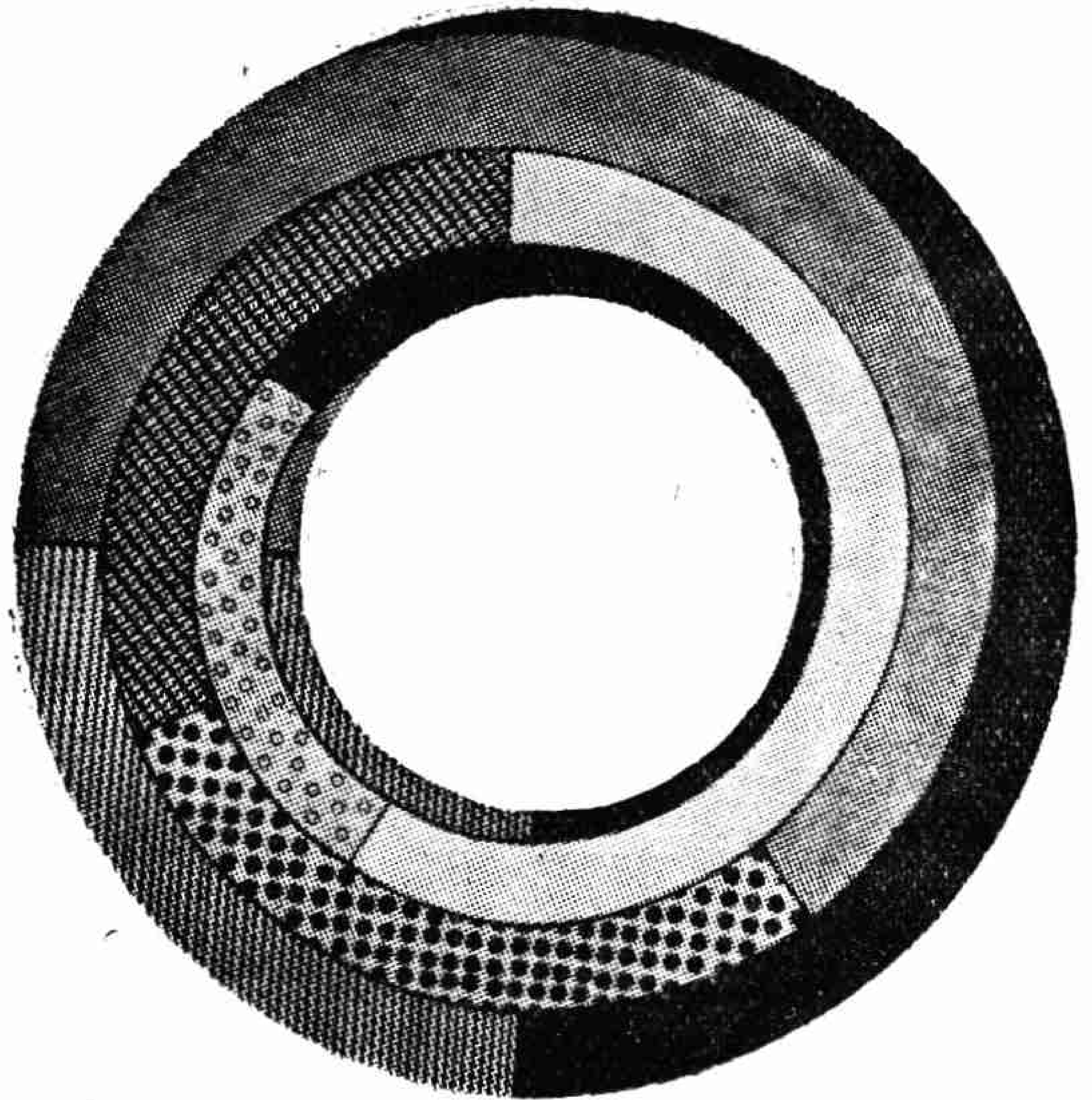
చతుర్వర్ణ సమస్య : అనేక దేశముల చూపు చిత్ర వర్ణపటములలో ఒక ఉమ్మడి సరిహద్దు గల వేరు వేరు దేశములకు వేరు వేరు రంగుల నిచ్చుట పరిపాటి. రెండు దేశములు, ఒక బిందువు లేక ప్రత్యేక బిందువుల వద్ద, ఒకదాని నొకటి స్పృశించు నేని, వాటిని వేరు వేరు రంగులతో చిత్రించుట అనవసరము. ఒక దేశమంటే ఒక సంగత సంపూర్ణమనియు, పాకిస్తాన్ వలె రెండు, లేదా పెక్కు ముక్కలుగా నుండదనియు తలంచబడును. ఈ పరిస్థితులలో మనకు తారసిల్లు ప్రశ్న ఇది. అన్ని దేశసమూహపటముల వర్ణచిత్రణ మొనర్చుటకు వేరువేరు రంగుల కనిష్ఠ సంఖ్య యెద్ది ? అన్ని పటముల నాలుగు రంగులు చాలునని అనుభవము వలన తెలియుచున్నది. కాని ఈ విషయమునకు నేటికిని ఉపపత్తి కల్పింపబడలేదు.

చిత్ర పటతలము సమతలము గాని గోళ తలము గానీ కాక, అది లంగరు వలయతల మనుకొందము. ఇచ్చట అనుభవము ఎనిమిది రంగులే కావలెనని చెప్పుచున్నది. దీనికి గణిత రీతిగను 8 చాలునను ఉపపత్తి ఉన్నది.

చిత్రములు 184, 185 లలో ఎనిమిది మండలముల చిత్రపట మొకటి, ఒక లంగరు వలయముపై వేయబడి



చిత్రము 184

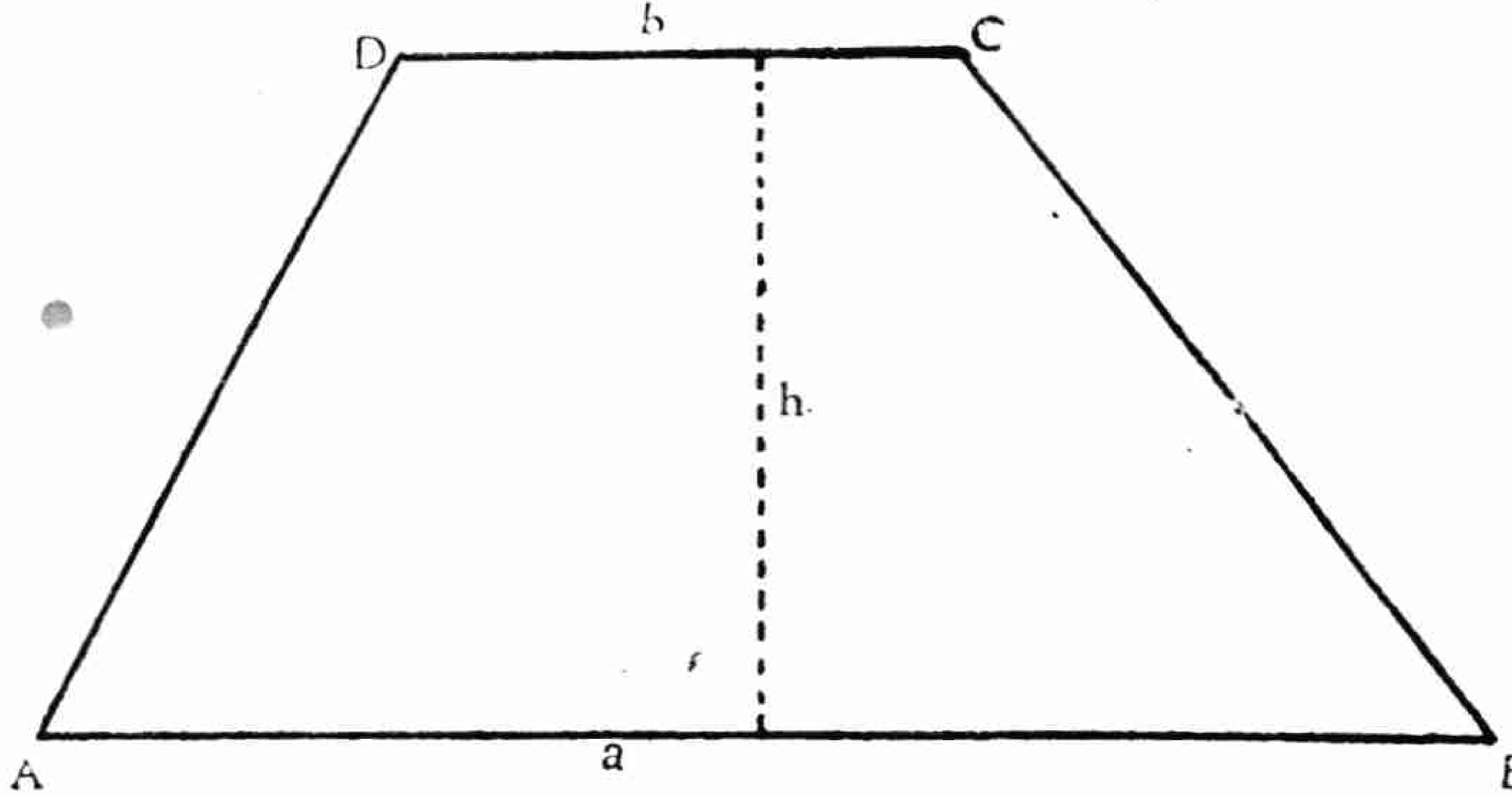


చిత్రము 185

యున్నది. ఇందు ప్రతి మండలము ప్రతి ఇతర మండలమును స్పృశించుచున్నది. అందుచేత వీటన్నిటికి వేరు వేరు రంగులు పూయవలయును. అ. న.

ట్రెపీజియమ్ : ఏదో ఒక జత ఎదుటి భుజములు మాత్రము సమానాంతరముగ ఉండు చతుర్భుజమును ట్రెపీజియమ్ అని అందురు.

ట్రెపీజియమ్ యొక్క సమానాంతర భుజములను పీఠములు అని, వాటి సన్నిహిత కోణములను పీఠకోణములు అని వ్యవహరింతురు. సమానాంతరములు కాని భుజములకు కాళ్ళు అని పేరు. ట్రెపీజియమ్ యొక్క కాళ్ళు సమానములైన, దానిని సమద్విభుజ ట్రెపీజియమ్ అని అందురు. సమద్విభుజ ట్రెపీజియమ్‌లో పీఠకోణములు, వికర్ణములు సమానములు.



చిత్రము 186 ట్రెపీజియమ్

ట్రెపీజియమ్ యొక్క సమానాంతర భుజముల పొడవులు a, b లు, వాటి మధ్య దూరము h అయినచో, దాని వైశాల్యము : $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ అగును. పా. ల. నా.

డయోఫాంటస్ సమీకరణములు : డయోఫాంటస్ 3వ శతాబ్దపు గ్రీక్ గణితజ్ఞుడు. అతడు తన గ్రంథములో ప్రథమ తరగతి అనిశ్చిత సమీకరణములను అనేకములను పేర్కొనినాడు. ఇవి బీజగణిత రీతిగా అనిశ్చితములు అయినను, సాధనములు పూర్ణాంకములుగా ఉండవలెనను నిబంధన వలన నిశ్చితములు అగుచున్నవి.

మొదటి తరగతి సమీకరణములు : ప్రాచీన భారతీయులు, పాశ్చాత్యులు వేరువేరుగా ఈ విధానమును వృద్ధిపరచిరి.

మొదటి తరగతి అనిశ్చిత సమీకరణమును $ax + by = c$ అను రూపములో వ్రాయవచ్చును. ఇచట a, b, లు పూర్ణాంకములు. ఇది ఆర్యభట-I, బ్రహ్మగుప్త, భాస్కరాచార్య-II లచే సాధింపబడినది. భాస్కరాచార్య-II దీని సాధనవిధానమును విపులముగ వివరించినాడు.

పాశ్చాత్య గణితజ్ఞులు అనేకులు ఇట్టి సమస్యలను సాధించుటకు విధానములు ఏర్పరిచిరి. వారిలో లాగ్రాన్జ్, ఆయ్‌లర్, కోషి మొదలగువారు ముఖ్యులు. సమీకరణములోని గుణకములు a, b, c లు పరస్పర ప్రధానములు అయినచో - అనగా వాటికి ఉమ్మడి భాజకములు లేనిచో - ఇట్టి సమీకరణములకు సాధనములు ఉన్నవని ఆయ్‌లర్ చూపెను.

$$ax - by = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ఈ సమీకరణమును సాధించుటకు a, b, c లు పరస్పర ప్రధానములై ఉండవలెను. లేనిచో తగిన విభాజకముల చే వాటిని భాగించి, పరస్పర ప్రధానములు అగునట్లు చేయవలెను. తరువాత a/b ని భిన్నశ్రుంఖలముగా మార్చవలెను. అంతిమ ఉపసరణ a/b గ ఉండును. దానికి పూర్వపు (ఉపాంత్య) ఉపసరణ p/q అనుకొందము. అపుడు

$$aq - bp = \pm 1$$

కాబట్టి $a(cq) - b(cp) = \pm c$, లేదా

$$a(\pm cq) - b(\pm cp) = c \quad \ldots \quad (2)$$

అందుచేత $x = \pm cq$, $y = \pm cp$ అని అనుకొందము. లేదా సాధారణముగా (1) నుండి (2) తీసివేసినచో

$$a\{x - (cq)\} = b\{y - (cp)\}$$

$$\therefore \frac{x - cq}{b} = \frac{y - cp}{a} = t$$

అనగా $x - cq = bt$; $y - cp = at$

$$\therefore x = bt + cq ; \; y = at + cp$$

$ax + by = c$ అను సమీకరణమును తీసికొనినచో లభించు విలువలు $x = cq - bt$, $y = at + cp$.

ప్రాచీన భారతీయుల విధానములో కొంత వ్యత్యాసము కలదు. వారు 'కుట్టకముల' ను వాడి ఈ సమీకరణములను సాధించిరి (చూ. కుట్టకములు - పు. 183).

ఉదా : $221x + 65 = 195y$

విభాజకము '13' చే భాగింపగా $17x + 5 = 15y$.

$$\frac{17x + 5}{15} = y$$

ఇందు 17 గుణకము, 15 భాజకము, 5 క్షేపకము.

గుణకమును భాజకముతో భాగించి, తరువాత శేష ముతో మరల భాజకమును భాగింపుము. శేషము 1 వచ్చు వరకు ఈ ప్రక్రియను కొనసాగింపుము.

$$\begin{array}{l} 15)\ 17\ (1 \\ \quad 15 \\ \hline \quad\ 2)\ 15\ (7 \\ \qquad 14 \\ \hline \qquad\ 1 \end{array}$$

ఇందు 1, 7 భాగఫలములు. వాటిని క్రింది విధమున వల్లీ రూపమున వ్రాయుము.

1	
7	40
5	30
0	

వల్లియందు మొదట భాగఫలము 1, తరువాత భాగ ఫలము 7, తరువాత శేషకము 5, కడపట '0' ను వ్రాయుము. కుడివైపు సంఖ్యలు ఏర్పడు మార్గము

$$5 \times 7 + 0 = 35;\ 35 + 5 + 0 = 40$$

40 ని 17 చే భాగింపగావచ్చు కనిష్ఠ శేషమును y యొక్క విలువగా తీసుకొనుము.

$$40 - (2 \times 17) = 6 \quad \text{కాబట్టి } y = 6$$

$$35 - (2 \times 15) = 5 \quad \text{కాబట్టి } x = 5$$

ఇందు బహువర్ణ (అనిశ్చిత) సమీకరణములు కూడ కలవు.

ఉదా: ఒక పురుషునికి 3 రూ॥లు, ఒక స్త్రీకి 2 రూ॥లు, ఒక బాలునికి 1 రూపాయి వంతున 55 రూపాయలు పంచినచో, వారు ప్రత్యేకముగా ఎంతమంది? ఇచ్చట పూర్ణాంకములలో సాధించవలసిన సమీకరణము

$$3x + 2y + z = 55$$

ఇపుడు x, y, z లను కనుగొనవలెను.

అధిక తరగతి సమీకరణములు : ఇట్టి సమీకరణములలో అతి సులభమయినది $Ax^2 + By^2 = C$. ఇందు A, B, C లు పూర్ణాంకములు; x, y లు కనిపెట్టవలసిన పూర్ణాంకములు. డయోఫాంటస్ మొట్టమొదట ఈ సమీకరణ సాధన విధానములను పరిశోధించెను.

ఇపుడు $Ax^2 - By^2 = \pm C$ అని తీసికొందము. ఇందు A, B, C లు ధన పూర్ణాంకములు; B/A పూర్ణ వర్గము కాదు అని అనుకొందము. $\sqrt{(B/A)}$ యొక్క భిన్న శృంఖలమును తీసికొనుము. ఇది ఆవృత్తి కలది. ఈ భిన్న శృంఖలము యొక్క ఉపసరణలను తీసికొనుము. హారములు $\pm R_n$ లో C ఉన్నచో $Ax^2 - By^2 = \pm C$ కి అనంత మూల్యములు లభించును.

ఇందు ఒక విశేష రూపము $x^2 - By^2 = 1$. దీనికి పెల్లియన్ సమీకరణము అని పేరు. ఇది భాస్కరాచార్య-II చే మొట్టమొదట విమర్శింపబడెను. మరియొక ముఖ్యమగు సమీకరణము $x^n + y^n = z^n$. ఇందు $n > 2$ అయినచో x, y, z లకు పూర్ణాంక విలువలు ఉండవని ఫర్మా ఒక పుస్తకము పుట అంచులో వ్రాసెను. దీనికి ఫర్మా అంతిమ సిద్ధాంతము అని పేరు. ఈ సిద్ధాంతమునకు అతడు ఆశ్చర్యకరమైన ఒక ఉపపత్తిని తాను కనిపెట్టెనని వ్రాసెను. ఇది కాలక్రమమున ఒక ప్రసిద్ధ అంకగణితప్రశ్న అయినది. గొప్ప గొప్ప గణితజ్ఞులు 300 సంవత్సరములుగా ప్రయత్నించినను దీనికి తృప్తికరమైన ఉపపత్తి దొరకలేదు. ఫర్మా తానే $x^4 + y^4 = z^4$ పూర్ణాంకములలో సాధించుట అసాధ్యమయినదని నిరూపించెను. n ఏ ప్రధాన సంఖ్య అయినను ఈ సూత్రము నిజమని నిరూపించిన చాలును. అయితే అట్టి ఉపపత్తి ఇంకను దొరకలేదు $n < 14{,}000$ అగు ప్రధాన సంఖ్యయై n పూర్ణాంకము x, y, z పూర్ణాంకములను విభజింపకున్న ఎడల ఈ సూత్రము నిజము అని రుజువైనది. అయితే అన్ని విలువలకును నిరూపణము లేదు. ఇంతవరకు ఈ సూత్రమునకు విరుద్ధమగు ఉదాహరణము ఏదియు దొరకలేదు. ఈ సూత్ర పరిశీలనలో బీజీయ సంఖ్యలు (ఆల్జీబ్రిక్ నంబర్స్) అను ఒక క్రొత్త గణితశాఖ ప్రావిర్భవించినది.

శ్వేతారణ్యమ్

డీలియన్ ప్రశ్న : చూ. గణితసమీక్ష, పు. 36.

డెజార్గ్ సిద్ధాంతము : ABC, A′B′C′ అను రెండు త్రిభుజములను తీసికొందము. ఇవి ఒకే తలములో ఉండ వచ్చును, లేదా వేర్వేరు తలములలో ఉండవచ్చును. O ఒక బిందువు. OAA′ ఒక ఋజురేఖపైనను, అటులనే OBB′ ఒక ఋజురేఖపైనను, OCC′ ఒక ఋజురేఖపైనను ఉన్నవనుకొందము. త్రిభుజములు వేర్వేరు తలములలో ఉన్నను, ఒకే తలములో ఉన్నను BC, B′C′ ఋజురేఖలు ఖండించుకొనును. ఖండన బిందువును L అందుము. అటులనే CA, C′A′ ఖండనబిందువు ఒకటి ఉన్నది. దానిని M అందుము. అటులనే AB, A′B′ ల ఖండనబిందువు N అందుము. ఇటులు ఉన్నచో డెజార్గ్ సిద్ధాంతము L, M, N ఒక ఋజురేఖలో ఉండునని చెప్పుచున్నది. విలోమముగా L, M, N ఒక ఋజురేఖపై ఉన్నచో, AA′, BB′, CC′ ఒక బిందువులో ఖండించుకొనును (చూ. పు. 39 చిత్రము 8).

డెజార్గ్ (1593-1662) వివరించిన ఈ సిద్ధాంతము విశేష జ్యామితికి చెందినది, ఏలన ఇచ్చట నిడుపుల కొలతలు,

కోణముల కొలతలు - వీటికి స్థానములేదు. ఋజురేఖలు, బిందువులు, బిందువు ఋజురేఖపై ఉండుట - ఇటువంటి భావములే ఉన్నవి. ముగ్గురు విక్షేపజ్యామితి నిర్మాతలలో డెజార్గ్ ఒకడు. ఇతరులు పాస్కల్ (1623 - 1662), పాంసిలే (1788 - 1867) అని చెప్పవచ్చును.

డెజార్గ్ సిద్ధాంతము విక్షేప జ్యామితికి చెందినది కనుక, దీని ఉపపత్తి విక్షేపజ్యామితి ఆధారతత్వముల నుండి మాత్రము (అనగా ఏ రెండు ఋజురేఖలైనను ఒక బిందువునందు ఖండించుకొనును, రెండు తలముల ఖండన బిందువులన్నియు ఒక ఋజురేఖపై ఉండును, ఇటువంటివి) పొందవచ్చునని ఎదురు చూతుము కదా? మనము ఎదురు చూచినట్లు త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో (అనగా త్రిభుజము వేరు తలములలో ఉన్నపుడు) విక్షేపజ్యామితి ఆధారతత్వములనుండి ఒక ఉపపత్తిని సంపాదించవచ్చును.

అయితే ఒక తలములోనే రెండు త్రిభుజములును ఉన్నచో, ఈ సిద్ధాంతము తలములోని ఆధారతత్వముల నుండి పొందజాలము అనుట ఒక విచిత్రమైన విషయము. కాని తలములోని విక్షేప ఆధారతత్వములతో, 'ఈ తలము త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక అంశము' అని ఒప్పుకొనిన నట్లైతే, ఒక ఉపపత్తిని కల్పించవచ్చును. ఇట్లు ఒప్పుకొనక పోతే డెజార్గ్ సిద్ధాంతమునకు ఉపపత్తి లేదు! కనుక ఒక తలముయొక్క విక్షేపజ్యామితిని నిర్మించునపుడు (i) ఈ తలము త్రిపరిమాణిక చిపిట ఆకాశములో ఒక అంశము అనియో, లేదా (ii) తలములో డెజార్గ్ సిద్ధాంతము నిజమనియో ఒక ఆధారతత్వము తీసికొనవలెను. ఇది ఒక విచిత్రమైన పరిస్థితి కదా? ఆ. న.

డేకార్ట్ (1596-1650): రెనె డేకార్ట్ ఫ్రెంచి గణితజ్ఞుడు, దార్శనికుడు. అస్వస్థుడై ఉన్న కారణమున ప్రతి దినము చాల ప్రొద్దెక్కు వరకు శయ్యపై పండుకొని, అతడు గణిత ఆలోచనలను చేయుటకు అలవాటు పడెను. తన ఆరోగ్యమును కాపాడుకొనుటకు, గణితశాస్త్ర అనుశీలన కొనసాగించుటకు అది ఒక్కటే మార్గము అని అతడు తరుచు అనుచుండెడివాడు.



చిత్రము 187 డేకార్ట్

గణితమునకు అతనిప్రధాన నిర్వాహములు : 1. నిరూపక జ్యామితి; 2. ఆవర్త సిద్ధాంతము. ఒక వక్రరేఖకు $f(x, y) = 0$ అను సమీకరణమును కల్పించుట, ఈ సమీకరణమునుండి ఆ వక్రరేఖ యొక్క ధర్మములు అన్నియు కనిపెట్టుట - ఇవి రెండు డేకార్ట్ సాధించిన ఘన విషయములు. ఆతనికి ముందు, పరస్పరము సంబంధము లేక ఉండిన బీజగణితమునకు, జ్యామితికి మధ్య నిరూపక జ్యామితి అను సేతువును డేకార్ట్ నిర్మించెను. ఇంతేకాక, అవే నిర్దేశక అక్షములను ఉపయోగించి, $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ అను రెండు సమీకరణములను సాధించుట వలన పై రెండు వక్రరేఖల ఛేదనస్థానములను నిర్ణయింపగలిగెను. ఇట్టి 3 సమీకరణములచే అంతరాళమందు ఒక బిందువును గాని, పెక్కు బిందువుల గాని నిర్ణయించవచ్చునని అతడు చూపించెను. అయితే డేకార్ట్ తన పరిశోధనములను ఒక తలమున ఉండు వక్రములకు మాత్రమే పరిమితము చేసికొనెను.

పూర్వగణితజ్ఞులకు సాధింప శక్యముగాని పాపుస్ సమస్యను డేకార్ట్ తన జ్యామితి గ్రంథములో ఇట్లు సాధించెను : దత్త m ఋజురేఖలనుండి దాని దూరముల గుణకార లబ్ధఫలము, అట్లే దత్త n ఇతర ఋజురేఖల నుండి దాని దూరముల గుణకార లబ్ధ ఫలమునకు అనుపాతములో ఉండునట్లు ఒక బిందువు చలించుచుండినచో దాని పథమును నిర్ణయించవలెను. యూక్లిడ్, అపలోనియస్ - ఇద్దరును దీని విశేష పక్షములను సాధించిరి, $m = n = 1$ అయినచో ఈ బిందుపథము ఒక ఋజురేఖ. m, n లు 1, 2 లేదా, 2, 1 అయినచో అది ఒక పరావ. $m = 2$, $n = 2$ అగునపుడు బిందుపథము ఒక శాంకవముగా ఉండవలెనని పాపుస్ అభిప్రాయపడెను, కాని ఉపపత్తిని కల్పించలేదు. అది 2 వ తరగతి వక్రము అనియు, అందువలన అది ఒక శాంకవము అనియు డేకార్ట్ చూపగలిగెను. వ్యాపక పక్షములో బిందుపథము m, n - వీటిలో ఏది పెద్ద సంఖ్యయో, ఆ తరగతి వక్రముగ ఉండును.

డేకార్ట్ ఆవర్త సిద్ధాంతము : ఒక బృహత్తమ భౌతిక ద్రవ్య ఆవర్తమందు కేంద్ర స్థానములో సూర్యుడు కలడు. నీటి సుడిలో గడ్డిపోచలు తిరుగునట్లు గ్రహములు ఈ భౌతిక ద్రవ్య ఆవర్తమందు సూర్యుని చుట్టు తిరుగుచున్నవి. ప్రతి గ్రహము చుట్టు మరల ఒక 2 వ ఆవృత్తి కలదు. ఇందులో ఆ గ్రహము యొక్క ఉపగ్రహములు భ్రమణము చేయుచున్నవి. ఈ గౌణ ఆవర్తము ప్రధాన ఆవర్తయానకమందు సాంద్రతావికారములను తెచ్చిపెట్టుటచే గ్రహములు దీర్ఘవృత్తపథములను అనుసరించును.

ఈ వాదమును న్యూటన్ సవివరముగ విమర్శించి, ఇది కెప్లర్ నియమములతో అనువదించలేదని నిరూపించెను.

డేకార్ట్ ఆవర్తసిద్ధాంతము మరుగున పడిపోయెను; అతని నిరూపక జ్యామితి మాత్రము సజీవియై అపార పురోగతిని అందుకొనెను. అ. స.

తలములో అలంకార కూర్పులు : గణితమునకు, అలంకారమునకు సన్నిహిత సంబంధము కలదు. ఏలన, మనము ఒక చక్కని చీర అంచును కాని, వాల్ పేపర్ ను కాని, అలంకరించిన భూతలమును కాని పరీక్షించినచో దానిలో కొన్ని నమూనాల ఆవర్తనమును గుర్తింతుము. ఈ ఆవర్తనము మనోరంజకమై ఉండుటకు ఒకే రూపము, ఒకే పరిమాణము గల ఒక చిత్రము సమదూరములో ఆవర్తనము కలిగి ఉండవలెను. ఒక చిత్రమునకు పెక్కు సౌష్ఠవములు ఉన్నచో, అది చూపునకు అందముగ ఉండును. భ్రమణ సౌష్ఠవము అలంకారములలో ఒక ముఖ్య అంశము. ఈ భావములు, అనగా సర్వ సమత, సమదూర ఆవర్తనము, సౌష్ఠవము జ్యామితికి, కూర్పువాదమునకు సంబంధించిన విషయములు కదా!

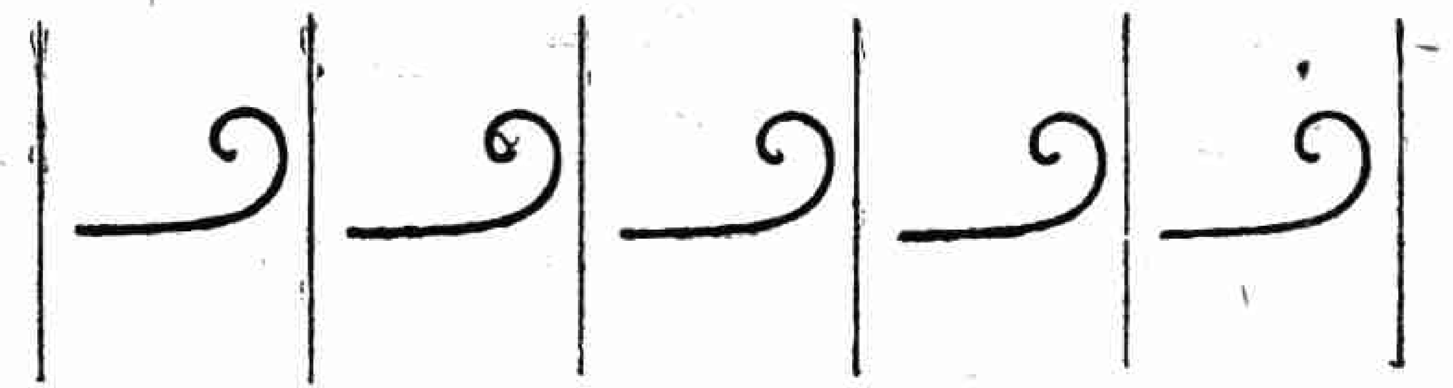
ఏదో ఒక తలములోని చిత్రమును రూపము, పరిమాణము మార్చక, అదే తలములో, వేరు స్థలమున ఉంచవలెనన్న మూడు పరికర్మములను ఉపయోగింపవచ్చును. మొదటిది జరుపుట. ఇది ఏ దిక్కులోనైనను ఎంత దూరమైనను కావచ్చును.

రెండవది తలములో ఏదో ఒక కేంద్ర బిందువును స్థాపించి, దానిచుట్టు తలమును, దానిలో నుండు చిత్రమును ఒక దృఢ వస్తువువలె భ్రమణము జేయుట. ఇది ఏ కోణ పరిమాణ భ్రమణమైనను కావచ్చును.

మూడవది ఆ చిత్రముయొక్క ఏదో ఒక ఋజు రేఖను అద్దముగా తీసికొని, ప్రతిబింబము తీసికొనుట. రూప పరిమాణములను మార్చని తల పరికర్మములు ఇవి మూడే. ఏదో ఒక నమూనాను తీసికొని ఈ మూడు పరికర్మములను ఉపయోగించిననే తల అలంకారములు అన్నియు లభించును. ఈ పరికర్మములలో మొదటి రెండును యుక్తమైనవి అనియు, మూడవది అగు ప్రతిబింబ పరికర్మము యుక్తము కానిది అనియు చెప్పుదుము. ఏలన జరుపుట వలనగాని, భ్రమణమువలన గాని ఒక సంవృత రేఖయొక్క సవ్యదిశ అపసవ్యముగను, అపసవ్య దిశ సవ్యముగను మారదు. కాని ఒక సంవృత రేఖకు ఒక అద్దములో ప్రతిబింబము తీసికొనినచో, సవ్యము అపసవ్య మగును; అపసవ్యము సవ్యమగును.

ఏదైన ఒక చిత్రము A ను తీసికొందము. దీనిని భ్రమణము లేకుండ ఏదైన ఒక దిక్కున నిర్దిష్ట దూరమునకు (ఈ దూరమునే యూనిట్ దూరమని తీసికొందము) జరిపినచో, మరొక చిత్రము A_1 లభించును. ఈ జరుపు పరికర్మమును T అను సంకేతము చేత గుర్తించుదము. కనుక T పరికర్మము A వస్తువుపై ప్రయోగించినచో A_1 లభించును. దీనినే $T(A)=A_1$ అని వ్రాయుదము. T పరికర్మమును మరల A_1 పై ప్రయోగించగా మరియొక చిత్రము A_2 లభించును. ఇది A నుండి రెండు యూనిట్ల దూరమున ఉండును. అనగా $T(A_1)=A_2$ లేదా $TT(A)=A_2$. ఇచ్చట TT కి బదులు T^2 వ్రాయుదము. ఇటులనే $T(A_2)=T^3(A)=A_3$, $T^4(A)=A_4, \ldots$ $T^n(A)=A_n, \ldots$ అని ఒక చిత్ర పరంపర లభించును. ఇపుడు T^{-1} అనగా ఎదురు దిక్కులో ఒక యూనిట్ జరుపుట అని నిర్వచనము చేయుదము. అపుడు T^{-2} అనగా ఎదురు దిక్కులో రెండు యూనిట్లు జరుపుట అని అర్థమగును.

ఇట్లు $T^{-1}(A)=A_{-1}$, $T^{-2}(A)=A_{-2} \ldots$ అను చిత్రములు లభించును. కడపట $T^0(A)=A$ అని నిర్వచింతము. T^0 పరికర్మము చిత్రమును ఏ విధముగను మార్చదు. ఇట్లు $\ldots A_{-2}, A_{-1}, A, A_1, A_2, \ldots$ అను ఒక చిత్ర పరంపర లభించుచున్నది. చిత్రము 188 లో ఈ పరంపరను చూడవచ్చును.

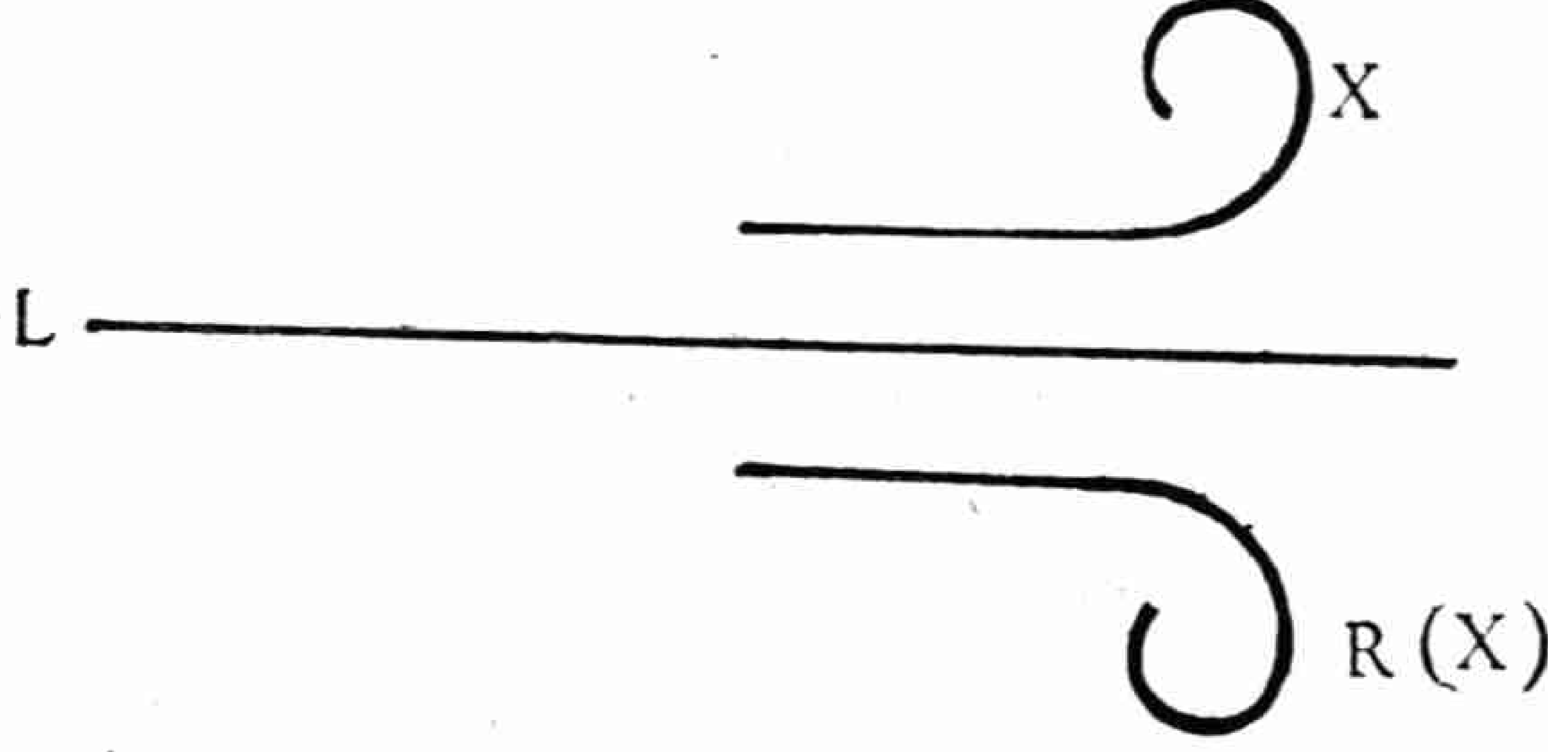


చిత్రము 188

కూర్పులు : $T, T^2, \ldots T^{-1}, T^{-2}, \ldots$ పరికర్మములు ఏ మార్పు చేయని పరికర్మము T^0 తో చేరి ఒక కూర్పు అగుచున్నది. ఒక పరికర్మ సమూహము కూర్పు అగుటకు నిబంధనలు ఇచ్చట పేర్కొందము (చూ. కూర్పులు, పు. 185). 1. ఒక వస్తువుపై ఒక పరికర్మము P ప్రయోగించి, తరువాత దాని ఫలము మీదనే మరియొక పరికర్మము Q ప్రయోగించినచో, ఈ రెండు ప్రయోగముల మొత్తము ఫలమును ఒకే పరికర్మము వలన పొందునట్లు ఒక పరికర్మము R కూర్పులో ఉండవలెను. అపుడు R ను QP అని గుర్తింతుము; అనగా $R(X)=QP(X)$. ఇచ్చట పరికర్మములు X పై ప్రయోగించబడినవి. 2. కూర్పులో ఒక పరికర్మము I అని ఉండవలెను. I ప్రయోగము వలన ఏ వస్తువును మారదు. దీనికే 'ఐడెంటిటీ పరికర్మము' అని పేరు. 3. కూర్పులో P అను పరికర్మము ఉన్నచో దాని విలోమ పరికర్మము P^{-1} కూడ ఉండవలెను. ఇది ఎటువంటిదనిన, P ప్రయోగము వలన కలుగు మార్పులను

రద్దు చేయు గుణము కలదై ఉండవలెను. అనగా $P^{-1} . P = PP^{-1} = I$.

పై గుణములన్నియు $I, T, T^2, \ldots T^{-1}, T^{-2}, \ldots$ సమూహమునకు ఉన్నవి. కనుక ఈ పరికర్మము లన్నియు చేరి ఒక కూర్పు అగును. ఇది T ఆవర్తనము వలన కలిగిన కూర్పు. దీనికే ఆవర్తన కూర్పు అని పేరు. T ను జరుపుటకు బదులుగా, R అను ప్రతిబింబ మార్పును ఉపయోగించినచో, మరింత సరళ కూర్పు లభించును. ఈ కూర్పులో



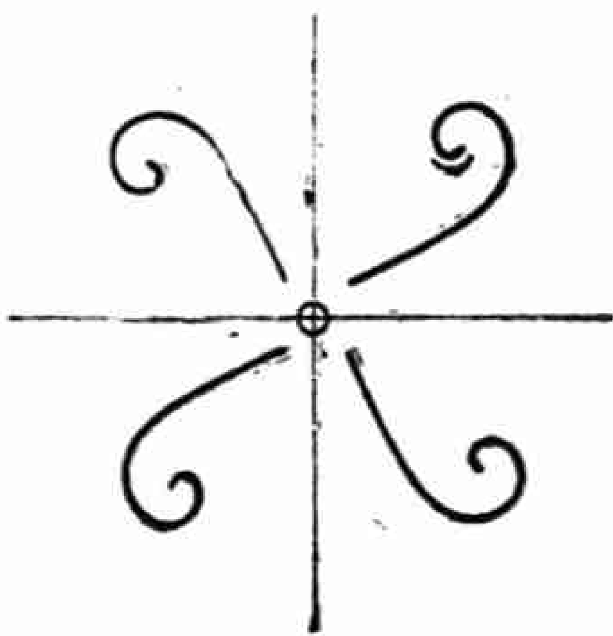
చిత్రము 189

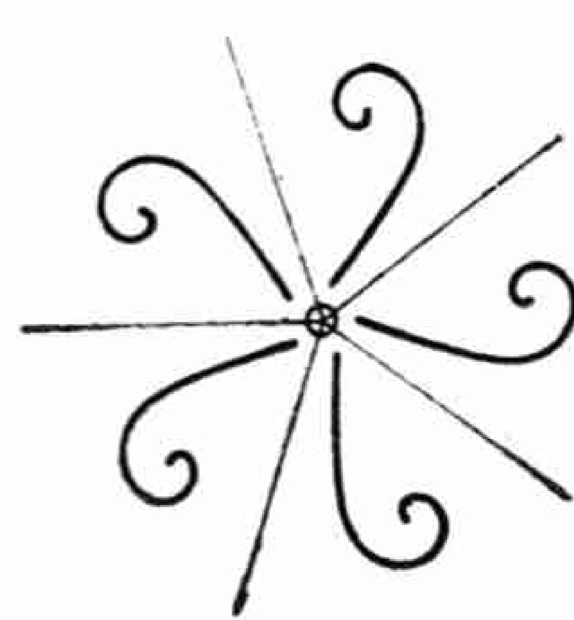
రెండే పరికర్మములు. ఒకటి R, అనగా ఏదో ఒక ఋజు రేఖ L లో, ఆ వస్తువు ప్రతిబింబము తీసికొనుట; మరియొకటి $R^2 = I$. ఆ రేఖను x- అక్షముగా తీసికొనినచో, R పరికర్మము (x, y) బిందువును $(x, -y)$ గా మార్చును. మరి ఒక ప్రయోగము వలన $(x, -y)$ బిందువు (x, y) గా మారును. కనుక $R^2 = I$. ఒక చిత్రము R ప్రయోగము వలన ఎట్లు మారునో చిత్రము 189 నుండి గ్రహింపవచ్చును.

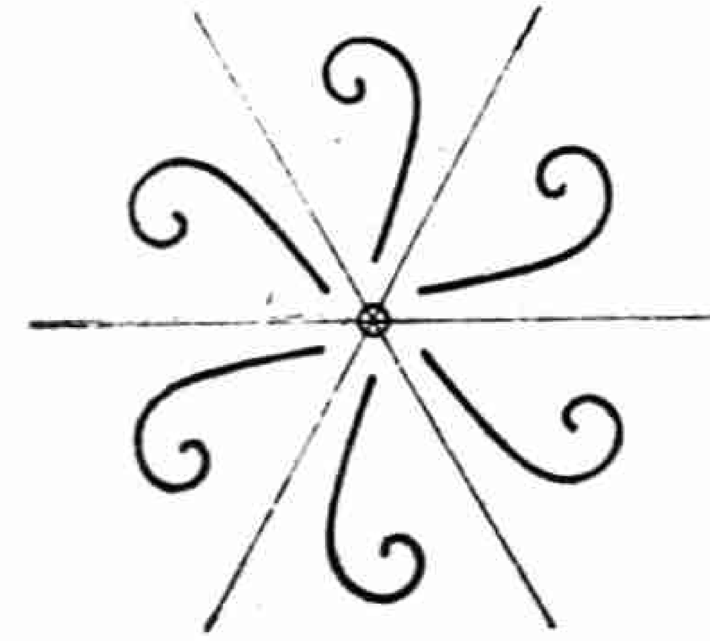
కడపట ఒక భ్రమణము B ను మాత్రము ప్రయోగించి ఒక కూర్పు నిర్మించెదము. ఇది మూల బిందువు $(0, 0)$ చుట్టు α° కోణము పరిమాణము కలదని అనుకొందము. ఇది (r, θ) ధ్రువీయ నిరూపకములు గల బిందువును $(r, \theta + \alpha)$ బిందువుగా మార్చును.

చిత్రము 190 a

చిత్రము 190 b

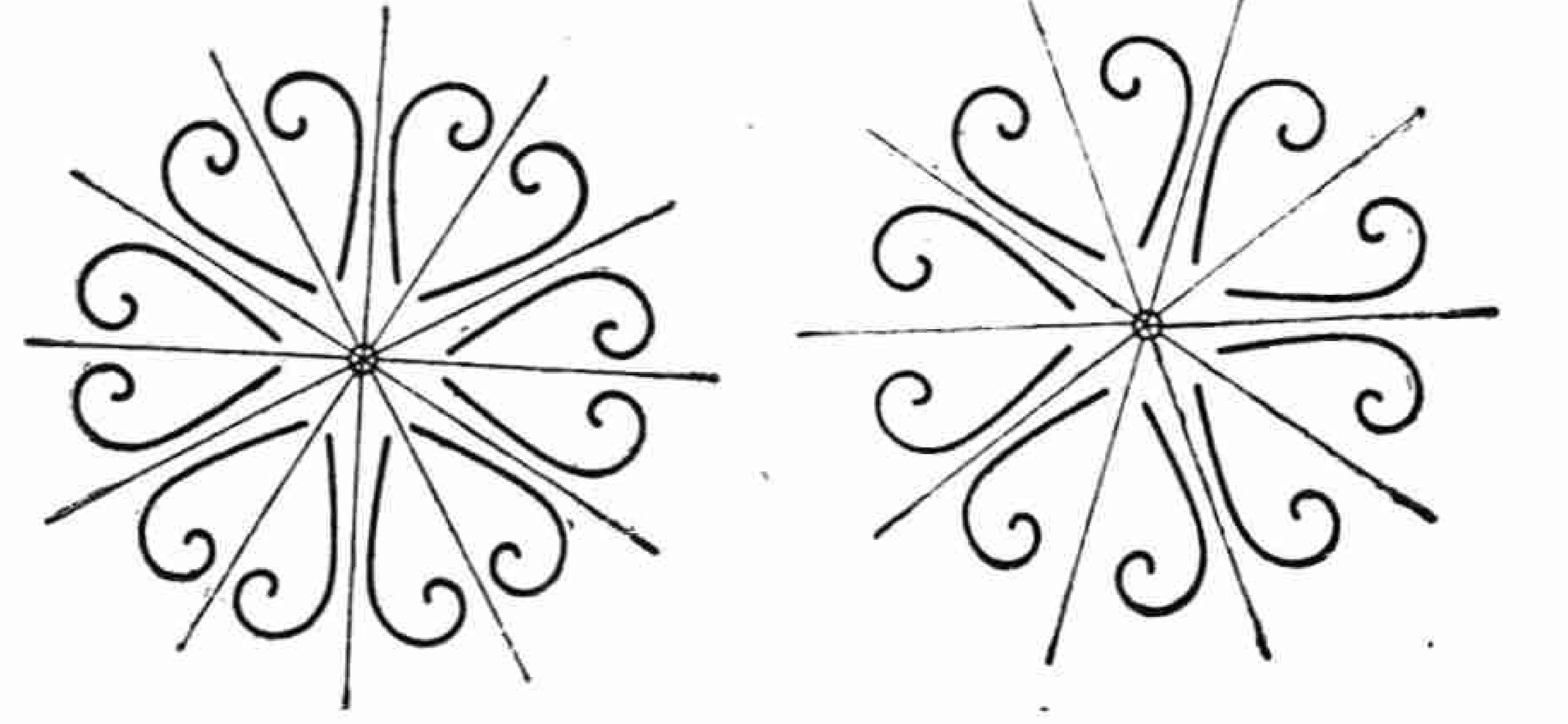






చిత్రము 190 c

ఇదే భ్రమణము మరియొక మారు ప్రయోగించినచో $(r, \theta + 2\alpha)$ బిందువు దొరకును. ఇట్లు భ్రమణ ఆవర్తనము



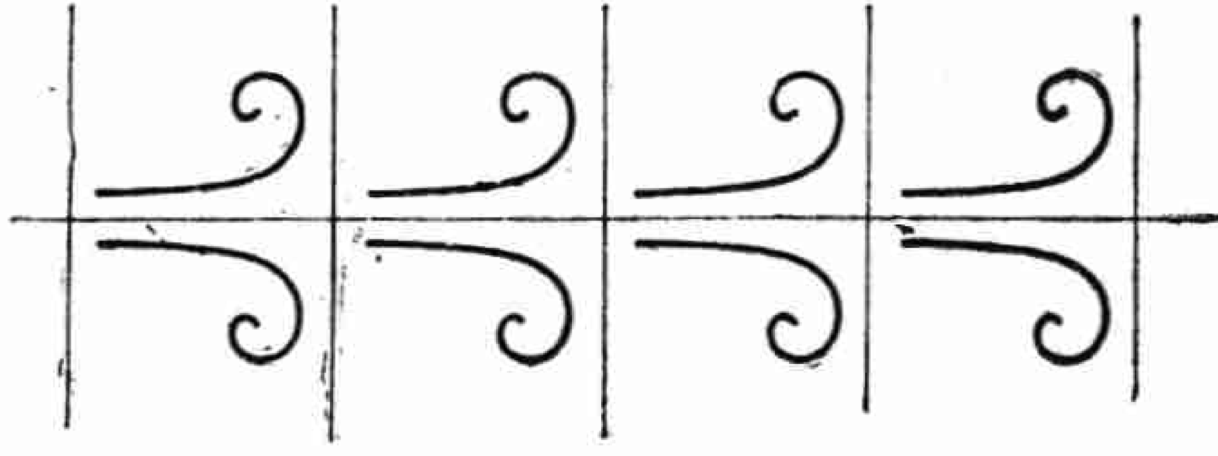
చిత్రము 191

వలన $(r, \theta + 3\alpha)$, $(r, \theta + 4\alpha) \ldots (r, \theta + n\alpha)$ దొరకును. ఆ బిందువు మరల స్వస్థానమునకు రావలసినచో $\theta + n\alpha = \theta + 360^{\circ}$ కావలెను. అనగా $\alpha = 360^{\circ}/n$. ఇచ్చట n ఒక పూర్ణాంకము. ఇట్టి భ్రమణములు $B, B^2, B^3, \ldots B^n = I$ అన్నియు చేరి ఒక కూర్పు అగుచున్నది. $n = 2, 3, 4, 5, 6$ అయినచో ఈ పరికర్మముల వలన ఒక వస్తువు ఎటులు మారుచున్నదో చిత్రము 190 a, b, c లలో చూడవచ్చును.

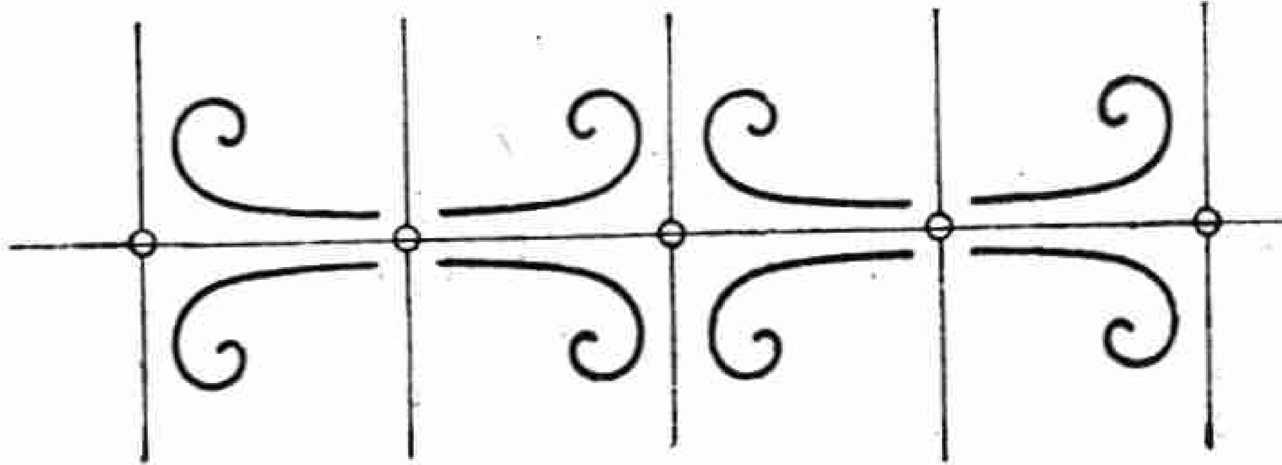
ఇపుడు భ్రమణమును, ప్రతిరూపమును తీసికొని ఒక కూర్పును నిర్మించవలయునన్న, ప్రతిరూపాక్షములు భ్రమణ కేంద్రముగుండా వెళ్ళి 360° ను p సమభాగములుగా విభజింపవలెను. $p = 5$, $p = 6$ విలువలకు తగిన చిత్రమును చిత్రము 191 లో చూడవచ్చును.

జరుపుటతో, ప్రతిరూపమును మాత్రము తీసికొని కొన్ని కూర్పులను సృజించవచ్చును. దీనియందు ప్రతిరూపాక్షమును జరుపు దిక్కు ఒకే దిక్కుగా ఉండవచ్చును, లేదా లంబ దిక్కులుగా ఉండవచ్చును.

ఈ రెండు పరిస్థితులకు తగినట్లు లభించు చిత్ర పరంపరను 192, 193 చిత్రములలో చూడవచ్చును.

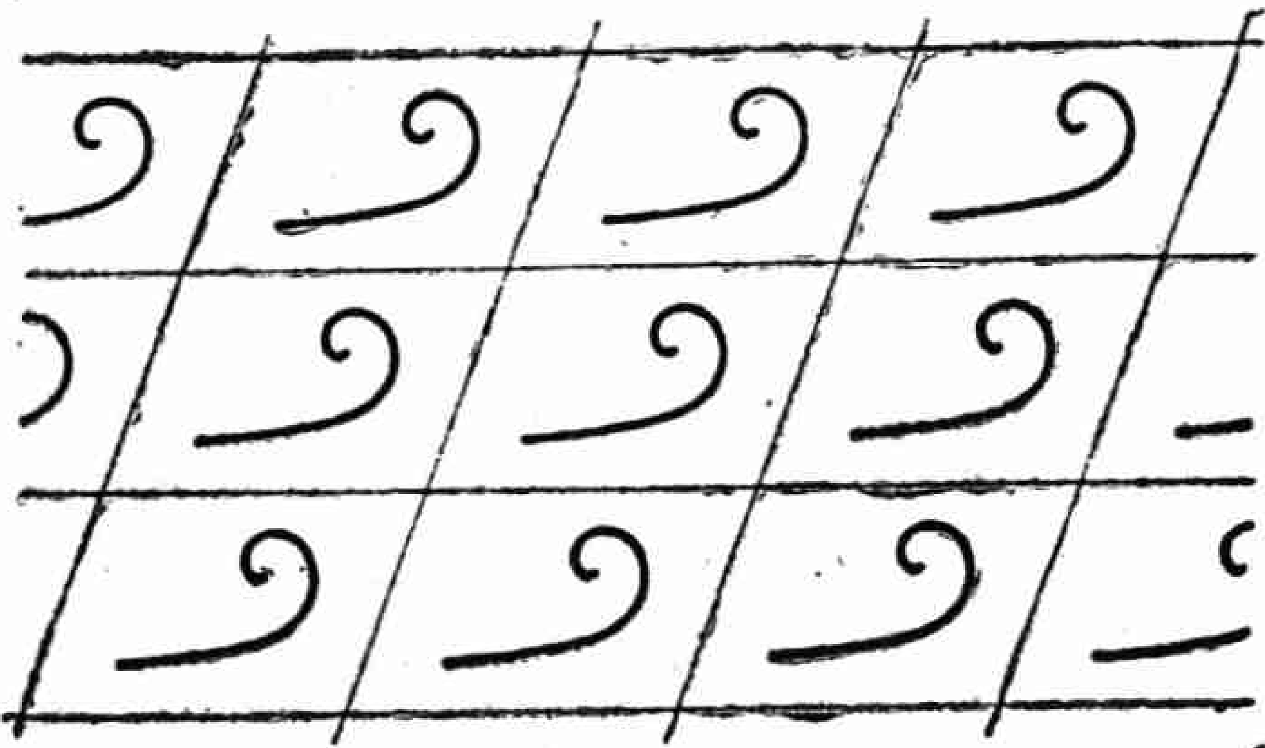


చిత్రము 192



చిత్రము 193

ఇంతవరకు ఒకే దిక్కున జరుపుటను ఉపయోగించితిమి. ఇపుడు రెండు దిక్కులందు, భ్రమణము లేని జరుపుటను పరిశీలించెదము. ఈ రెండు దిక్కులును x, y అక్ష దిక్కులుగా తీసికొందము. వాటిమధ్య కోణము ω కానిమ్ము. x దిక్కులో a దూరము జరుపు పరికర్మమును T అనియు, y దిక్కులో b దూరము జరుపు పరికర్మమును S అనియు గుర్తించుదము. కనుక $T(x, y) = (x+a, y)$, $S(x, y) = (x, y+b)$. మూలబిందువు $(0, 0)$ నుండి $T(0, 0) = (a, 0)$, $S(0, 0) = (0, b)$, $TS(0, 0) = (a, b)$ దొరకును. ఇవియు మూలబిందువు $(0, 0)$తో జేరి ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క శీర్షములు అగుచున్నవి. T, S యొక్క అవర్తనములు $T^m S^n$ (m, n పూర్ణాంకములు ధనముగనో ఋణముగనో ఉండవచ్చును), $I = T^0 S^0$ చేరి ఒక అనంత కూర్పు నిర్మించును. దీనిలోని పరికర్మములు మూలబిందువు $(0, 0)$ను (ma, nb) అను బిందు సమూహములలో దేనికైనను కొనిపోవును. ఈ

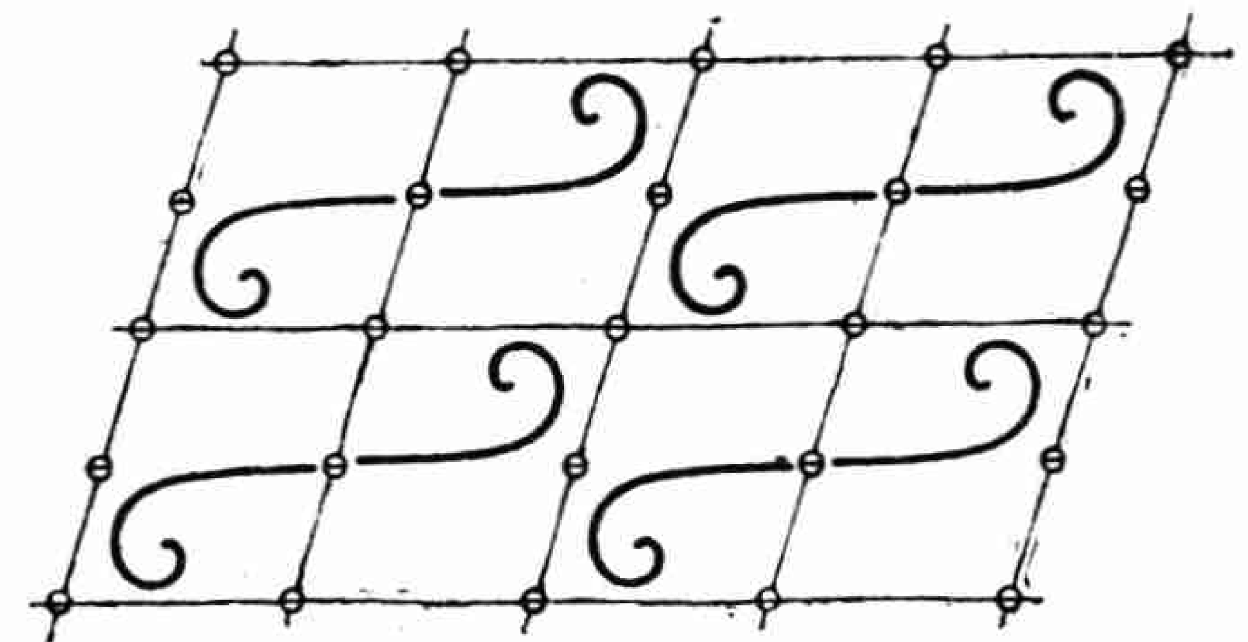


చిత్రము 194

బిందు సమూహామునకు 'లాటిస్' అని పేరు. $0 = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (a, b)$, $C = (0, b)$ శీర్షములుగా గల మూల చతుర్భుజమును x, y అక్ష దిక్కులలో జరుపుట వలన తలమంతయు అనంత సంఖ్యల సమాంతర చతుర్భుజములుగా విభజించబడును, మూల చతుర్భుజములో ఏ నమూనా నైనను $T^m S^n$ పరికర్మముల ప్రయోగము వలన అన్ని చతుర్భుజములకు మార్చవచ్చును. అట్లు మార్చుట వలన లభించు చిత్రమును చిత్రము 194 లో చూడవచ్చును.

పై కూర్పును w_1 అను సంకేతము వలన గుర్తించెదము. ఈ కూర్పునకు ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యూనిట్ సెల్ అందుము. ఇపుడు లాటిస్‌లో భ్రమణములు ఉన్నవా అని వెదకిన, 180° కోణము గల భ్రమణములు ఉన్నవని తెలియుచున్నది. భ్రమణ కేంద్రములు: అన్ని లాటిస్ బిందువులు $(\pm ma, \pm nb)$; ఇవికాక సమాంతర చతుర్భుజములలోని కేంద్ర బిందువులు $\{\pm(m+\frac{1}{2})a, \pm(n+\frac{1}{2})b\}$; ఇవియు కాక భుజముల మధ్య బిందువులు $\{\pm(m+\frac{1}{2})a, \pm nb\}$, $\{\pm ma, \pm(n+\frac{1}{2})b\}$. ఈ బిందువులందు ఏదేని ఒకదాని చుట్టు తలమును 180° పరిభ్రమణము చేయుట వలన, లాటిస్ బిందువులన్నియు వేరులాటిస్ బిందువులుగా మారును. ఉదా: $(a/2, 0)$ చుట్టు 180° భ్రమణము వలన (ma, nb) లాటిస్ బిందువు, $\{-(m-1)a, -nb\}$ లాటిస్ బిందువుగా మారును.

కనుక ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు సమభాగములుగా విభజించి ఒక భాగము నందున్న ఏ నమూనా నైనను, ఆ చతుర్భుజము కేంద్రము చుట్టు 180° భ్రమణము గల చిత్రమును తీసికొనినచో, ఇవి రెండును చేరి సమాంతర చతుర్భుజములోని చిత్రమగును. ఇదియే సెల్ చిత్రము. దీనికి T, S పరికర్మముల ప్రయోగము

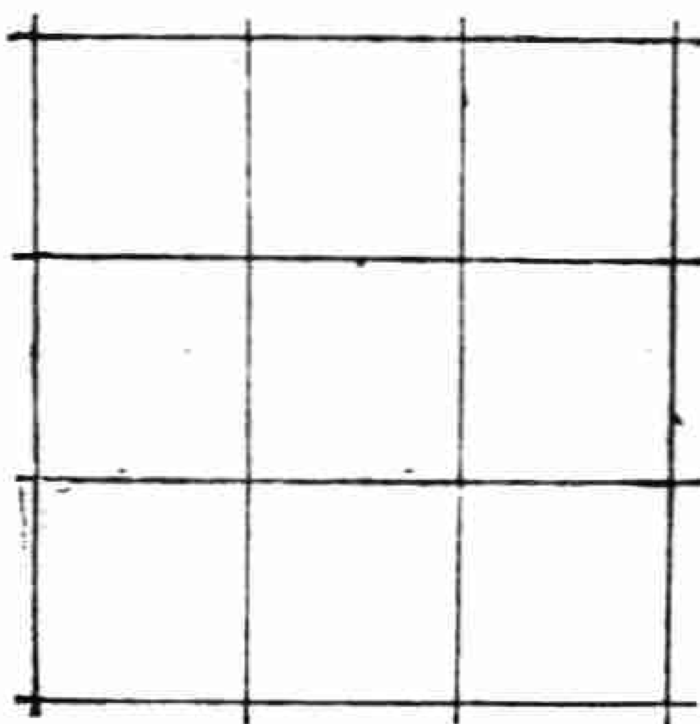


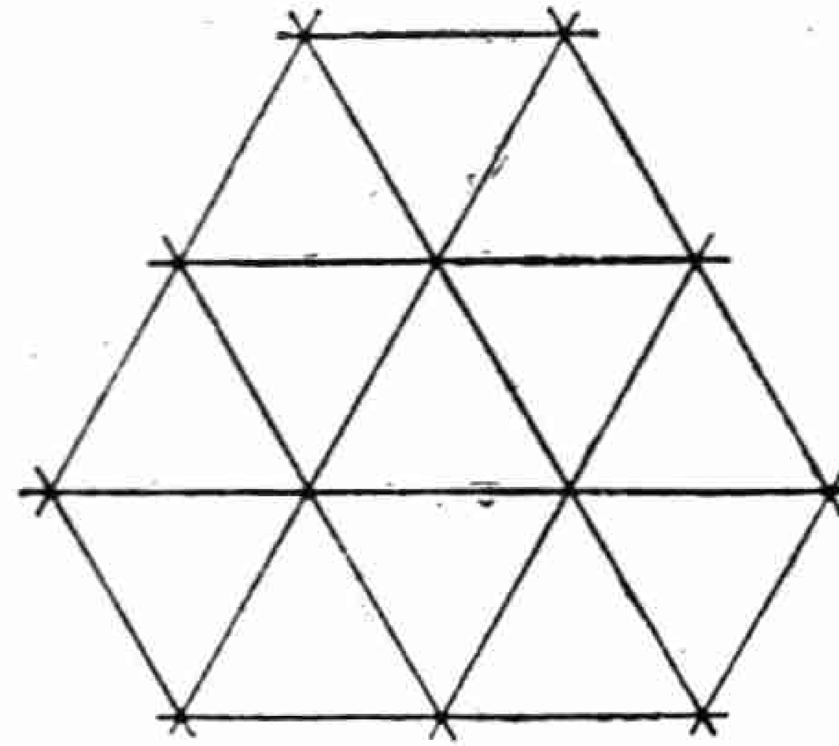
చిత్రము 195

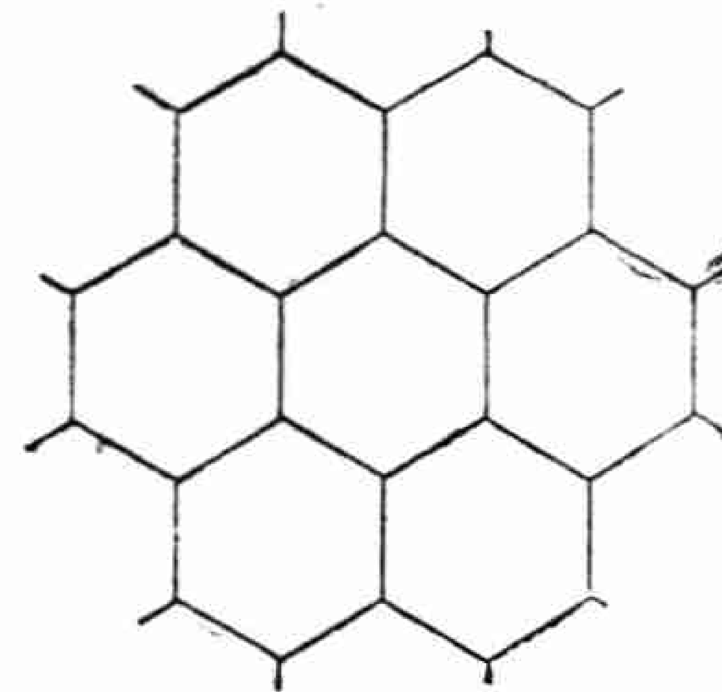
వలన తలమంతయు నిండింపవచ్చును. దీనిని చిత్రము 195 లో చూడవచ్చును.

ఈ విశాలీకృత కూర్పుకు w_2 అని పేరు పెట్టుదము. దీనియందు 180° భ్రమణము x, y అక్ష దిక్కులలోని జరుపుట ఉన్నవి. జరుపుట మాత్రము కల కూర్పు అగు w_1 దీని యొక్క ఉపకూర్పు చిత్రము 194 w_1కు చేరినది.

180° భ్రమణము కాక ఇతర భ్రమణములును ఉండవలెనన్న, $a : b$ జరుపు దూరముల నిష్పత్తికిని, అక్షముల మధ్య కోణమునకును ప్రత్యేక విలువలు ఈయవలెను. $\omega = 90^\circ$, $a = b$ అని తీసికొనినచో, చతుర్భుజములు చతురస్రములగును. తలమంతయు చతురస్రములుగా విభజింపబడును. $\omega = 60^\circ$, $a = b$ అని తీసికొనినచో, చతుర్భుజములు రాంబస్‌లు అగును. దీనిని రెండు సమభుజ త్రిభుజములుగా విభజింపవచ్చును. కనుక తలమంతయు సమభుజ త్రిభుజములుగా విభజింపబడును. ఈ సమభుజ త్రిభుజముల విన్యాసము నుండి, కొన్ని గీతలు చెరిపి వేసినచో తలమంతయు క్రమ షడ్భుజములచే నిండి యుండు చిత్రము దొరకును (చూ. చిత్రము 196).

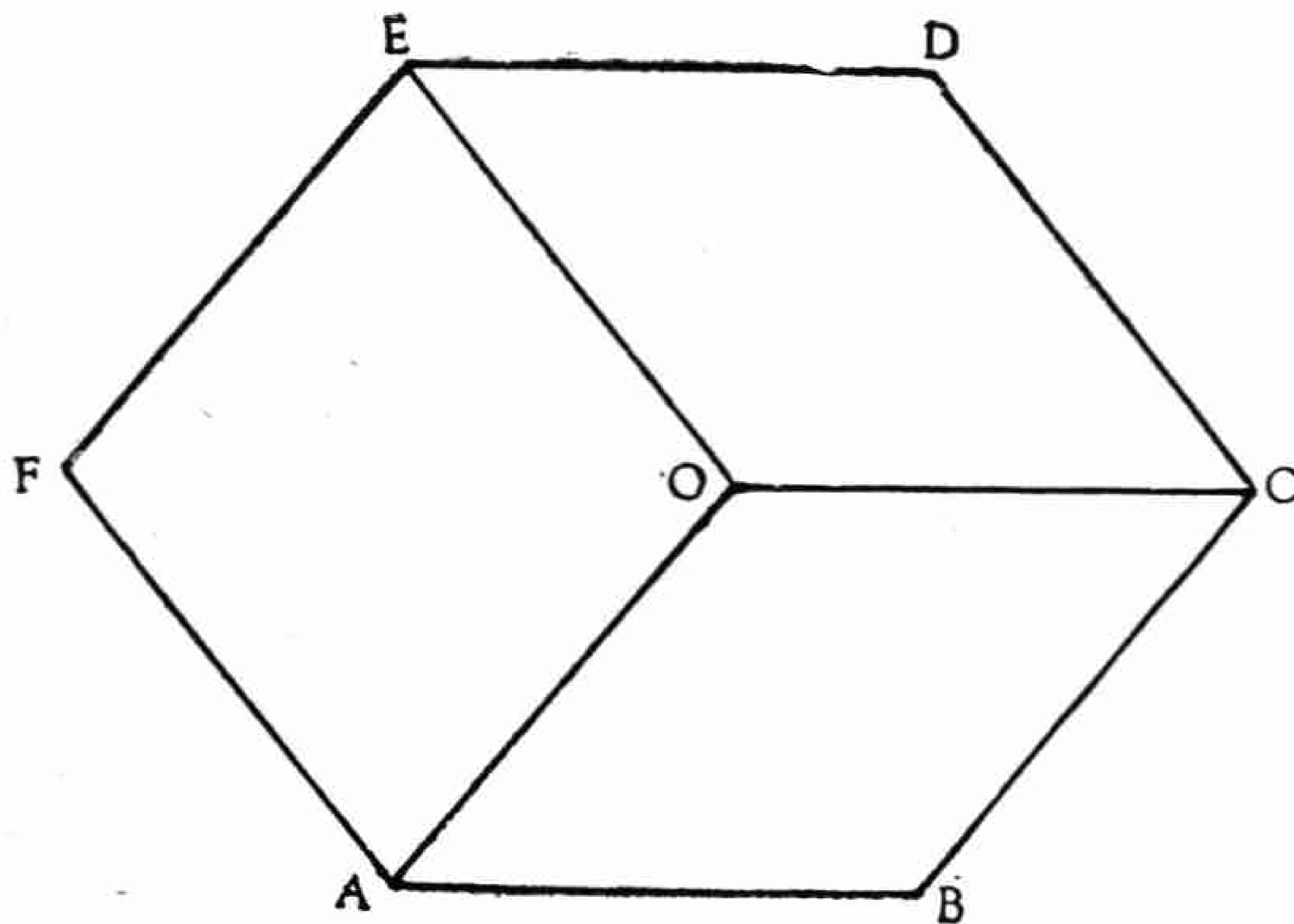

(4, 4)


(3, 6)


(6, 3)

చిత్రము 196

ఇటువంటి తల విభజనలను (4, 4), (3, 6), (6, 3) విభజనలని వర్ణింతుము. వీటి అర్థమేమనగా: (4, 4) లో తలము 4 భుజములుగా (అనగా చతురస్రములుగా) విభజింపబడినది. ఒక్కొక్క శీర్షమునను 4 చతురస్రములు సంధించును. (3, 6) విభజనలో తలము 3 భుజములు గల త్రిభుజములుగా విభజింపబడినది. ఒక్కొక్క శీర్షమున 6 త్రిభుజములు సంధించును. (6, 3)లో తలము 6 భుజములు గల క్రమ షడ్భుజములుగా విభజింపబడినది. ఒక్కొక్క శీర్షమున మూడు షడ్భుజములు సంధించును (చూ. చిత్రము - 196 : కుడివైపు).

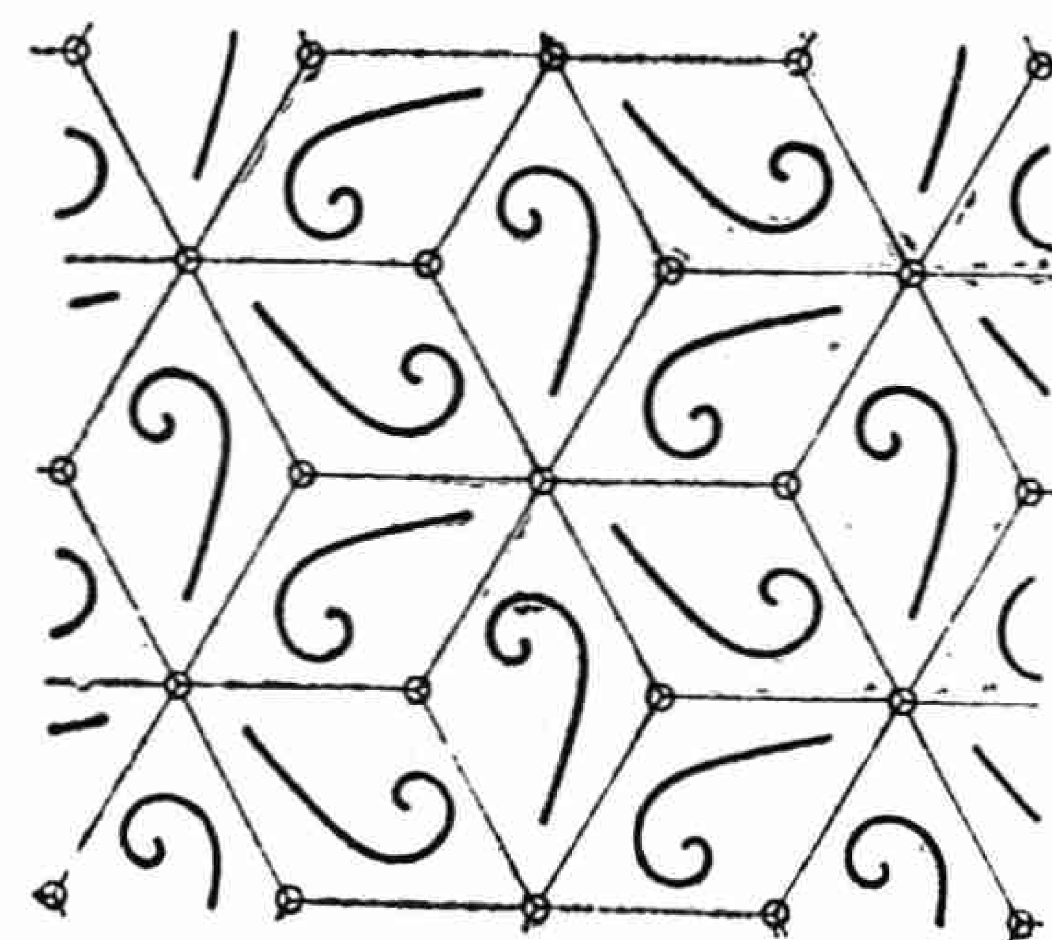


చిత్రము 197

ఒకే విధమైన క్రమ బహుభుజులను ఉపయోగించి, తలములను విభజించుటకు, ఈ మూడు మార్గములు తప్ప వేరే మార్గములు లేవు (చూ. గణిత చిక్కు ప్రశ్నలు, వినోదములు - పు. 220).

ఇపుడు తలమును షడ్భుజములుగా విభజించు (6, 3) విభజనను తీసికొందము. (చూ. చిత్రము 197) వీటిలో *ABCDEF* ఒక షడ్భుజముగా ఉండనిమ్ము. దీని కేంద్ర బిందువును O అని పిలిచెదము. షడ్భుజము లన్నిటిని ***AC*** సదిశరాశిచే గుర్తించిన జరుపుట వలన, మరల ప్రారంభములో ఉన్న చిత్రమే దొరకును. షడ్భుజములు మారును; కాని వాటి సమూహము మారదు. ఈ జరుపుటను T_1 అందము. అటులనే ***CE*** సదిశరాశిచే గుర్తించిన జరుపుట T_2 అనియు ***EA*** సదిశరాశిచే గుర్తించిన జరుపుట T_3 అనియు అందము. ఇవి కూడ షడ్భుజ సమూహమును మార్చవు. T_1, T_2, T_3 వాటి ఆవర్తనలు చేరి ఒక అనంత జరుపు కూర్పు నిర్మించును.

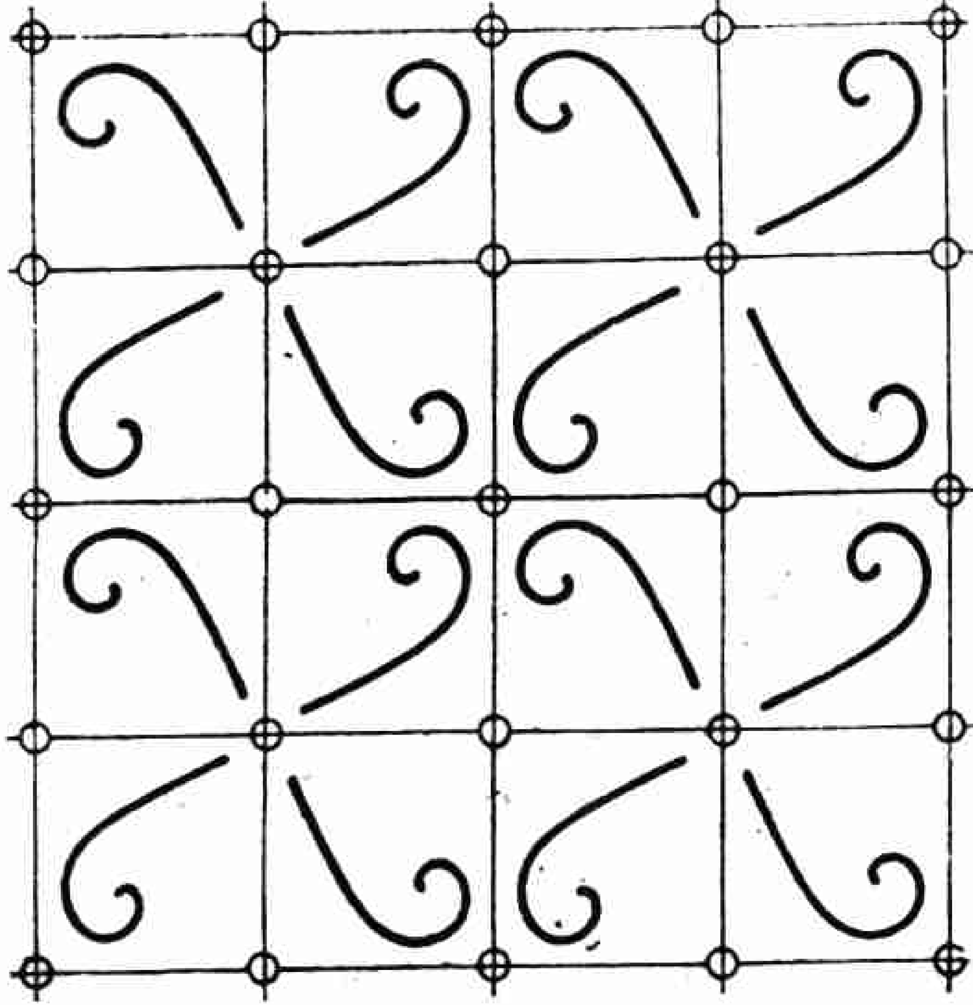
షడ్భుజమునందు OA, OC, OE లను చేర్చినచో, షడ్భుజము 3 సమాంతర చతుర్భుజములుగా విభజింపబడుచున్నది. ఇవి, OABC, OCDE, OEFA. కేంద్ర బిందువు O చుట్టు 120° భ్రమణము R వీటిని పరివర్తనము చేయును. ఇట్లు తలములోనిఅన్ని షడ్భుజములను OC, OE, OAకు అనురూపమైన గీతల ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజములుగా విభాగింపవచ్చును. ఇట్లు T_1, T_2, $T_3 = T_1^{-1}$, T_2^{-1}; R చే జనించిన కూర్పును w_3 అందము. OABC వంటి ఏ చతుర్భుజమునైనను దీనికి యూనిట్ సెల్‌గా తీసికొని, దీనిలో వ్రాసిన ఏ చిత్రముపై



చిత్రము 198

నైనను కూర్పులోని పరికర్మముల ప్రయోగించినచో చిత్రము 198 లభించును. ఇది తలమంతయు నిండియుండెడి వాల్ పేపర్ చిత్రము (చూ. చిత్రము 198).

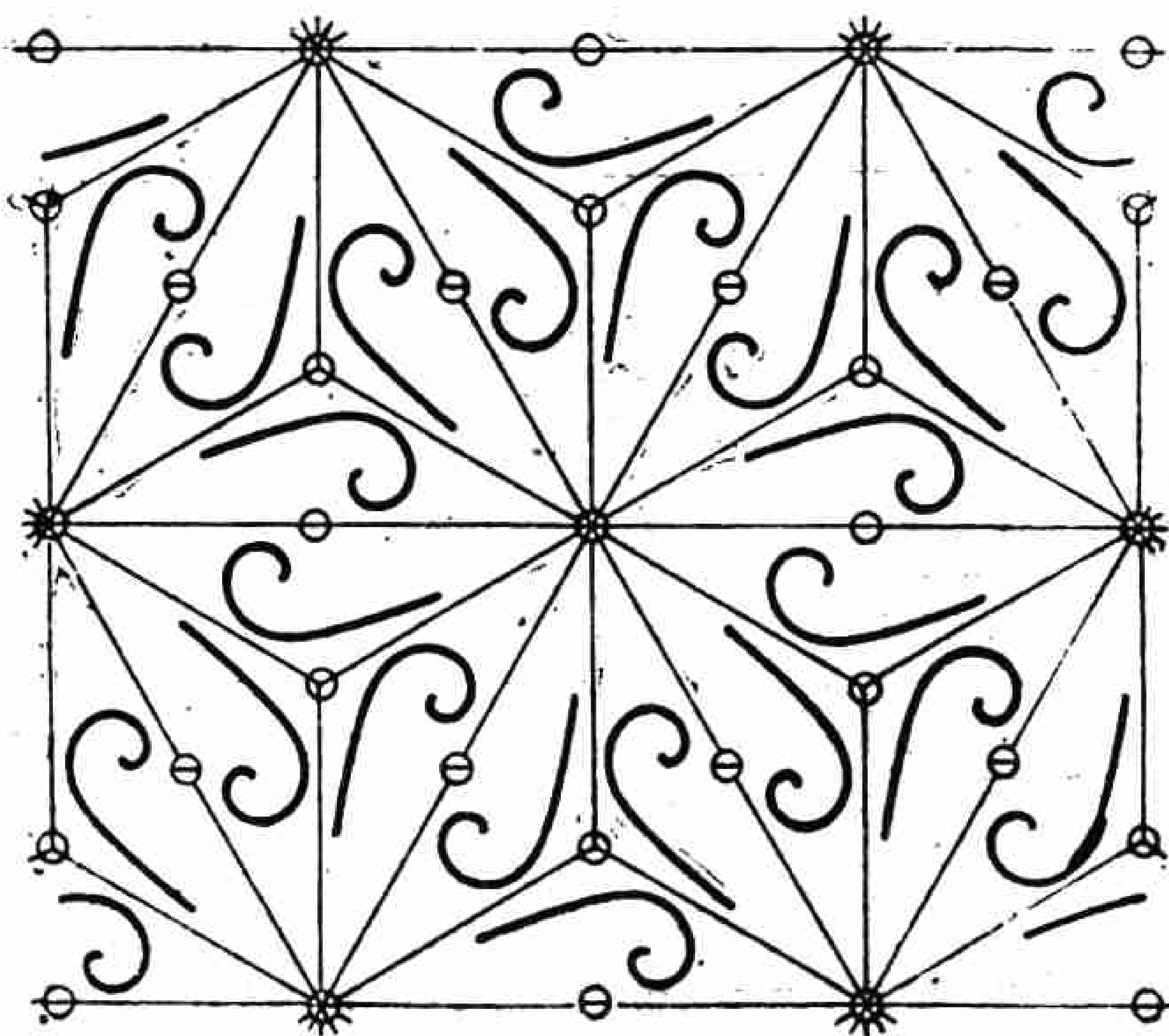
తలమంతయు చతురస్రములుగా విభజింపబడిన (4, 4) లో ఒక చతురస్రము ABCD అందము. దీని కేంద్ర బిందువును O అని గుర్తించెదము. O చుట్టు 90° భ్రమణము R ఐతే, R, పరికర్మము (4, 4) చిత్రమును మార్చదు. కనుక R, చతురస్ర భుజములు గుర్తించు జరుపుటను ఒక కూర్పు w_4 ను నిర్మించును. చతురస్రములోని పాతిక భాగము ఒక యూనిట్ సెల్



చిత్రము 199

అగును. ఈ సెల్ లోని ఏ చిత్రము నైనను తీసికొని కూర్పు పరికర్మములను దానిపై ప్రయోగించుట వలన దొరకు చిత్రమును, చిత్రము 199 లో చూడవచ్చును.

కడపట (3, 6) విభజనను తీసికొందము. తలమంతయు ఇపుడు త్రిభుజములుగా విభజింపబడి యున్నది. వీటిలో ABC ని దాని కేంద్రము O ను తీసికొందము. AB, BC, CA వలన గుర్తించిన జరుపు పరికర్మములు ఈ త్రిభుజ సమూహమును మార్చవు. ఇదికాక ఏ భుజము యొక్క

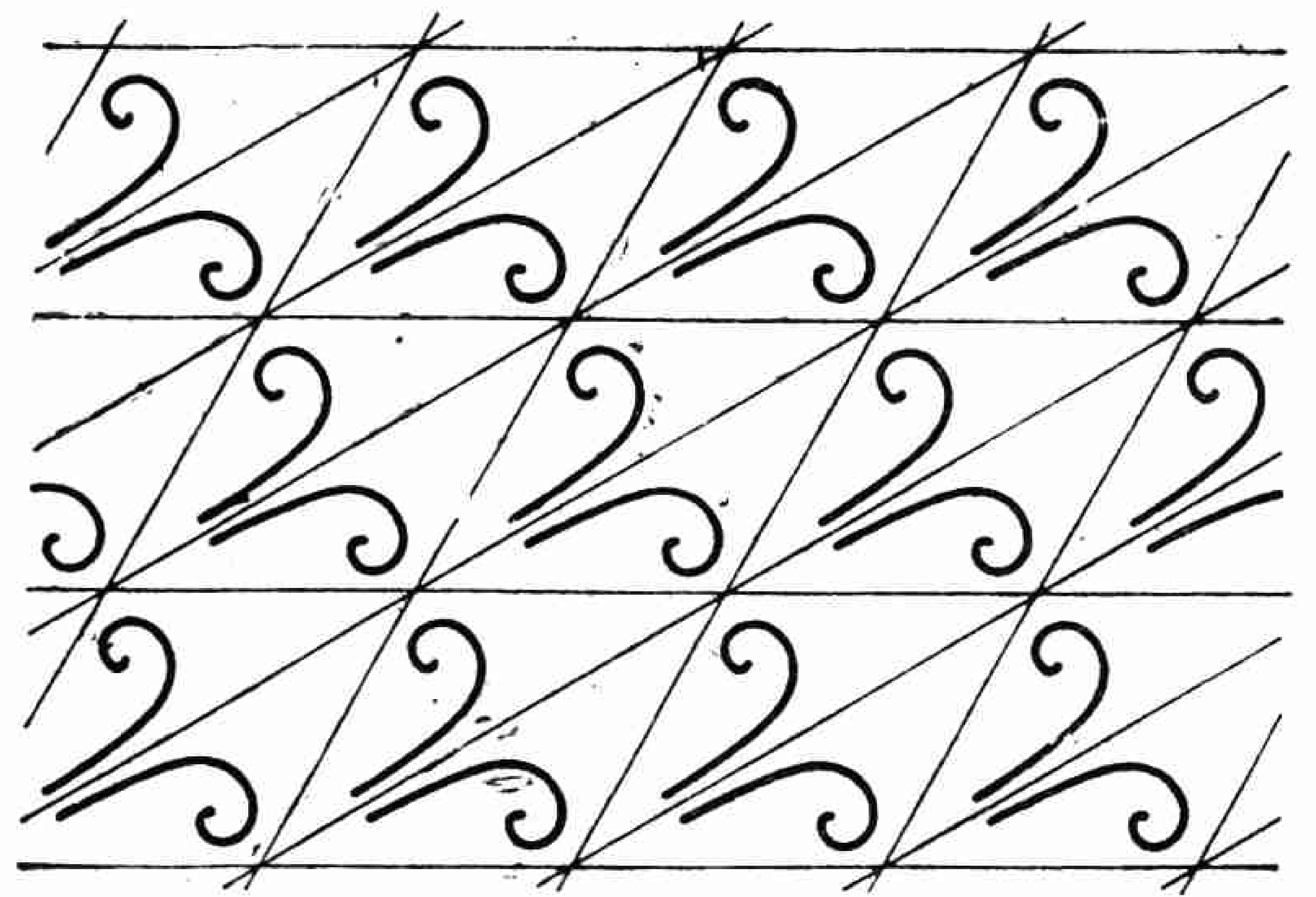


చిత్రము 200

మధ్య బిందువుచుట్టు 180° భ్రమణము త్రిభుజ సమూహమును మార్చదు. అటులనే త్రిభుజ శీర్షములచుట్టు 60° భ్రమణమును, O చుట్టు 120° భ్రమణమును ఈ గుణము కలిగియున్నవి. ఇవన్నియు ఒక కూర్పు w_6 ను ఒసంగును. దీనికి యూనిట్ సెల్ OAB త్రిభుజము. దీనిలో ఏదైన చిత్రముపై w_6 పరికర్మముల ప్రయోగము వలన దొరకు వాల్ పేపర్ చిత్రమును చిత్రము 200 లో చూడవచ్చును.

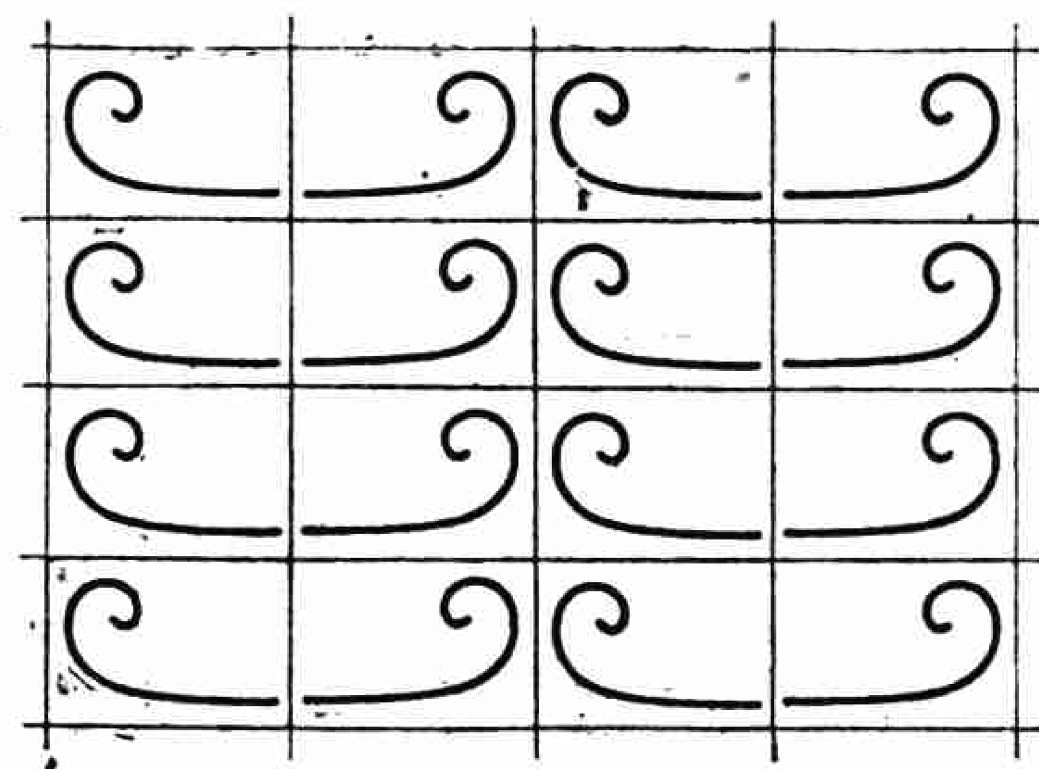
ఇంతవరకు ప్రతిబింబము తీసికొనుట అను పరికర్మమును ఉపయోగించకయే వాల్ పేపర్ కూర్పులను పరిశీలించితిమి. ఇపుడు ప్రతిబింబించుటను తీసికొని పైన వివరించిన కూర్పులను మరియు విశాలింపవచ్చును.

మొదట w_1 కూర్పును తీసికొందము. దీనిలోని సమానాంతర చతుర్భుజమునకు ఒక ప్రతిబింబ అక్షము ఉండుటకు అది రాంబస్ గనో దీర్ఘచతురస్రముగనో ఉండవలెను.



చిత్రము 201

అనగా $a = b$ లేదా $\omega = 90°$. మొదటి పరిస్థితియందు ప్రతిబింబాక్షములు రాంబస్ యొక్క వికర్ణములగును. రెండవ పరిస్థితిలో అది ఒక భుజమునకు సమానాంతరముగ ఉండును. ఇట్లు విశాలీకృత కూర్పులు w_1^1, w_1^2, w_1^3 కు అనుగుణమైన వాటిని



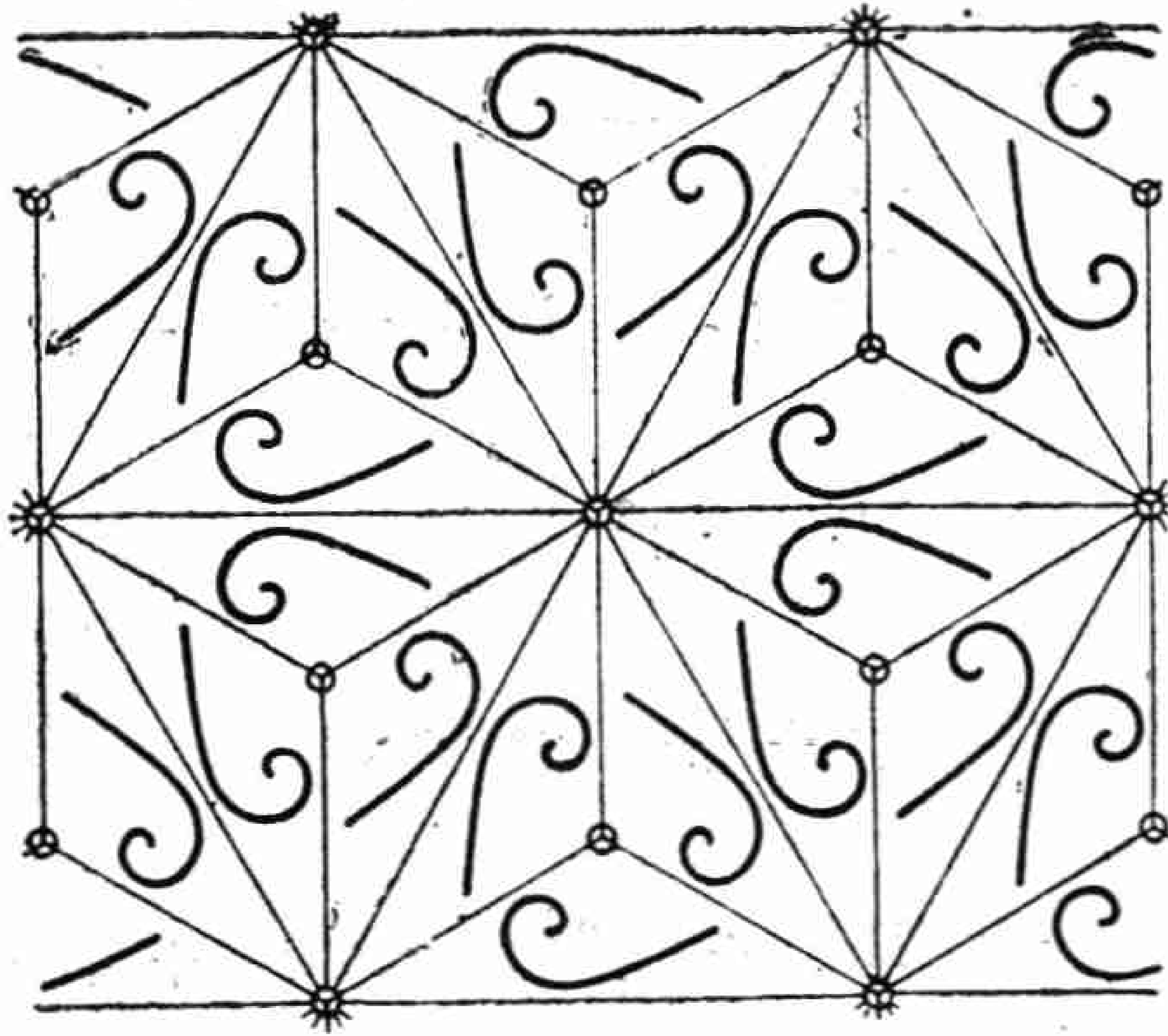
చిత్రము 202

చిత్రములు 201, 202 లో చూడవచ్చును.

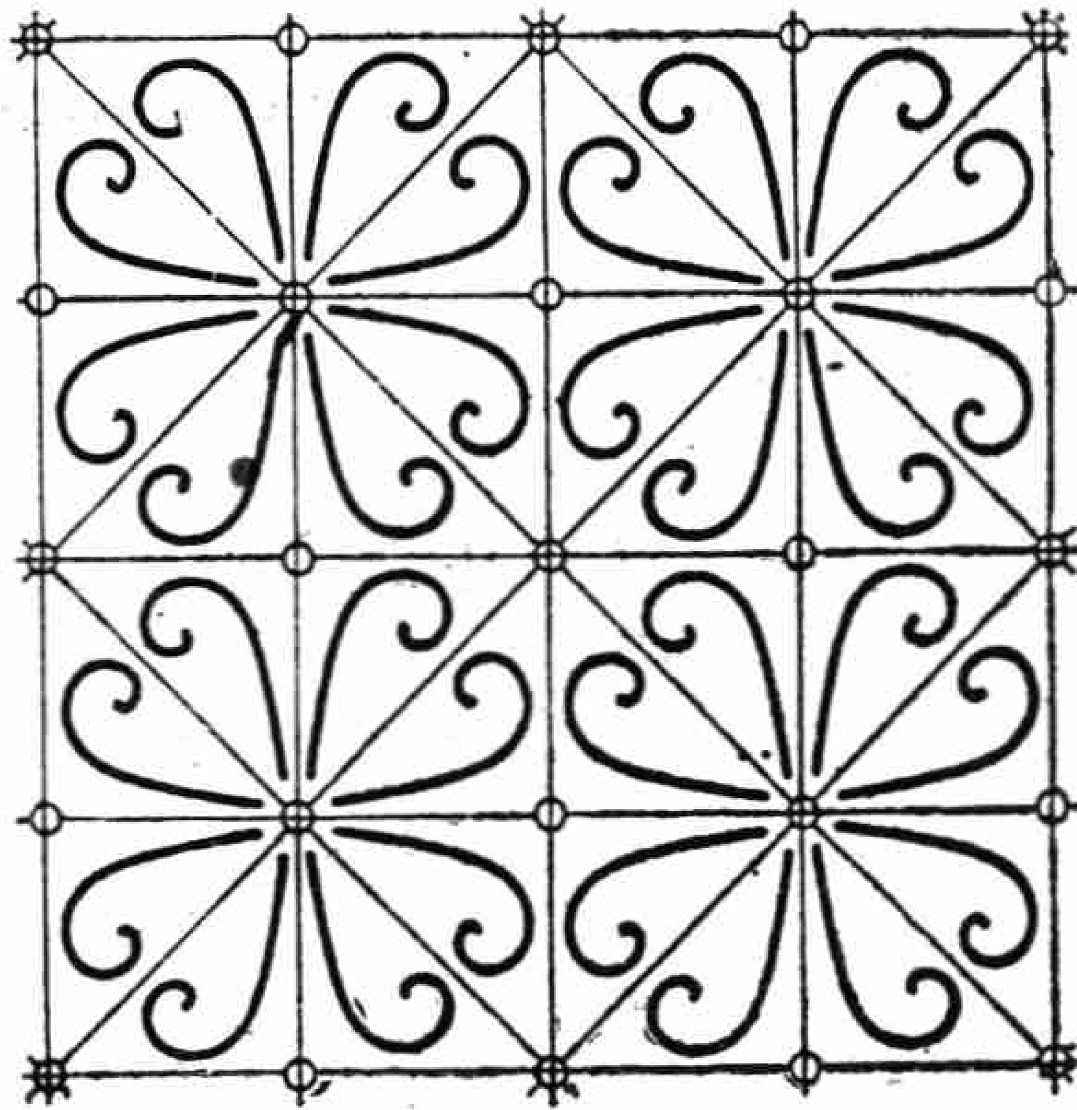
ఇటులనే w_2, w_3, w_4, w_6 కూర్పులకు ప్రతిబింబ పరికరములను చేర్చి విశాలీకరింపవచ్చును. ఇట్లు విశాలీకరించిన కూర్పు చిత్రములలో, w_3, w_6 ను విశాలీకరించి వాటిలో ఒకటిని w_4 ను విశాలీకరించిన దానిలో రెండింటిని 203, 204, 205, 206 చిత్రములలో చూడవచ్చును.

ఇపుడు w_6 కు సంబంధిచిన చిత్రమును పైన చూపిన w_6^1 కు సంబంధించిన చిత్రమును చూడుము. ఇవి రెండును

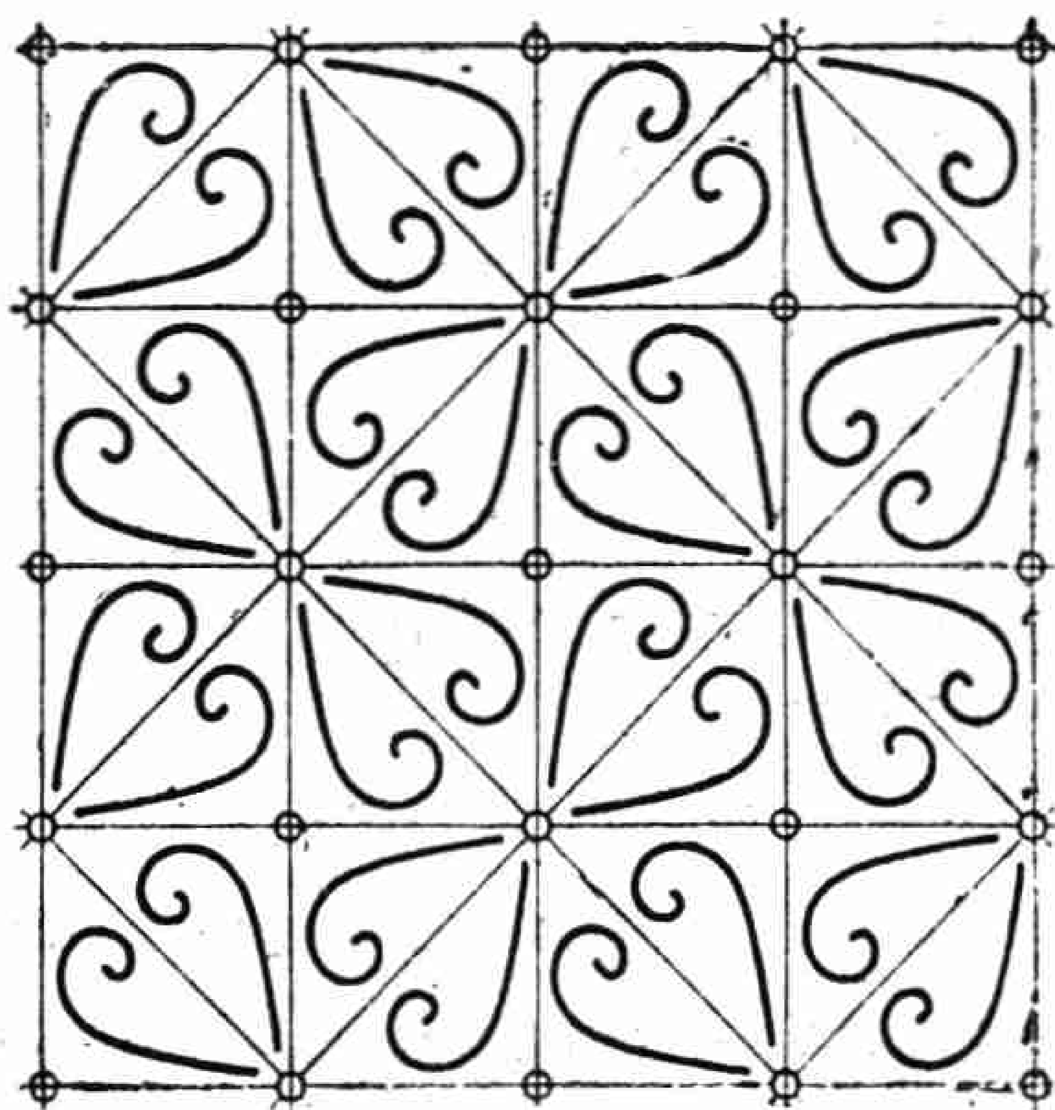
తలముయొక్క (3, 6) విభజననుండి దొరకినవి. అయితే, w_6 త్రిభుజములోని భ్రమణములు మాత్రము చూపును.



చిత్రము 203

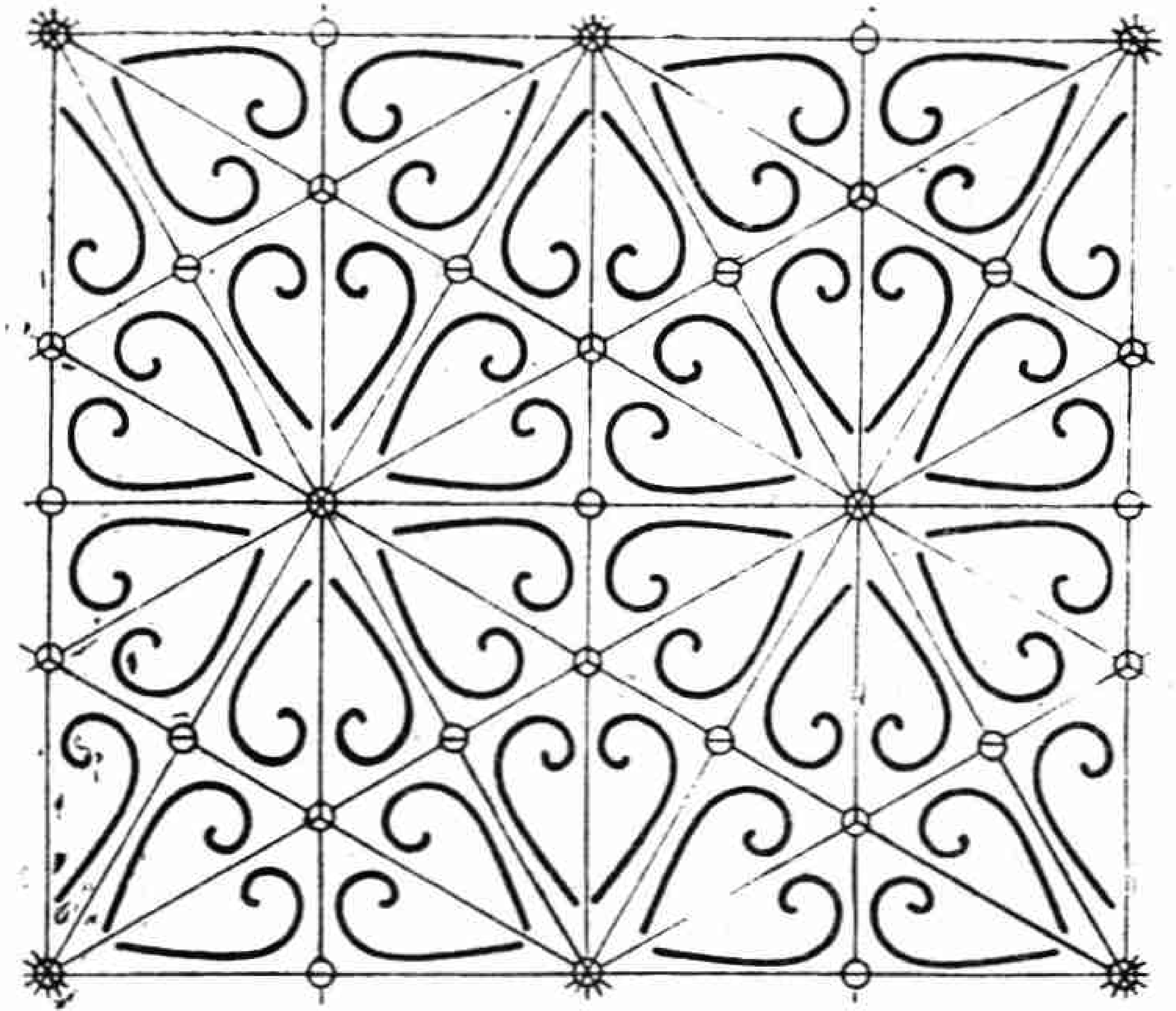


చిత్రము 204



చిత్రము 205

కాని w_6^1 త్రిభుజములోని భ్రమణములేకాక, ప్రతిబింబములను కూడ చూపుచున్నది. ఈ ప్రతిబింబాతుములు, త్రిభుజము యొక్క కోణములను సమభాగములుగా విభజించు రేఖలు.



చిత్రము 206

ఇట్లు సాధ్యమగు అన్ని వాల్ పేపర్లును 17 ప్రత్యేక కూర్పులుగా గణించవచ్చును. వానిలో కొన్ని ఇతర కూర్పులకు ఉపకూర్పులుగా ఉండును. ప్రాచీన చీనా, ఈజిప్టు చిత్రకారులకు ఈ 17 విధములగు వాల్ పేపర్ లలో పెక్కు తెలిసియుండెను. స్పెయిన్ దేశమును ఆక్రమించిన మూర్ లకు ఈ 17 విధములు తెలిసియుండెననుట ఒక ఆశ్చర్యకరమైన విషయము. గ్రానడా నగరమందు ఆల్హాంబ్రాను అలంకరించిన చిత్రములలో ఈ 17 విధానములను ఉపయోగించిరి. ఆ. న.

తీటాఫలములు (జేకోబీ): జేకోబీ వీటిని తన విలోప (దీర్ఘవృత్త) ఫలముల పరిశోధనలో ఎక్కువగా ఉపయోగించెను. τ ఒక స్థిరసంకీర్ణ సంఖ్య, .దాని కల్పితభాగము ధనాత్మకము.

$q = e^{\pi i \tau}$ అని వ్రాయుము. $|q| < 1$

$$\theta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2iz}$$ పరంపరను

తీసికొని $\theta(z, q)$ ను z యొక్క ఫలముగా విమర్శింపుము.

z యొక్క సీమిత (లిమిటెడ్) ప్రాంతములో పరంపర $\theta(z, q)$ విశ్లేషణ లక్షణము కలది; ఏకరూప ఉపసరణత కలది; అది ఒక సంపూర్ణఫలము.

$$\theta(z, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz$$ అని

విశదమగుచున్నది. ఇపుడు $\theta(z+\pi, q) = \theta(z, q)$

$\theta(z+\pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz} \theta(z, q)$ అని చూపవచ్చును. కాబట్టి θ ఫలము అర్ధ ఆవర్తనద్వయ (క్వాసీ డబ్లి పీరియాడిక్) ఫలము అని తెలియుచున్నది.

$\theta\,(z,\,q)$ లో z ను π, లేదా, $\pi\tau$ చే ఎక్కువ చేసినచో $\theta\,(z,\,q)$ ను 1 చేతగాని, $-q^{-1}\,e^{-2iz}$ చేతగాని క్రమముగా గుణింపవలెను. కాబట్టి $1,\ -q^{-1}\,e^{-2iz}$ రాశులకు ఆవర్తన గుణకములు అని పేరు.

చతుర్విధ ఫలములు : $\theta\,(z,\,q)$ ను $\theta_4\,(z,\,q)$ అని వ్రాయుచు క్రింది మార్పులను గుర్తించుము.

$$\theta_3(z,\,q)=\theta_4\,(z+\pi/2,\,q)= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz$$

$$\theta_1(z,\,q)+-ie^{iz}+\frac{\pi i\tau}{4}\,\theta_4\left(z+\frac{\pi\tau}{2},\,q\right)= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin\,(2n+1)\,z$$

$$\theta_2(z,\,q)=\theta_1\,(z+\pi/2,\,q)=2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos\,(2n+1)\,z$$

వీనిని మరల విస్తరింపగా

$$\theta_1\,(z,\,q)=2\,q^{1/4}\sin z-2\,q^{9/4}\,\sin 3z+2\,q^{25/4}\sin 5z-\ \dots$$

$$\theta_2\,(z,\,q)=2\,q^{1/4}\cos z+2\,q^{9/4}\cos 3z+2\,q^{25/4}\cos 5z+\ \dots$$

$$\theta_3\,(z,\,q)=1+2q\cos 2z+2q^4\cos 4z+2q^9\cos 6z+\ \dots$$

$$\theta_4\,(z,\,q)=1-2q\cos 2z+2q^4\cos 4z-2q^6\cos 6z+\ \dots$$

ఇచట $\theta_1\,(z,\,q)$ బేసిఫలము (z లో); తక్కినవి సరి ఫలములు.

తీటాఫలముల శూన్యవిలువలు : వీనికి అర్ధావర్తన లక్షణములు కలవు. కాబట్టి z_0 ఒక శూన్యవిలువ అయినచో $z_0+m\pi+n\pi\tau$ కూడ $\theta\,(z)$ యొక్క శూన్యవిలువ. $m,\ n$ ల విలువలు పూర్ణాంకములు.

ఒక గది C ని తీసికొని దానిమూలలు $t,\ (t+\pi),\ (t+\pi+\pi\tau),\ (t+\pi\tau)$ అని తీసికొన్నచో C లోపల $\theta\,(z)$ ఒక శూన్యవిలువను పొంది ఉన్నదని

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz$$

పరివృతచయనముచే చూపింపవచ్చును.

$\theta_1\,(z)$ శూన్యవిలువ $z=0$; కాబట్టి $\theta_2(z),\ \theta_3(z),\ \theta_4(z)$ ల శూన్యవిలువలు క్రమముగా $\frac{\pi}{2},\ \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right),\ \frac{\pi\tau}{2}$ వద్ద ఉండును. $0\ \frac{\pi}{2},\ \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right),\ \frac{\pi\tau}{2}$ లు ఒక సామ్య (సమానాంతర) చతుర్భుజము యొక్క మూలలు.

అనంతలబ్ధములు : తీటాఫలములను అనంతలబ్ధములుగా ప్రదర్శింపవచ్చును. ఉపపత్తులు కఠినమగుటచే ఫలితములు మాత్రము ఈయబడును :

$$\theta_4\,(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}\right)$$

ఇందు $G=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$

z కు బదులు $\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ వ్రాసినచో

$$\theta_3(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-z}\right)$$

$$\theta_1\,(z)=-i\,q^{1/4}\,e^{iz}\,\theta_4\left(2+\frac{\pi\tau}{2}\right)$$

$$=2\,G\,q^{1/4}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}\right)$$

$$\theta_2(z)=\theta_1\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\,G\,q^{1/4}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}\right)$$

అంతరీకరణ సమీకరణము : $\theta_3\,(z/\tau)$ లో $z,\ \tau$ అను రెండు స్వతంత్ర చలరాశులు కలవు. దీనిని $z,\ \tau$ చల రాశులుగా ఎన్నిసారులైనను అంతరీకరణము చేయవచ్చును. సంబంధించిన ఫలితములన్నియును ఏకరూప ఉపసరణత కలవి.

$y=\theta_3\,(z/\tau)$, లేదా, ఏ తీటాఫలమయినను

$$\frac{1}{4}\,\pi i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$$

ఉపపత్తిసులభము. తీటాఫలమును అనంత పరంపరగా తీసికొనుము.

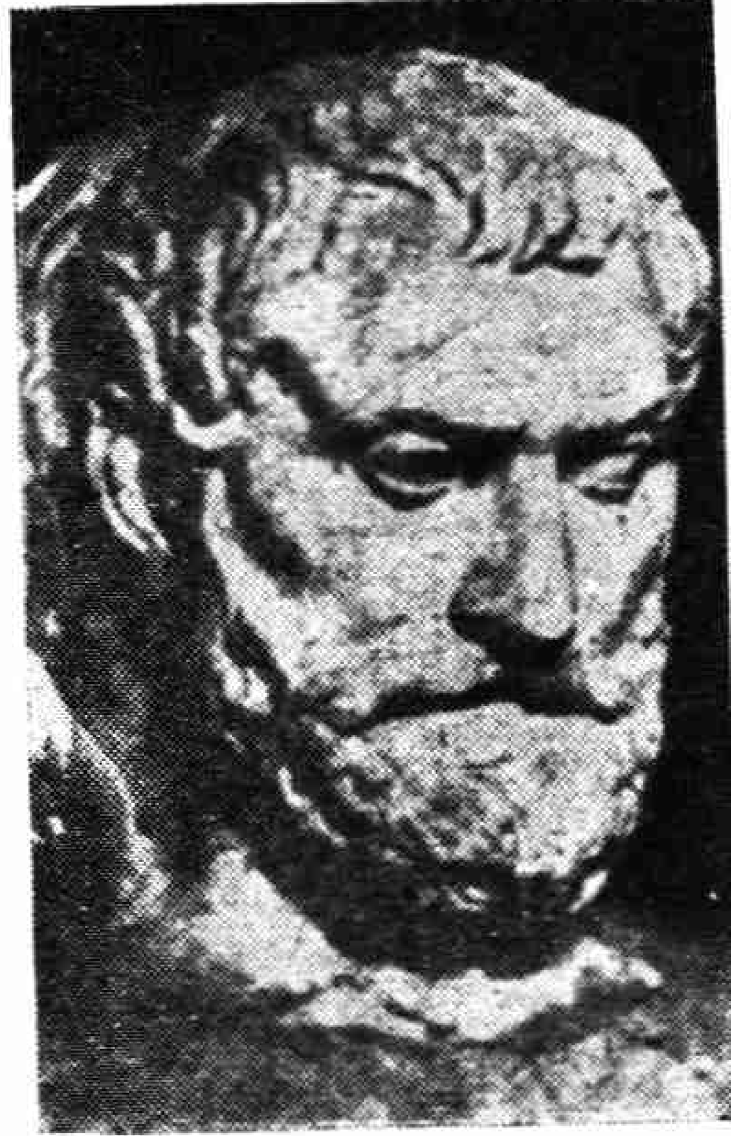
ఆచార్య

తేలీజ్ (క్రీ. పూ. 640 - 546) : గ్రీక్ గణితశాస్త్రవేత్త ; దార్శనికుడు ; ప్రాచీన గ్రీస్ యొక్క 7 గురు వివేకులలో ప్రధానుడు.

ఇతడు మైలీటస్ నగరములో జన్మించి, వ్యాపారములో అధిక ధనార్జనచేసి, అటుపిమ్మట ఈజిప్టు, బాబిలోనియా దేశములలో గణిత, ఖగోళశాస్త్రములను, దర్శనములను అధ్యయనము చేసి వాటియందు అపార జ్ఞానమును ఆర్జించెను.

గ్రహణకాలములు ముందుగనే నిర్ణయించు విధమును కనిపెట్టెను. జ్యామితి పితామహుడు అను పేరునుపొందెను.

ప్రయోగాత్మక జ్యామితిలో పిరమిడ్‌ల ఎత్తులను వాటి ఛాయల నిడివి ద్వారా కనుగొను విధమును ఇతడు కనుగొనెను.



తేలీజ్
చిత్రము 207

తన పూర్వీకులవలె గణిత సిద్ధాంతముల సత్యమును ప్రయోగ పూర్వకముగగాని, అంతర జ్ఞానముతో గాని సరిపుచ్చుకొనక వాటిని తార్కిక రీతిగ నిరూపించు విధమును తేలీజ్ ప్రవేశ పెట్టెను. అందుచేతనే ఆతని సిద్ధాంతముల సంఖ్య అతి స్వల్పమైనప్పటికి, ప్రతిపాదక జ్యామితి (డెమాన్ స్ట్రేటివ్ జ్యామిట్రీ) మార్గదర్శిగా ఆతనిని పేర్కొందురు.

తేలీజ్ సిద్ధాంతములు :

1. ఏ వృత్తము అయినను దాని వ్యాసముచే సమ ద్విఖండనము కావింపబడును.
2. సమ ద్విబాహు త్రిభుజములో పీఠకోణములు సమానములు.
3. రెండు ఋజు రేఖలు ఖండించుకొనునప్పుడు ఏర్పడు అభిముఖ శీర్ష కోణములు సమానములు.
4. అర్ధ వృత్తములోని కోణము లంబకోణము.
5. సరూప త్రిభుజములలోని అనురూప భుజములు ఒకే అనుపాతములో ఉండును.
6. రెండు త్రిభుజములలో, ఒకదాని రెండు భుజములు - వాటి మధ్యకోణము వరుసగా మరియొకదాని రెండు భుజములు - వాటి మధ్యకోణమునకు సమానమైనచో, అవి సర్వసమానములు.

తేలీజ్‌నకు బీజగణితమునందు కూడ మంచి పాండిత్యము గలదు. సంఖ్యా వాదములోని కృషి తేలీజ్‌తోనే ప్రారంభమయినది (చూ. సమితి పు. 72; దర్శనములు - మతములు - పు. 458).

పా. ల. నా.

త్రికోణమితి : త్రిభుజము యొక్క భుజములకు, కోణములకు కల సంబంధమును వివరించు గణితశాఖ త్రికోణమితి. ప్రతి బహుభుజిని సులభముగా త్రిభుజములుగా మార్చు అవకాశము ఉన్నందున, బహుభుజుల లక్షణములు కూడ త్రికోణమితి ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ఖగోళ శాస్త్రమునందు ఇది విస్తారముగా వాడబడును. భారతదేశమునందు ప్రాచీనకాలములో ఇది ఖగోళ శాస్త్రమునకు అంగముగా నిర్మింపబడెను.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు : ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము. అందు C లంబకోణము. దాని ఎదుటి భుజము AB కి కర్ణము అని పేరు. AC, BC తక్కిన భుజములు. A, B ఇతర కోణములు. కోణము A యొక్క త్రికోణమితీయ ఫలములు దిగువ చెప్పబడినవి :

జీవకు 'జీ.' అని, కోటిజీవకు 'కో. జీ.' అని, స్పర్శ జీవకు 'స్ప. జీ.' అని వాడుదురు. sine ను sin అని, cosine ను cos అని, tangent ను tan అనియు వ్రాయుట పరిపాటి.

$$\text{జీవ } A = \text{sine } A = \frac{BC}{AB} = \frac{A \text{ యొక్క ఎదుటిభుజము}}{\text{కర్ణము}}$$

$$\text{కోటిజీవ } A = \text{cosine } A = \frac{AC}{AB} = \frac{A \text{ యొక్క ప్రక్కభుజము}}{\text{కర్ణము}}$$

$$\text{స్పర్శజీవ } A = \text{tangent } A = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} \div \frac{AC}{AB} = \frac{\text{జీవ } A}{\text{కోటిజీవ } A}$$

మరికొన్ని ఇతర త్రికోణమితీయ ఫలములు కలవు :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sin A} = \text{కోటిచ్ఛేద } A \text{ (కో. ఛే. } A) = \text{cosecant } A$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos A} = \text{ఛేద } A \text{ (ఛే } A) = \text{secant } A$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\tan A} = \text{కోటిస్పర్శజీవ } A \text{ (కో. స్ప. జీ. } A) = \text{cotangent } A$$

secant ను sec అని, cosecant ను cosec అని, cotangent ను cot అని వ్రాయుట వాడుక.

కర్ణవర్గ (పితాగొరస్) సిద్ధాంతము ప్రకారము $AC^2 + BC^2 = AB^2$

దీని నుండి $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A$

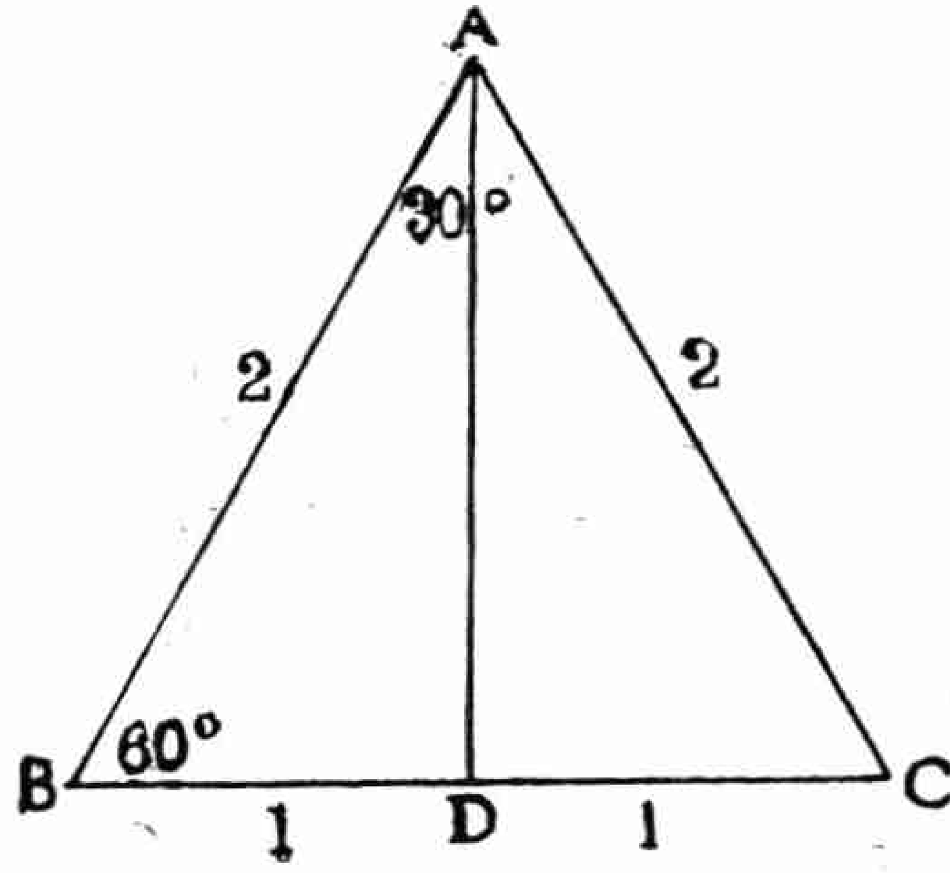
అని లభించును. ఇచ్చట $\sin^2 A$ అనగా $(\sin A)^2$ అని అర్థము. ఇతర సంకేతములలోను ఇట్లనే. వాటికి పరస్పర సంబంధములు కలవు.

$$\text{ఉదా : } \sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{(1 + \tan^2 A)}}$$

త్రిభుజము ABC లో BC = AC అయినచో $\angle A = \angle B = 45^\circ$; BC = AC = 1 అయినచో $AB = \sqrt{2}$.

అపుడు $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$: $\tan 45^\circ = 1$.

ABC సమభుజ త్రిభుజము, అనగా $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (చూ. చిత్రము 208).



చిత్రము 208

BC కి AD లంబము ; BD = DC.

BD = 1 అయినచో, AB = 2 ; $AD = \sqrt{3}$.

ఇప్పుడు $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ$

$\sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$

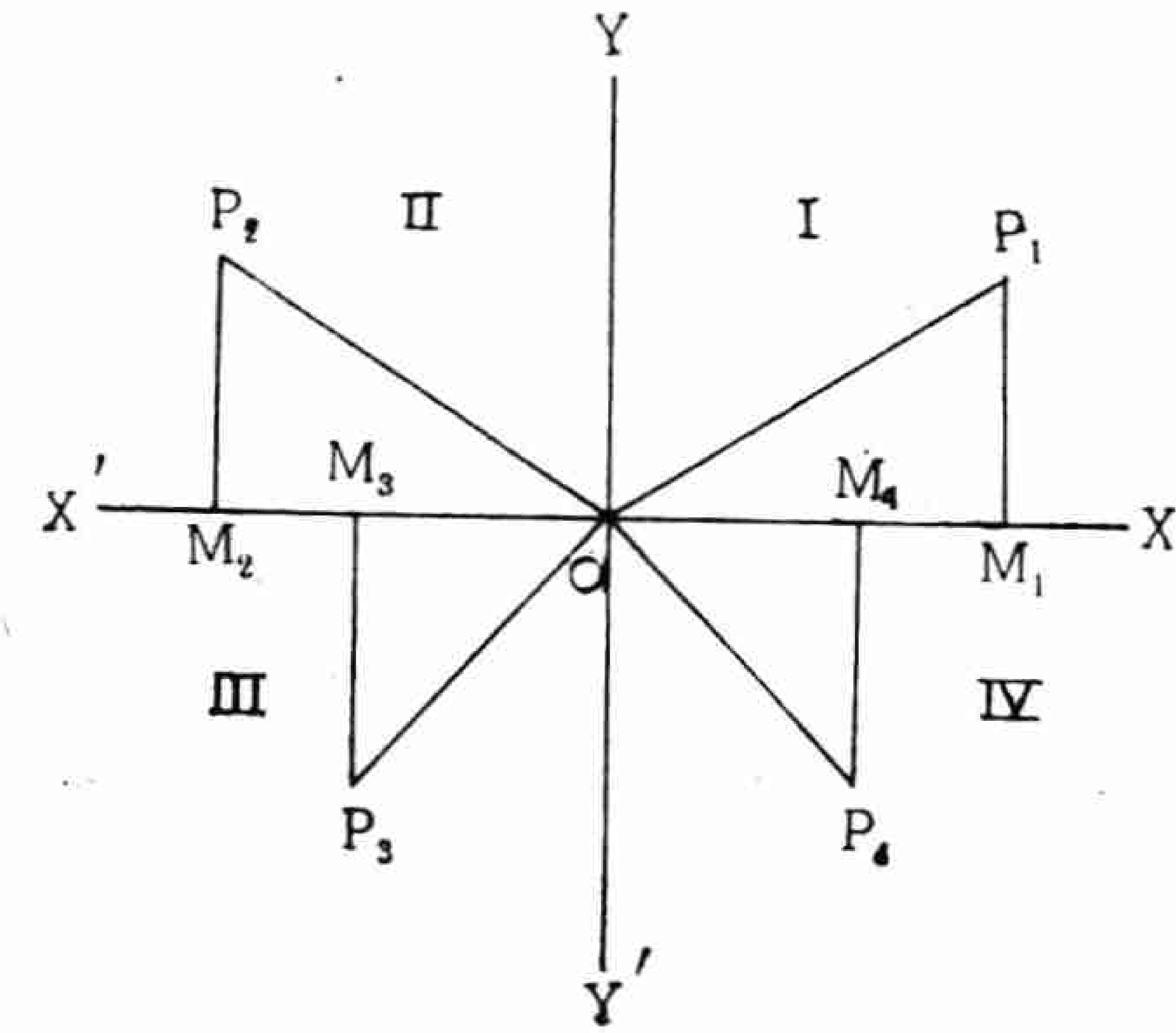
$\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3} = \cot 60^\circ$

వ్యాపకముగా $\sin(90 - A) = \cos A$, $\tan(90 - A) = \cot A$ మొదలైన ఫలములు లభించును.

అధిక ప్రమాణము కల కోణములు : ఒక ప్రధాన రేఖ OX నుండి మరియొక రేఖ OP బయలుదేరి తిరిగినచో కోణము POX ఏర్పడును. అపసవ్యదిశలో తిరిగినచో ఏర్పడు కోణమును ధనాత్మకముగాను, సవ్య దిశలో తిరిగినచో ఏర్పడు కోణమును ఋణాత్మకముగాను తీసికొనవలెను. $\angle XOP$ ధనాత్మకమయినచో $\angle POX$ ఋణాత్మకము. భుజకోటుల సంజ్ఞ నిరూపకాంశముల పాదముపై ఆధారపడియుండును (చూ. పై పట్టిక).

పాదము	I	II	III	IV
భుజము OM	+	−	−	+
కోటి MP	+	+	−	−

OP ఎల్లప్పుడును ధనాత్మకము. కాబట్టి అన్ని కోణములకును త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను సులభముగా సంజ్ఞలతో సహా నిర్ణయింపవచ్చును. మునుపటి నిర్వచనము ప్రకారము $\sin 150^\circ = \sin XOP = \frac{P_2M_2}{OP_2} = \sin XOP_1 = \sin 30^\circ = +1/2$



చిత్రము 209

$$\cos 150^\circ = \frac{OM_2}{OP_2} = -\sqrt{3}/2.$$

ఒక కోణము 330° అయినచో దానిని −30° అని కూడ చెప్పవచ్చును. అపుడు సదిశరాశి OP సవ్యదిశలో 30° కోణముగుండా తిరిగినట్లు తలచుకొనవలెను. కాబట్టి ఒక కోణము A ను $A + 360^\circ$, $A + 720^\circ$, ... $A - 360^\circ$, $A - 720^\circ$, వ్యాపకముగ $A \pm n.360^\circ$ అని తీసికొనవచ్చును. ఇందు n ఒక పూర్ణాంకము. క్రింది పట్టికలో 0°, 90°, 180°, 270°, 360° లకు త్రికోణమితీయ ఫలములు ఈయబడినవి :

కోణము	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	∞	0	−∞	0

కోణము A యొక్క సంబంధకోణములు 4 పాదములలో ఉండునపుడు వాని త్రికోణమితీయ ఫలములు దిగువ పట్టికలో ఈయబడినవి :

కోణము	90 − A	90 + A	180 − A	180 + A	270 − A	270 + A	360 − A	360 + A
sin	cos	cos	sin	− sin	− cos	− cos	− sin	sin
cos	sin	− sin	− cos	− cos	− sin	sin	cos	cos
tan	cosec	− cosec	− tan	tan	cosec	− cosec	− tan	tan

వీటిని చదువు విధము: $\sin(90-A) = \cos A$; $\sin(270+A) = -\cos A$; $\cos(180-A) = -\cos A$; $\tan(90+A) = -\cot A$. ఇట్లే తక్కినవి

మిశ్రకోణముల ఫలములు :

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

అని నిరూపింపవచ్చును. భాగహారమువలన

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ఈ సూత్రములను బహుకోణములకు అన్వయింపచేయ వచ్చును. వాటినుండి 2 A, 3 A కోణములకు సూత్రములు ఏర్పరుపవచ్చును. B ని $-B$ గా మార్చిన, $(A-B)$ కోణములకు తగిన సూత్రములు లభించును.

లబ్ధములను సంకలనములుగాను, సంకలనములను లబ్ధములుగాను మార్చుట :

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$

ఈ సూత్రములలో $A+B = C$, $A-B = D$ అని తీసికొన్న, క్రింది సూత్రములు లభించును :

$$\sin C + \sin D = 2 \sin\frac{C+D}{2} . \cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos\frac{C+D}{2} . \sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos\frac{C+D}{2} . \cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos D = 2 \sin\frac{C+D}{2} . \sin\frac{C-D}{2}$$

త్రిభుజముల కోణములకు, భుజములకుగల సంబంధము :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$a = b \cos C + c \cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A$

$a + b + c = 2s$ అని తీసికొనినచో

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{bc}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = abc/4R$. ఇందు R త్రిభుజ పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము.

r అంతర్వృత్త వ్యాసార్ధము, r_1 త్రిభుజములో A కోణమునకు ఎదుటి బాహ్యవృత్త వ్యాసార్ధము అయినచో

$$r = \frac{\Delta}{s}; \; r_1 = \frac{\Delta}{(s-a)} = s \tan\frac{A}{2}$$

ఇట్లే r_2, r_3, లకు సూత్రము తెలుసుకొనునది.

I, అంతర కేంద్రము, I_1, I_2, I_3 లు బాహ్య కేంద్రములు అయినచో త్రిభుజము ABC, బాహ్యకేంద్ర త్రిభుజము $I_1 I_2 I_3$ యొక్క పాదత్రిభుజము (పెడల్ ట్రయాంగెల్) అగును. $\Delta I_1 I_2 I_3$ యొక్క లంబకేంద్రము I.

AD, BE, CF లు త్రిభుజము ABC కి లంబములు అయినచో ΔABC యొక్క పాదత్రిభుజము ΔDEF. దీని కోణములు $180^\circ - 2A$; $180^\circ - 2B$; $180^\circ - 2C$. దాని పరివృత్త వ్యాసార్ధము $= R/2$.

చతుర్భుజములు : చతుర్భుజము $ABCD$ యొక్క భుజములు AB, BC, CD, DA లు a, b, c, d లు అయినచో వైశాల్యము $S = \frac{1}{2} AC . BD \sin \alpha$. ఇచ్చట α వికర్ణములు AC, BD ల మధ్య ఉండు అల్పకోణము.

$2\beta = (A+C) = 360 - (B+D)$ అయినచో

$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \beta$

చతుర్భుజము ABCD చక్రీయము అయినచో

$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

వికర్ణములు $AC^2 = \dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}$

$$BD^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$$

ఈ సూత్రములు బ్రహ్మగుప్తుని గ్రంథమునందు ఈయబడినవి. వీనిచే పూర్ణాంకములుగా ఉండు భుజములు, వికర్ణములు కల చక్రీయ చతుర్భుజములను అతడు కనుగొనెను. ఉదా: $a^2 + b^2 = c^2$; $p^2 + q^2 = r^2$ అయినచో ar, cq, br, cp భుజములుకల చతుర్భుజము చక్రీయము అనియు, వైశాల్యము, వికర్ణములు అకరణీయములు అనియు, వికర్ణములు పరస్పర లంబములు అనియు బ్రహ్మగుప్తుడు వివరించెను. తరువాత త్రిభుజముల భుజములు, లంబములు, వైశాల్యములు పూర్ణాంకములుగా ఉండునట్లు చేయుటకు మార్గము చూపెను.

బహుభుజి : n భుజములు కల ఒక క్రమ బహుభుజి (రెగ్యులర్ పాలిగన్) r వ్యాసార్ధముకల ఒక వృత్తములో అంతర్లిఖితము అయినచో దాని మొత్తము చుట్టుకొలత $= 2nr. \sin\frac{\pi}{n}$; వైశాల్యము $= 2nr^2. \sin\frac{2\pi}{n}$.

r వ్యాసార్ధముకల వృత్తమునకు అది పరిలిఖితము అయినచో దాని మొత్తము చుట్టుకొలత $= 2nr. \tan \pi/n$; వైశాల్యము $= nr^2. \tan \pi/n$

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల వ్యాపక విలువలు : ఒక కోణము α బహుమూల్యము అయినందున $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ల విలువలు ఇచ్చినచో, α విలువలు బహుమూల్యములై ఉండును. వాటిని క్రింది సూత్రముల మూలమున తెలిసికొనవచ్చును.

$$\sin\alpha = \sin\{n\pi + (-1)^n\alpha\}$$

$$\cos\alpha = \cos(2n\pi \pm \alpha)$$

$$\tan\alpha = \tan(n\pi + \alpha)$$

విలోమఫలములు : $\sin\alpha = k$ అయినచో, $\alpha = \sin^{-1}k$ అని వ్రాయవచ్చును. k ఇచ్చినట్లయితే α బహుమూల్యము అయినందున దాని విలువ 1, 4 పాదములలో ఉండునట్లు అనగా $-\pi/2 < \sin^{-1}k < \pi/2$ మధ్య ఉండునట్లు తీసికొనవలెను. ఇట్లే కోసైన్ (కో. జీవ) విషయములో కోణము (θ, π) లో నున్నట్లు తీసికొనవలెను. అనగా $\theta \leq \cos^{-1}k < \pi$. అదే విధముగ టాంజెంట్ (స్ప. జీవ) విషయములో కోణము $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ఉండునట్లు తీసికొనవలెను. అనగా $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}k \leq \frac{\pi}{2}$ కని పెట్టవచ్చును.

అవధి - ఆసన్నమానములు : శూన్యమునుండి $\pi/2$ వరకు θ మారునపుడు $\sin\theta/\theta$ అవిచ్ఛిన్నముగా 1 నుండి $2/\pi$ వరకు మారును.

θ అల్పమైనప్పుడు $1 > \cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2}$;

$$\theta > \sin\theta > \theta - \frac{\theta^3}{4}$$

కాబట్టి θ శూన్యమును సమీపించునపుడు $\sin\theta/\theta$ ఇరువైపుల నుండి 1 ని సమీపించును. అనగా

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1;\ \text{ఇట్లే}\ \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1;$$

$$\lim_{\theta\to 0}\tan\theta/\theta = 1$$

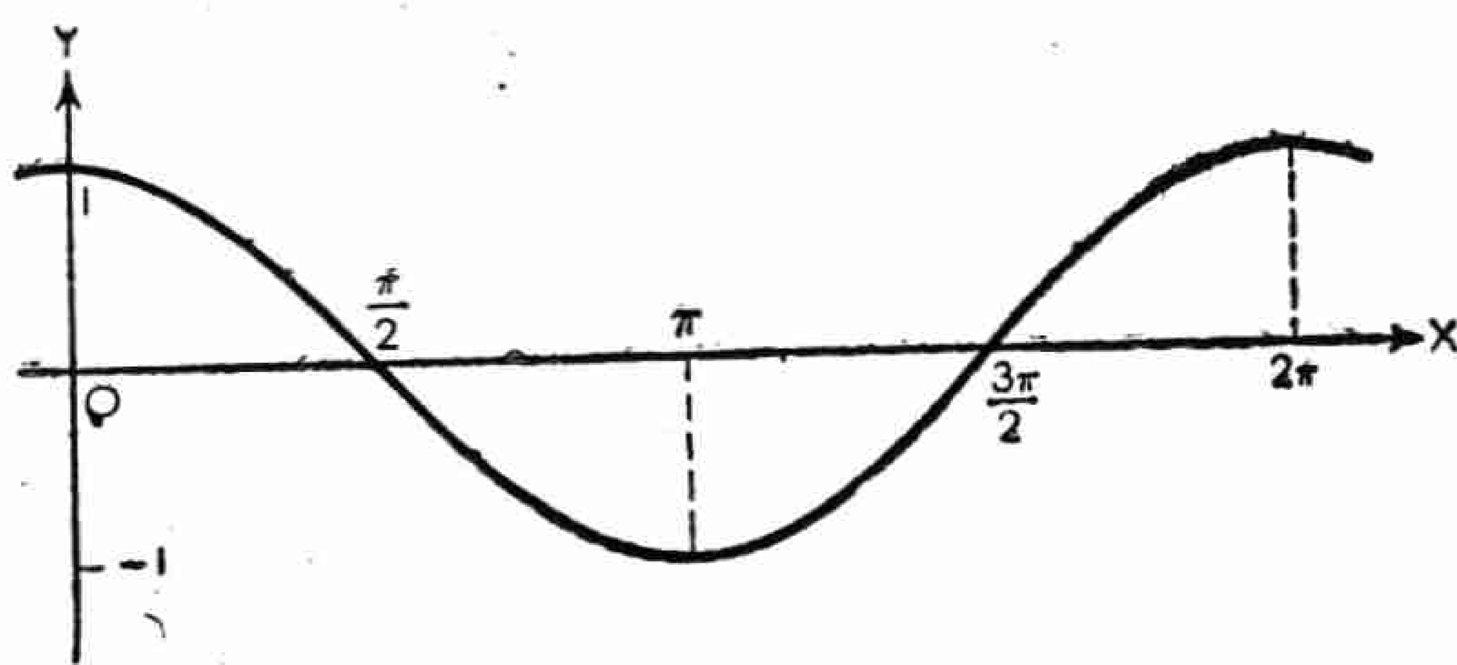
పరిమితశ్రేణుల సంకలనము :

$$\sum_{r=1}^{n}\sin(\alpha + \overline{n-1}\,\beta) = \frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\cdot\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)$$

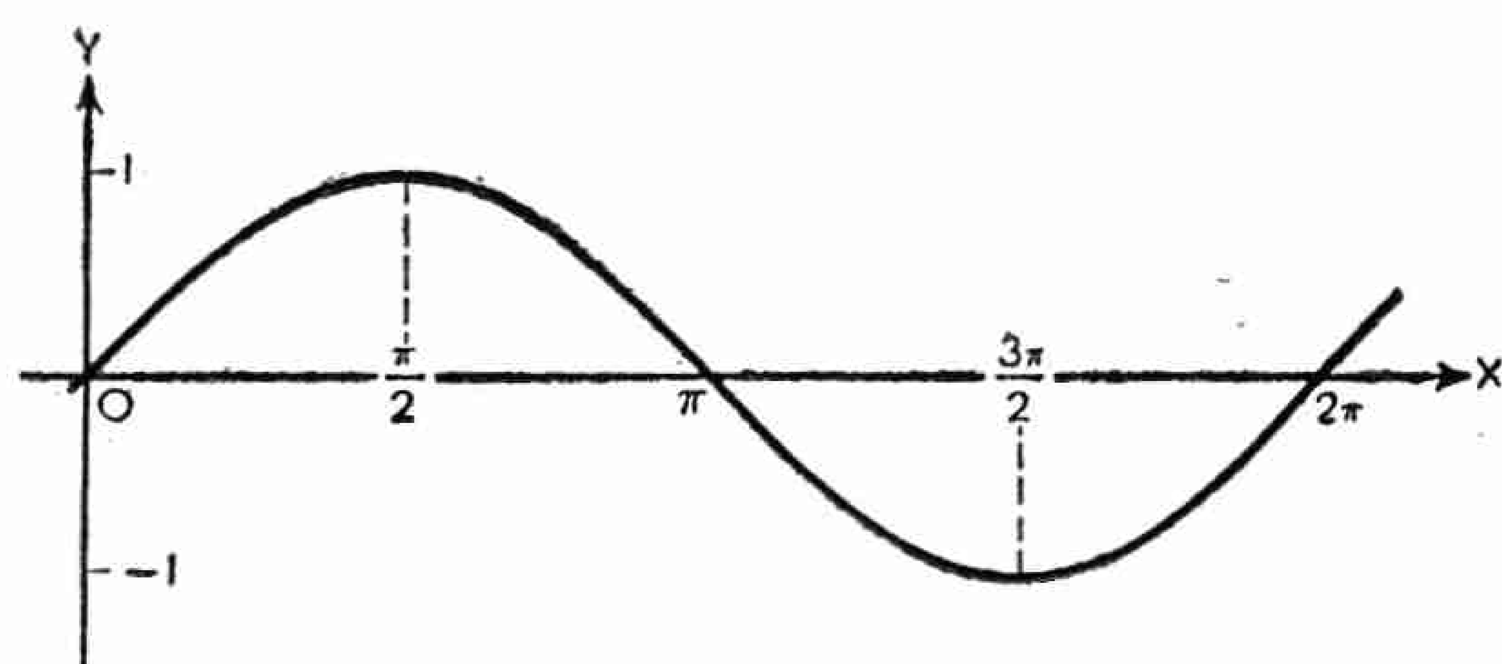
ఎడమవైపున ఉండు ప్రతిపదమును $\sin\beta/2$ చే గుణించి, లబ్ధములను సంకలనము చేయగా పై ఫలితము లభించును.

ఇట్లే $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\alpha + \overline{n-1}\,\beta) = \frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\cdot\cos(\alpha + \overline{n-1}\,\beta/2)$

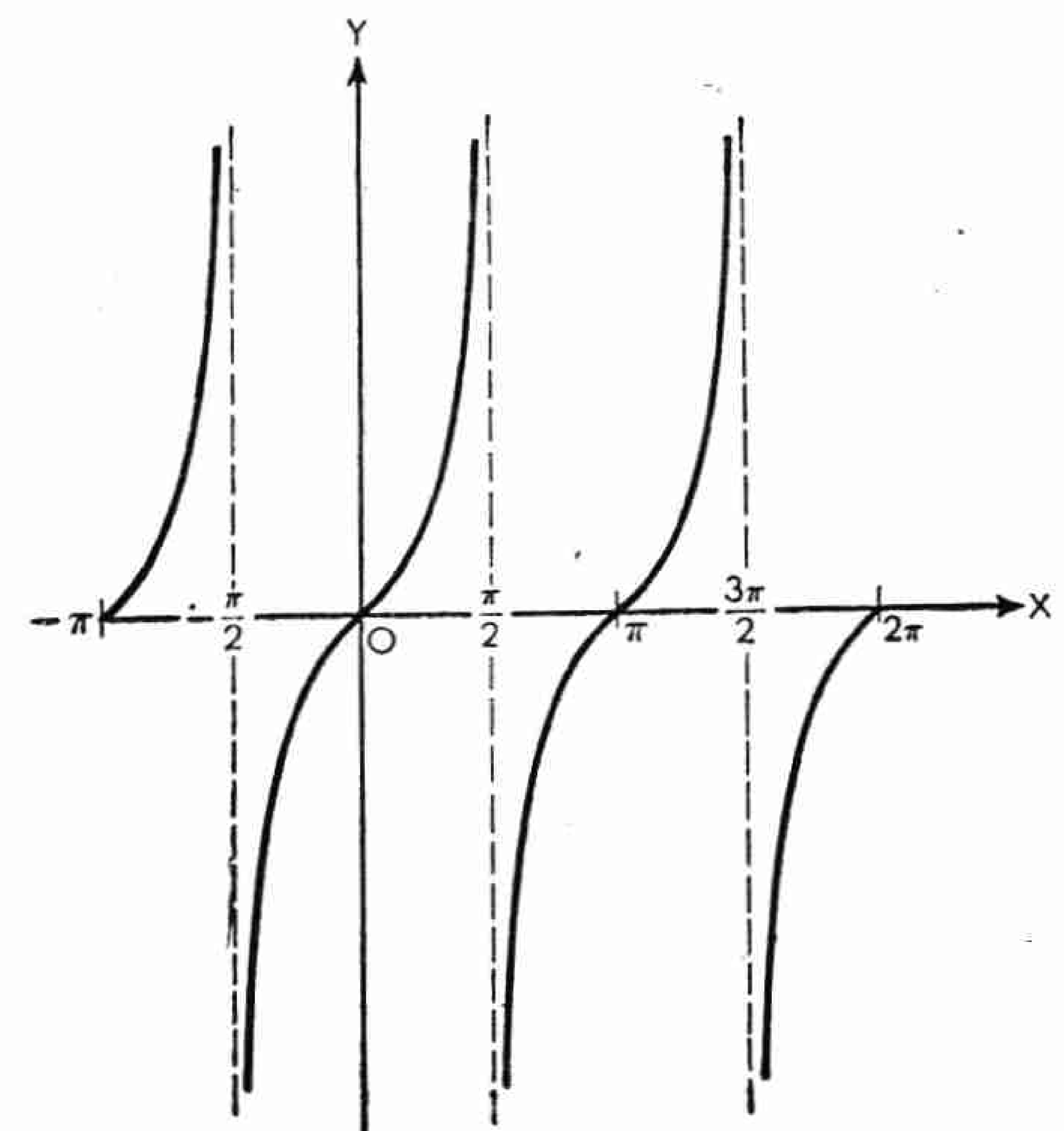
త్రికోణమితీయ ఫలముల రేఖాచిత్రము : కోణము $\theta - n\pi$ నుండి $+n\pi$ వరకు మారునపుడు త్రికోణమితీయ ఫలముల రేఖాచిత్రములను గీయవచ్చును. $\sin\theta$, $\cos\theta$ ల విలువ -1 నుండి $+1$ వరకు మారును. $\tan\theta$ విలువ $-\infty$ నుండి $+\infty$ వరకు మారును. వాటి రేఖాచిత్రములు 0 నుండి 2π వరకు దిగువ చూపబడినవి. ఇట్లే తక్కిన ఫలములకు రేఖాచిత్రములు గీయవచ్చును.



చిత్రము 210 జీవరేఖాచిత్రము $0 \leq \theta \geq 2\pi$



చిత్రము 211 కో. జీవరేఖాచిత్రము $0 \geq \theta \leq 2\pi$



చిత్రము 212

స్పర్శజీవరేఖాచిత్రము $-\pi \leq \theta \leq 2\pi$

రేడియన్ కోణము : ఒక వృత్త పరిధిపై దాని వ్యాసార్ధము నిడుపుగాకల చాపమును తీసికొనుము. దాని కొనలను కేంద్రబిందువునకు చేర్చగా కలుగు ఋజురేఖలకు మధ్య ఉండు కోణమునకు రేడియన్ అనిపేరు. ఇది ఒక స్థిరకోణము. వృత్తపరిధి $2\pi r$ అగుటచే ఒక రేడియన్ విలువ $\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' = 3437'$. ఆర్యులు జీవపథకమును పూర్ణాంకముగా ఇచ్చి, ప్రతిదాని హారము 3437 అని తీసికొనిరి.

$\sin \theta$, $\cos \theta$ లకు సంకలనపరంపరలు : θ ను రేడియన్ మానములో తీసికొన్నచో

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \dots$$

θ యొక్క అన్ని విలువలకు ఇవి ఉపసరణపరంపరలు. $\tan \theta$ యొక్క పరంపర కష్టసాధ్యము. అయితే $\tan^{-1} x$ యొక్క పరంపర అతిసులభము.

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \dots$$

ఇందు $|x| < 1$ ఉన్నచో ఈ పరంపర ఉపసరణ పరంపర అగును. ఇది మొట్టమొదట కేరళరాష్ట్రమున కనిపెట్టబడినది.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \dots$ అయినందున

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. ఇచట $i = \sqrt{-1}$. దీనినుండి

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2};$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$ అనునవి లభించును. ఈ సంబంధమును ఆయ్‌లర్ ప్రతిపాదించెను.

$\theta = \pi$ అని తీసికొనిన $e^{\pi i} = -1$

కరణీయసంఖ్యలు e, π లకు పూర్ణాంకము 1 కి, సంకీర్ణసంఖ్య $i = \sqrt{(-1)}$ కు మధ్యకల ఈ సంబంధము అత్యాశ్చర్యకరము కదా!

పథకములు : ఆర్యులు ఒక లంబకోణమును 24 భాగములు జేసి, $3\frac{3}{4}^\circ$ కిని, దాని గుణకములకు జీవ పథకములు నిర్మించిరి. ఇవి అన్నియు భిన్నములు కనుక అన్నిటికి 3437 ను ఉమ్మడిహారముగా తీసికొని, లవములకు అతి శ్రేష్ఠములైన పూర్ణాంకవిలువలను కనిపెట్టిరి.

a, b, c లు మూడువరుసచాపములు, $a - b = b - c = 3^\circ 45'$ అయినచో $\sin a - \sin b = \sin b - \sin c = \frac{\sin b}{225}$ అను సూత్రమును ఉపయోగించి, జీవపథకములను భారతీయులు నిర్మించిరి.

ఇపుడు పథకములను నిర్మించుటకు పరంపరలను, అంతర్నివేశన (ఇంటర్ పొలేషన్) విధానములను వాడి గణితజ్ఞులు 21 దశాంశస్థానములవరకు వాటిని సాధించిరి. ఒక డిగ్రీకి 6 వ భాగపు అంతరములను తీసికొని, అన్ని కోణములకు త్రికోణమితి ఫలములను ఇచ్చినారు.

x వాస్తవిక రాశి అయినచో, త్రికోణమితీయ ఫలమును లంబకోణభుజముల నిష్పత్తిమూలముగ నిర్వచింపవచ్చును. కాని x సంకీర్ణ రాశి అగునపుడు ఈ నిర్వచనము ఉపయోగపడదు. అప్పుడు సంకలన విధానము వాడవలెను. దీర్ఘవృత్త, అతిపరాస జ్యామితులందు పరంపర విధానమే వాడవలెను. వాటియందు సమరూప త్రిభుజములు లేవు.

ఎమ్. రా.

త్రిపరిమాణిక జ్యామితి : చూ. విమాత్రయ జ్యామితి.

త్రిపరిమాణిక బలవాదము : యాంత్రిక శాస్త్రమందు ఒక బలమును దాని పరిమాణమును, దాని దిశను, అది పనిచేయు రేఖను ఇచ్చినట్లైన సంపూర్ణముగ నిర్దేశించవచ్చును. ఇట్టి బలమును ఒక సదిశరేఖచే సూచించవచ్చును. ఈ రేఖపొడవు బలముయొక్క పరిమాణము, దాని దిశ బలప్రయోగ దిశను తెలియజేయును. ఒక బిందువువద్ద పనిచేయు రెండు బలములను, ఆ బల సదిశ రాశులకు సమానాంతర చతుర్భుజ సూత్రమును అన్వయించి ఒకే బలముగ సంయోజనము కావించవచ్చును (చూ. కణగతి శాస్త్రము - పు. 170). ఆ రెండు బలములు సమానాంతర రేఖల వెంబడి పనిచేసినను, వాటికి మనము పరస్పరము రద్దుచేసుకొను రెండు బలముల కలిపి, వాటిని రెండు అసమానాంతర బలములుగా మార్చవచ్చును. తరువాత, సమానాంతర చతుర్భుజ సంయోజన సూత్రమును ఉపయోగించి, ఆ రెండు బలములు ఒకదానిగా సంయోజించగలము.

కాని పైన చెప్పినదానికి ఒక మినహాయింపు కలదు. ఒకే తలములో పనిచేయుచున్న రెండు బలములను ఒక బలముగా సంయోజన చేయలేని పరిస్థితికలదు. ఆ బలములు పరిమాణములో సమానమై, సమానాంతర దిశలలో విముఖములు ఐనప్పుడు ఈ పరిస్థితి సంభవించును. ఇట్టి 2 బలముల సమూహమునకు యుగ్మమని పేరు. ఒకే తల

ములలో గాని, సమానాంతర తలములలోగాని ఉండి, వాటి బిభ్రమిషలు మహత్త్వములోను, సంజ్ఞలోను సమానమై ఉన్న రెండు యుగ్మములు సమానములనవలెను. ఒక బల యుగ్మముయొక్క బిభ్రమిషను ఇట్లు నిర్వచింపవచ్చును. ఆ యుగ్మములోని ప్రతిబలముయొక్క మహత్త్వమును ఆ రెండు బలప్రయోగ సమానాంతర రేఖల మధ్య దూరముచే గుణించిన వచ్చుఫలమే యుగ్మముయొక్క బిభ్రమిష. పనిచేయు సమయమున ఆ వస్తువును గడియారపు ముళ్లు నడచు దిశలోగాని, దానికి విరుద్ధ దిశలోగాని ఆ రెండు బలములు త్రిప్పు దిశనుబట్టి వాటి ఋణాత్మక, ధనాత్మక సంజ్ఞలు ఉండును. ఇట్లు సమతలగతమైన ఏ బలముల సమూహమైనను ఒకే బలముగా గాని, ఒకే యుగ్మముగా గాని మార్చవచ్చును.

త్రిపరిమాణికబలములు : యుగ్మతలమునకు లంబముగా ఉండునదియు, దాని పొడవు ఆ యుగ్మపు బిభ్రమిషను తెలియజేయునదియు అగు ఒక సదిశరాశిచే ఆ యుగ్మమును నిరూపించవచ్చును. బలములవలె యుగ్మములను కూడ సమానాంతర చతుర్భుజ నియమమును అనుసరించి సంకలనము చేయవచ్చును. ఈ సంకలన ఫలము మరల ఒక యుగ్మమే అగును. బలములకు విసదృశముగ సదిశరాశి పనిచేయు వాస్తవిక క్రియారేఖ, యుగ్మముల విషయమై సార్థకముకాదు. సమాన సదిశరాశులచే సమానాంతర రేఖలను అనుసరించి గుర్తించబడిన యుగ్మములు అన్ని విధముల సమానములు.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశమందు పనిచేయుచున్న బలముల వ్యవస్థ ఒకటి కలదనుకొందము. నిరూపకాక్షముల కేంద్రస్థానమగు O గుండ పోనిది, *PQ* అను రేఖను ఆశ్రయించి పనిచేయుచున్న F_1 అను బలమును తీసికొందము. ఇప్పుడు F_1కు సమానాంతరముగ ఉండి, F_1తో సమాన మహత్త్వముగల F_2, F_3 అను రెండు బలములను O ద్వారా ప్రవేశపెట్టుదము. ఈ రెండిటిలో F_2, F_1 తో సమాన దిశలో ఉన్నచో F_3 దానితో విరుద్ధదిశలో ఉండును. స్పష్టముగా F_2, F_3 పరస్పరము రద్దుచేసికొనును. మనము మొదటి వ్యవస్థకు ఏ బలమును సంకలనము చేయనివారమే అగుదుము. F_1, F_3 కలిసి G అను యుగ్మము ఏర్పడును. అదికాక F_2 బలము O ద్వారాపోవును. అనగా ఇప్పుడు మనము చేసినదేమన, ఒక దత్త కేంద్రస్థానము O గుండ పోని F_1 అను బలమునకు బదులుగా అట్టి కేంద్రస్థానము ద్వారా పోవు సమానాంతర, సమాన బలమును, దానిలో ఒక యుగ్మమును తీసికొంటిమి. ఆ వ్యవస్థకుచెందు తక్కిన బలములు అన్నిటిని ఇట్లే గావించినచో, O గుండ పోవు అనేక బలములు, అనేక యుగ్మములు మనకు గోచరించును. ఈ బలములు అన్నిటిని కేంద్రస్థానము O గుండ వెళ్ళు ఒకే బలము F గను, యుగ్మములు అన్నిటిని ఒకే యుగ్మము G గను సంయోజన చేయవచ్చును. సాధారణముగ FG లు భిన్న దిశలలో ఉండును. కాని, కేంద్రస్థానము 'O' ను సరిగా ఎన్నుకొనినచో FG లు పరస్పర సమానాంతరములగును.

ఒక రేఖను ఆశ్రయించిన బలము F; ఆ రేఖ ననుసరించియే నిర్దేశింపబడిన యుగ్మము G కల ఒక వ్యవస్థకు 'రెంచి' అని పేరు. ఈ నిర్వచనము యొక్క అర్థమిది: ఒక వస్తువుపై పనిచేయుచున్న బలవ్యవస్థ ఏదియైనను, ఆ వస్తువును ఏదో ఒక రేఖవెంబడి త్రోసి చలనమును కలిగించుట అను క్రియను అదే సమయములో ఆ రేఖకు సాపేక్షముగ ఆ వస్తువును త్రిప్పుటకును ఆ బలవ్యవస్థ ప్రయత్నించును.

శుద్ధ గతిశాస్త్రములోని ఒక సదృశ ఫలము: బల సిద్ధాంతమునకును, గతి సిద్ధాంతములకును సాదృశ్యము కలదని మనకు తెలియును. ఈ సాదృశ్యమందు బలములు కోణీయ భ్రమణవేగములకు, యుగ్మములు స్థానాంతర చలనములకు అనురూపములుగా ఉండును. స్థితి శాస్త్రమందు ఈ ఫలమును అనగా ఏ బలవ్యవస్థనైనను ఒక బలము, దాని ప్రయోగరేఖను అనుసరించిన యుగ్మము చేరిన వ్యవస్థవలన గుర్తింపవచ్చును అనుదానికి శుద్ధగతి శాస్త్రములో సదృశ సిద్ధాంతము ఉన్నది. ఒక దృఢ వస్తువుయొక్క చలనమును ఒక అక్షమునకు చుట్టు ఆ వస్తువుయొక్క తాత్కాలిక భ్రమణమును ఆ అక్షము దిక్కుననే ఆ వస్తువు పొందు జారుటను ఈ రెండు చలనముల వలన గుర్తించవచ్చును.

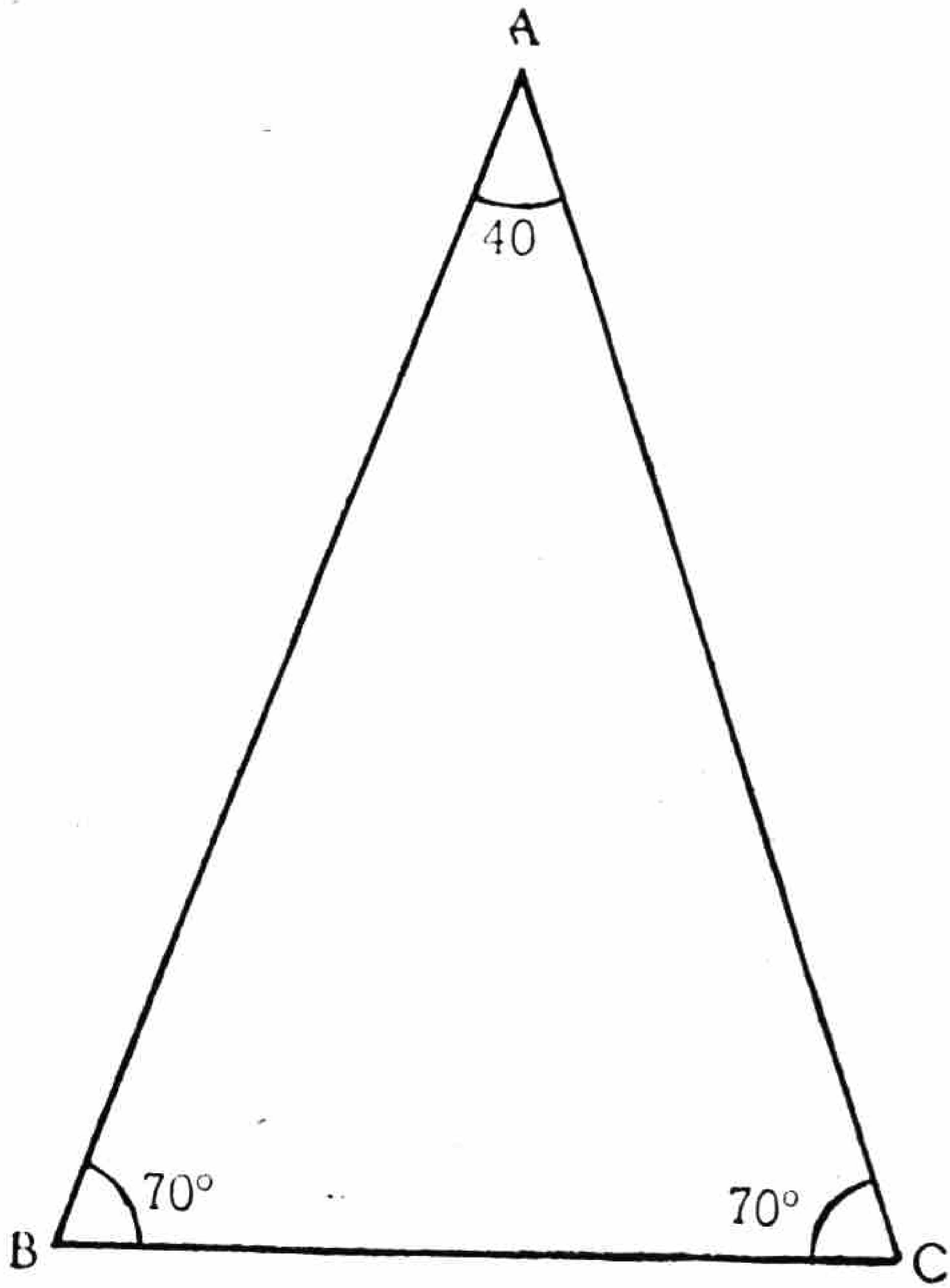
ఆ. న.

త్రిభుజము (ట్రైయాంగెల్): ఒకే ఋజురేఖలో లేని మూడు బిందువులను ఋజురేఖా ఖండములచే చేర్చినప్పుడు ఏర్పడు చిత్రమును త్రిభుజము అందురు. త్రిభుజమునకు 3 భుజములు, 3 కోణములు ఉండును.

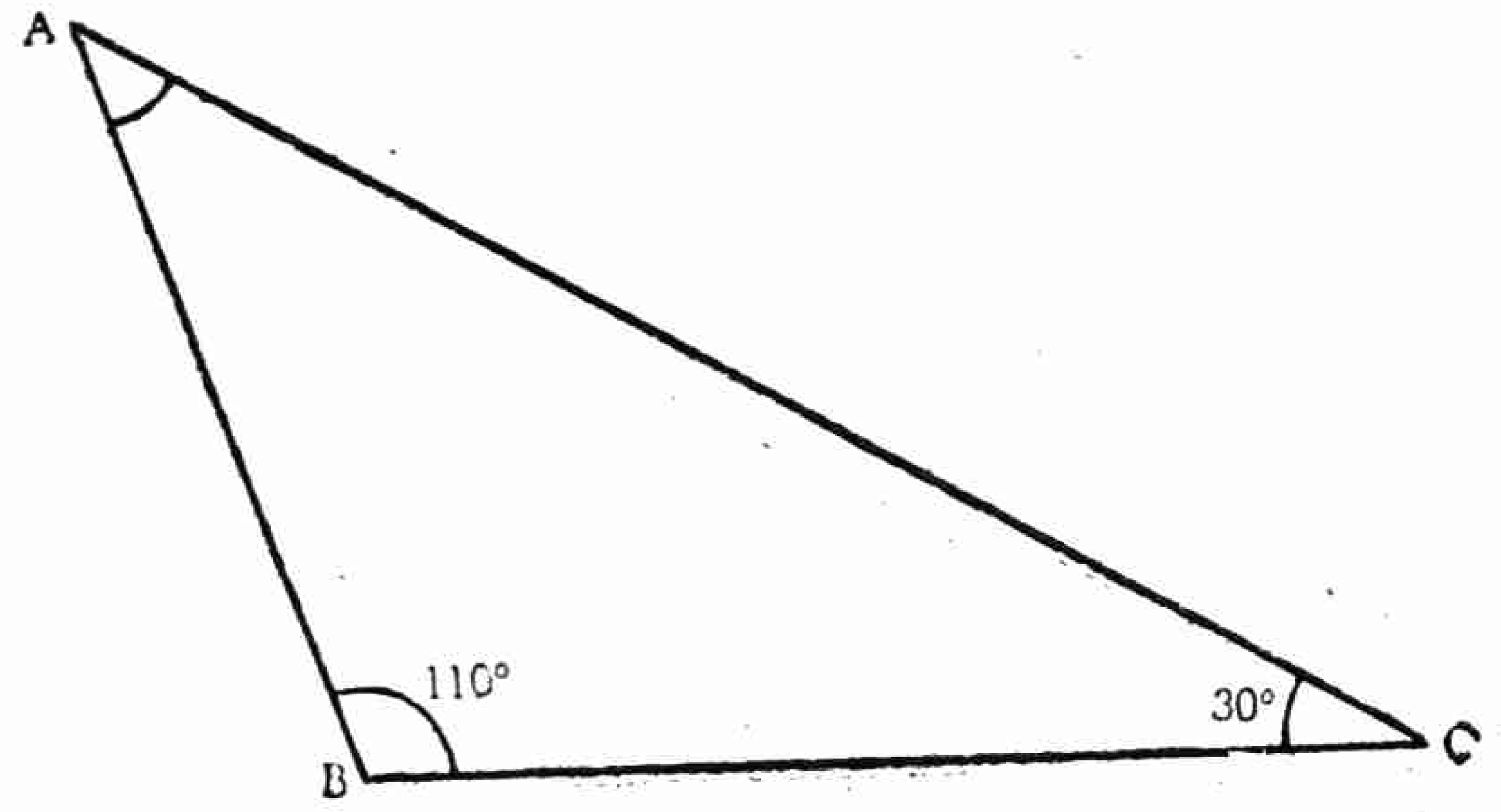
త్రిభుజములు 6 రకములు: 1. విషమ త్రిభుజము; 2. సమద్విభుజ త్రిభుజము; 3. సమభుజ త్రిభుజము; 4. అల్పకోణ త్రిభుజము; 5. గురుకోణ త్రిభుజము; 6. లంబకోణ త్రిభుజము.

విషమ త్రిభుజము (స్కేలీన్ ట్రైయాంగెల్): ఏ రెండు భుజములు సమానముగ ఉండని త్రిభుజమును విషమ త్రిభుజము అందురు.

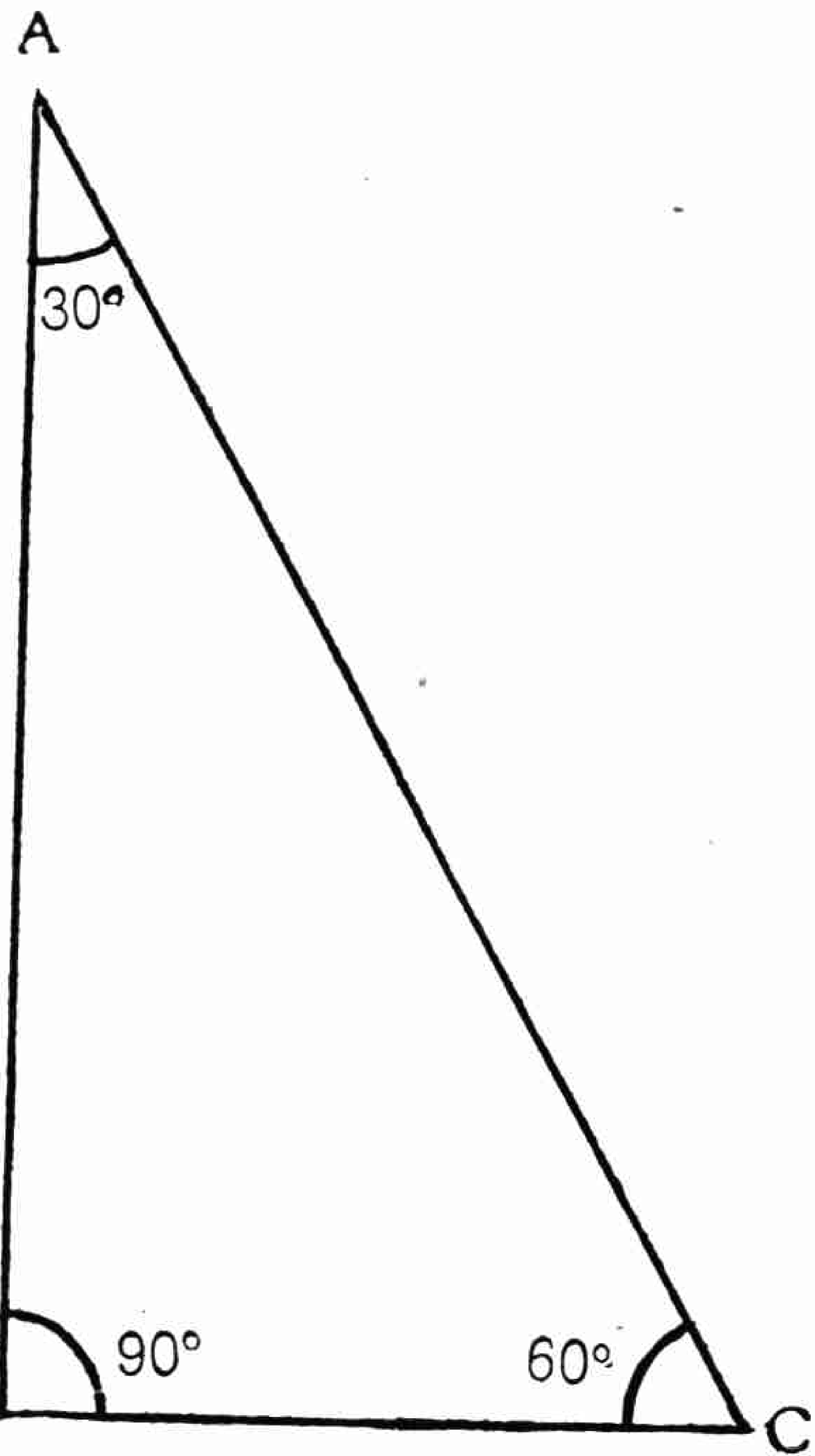
సమద్విభుజ త్రిభుజము: త్రిభుజములో రెండు భుజములు సమానముగ ఉన్న దానిని సమద్విభుజ త్రిభుజము



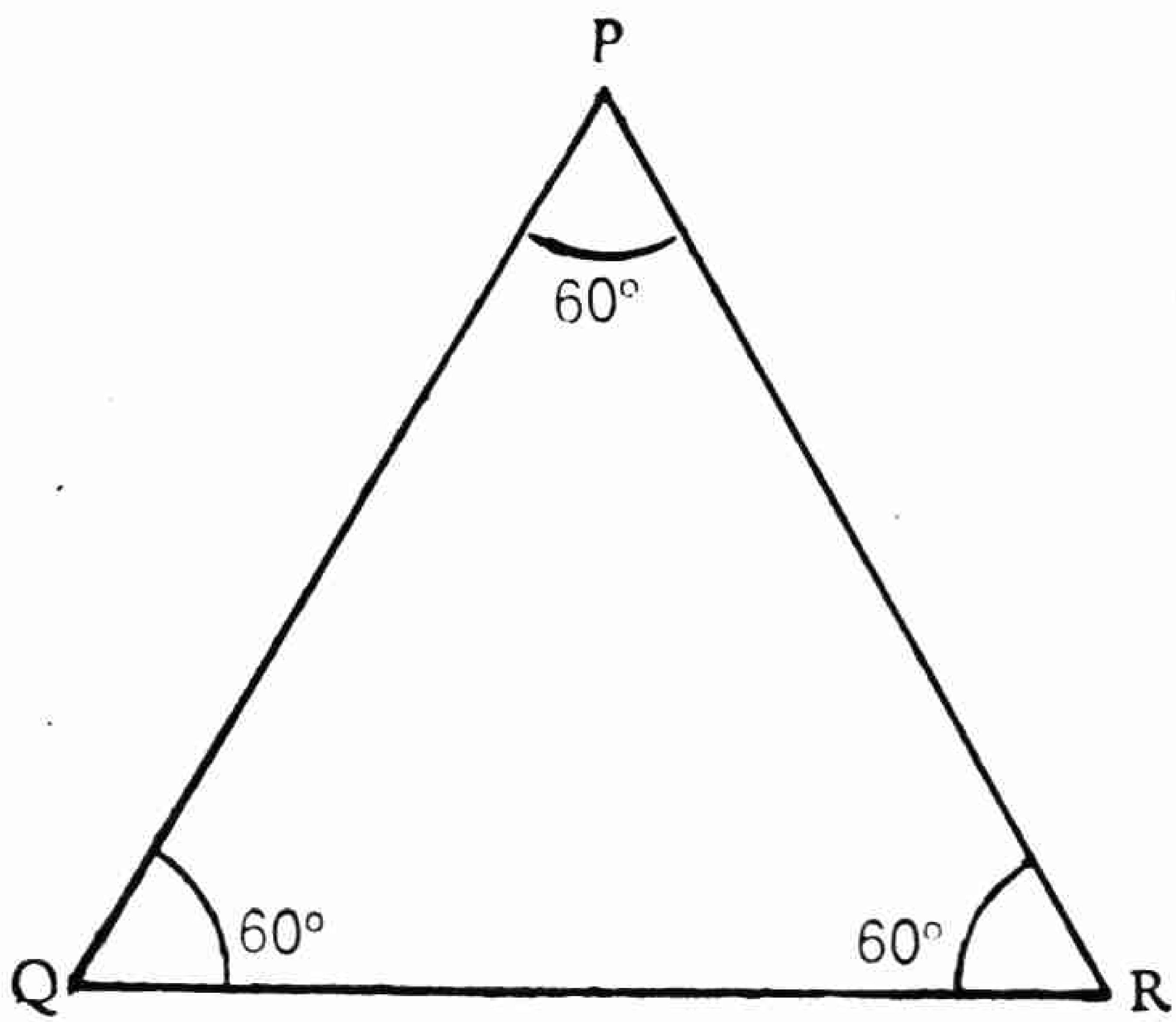
చిత్రము 213 సమద్విభుజ త్రిభుజము



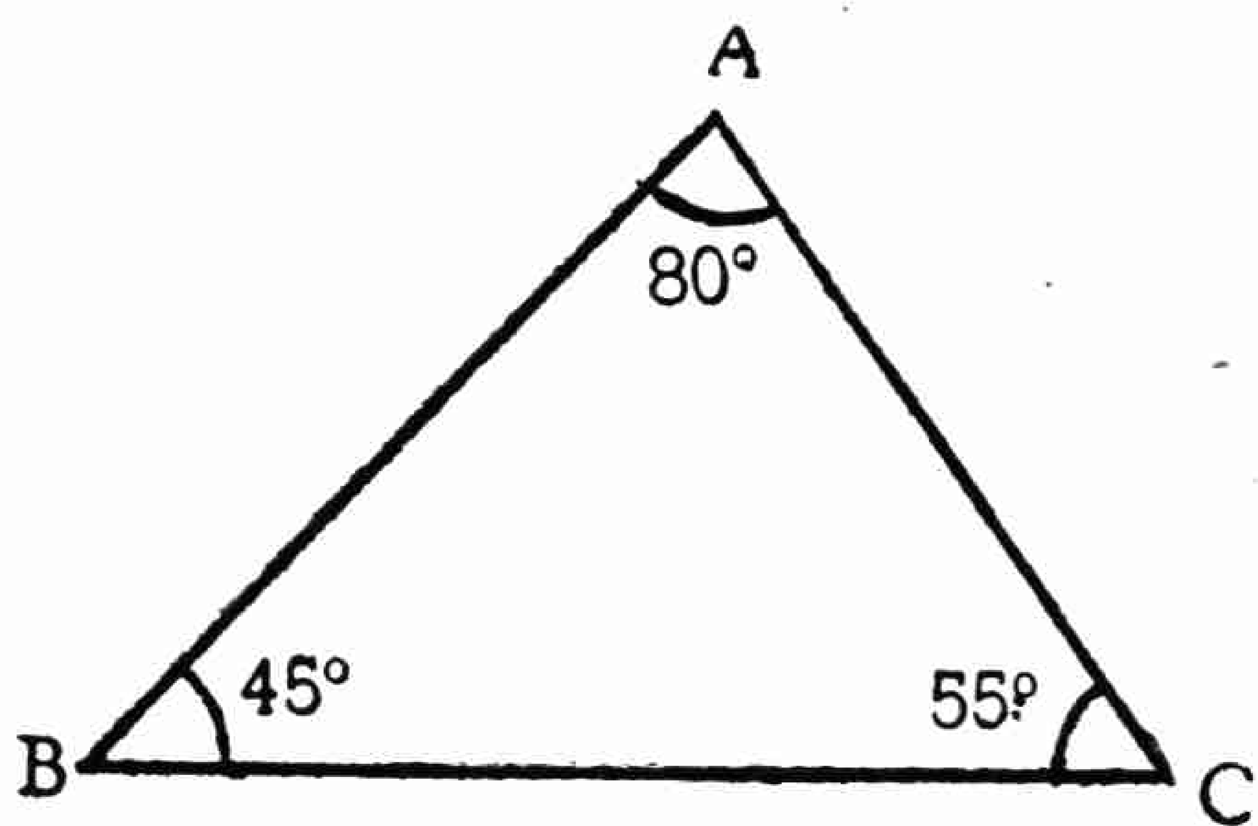
చిత్రము 216 గురుకోణ త్రిభుజము



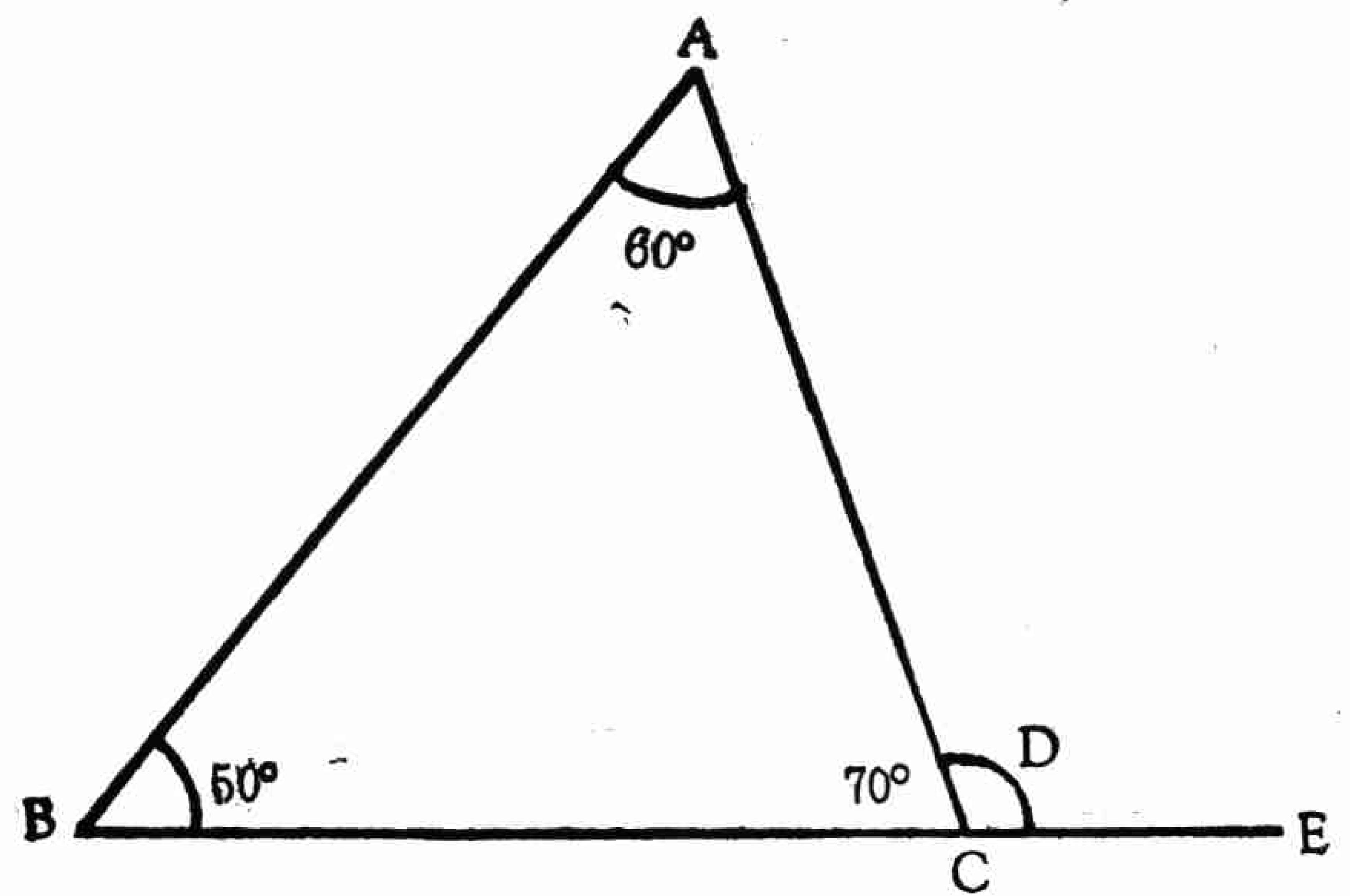
చిత్రము 217 లంబకోణ త్రిభుజము



చిత్రము 214 సమభుజ త్రిభుజము



చిత్రము 215 అల్పకోణ త్రిభుజము



చిత్రము 218 $\angle CAB + \angle ABC = \angle D$

అందురు. దీనిలో సమాన భుజములకు ఎదురుగ ఉండుకోణ ములు కూడ సమానముగ ఉండును (చూ. చిత్రము 213).

సమభుజ త్రిభుజము (ఈక్విలేటరల్ ట్రైఆంగెల్): మూడు భుజములు సమానముగ ఉండు త్రిభుజమును సమ భుజ త్రిభుజము అందురు. దీనిలో మూడు కోణములు కూడ సమానము (ఒక్కొక్కటి 60°) గ ఉండును. అందు చేత దీనిని సమకోణ త్రిభుజము (ఈక్వాంగులర్ ట్రైఆంగెల్) అని కూడా అందురు (చూ. చిత్రము 214).

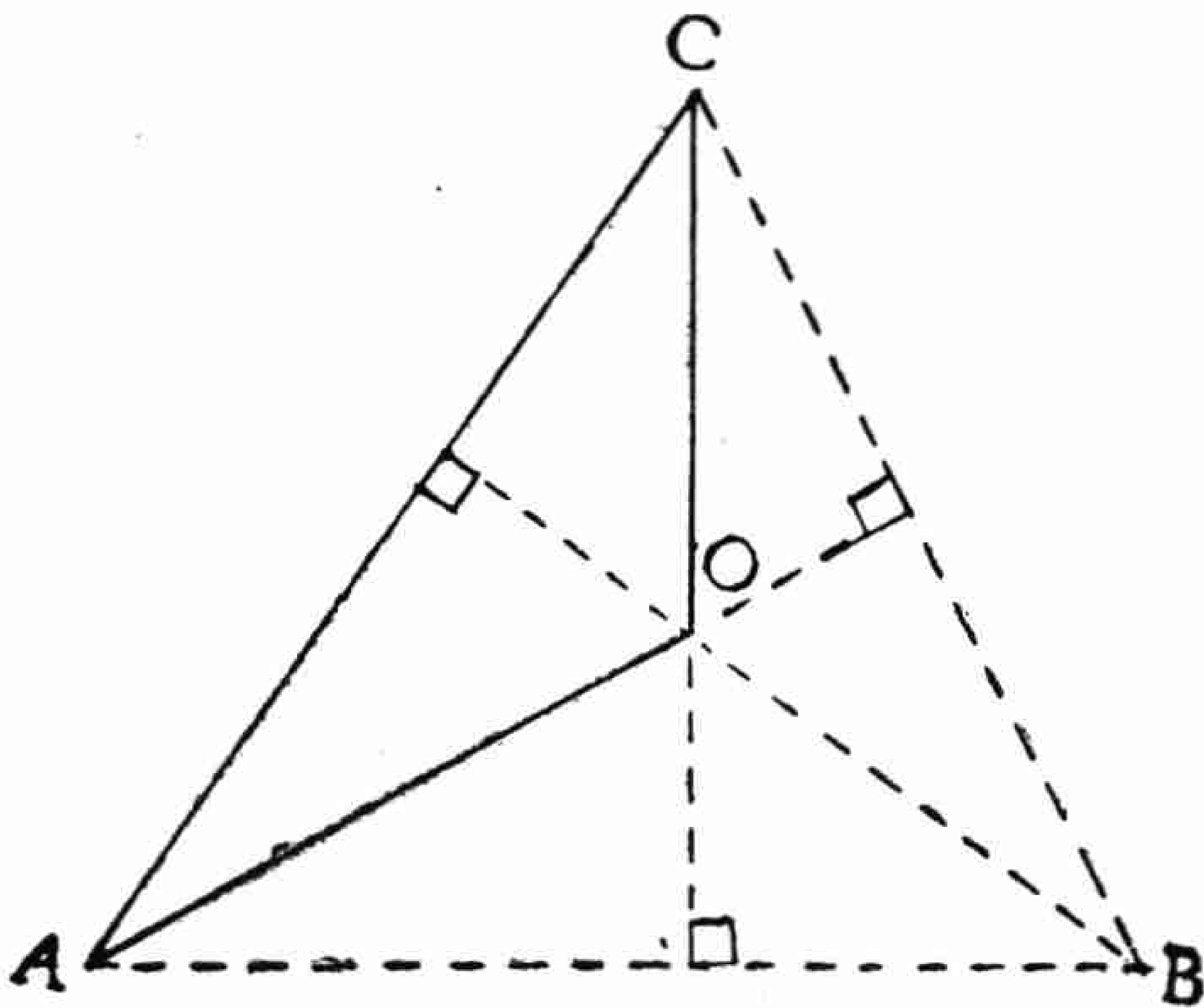
అల్పకోణ త్రిభుజము: త్రిభుజ అంతరకోణములన్నీ అల్పకోణములయిన అనగా $< 90^\circ$ అయిన దానిని అల్ప కోణ త్రిభుజము అందురు (చూ. చిత్రము 215).

గురుకోణ త్రిభుజము: త్రిభుజ అంతరకోణములలో ఒకటి గురుకోణము (అనగా $\angle B > 90^\circ$) అయిన దానిని గురుకోణ త్రిభుజము అందురు. ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు గురుకోణములుగ నుండుట సాధ్యము కాదు (చూ. చిత్రము 216).

లంబకోణ త్రిభుజము: త్రిభుజకోణములలో ఒకటి లంబ కోణము అయిన దానిని లంబకోణ త్రిభుజము అందురు. లంబకోణమునకు ఎదురుగా ఉండు భుజమును కర్ణము అని, మిగిలిన రెండు భుజములను కాళ్లు అని అందురు. కాళ్లు సమానముగ ఉండు లంబకోణ త్రిభుజమును లంబ కోణ సమద్విభుజత్రిభుజము అందురు (చూ. చిత్రము 217).

త్రిభుజ కోణములు: త్రిభుజము లోపలి కోణములను అంతరకోణములందురు. ఏదో ఒక భుజమును పొడిగించగా ఏర్పడు కోణమును బాహ్యకోణము (చూ. చిత్రము 218) అందురు. త్రిభుజ అంతరకోణముల మొత్తము ఒక ఋజు కోణము అనగా $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. బాహ్య కోణము అంతరాభిముఖకోణముల రెండింటి మొత్తమునకు సమానము అనగా $\angle D = \angle A + \angle B = 60^\circ + 50^\circ$.

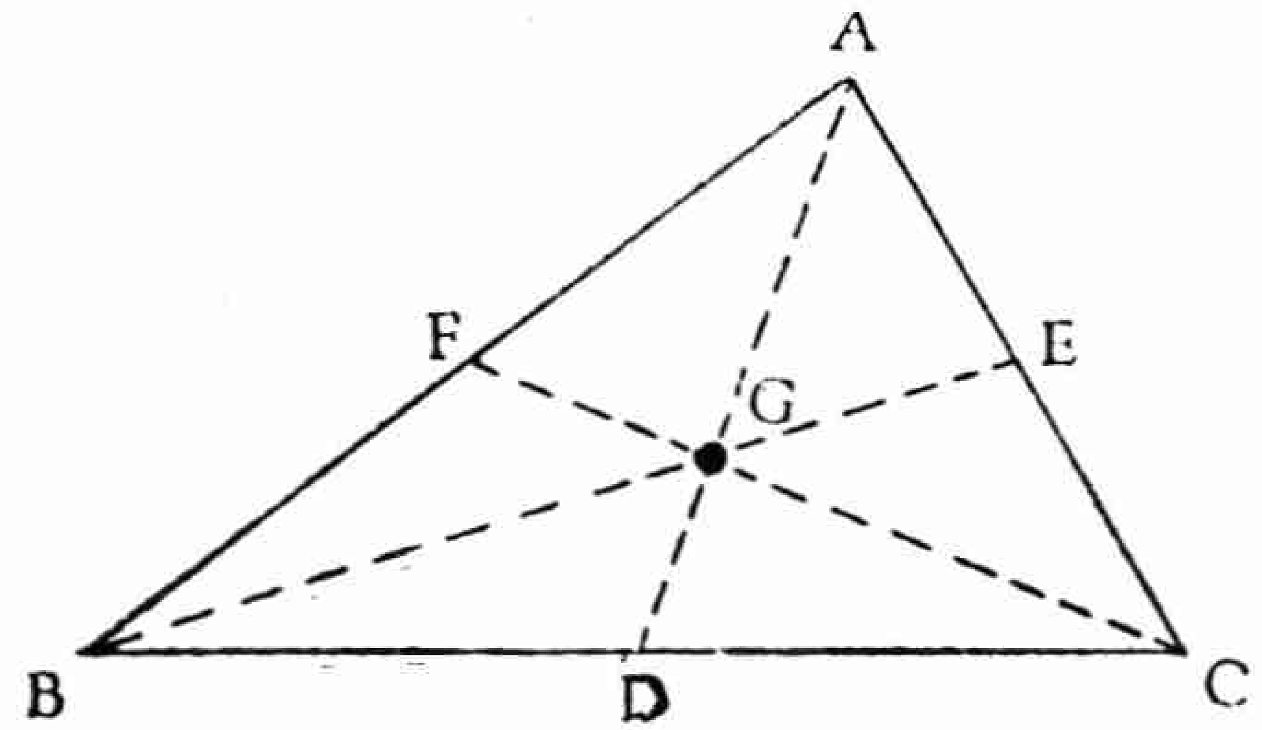
త్రిభుజ ఉన్నతి: ఇది త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షము



చిత్రము 219 త్రిభుజ ఉన్నతులు - లంబకేంద్రము

నుండి ఎదుటిభుజము (పీఠము అందురు) నకు గీయబడిన లంబరేఖ. త్రిభుజము యొక్క మూడు ఉన్నతులు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఆ బిందువును 'త్రిభుజ లంబకేంద్రము' (ఆర్థో సెంటర్) అందురు.

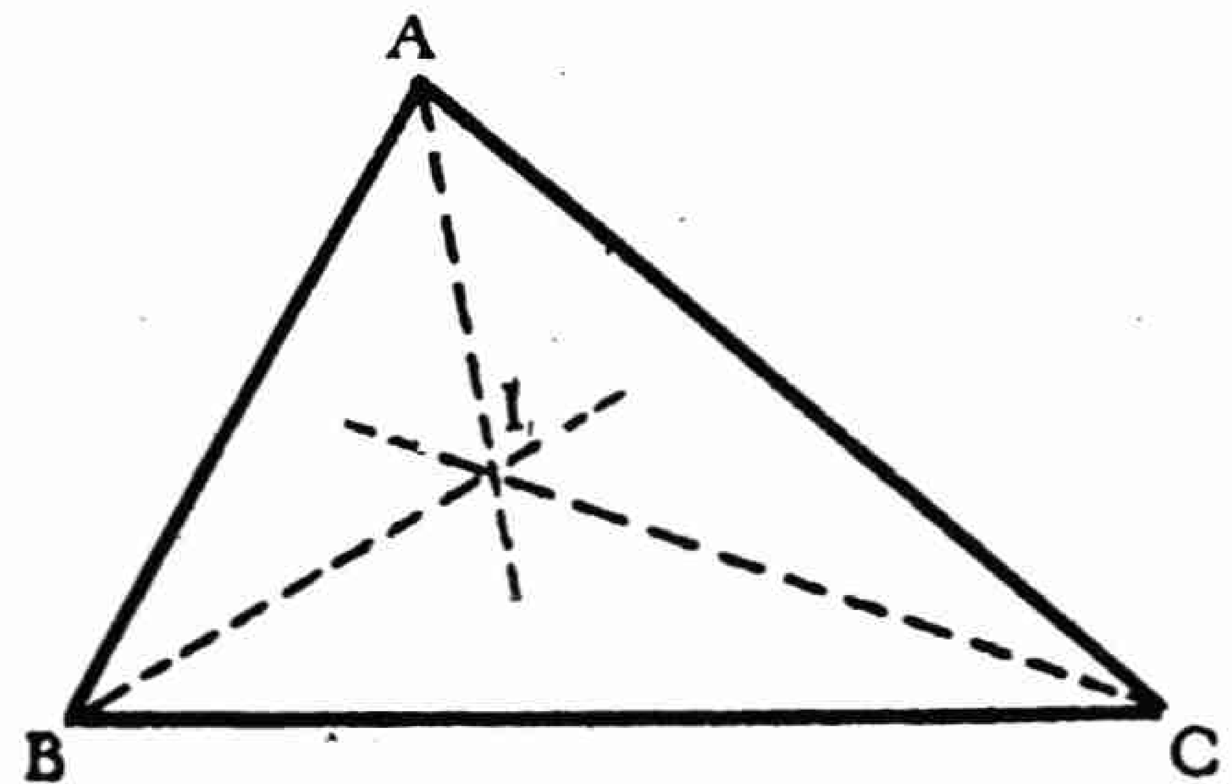
త్రిభుజ మధ్యగతలు: త్రిభుజము యొక్క ఒక శీర్షమును దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువును చేర్చు రేఖను మధ్యగత అందురు. త్రిభుజము యొక్క మూడు



చిత్రము 220 మధ్యగతలు - గురుత్వకేంద్రము

మధ్యగతలు, శీర్షము నుండి ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువునకుగల దూరములో $\frac{2}{3}$ వంతు దూరములో ఒకేబిందువు (G) వద్ద ఖండించుకొనును. ఉదాహరణకు చిత్రము 220 లో AG అనునది AD పొడవులో $\frac{2}{3}$ వంతు ఉండును. అట్లే BG, CG లు వరుసగా BE, CF ల పొడవులలో $\frac{2}{3}$ వంతు ఉండును. మధ్యగతల ఖండనబిందువు 'G' నే త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము అందురు.

త్రిభుజ అంతరకేంద్రము: త్రిభుజ అంతరకోణముల సమద్విఖండన రేఖలు ఖండించుకొను బిందువును త్రిభుజ



చిత్రము 221 అంతర కేంద్రము

అంతర కేంద్రము అందురు. ఇది త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములకు సమాన దూరములో ఉండును.

త్రిభుజ పరికేంద్రము: త్రిభుజము యొక్క భుజముల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు ఖండించుకొను బిందువును త్రిభుజ పరికేంద్రము (సర్కమ్ సెంటర్) అందురు. ఇది త్రిభుజము యొక్క మూడు శీర్షములకు సమాన దూరములో ఉండును.

త్రిభుజ వైశాల్యము : ఒక త్రిభుజవైశాల్యము దాని ఉన్నతి, పీఠముల గుణకార లబ్ధములో సగము ఉండును $A = \frac{1}{2} bh$. ఇచ్చట 'A' త్రిభుజ వైశాల్యమును, b పీఠమును, h ఉన్నతిని సూచించును. అది సమభుజ త్రిభుజము అయిన దాని వైశాల్యము $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ అగును. ఇచ్చట a అనునది దాని భుజముల యొక్క పొడవు. ఒక త్రిభుజముయొక్క భుజములు a, b, c అయిన దాని వైశాల్యము $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ అగును. ఇచ్చట $s =$ త్రిభుజ చుట్టుకొలతలో సగము $= \frac{1}{2}(a+b+c)$. దీనిని ఆర్కిమీడీజ్ కనుగొనెను.

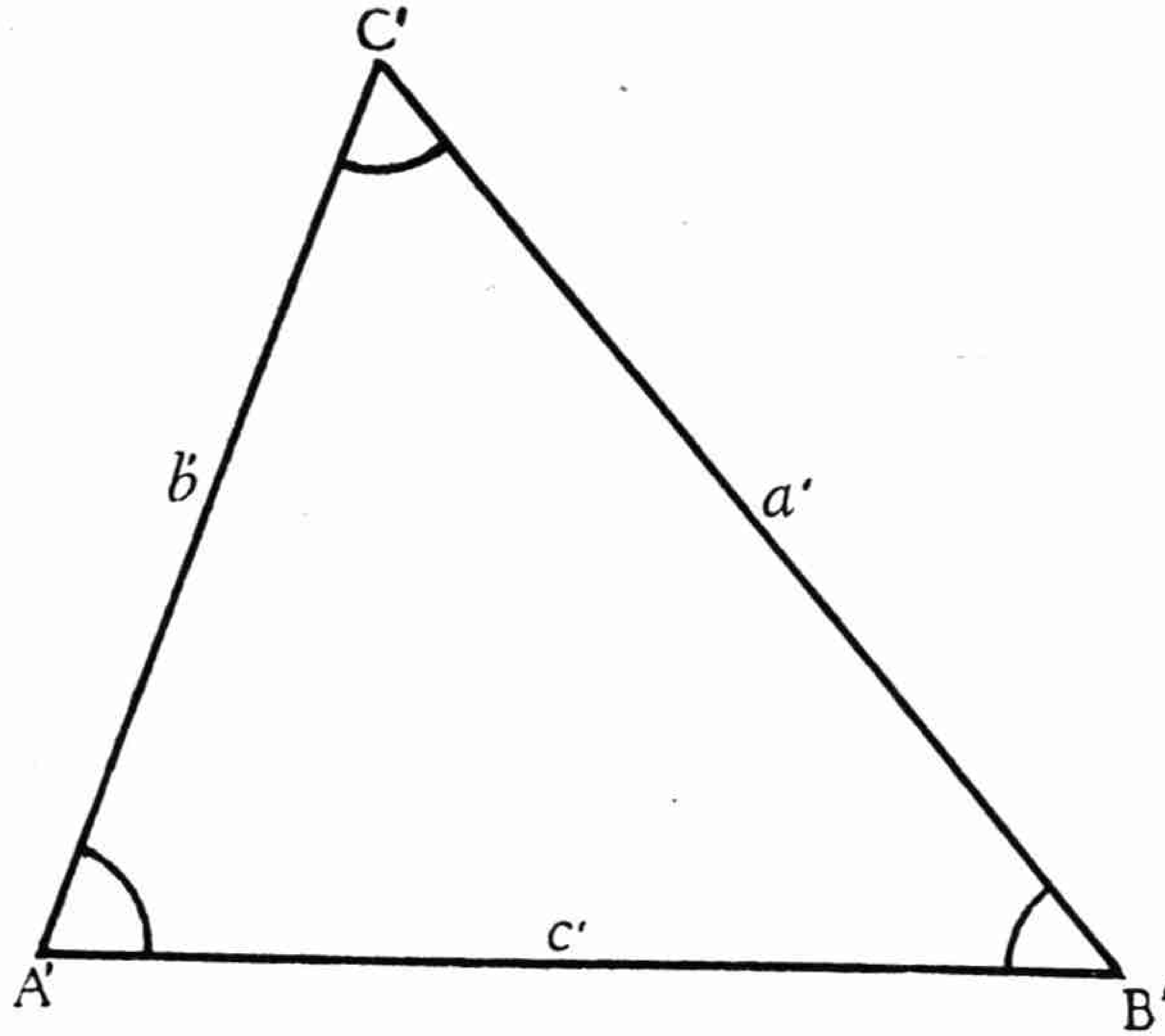
సర్వ సమాన త్రిభుజములు : ఒకే ఆకారము, పరిమాణము గల జ్యామితి చిత్రములు సర్వ సమానములు. కచ్చితముగ రెండు త్రిభుజములు ఒకదానితో మరి యొకటి ఏకీభవించినచో అవి సర్వ సమానములు. ఈ క్రింది సందర్భములలో రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానముగ ఉండును :

1. ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు, ఒక భుజము, మరియొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు, అనురూప భుజము సమానము అయినప్పుడు ;
2. ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు, వాటి మధ్య కోణము వరుసగా మరియొక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు వాటి మధ్య కోణము సమానమైనప్పుడు ;
3. ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు వరుసగా మరియొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములకు సమానమైనప్పుడు ;
4. రెండు లంబకోణ త్రిభుజములలో ఒకదాని కర్ణము, మరియొక భుజము, వరుసగా రెండవదాని కర్ణము, మరియొక భుజము సమానమైనప్పుడు.

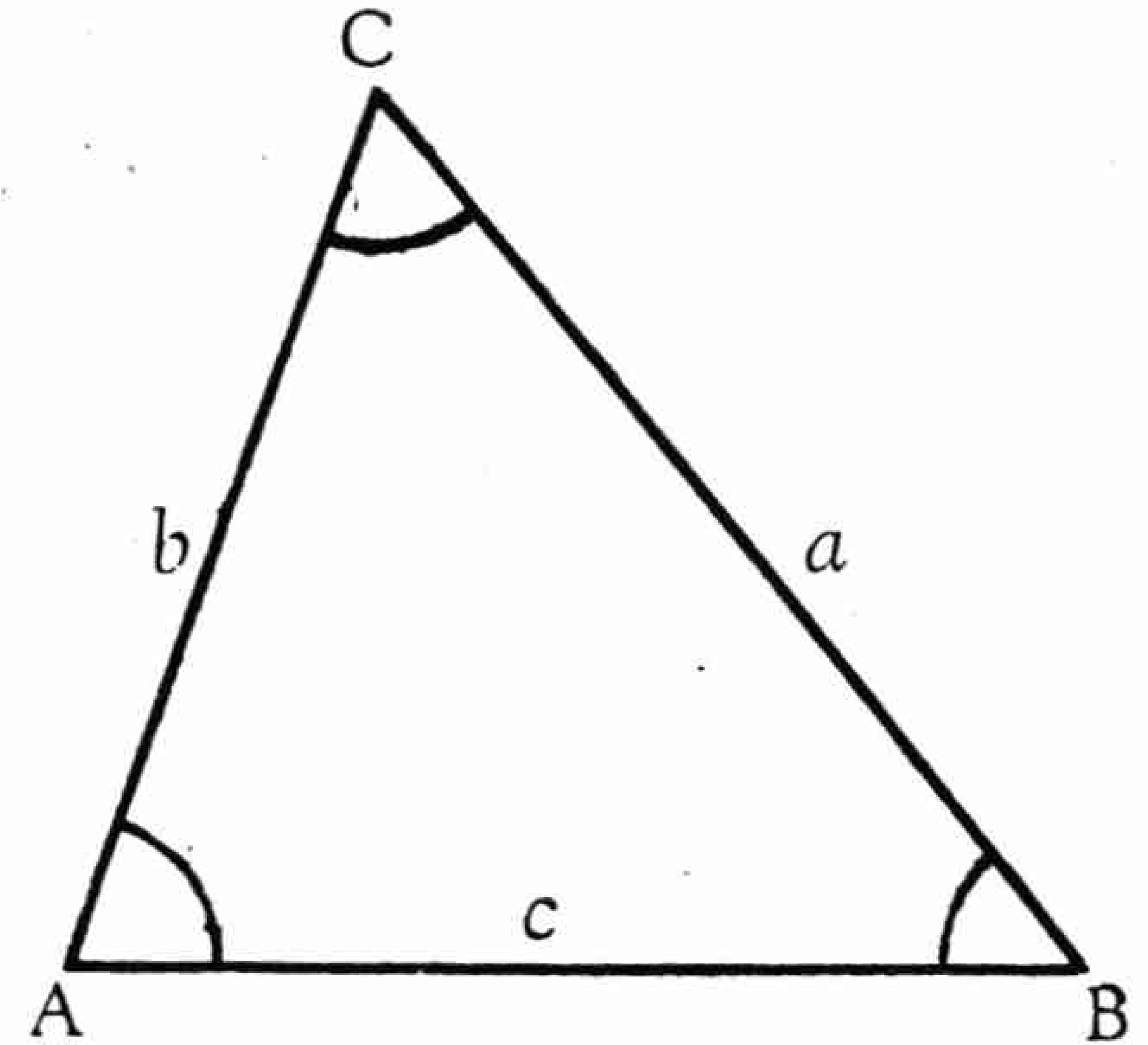
సరూప త్రిభుజములు : ఒకే ఆకారములో ఉండు (ఒకే పరిమాణమును కలిగిఉండ అవసరములేదు) జ్యామితి చిత్రములను సరూపములు అందురు. ABC, A′B′C′ అను రెండు త్రిభుజములు సరూపములు అయిన $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ అని వ్రాయుదురు.

రెండు త్రిభుజములు ఒకే ఆకారము కల్గియుండిన వానిలో అనురూప కోణములు సమానములు. అనగా చిత్రము 222, 223 లలో $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ కాబట్టి $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. అనురూపభుజములు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండునని నిరూపింపవచ్చును. అనగా $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

విలోమముగా రెండు త్రిభుజములు (1) ఒకదాని మూడు కోణములు వరుసగ రెండవదాని మూడు కోణములకు సమానమైనప్పుడు లేదా వాని అనురూప భుజములు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉన్నప్పుడు సరూపములగును.



చిత్రము 222



చిత్రము 223

సరూప త్రిభుజములు $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

త్రిభుజ సత్యములు : ఏ త్రిభుజములోనైనను,

1. మూడు కోణముల మొత్తము రెండు లంబకోణములు ; అనగా 180°.
2. ఏ రెండు భుజముల మొత్తమయినను మిగిలిన మూడవ భుజమునకన్న పెద్దదిగ ఉండును.
3. పెద్ద భుజమునకు ఎదురుగా ఉండు కోణము, చిన్న భుజమునకు ఎదురుగా ఉండు కోణముకన్న పెద్దది.

విలోమముగా పెద్ద కోణమునకు ఎదురుగా ఉండు భుజము చిన్న కోణమునకు ఎదురుగా ఉండు భుజము కన్న పెద్దది. పా. ల. నా.

త్రిలోక ప్రజ్ఞప్తి (తిలోయపణ్ణత్తి) : ప్రాకృత భాషలో రచింపబడిన ఈ గ్రంథము విశ్వరచనను గురించిన జైనుల అభిప్రాయములను ప్రదర్శించును. ఇందు ఖండములు, సముద్రములు, పర్వతములు అన్నియు వాటివాటి రచనలలో జ్యామితీయాకారములను, గణితశాస్త్రీయ సౌష్ఠవములను ప్రదర్శించునట్లు తీసికొనబడినవి. అందుచే ఈ గ్రంథము, దీనివంటి ఇతర గ్రంథములును అనేక గణిత శాస్త్రవిషయములకు ఆకరములు. ఇప్పుడు మనకు ఉపలబ్ధమయిన తిలోయపణ్ణత్తి 9 వ, లేదా 10 వ శతాబ్దములో వ్రాయబడిన ప్రాచీన గ్రంథమునకు ప్రతి మూల గ్రంథము యతివృషభుడను వానిచే రచింప బడినదని అందురు. బహుశః ఇది అతి ప్రాచీన గ్రంథమై ఉండవలెను.

జైన అంకగణితమందు మనము ప్రధానముగా గుర్తించ వలసిన విషయము బృహత్సంఖ్యలయందు, బృహన్మానములందు, అనంతాల్ప సంఖ్యలయందు జైనులకుగల ప్రీతి. దైర్ఘ్య యూనిట్‌లు పరమాణువు యొక్క అనంతాల్ప పరిమాణముతో మొదలిడి, అతిమహత్తమమైన జగత్ శ్రేణితో అంతమొందును. కాలము యొక్క బృహత్ వ్యవధులను కొలుచుటకు ఒక విచిత్రమయిన ఉపాయము ఉపయోగింపబడినది. దృష్టాంతమునకు ఒక యోజనము* వ్యాసము, ఒక యోజనము లోతుగలిగి, వెంట్రుకలతో నింపబడిన ఒక ఊహాగర్తమును నూరేండ్లకు ఒక వెంట్రుక చొప్పున తీయుచు పూర్తిగా ఖాళీచేయుటకు పట్టుకాలము ఒక యూనిట్‌గ తీసికొనబడినది. దీనికి 'వ్యవహార పల్యోపమ' అని పేరు. ఇంతేకాక ఈ గ్రంథమున అంక శ్రేఢి గణితము సమగ్రముగా వివరింపబడినది. అందు చర్చింపబడిన అంకశ్రేఢులలో ఈ క్రింది శ్రేఢి కలదు.

$a\ ;\ (a+d,\ a+2d,\ a+3d)\ ;$

$(a+4d,\ a+5d,\ a+6d,\ a+7d,\ a+8d)\ ;\ \ldots\ \ldots$

ఇందు ఏ పదము యొక్క సంకలితమునైనను సులభముగా కనుగొనుటకు సులభసూత్రము ఈయబడినది. మహావీరుని గణితసారసంగ్రహమందు మనకు తొలిని తారసిల్లు జ్యామితి శ్రేఢీసంకలితమును కనుగొను విధానము ఇందు కాననగును. పరంపరలకు చెందిన గణితమును అనుశీలించుట యందు జైనులకు ఆదరము మెండు. సూచికల నియమములు వారికి సుపరిచితములై ఉండవచ్చును. ఇందు 'అసంఖ్యాన' 'అనంత వర్గములు' అను పేళ్ళతో కొన్ని రకముల బృహత్సంఖ్యలు రచించు విధములు వర్ణింపబడినవి. అర్ధ సాంప్రదాయిక జైన గ్రంథములందు వికసింప జేయబడిన అర్ధచ్ఛేదము అనగా 2 ఆధారముగా గల లాగరిదమ్‌లు ఇందులో కలవు.

జ్యామితిలో వృత్తము, వలయాకారములు, పాదము-వీటి పరిధి. వైశాల్యము $\pi = \sqrt{10}$ అను సంబంధమును ఉపయోగించి కనుగొనుటకు సూత్రములు ఇందు కలవు. సమలంబియ ఘనచ్ఛేదము యొక్క ఘన పరిమాణము, వైశాల్యము; స్తూపము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనుటకు మామూలు సూత్రములు ఈయబడినవి. సరూపత్రిభుజముల ధర్మములు సూచింపబడినవి. సరస్వతి.

త్రిశంకువు : త్రిశంకు చరిత్రము రామాయణములో కలదు. అతడు అయోధ్యను ఏలిన సూర్యవంశపు రాజులలో ఒకడు; శరీరముతో స్వర్గము చేరవలయునని తలచి, కుల గురువగు వసిష్ఠుని యాచించెను. అతడు ఒప్పుకొననందున, త్రిశంకువు ఆచార్య పుత్రులను ఆశ్రయించెను. వారు అతనికి చండాలత్వము కలుగునట్లు శపించిరి. కారణము త్రిశంకువు ఆచార్యుని ఆజ్ఞను ఉల్లంఘించుట.

బ్రహ్మత్వమును పొందుటకు తపస్సు చేయుచున్న విశ్వామిత్రుని గురు శాపగ్రస్తుడగు త్రిశంకువు ఆశ్రయించెను. ఆశ్రిత రక్షకుడు, కరుణామయుడు అగు విశ్వామిత్రుడు తన తపోబలముతో ఒక యజ్ఞము చేసి, సశరీరముగా త్రిశంకువును స్వర్గమునకు పంపెను. గురు శాపము వలన చండాలత్వము పొందిన త్రిశంకువునకు స్వర్గములో చోటు లేదని దేవతలు అతనిని తలక్రిందుగా త్రోసిరి. క్రింద పడుచు 'కాపాడుము' అని విశ్వామిత్రుని ప్రార్థింపగా అతడు తన తపోబలముతో త్రిశంకువును మధ్యలో నిలబెట్టెనని రామాయణ గాథ!

ఇందువలన త్రిశంకువు నక్షత్రరూపములో ఇతర నక్షత్రముల కంటె మనకు దగ్గరగ ఉండునట్లు తెలియుచున్నది. త్రిశంకువునకు ప్రక్కన విశ్వామిత్రుడు (సదరన్ క్రాస్) దక్షిణ గోళములో కనబడును.

నవీన శాస్త్ర రీత్యా త్రిశంకువు (α. సెంటారీ) మనకు చాల దగ్గర నక్షత్రము; దూరము 4 జ్యోతిర్వత్సరములు. ఈ విషయము మన పూర్వులకు తెలిసియుండెనా ? ఆచార్య

త్వరణము : ఒక బిందువు యొక్క వేగము మారునపుడు దానికి త్వరణము ఉన్నదని చెప్పుదుము. వేగము మారు రేటుకు త్వరణము అని పేరు. ఒక బిందువు వేగము $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. కనుక ఆ బిందువు త్వరణము

* యోజనము = 12·88 కి. మీ.

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$. ఇవి x, y, z అక్ష దిక్కులలోని త్వరణాంశములు.

ఒక బిందువు ఒక వక్రముమీద సంచరించునపుడు దాని త్వరణమును స్పర్శరేఖ దిక్కునందును, అభిలంబరేఖ దిక్కులోను అంశీకరించుట సౌకర్యము. వీటి విలువలు: $\frac{dv}{dt}$ యును $\frac{v^2}{\rho}$ యును అగును. ఇచ్చట v వేగము, ρ ఆ స్థలములోని వక్రతావృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము. పరిస్పర్శ తలమునను లంబదిక్కులో ఆ బిందువుకు త్వరణము లేదు.

పై సూత్రము ప్రకారము ఒక బిందువు ఒక వృత్తముపై ఒక స్థిరవేగము v తో వెళ్ళినట్లయితే, దాని త్వరణమునకు ఒకే అంశము ఉన్నది. అది ఆ బిందువునుండి ఆ వృత్త కేంద్రము దిక్కు గలది. దాని విలువ v^2/a. ఇచ్చట a ఆవృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము. న్యూటన్ గతి నియమము ప్రకారము ద్రవ్యరాశి × త్వరణము = బలము. కనుక m ద్రవ్యరాశిగల ఒక కణమును ఒక వృత్తములో v వేగముతో చుట్టుచుండుటకు $m\, v^2/a$ బలము దాని వృత్త కేంద్ర దిక్కులో ప్రయోగించవలెను.

తలములోని ధ్రువీయ నిరూపకములగు (r, θ) ఉపయోగించినచో, ఒక బిందువు త్వరణము

$$r \text{ వృద్ధియగు దిక్కులో } \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\theta \text{ వృద్ధియగు దిక్కులో } r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

(చూ. బలము, వేగము). ఆ. న.

దశాంశములు : చూ. గణితసమీక్ష, పు. 7.

దిగధిపతులు : ఇంద్రుడు తూర్పునకు, యముడు దక్షిణమునకు, వరుణుడు పశ్చిమమునకు, కుబేరుడు ఉత్తరమునకు అధిపతులు అని మన పెద్దలు చెప్పుదురు. దీనికి జ్యోతిషరీత్యా కారణములు చెప్పవచ్చును.

తూర్పున సూర్యుడు ఉదయించును. పురాణముల ప్రకారము ఇంద్రుడు త్రిలోకాధిపతి. వేదములో ఇంద్ర పదము సూర్యునికి పర్యాయనామము. కాబట్టి ఇంద్రుడు తూర్పునకు అధిపతియగుట ఏమి ఆశ్చర్యము.

ఉత్తరదేశస్థులకు దక్షిణాయనములో శీతబాధ ఎక్కువ. చలివలన పంటలు చెడును. అప్పుడు సూర్యుడు విషువృత్తమునకు దక్షిణమునందు ఉండును. చలిచే జనులు కష్టపడుటచేతను, ఆకలిచేత జనులు చనిపోవుట వలనను దక్షిణదిశకు యముని అధిపతిగా చేసిరి. ఇది ఉత్తరగోళార్ధవాసులకే గాని దక్షిణ గోళార్ధవాసులకు కాదు.

పశ్చిమ లేదా ఈశాన్యపుగాలి వర్షము తెచ్చును. కాబట్టి పశ్చిమ దిశకు వరుణుడు అధిపతి అయ్యెను.

ఉత్తరాయణము సౌఖ్యదాయకము అగుటచేతను, సూర్యుడు విషువృత్తమునకు ఉత్తరమున ఉండునపుడు సస్యవృద్ధి ఎక్కువ అగుటచేతను, ధనధాన్య సంపదలకు అనుకూలము అగుట చేతను ఉత్తర దిశకు ధనాధిపతి అగు కుబేరుడు అధిపతి అయ్యెను. ఆచార్య.

దీపావళి : ఇది హిందువులకు ఒక ముఖ్యమగు పండుగ. ఆశ్వయుజ కృష్ణ చతుర్దశి తెల్లవారు ఝామున ఇది జరుపబడును. నరకాసురుని శ్రీ కృష్ణుడు ఆదినమున జయించుటచే ఆ పండుగ ఏర్పడినట్లు మన పెద్దల అభిప్రాయము.

జ్యోతిషశాస్త్రరీత్యా కూడ ఈ పండుగకు ప్రాముఖ్యము కలదు. శ్రీ కృష్ణుని కాలములో సూర్యునికి శరద్విషు సంక్రమణము ఆశ్వయుజ అమావాస్యనాడు జరుగుచుండెనని తోచుచున్నది. ఇది ఉత్తరమండల వాసులకు దుస్సహమగు శీతకాలారంభము. చలి ఎక్కువ, ఆహారము తక్కువ. సూర్యరశ్మివలన లభించు సుఖము అపుడు కలుగదు. కాబట్టి దీపముల మూలమున వెలుతురు, వేడిని కల్పించి దుస్సహ శీతబాధ నుండి జనులు నివారణ చేసికొను చుండిరి. బాణసంచా కాల్చుటచే ఏర్పడు గంధక వాయువు వర్షఋతువులో ఏర్పడిన కీటమశకాదుల బాధను పోగొట్టును. ఆచార్య.

దీర్ఘచతురస్రము (రెక్టాంగెల్) : కోణములు అన్నియు లంబకోణములుగ ఉండు సమాంతరచతుర్భుజమును దీర్ఘచతురస్రము అని అందురు (చూ. చతుర్భుజము; సమాంతర చతుర్భుజము). పా. ల. నా.

దీర్ఘ వృత్తఫలములు : చూ. విలోపఫలములు.

దూరదర్శనులు : చూ. భౌతికరాసాయనిక శాస్త్రములు. పు. 398.

దృఢవస్తు గతిశాస్త్రము (రిజిడ్ డైనమిక్స్) : దృఢముగా అనుబంధింపబడిన బిందుద్రవ్యరాశుల సమూహమును దృఢవస్తువని అందుము. అనగా ఆ బిందు ద్రవ్యరాశులు పరస్పరము దూరములు మారవు. ఆకాశములో ఏదైన స్థిరనిరూపక అక్షములను తీసికొని ఆ దృఢవస్తువు యొక్క ఒక స్థిరబిందువు యొక్క నిరూపకములును, వస్తువులో స్థిరముగా ఉన్న రెండు బుజురేఖల దిక్కును తెలియుటవలన ఆ దృఢవస్తు స్థలము నిశ్చితమగును. దీనికి ఆరు స్వతంత్ర సంఖ్య లవసరమగును;

మూడు స్థిర బిందువుల నిరూపకములను తెలియజేయుటకును, మరిమూడు ఆకాశములో వస్తువు యొక్క భ్రమణ పరిస్థితిని నిర్ణయించుటకును కావలెను. ఈ విషయమునే వస్తువుయొక్క స్వేచ్ఛాంశ సంఖ్యలు ఆరు అని చెప్పుదుము.

దృఢ వస్తువునందలి ద్రవ్య బిందువులపై పనిచేయు బలములు రెండు రకములు. బాహ్యములు, ఆంతరములు. వస్తువులోని ప్రత్యేక ద్రవ్యబిందువుల మధ్య కలుగు బలములను ఆంతరబలములు అందుము. తదితరములు బాహ్యబలములు.

ఏదైన ఒక ద్రవ్యబిందు సమూహముయొక్క చలనమును గూర్చిన కొన్ని ఫలితములను మొట్టమొదట మనము నిరూపించి, తరువాత వాటిని దృఢవస్తుచలన నిర్ణయమున కుపయోగింతము. ఈ ఫలితములు త్వరణ, బలములకు సంబంధించిన న్యూటన్ రెండవ గతినియమము పైనను, క్రియా, ప్రతిక్రియా శక్తుల సమానత్వమును చెప్పు మూడవ నియమము పైనను ఆధారపడి ఉండును. ఈ ఫలితముల వలన దృఢవస్తు చలనమును స్థలాంతరచలన భ్రమణముల క్రింద విభజించి, చలన సమీకరణములను వ్రాయుటకు వీలగును.

$P_1, P_2 \dots \dots P_n$ అనునవి ద్రవ్యరాశిగల బిందువులనియు, వాని ద్రవ్యరాశులు $m_1, m_2 \dots \dots m_n$ అనియు P_k యొక్క స్థితి సదిశరాశి $\boldsymbol{r}_k = x_k \boldsymbol{i} + y_k \boldsymbol{j} + z_k \boldsymbol{k}$ అనియు అను కొందము. $\boldsymbol{f}_k$ అనునది P_k పై పనిచేయు మొత్తముబలము అనియు $\boldsymbol{f}_{ij}$ అను సదిశరాశి P_i పై P_j వలన గలుగు బలమనియు సంకేతముల ఏర్పరచుకొన్నఎడల న్యూటన్ మూడవ నియమము వలన

$$\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

అని సిద్ధించును. P_i పై పనిచేయు మొత్తము బలము

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \sum_{j \neq i}^{n} \boldsymbol{f}_{ij} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$\Sigma m_i = m$ అను సంఖ్యను ఆవస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి యని చెప్పుదుము.

గురుత్వ కేంద్రము : దృఢ వస్తువుయొక్క గురుత్వ కేంద్రము ఈ క్రింది సమీకరణము వలన నిర్వచింపబడును.

$$m\boldsymbol{r} = \Sigma m_i \boldsymbol{r}_i \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

న్యూటన్ రెండవ నియమమును P_i అను బిందువున కన్వయించి వ్రాసిన ఎడల

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \sum_{i \neq j} \boldsymbol{f}_{ij}$$

అని వచ్చును ఇట్టి సమీకరణము అన్ని బిందు ద్రవ్యములకును వ్రాసి సంకలనము చేసిన యెడల

$$\frac{d}{dt^2}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\right) = \sum_i \boldsymbol{f}_i + \sum_{i \neq j} \Sigma \boldsymbol{f}_{ij} \quad \dots \quad (4)$$

అను సమీకరణము వచ్చును. ఇందు ద్విసంకలన సమాసము (1) వ సమీకరణము వలన శూన్యము అని తేలును. కావున మూడవ సమీకరణమును ఉపయోగించి $\Sigma \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{F}$ అని వ్రాయుట వలన

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

అని వచ్చును. కనుక

m ద్రవ్యరాశిగా గల ఒక బిందు బాహ్య బల సమూహము $\boldsymbol{F}$ పని చేయగా ఎట్టి చలనము కలిగి ఉండునో, అదే చలనము దృఢవస్తువు యొక్క గురుత్వ కేంద్రముకూడ కలిగి ఉండునని చూడగలము ... I

బల బిభ్రమిష (మోమెంట్ ఆవ్ ఏ ఫోర్స్): మూల స్థానముచుట్టు $\boldsymbol{F}_s$ అను బలముయొక్క బిభ్రమిష $\boldsymbol{M}_s$ ను $\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{F}_s$ అని నిర్వచింతుము. $\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{F}_s$ ఇది ఒక సదిశరాశి లబ్ధము, లేక క్రాస్ లబ్ధము.

గతిభార బిభ్రమిష (మోమెంట్ ఆవ్ మొమెంటమ్): P_i బిందువు యొక్క గతిభారము $m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$. దాని బిభ్రమిష O చుట్టు (లేదా కోణీయ గతిభారము) $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{m}_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ అని నిర్వచింపబడును. దృఢవస్తువు యొక్క గతిభార బిభ్రమిషము $\boldsymbol{A} = \sum_i \boldsymbol{A}_i$, అనగా అన్ని బిందువుల గతిభార బిభ్రమిష సంకలనము అని నిర్వచింతము.

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) = \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}$$

అను సమీకరణము నుండి

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) = \mathrm{M}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \dots (6)$$

అను సంబంధము వచ్చును. పై సమీకరణమును $i = 1, 2, \dots n$ అను సంఖ్యలకు వ్రాసి సంకలించిన ఎడల

$$\mathrm{M} = \sum_i \mathrm{M}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ij}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$

అను సమీకరణము, 2 వ సమీకరణము నుపయోగించుట వలన వచ్చును. కాని పై ద్విసంకలన సమాసమును, (I) వలన $\Sigma\Sigma(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{f}_{ij}$ అను సమూహములుగా వ్రాయ వచ్చును. $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ అనునది $\boldsymbol{f}_{ij}$ కు సమాంతరముగా ఉండునుగాన పై మొత్తము శూన్యమగును. దీనివలన మనకీ క్రింది ఫలితము లభించును.

మూలబిందువు చుట్టు బాహ్యాబలముల భ్రిభమిష మొత్తము గతిభార భ్రిభమిష మారు రేటునకు సమానమగును. ... II

ఇదేవిధముగ క్రింద ఇచ్చిన ఫలితములు 3, 4 ను చూప వచ్చును.

ఒక స్థిరబిందువు చుట్టు దృఢవస్తువు యొక్క కోణీయ గతిభారము దాని గురుత్వ కేంద్రము చుట్టుఉన్న కోణీయగతిభారమును, గురుత్వ కేంద్రము వద్ద ఉండిన మొత్తము ద్రవ్యరాశిగల బిందువు యొక్క కోణీయ గతిభారమును సంకలనము చేయుటవలన లభించును. ... III

గురుత్వ కేంద్రముచుట్టు బాహ్యబలముల భ్రిభమిష గురుత్వ కేంద్రముచుట్టు కోణీయగతిభారము మారు రేటగును. ... IV

స్వతంత్రముగా చలించు ధృడవస్తువుయొక్క గురుత్వ కేంద్రము మొత్తము ద్రవ్యరాశిగల బిందు బాహ్యాబలము దానిమీద ప్రయుక్తమైనచో ఎటుల చలించునో, అట్లే చలించును. కాన, గురుత్వ కేంద్రసాపేక్షముగ వస్తువు యొక్క గతిని మాత్రము మనము పరిశీలించిన చాలును. మూల బిందువును గురుత్వ కేంద్రమునందు తీసికొని IV ను ఉపయోగింపవచ్చును.

దానియందున్న ఒక బిందువు స్థిరముగ బంధింపబడి, దృఢ వస్తువు చలించుచున్న ఎడల ఆ స్థిరబిందువునే మూల బిందువుగా స్వీకరించి, ఫలితము II ను ఉపయోగింప వచ్చును. ఈ ఫలితము మూలబిందువుయొక్క స్థితిపై ఆధారపడియుండదు. పై రెండు పరిస్థితులలోను, గతి శాస్త్ర సమీకరణములు ఒకే తీరుగా ఉండుటవలన, రెండింటిని ఒకే సిద్ధాంతము వలన చర్చింపవచ్చును.

స్థిరబిందువు చుట్టుచలనము : దృఢ వస్తువులో O అను ఒక బిందువు స్థిరముగా ఉండిన ఎడల జ్యామితి సహాయ మున దృఢ వస్తువుయొక్క ఏ చలనమైనను O గుండ పోవు ఒక ప్రత్యేకాక్షము చుట్టు భ్రమణమునకు సమాన మగునని నిరూపింపవచ్చును. ఈ అక్షమును తాత్కాలిక అక్షము అని అందురు. P అను బిందువు నుండి తాత్కాలిక అక్షమునకు M అను బిందువు విక్షిప్తమైనచో $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ అగును.

పై సమీకరణమును t అపేక్షయా అంతరీకరణము చేసిన ఎడల $\frac{d}{dt}OP = \frac{d}{dt}MP = MP.\ \dot{\theta}\, l$ అనివచ్చును. ఇచ్చట l అనునది OM, OP ల వలన నేర్పడు తలమునకు లంబముగా ఉన్న యూనిట్ సదిశరాశి. $\dot{\theta}$ అనునది తాత్కాలిక కోణీయవేగము. $\dot{\theta}$ పొడవుగల సదిశ రాశిని కోణీయవేగ సదిశరాశి $\boldsymbol{\omega}$ యని నిర్వచించిన యెడల $\frac{d}{dt}OP = \boldsymbol{\omega} \times OP$ అగును. ఇది P యొక్క వేగము కావున P_i బిందువు యొక్క వేగము

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \text{ అగును.} \qquad \dots \quad \dots \quad (7)$$

కోణీయ గతిభారము : దృఢవస్తువు యొక్క కోణీయ గతిభారము $A = \sum_i r_i \times (m_i\ \omega \times r_i)$ అను సమీకరణము వలన నీయబడును.

$$A = (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\,i + (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\,j + (I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\,k \quad \dots \quad (E)$$

ఇచ్చట

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{yx} = I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} అను సంఖ్యలు నిరూపకాక్షముల చుట్టు జడ భ్రిభమిష (మోమెంట్ అవ్ ఇనర్షియా) లు అనబడును. I_{xy} మొదలైనవి ద్రవ్య జడత్వ లబ్ధము లనబడును.

భ్రిభమిషా ఎలిప్సాయిడ్ (మోమెంటల్ ఎలిప్సాయిడ్): O గుండ పోవు OQ అను రేఖ యొక్క నిర్దేశక కోసైన్‌లు l, m, n అనుకొనుము. P_i నుండి OQ రేఖ కున్న దూరము r_i అయితే నిరూపక జ్యామితి నుండి

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (lx_i + my_i + nz_i)^2$$

అని వచ్చును. కావున OQ చుట్టు దృఢవస్తువు యొక్క జడత్వ భ్రిభమిష,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = I_{xx}\, l^2 + I_{yy}\, m^2 + I_{zz}\, n^2 + 2 I_{xy}\, lm + 2 I_{yz}\, mn + 2 I_{xz}\, ln$$

అని సులువుగా చూడవచ్చును.

OQ పై Q అను బిందువును $OQ^2 = 1/I$ అనుపాత ముగా నుండునట్లు తీసికొనిన ఎడల Q యొక్క బిందు పథము l, m, n మారుచున్నపుడు,

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2(I_{xy}xy + I_{xz}xz + I_{yz}yz) = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

అగును. అనుపాత స్థిరసంఖ్య 1 గా స్వీకరింపబడినది. జడత్వ బ్రిభ్రమిష ఏ రేఖ పైనను పరిమితమే కావున, (8) సమీకరణము వలన ఏర్పడు తలము ఎలిప్సాయిడ్ అగును. దీనినే O వద్ద బ్రిభ్రమిషా ఎలిప్సాయిడ్ అందురు.

ప్రధానాక్షములు : జ్యామితి ప్రకారము, (8) సమీకరణము నిరూపాక్షములను మార్చుట వలన

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad \dots \quad \dots \quad (9)$$

అను రూపమునకు మారునని మనకు తెలియును. నూతనాక్షములు తీసికొనిన ద్రవ్య జడత్వ లబ్ధములన్నియు శూన్యమగును. ఎలిప్సాయిడ్ యొక్క పై ప్రధాన అక్షములు, O వద్ద దృఢ వస్తువు యొక్క ప్రధానాక్షములని చెప్పబడును.

గతిశక్తి : (7) వ సమీకరణము నుండి దృఢవస్తువు యొక్క గతిశక్తి T యీ క్రింది సమీకరణము వలన తెలియనగును.

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \times r_i)^2$$

దీనినే

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{x, y, z} I_{xy}\, \omega_x\, \omega_y \text{ లేదా } A \cdot \omega = 2T. \text{ అని}$$

వ్రాయవచ్చును.

గతి సమీకరణములు : దృఢ వస్తువుయొక్క గతిని రెండు విధములుగ కనుగొనవచ్చును. వస్తువుయొక్క స్థితిని నిర్ధరించుటకు తగిన నిరూపకములను సంపాదించి, లాగ్రాంజ్ ఫలము L ను, దానిని బట్టి

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r = 1, \dots n) \qquad (10)$$

అను గతి సమీకరణములను వ్రాసి వాటిని సాధించుట యొక పద్ధతి. ఈ పద్ధతినే బొంగరము యొక్క గతిని నిర్ణయించుటకు మనము ఉపయోగింతుము. (10) సమీకరణమును ఉపయోగించి గతిశక్తిని కనుగొనుటకు ముఖ్యముగా ద్రవ్య బ్రిభ్రమిషను కనుగొనవలెను.

పైన జెప్పిన I, II, III, IV ఫలములను నేరుగా ఉపయోగించి గతిని కనుగొనుట మరియొక పద్ధతి. ఉదా : II నుండి బాహ్య బలము యొక్క బ్రిభ్రమిష O చుట్టు శూన్యమగునపుడు వస్తువు O చుట్టు స్థిరమైన కోణీయగతి భారము కలిగియుండునని చెప్పగలము. ప్రధానాక్షముల నుపయోగించి, సౌష్ఠవ యుతములై, ఉన్నప్పుడు చాల ఉపయోగించు గతి సమీకరణములను సంపాదింపవచ్చును.

ఆయిలర్ సమీకరణములు : దృఢ వస్తువులో O అనునొక స్థిర బిందువును తీసికొని, అచ్చట గల ప్రధానాక్షములను నిరూపకాక్షములుగా స్వీకరింతము. ఈ నిరూపకాక్షములు చలించుచుండును. O చుట్టు వస్తువుయొక్క కోణీయ గతిభారము (E) సమీకరణములను ఉపయోగించి $A = A\,\omega_x i + B\,\omega_y j + C\,\omega_z k$ అని చూపగలము. A, B, C అనునవి ప్రధానాక్షముల చుట్టు జడత్వ బ్రిభ్రమిషలును, O చుట్టు కోణీయవేగము $\omega_x i + \omega_y j + \omega_x k$ ను, i, j, k అనునవి ప్రధానాక్షముల దిశలలో యూనిట్ వ్రశుతులును అగును. O పై బాహ్య బలముల బ్రిభ్రమిష $M = M_1 i + M_2 j + M_3 k$ అనుకొందము. 1 అను అంత్య ప్రత్యయము ఆకాశములో స్థిరముగానున్న అక్షముల సాపేక్షముగ వచ్చు సంఖ్యలను, 2 ప్రధానాక్షముల సాపేక్షముగ వచ్చు సంఖ్యలను సూచించిన ఎడల

$M = \dfrac{dA}{dt}$ అను సమీకరణము నుండి

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_1 = \left(\frac{dA}{dt}\right)_2 + \omega \times A \qquad \dots \quad \dots \quad (11)$$

అను సమీకరణమును నిరూపింపవచ్చును. (11) సమీకరణమునే ఆయిలర్ గతిసమీకరణము అందురు. దీనినే అదిశ సంకేతములో వ్రాసిన ఎడల

$$M_1 = A\,\frac{d\,\omega_x}{dt} - (B - C)\,\omega_y\,\omega_z$$

$$M_2 = B\,\frac{d\,\omega_y}{dt} - (C - A)\,\omega_z\,\omega_x$$

$$M_3 = C\,\frac{d\,\omega_z}{dt} - (A - B)\,\omega_x\,\omega_y$$

అను సమీకరణములు వచ్చును.

సౌష్ఠవ దృఢవస్తువు యొక్క చలనము : గురుత్వ కేంద్రమువద్ద గల రెండు ప్రధాన ద్రవ్య జడత్వ బ్రిభ్రమిషలు సమానములైనచో ఆ దృఢవస్తువును సౌష్ఠవవస్తువు (లేదా బొంగరము) అని అ దుము. ఒక అక్షము చుట్టు భ్రమణము వలన కలిగిన బొంగరము మొదలైనవి దీనికుదాహరణములు. అట్టి దృఢవస్తువుల చలనమును నిర్ణయించుటకు మనము లాగ్రాంజ్ సమీకరణములను ఉపయోగింతుము. దాని కొరకు 'ఆయిలర్ కోణములు' అను నిరూపకములు ఉపయోగపడును.

ఆయిలర్ కోణములు : బొంగములో అసమాన భ్రమణాక్షమును ζ లేదా 3 చేతను, మిగత అక్షములను 1, 2 చేతను నిర్దేశింతము.

x, y, z ఆకాశములో స్థిరదిశ లనుకొనుము. 3వ అక్షమునకు లంబముగా ఉండు తలము (x, y) తలమును O ξ అను రేఖలో కలియు ననుకొందము. Oξ, O ζలకు లంబ

ముగా $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ దక్షిణావర్త బృందమగునట్లు $O\eta$ అను రేఖను తీసికొందము. $O\zeta$, Oz ల మధ్యకోణమును θ చేతను OX, $O\xi$ ల మధ్యకోణమును ϕ చేతను $O\zeta$, $O1$ ల మధ్యకోణమును ψ చేతను గుర్తించిన ఎడల θ, ϕ, ψ ఆయిలర్ కోణములనబడును.

1, 2 అక్షములపై జడత్వ భ్రమిషలు సమానములు గాన వాని విలువను I_1 అని అందుము. θ, ϕ, ψ అను వేగములకు భౌతికార్థములను సులువుగా ఈయవచ్చును.

ψ మాత్రమే శూన్యము కాకపోయిన ఎడల, బొంగరము ζ అక్షము చుట్టు ψ కోణీయ వేగముతో పరిభ్రమించుచుండును.

ϕ మాత్రము శూన్యము కాకపోయిన ఎడల వస్తువు యొక్క అక్షము ϕ కోణీయ వేగముతో భ్రమించుచు ఒక శంకుపై నుండును. ఈ రకపు చలనమును విషుచలనము అందుము.

θ మాత్రము శూన్యము కాకపోయిన ఎడల వస్త్వక్షము యొక్క వంపు కాలముతో మారును గాన $\dot{\theta}$ కోణీయ వేగముతో ξ అక్షముచుట్టు భ్రమణము సంభవించును. ఇట్టి సమయమున విషుచలనము కూడ ఉన్న ఎడల మొత్తము చలనమును అక్షవిచలనము అందుము.

1, 2, 3 అక్షముల దిశను O' పై కోణీయవేగము యొక్క ఘటకములను ω_1, ω_2, ω_3 అనుకొందము. $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ కోణీయ వేగములను పై అక్షముల దిశలో విభజించిన ఎడల

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$
$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad \ldots \quad (12)$$
$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

అను సమీకరణములు వచ్చును.

లాగ్రాన్జ్ గతిసమీకరణములు : ద్రవ్యజడత్వ లబ్ధములు అక్షముల దిశను శూన్యమగును. కావున (10) వ సమీకరణము ఉపయోగించి

$$T = \tfrac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right)$$

అని చూపగలము.

(12) సంబంధములను ఉపయోగించి $I_1 = I_2$ గాన

$$T = \tfrac{1}{2} \left[I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right) + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (13)$$

అను సంబంధమును తేగలము.

బొంగరముపై పని చేయు శక్తి భూమ్యాకర్షణ శక్తి మాత్రమే అనుకొని λ అనునది θ యొక్క ప్రారంభ విలువ యనుకొన్న ఎడల క్రియాఫలము

$$V = mg \left(h \cos \lambda - h \cos \theta \right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

అను సమీకరణమువలన ఈయబడును. ఇచ్చట m బొంగరము యొక్క ద్రవ్యరాశియు h, గురుత్వ కేంద్రము యొక్క ఎత్తు OG, G గురుత్వకేంద్రము, O స్థిరబిందువనియు సంకేతము. బొంగరము మొట్టమొదట అక్షముపై తిరుగుచున్నదనియు, ఆ అక్షము స్థిర విశ్రాంత స్థితిలో (అచల స్థితిలో) నున్నదనియు అనుకొందము. (13), (14), సమీకరణములనుపయోగించి లాగ్రాన్జ్, సమీకరణములను వ్రాసిన ఎడల

$$\frac{d}{dt}(I_1 \dot{\theta}) + I_1 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta = mgh \sin \theta \quad \ldots \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} I_2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left[I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_2 \cos \theta \times (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \right] = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (17)$$

అని వచ్చును.

(16) నుండి $\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \omega_3$ స్థిర సంఖ్య n అని తేలును. దీనివి ఉపయోగించి (16) నుండి

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_2 n \cos \theta = I_2 n \cos \lambda$$

అని వచ్చును. (15) సమీకరణము నుపయోగించుటకు బదులు శక్తి సమీకరణమును ఉపయోగించుట సులువు.

$$I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + I_2 n^2 = I_2 n^2 + 2\, mgh \left(\cos \lambda - \cos \theta \right)$$

పై సమీకరణముల నుపయోగించి, బొంగరము λ కంటె తక్కువ వంపుకలిగి యుండదనియు, θ_1 కంటె ఎక్కువ వంపునుకూడ కలిగి ఉండదనియు నిరూపింపవచ్చును (చూ. బొంగరము)

ఇచ్చట

$$I_2^2 n^2 = I_1 . 4\, mgh\, p$$

అనియు,

$$\cos \theta_i = p^2 - \sqrt{p^2 - 2p \cos \lambda + 1}$$

అనియు సంకేతము. టి. వెం. రా.

దేశకాల విశిష్ట విశ్వము : విశ్వము అనగా మనము నివసించు భూమి, వట్టి కంటితో మనము చూడగలుగు తారలు, గ్రహములేకాక, దూరదర్శని, రేడియో దూరదర్శనిలో మనకు గోచరమగు నభోమూర్తులన్నియు అని అర్థము.

భూమిని కొలచు ప్రథమ యత్నము క్రీ. పూ. 3 వ శతాబ్దములో ఎరాటోస్తెనిజ్ అను గ్రీకు గణితజ్ఞునిచే చేయబడినది (చూ. ఎరాటోస్తెనీజ్-పు. 168). అతనిప్రయో

గము వలన భూమియొక్క పరిధి 40,2,540 కి. మీ. అని తేలినది. ఆధునిక గణన అది 39,987 కి. మీ అని తెలిపినది. భూమి సంపూర్ణ గోళము కాక ధ్రువములవద్ద కొద్దిగా అదుమబడిన గోళాభము. దాని ఊర్ధ్వాక్ష, తిర్యగక్షముల మానాంతరము 37 కి. మీ. ఈ అంతరమునకు వివరణము నొసంగిన వాడు క్లెయ్‌రో (1741) అను ఫ్రెంచి విజ్ఞుడు. అతని సూచన ప్రకారము భూమి ఘనీభవించక ముందు, తప్తద్రవ స్థితిలోనున్నపుడు, అట్టి పరిభ్రమించు ద్రవరాశి సమతులిత స్థితిని స్వీకరించు ఆకారము గోళాభము. ఈ గోళాభాకారము స్వీకరించబడిన స్థితిలోనే భూమి క్రమముగా ఘనీభవించినది. 19 వ శతాబ్దపు తొలి దశలో భూమధ్యరేఖాపాదము యొక్క కొలత చాల జాగ్రతగా 'అరగో'చే కనుగొనబడినది. ఈ కొలతలోని 1/10,000,000 భాగము దైర్ఘ్యమానమునకు ప్రమాణముగా శాస్త్రలోకముచే గ్రహించబడినది. దీనికే మీటర్ అని పేరు. మనదేశమునందు ఇటీవల దశాంశ పద్ధతిని అవలంబించి మీటరును దైర్ఘ్యప్రమాణముగా అంగీకరించితిమి. నేడు కృత్రిమ ఉపగ్రహముల చలనము అనుశీలన విషయమగుచున్నది. దీని లక్ష్యములలో ఒకటి భూమ్యాకర్షణ బలమును గణించి, ఆకొలతలు ఆధారముగ భూమ్యాకృతి యొక్కయు, దాని శరీరమందున్న ద్రవ్య సాంద్రతా విభజనయొక్కయు, మునుపటికన్న ఎక్కువ కచ్చితమైన విజ్ఞానమును సముపార్జించుట.

సూర్యుని చుట్టు పరిభ్రమించుచున్న గ్రహములు, ఉపగ్రహములలో భూమి యొకటి. ఈ గ్రహముల, సూర్యునినుండి ఎక్కువగుచున్న దూరక్రమములో వాటిని పేర్కొంటిమేని బుధుడు, శుక్రుడు, భూమి, కుజుడు, గురుడు, శని, యురేనస్, నెప్ట్యూన్, ప్లూటో అనెడు వరుస లభ్యమగును. ఇవన్నియు సూర్యుని చుట్టు ఒకే దిశలో, ఇంచుమించు ఒకే తలములో భ్రమించుచున్నవి. యురేనస్, నెప్ట్యూన్, ప్లూటో, తక్కిన కొన్ని చిన్న ఉపగ్రహములు తప్ప తక్కినవాటితో పూర్వులకు పరిచయము కలదు. కాని వారలు గ్రహచలనముల భూమికి సాపేక్షముగ వర్ణించుటచే సూర్యుడు, చంద్రుడుకూడ గ్రహములనియే ఎంచిరి. కనుక వారికి తెలిసిన గ్రహ సంఖ్య 7. అందు వలన కాలమును వారు వారములలో కొలిచిరి. ప్రతి వారము 7 రోజుల పరిమితి కలది. ప్రతి దినము ఒక గ్రహనామమును వహించుచుండెను. భారతీయ పంచాంగములందు సూర్య, చంద్ర కక్ష్యల మిథః ఖండన బిందువులను రాహు కేతువులను పేర మరి రెండు గ్రహములుగ గ్రహించి, గ్రహ సంఖ్య 9 అని చెప్పబడినది. సూర్య చంద్రులు ఈ ఛేదన బిందువుల, అనగా రాహు కేతువుల వద్ద ఉన్నపుడే గ్రహణము సంభవించును.

సూర్యుని నుండి భూమి దూరము ఇంచుమించుగ 149,669,000 కి. మీ.; సెకనుకు 2,99,741 కి. మీ. దూరమును లంఘించు కాంతి సూర్యునినుండి భూమిని చేరుటకు 8 నిమిషములు పట్టును. సూర్యునికి దూరతమమైన ప్లూటోగ్రహము సూర్యునికి 5914×10^6 కి. మీ. దూరములో నున్నది. అందుచే సూర్యుని నుండి కాంతి ప్లూటోను చేరుటకు $5\frac{1}{2}$ గంటలు పట్టును. సూర్యకుటుంబము నంతటిని లంఘించుటకు కాంతి 11 గంటలు తీసికొనును అని చెప్పిన ఆ కుటుంబ వ్యాప్తి పరిమాణము మనకు అవగతము కాగలదు.

సూర్యుని వదలి దూరాకాశములోనికి మన యాత్రను సాగించినచో, మనకు 4 కాంతి వత్సరములు దూరములో నున్న α - సెంటారిని మనము చేరుదాక విశ్వధూళి, విద్యుదావిష్ట కణములు తప్ప మరింకేవియును మనకు తారసిల్లవు. తరువాత మరల మనకు చాల దూరము వరకు శూన్యాకాశమే గోచరమగును. ఆకసమందు ఏసమయమునైన మన వట్టికంటి కగపడుతారలు బహుశః 3000 లకు ఎక్కువగావు. కాని దూరదర్శని మనకు కోట్లకొలది తారలు చూపగలదు. ఈ తారలలో అనేకములగు వాటి దూరములు గణించబడినవి. వట్టి కంటికి వెలుతురు చాలువలె అగుపించు మందాకిని దూరదర్శనితో చూచిన, మిక్కిలి దట్టముగా కూర్చబడినట్లు అగపడును; లక్షలకొలది వేరు వేరు తారల ప్రదర్శించును. ఈ ప్రత్యేక తారల దూరములు, దిశలు పరిగణింపబడినచో, మన తారల విశ్వము అనగా మందాకిని గోచరించును. ఇది పదివేల మిలియన్ల తారలు చిపిట బింబ రూపమున అదుకబడినట్లు అగపడును. ఈ బింబ వ్యాసమును లంఘించుటకు కాంతి ఒకలక్ష వత్సరములు తీసికొనును. దాని దళసరి ఇంచుమించు 30,000 కాంతి వత్సరముల పరిమితిలో ఉండును. మన సూర్యుడు ఈ మందాకినీ కేంద్ర స్థానమందు లేడు, కేంద్రమునకు ప్రక్కవాటుగ 60,000 కాంతి వత్సరముల దూరములో ఉన్నాడు. మనము మన తారా విశ్వమును, (మందాకినిని) ప్రక్కవాటుగనే చూడగలుగుచుండుటచే ఒకప్రక్కన కన్న ఇంకొక ప్రక్కన అనేకములగు నక్షత్రములు ఎక్కువ నిబిడముగ గుంపులు గూడినట్లు కనిపించును. చాల తక్కువ సాంద్రత గల అంటారిస్ (వ్యాసము సూర్యుని దానికి 480 రెట్లు, కాని సాంద్రత సూర్యుని దానిలో 0.00,000,021 వ వంతు) వంటి మహా తారలు, సిరియస్ (సూర్యుని వ్యాసములో, 0.034 వంతు వ్యాసము, సూర్యుని సాంద్రతకు 19,000 రెట్ల సాంద్రత)

వంటి చిన్న తారలు, ఇట్లు అనేక రకముల తారలు మన మందాకినిలో ఉన్నవి, మన మందాకిని ఆకారము మొత్తముమీద సర్పిలము. ఈ మందాకిని, దానితోబాటు సూర్యుడు, చాల మందగతితో భ్రమించుచున్నవి. ఇట్లు సౌరవ్యవస్థ ఆకసమందు ఒక సెకనుకు 20 మైళ్ల దూరము చొప్పున ముందునకు పరువులిడుచున్నది.

మన మందాకిని తరువాత ఇంకొక మిలియన్ కాంతి వత్సరముల దూరము దాటినచో మరల శూన్యమే గోచరించును. కాని, దీని తరువాత ఇంకను అస్పష్ట కాంతిగల మచ్చలవలె అగుపించు అనేకములగు ద్వీప విశ్వములు, లేదా ప్రత్యేక మందాకినులు కలవు. వీటిలో మనకు చాల దగ్గరది, స్పష్టముగా గోచరించునది అగు ద్వీప విశ్వము ఆండ్రోమీడా లోని అతి చమత్కార దర్శనము గల సర్పిల నీహారిక (స్పైరల్ నెబ్యులా). ఇది మనకు 2,000,000 కాంతి వత్సరముల దూరములో ఉన్నది. దాని అడ్డ కొలత 50,000 కాంతి వత్సరములు, మనకది ఒక నియత కోణము పరిమితి గల వంపును చూపును. దూర దర్శనులకు గోచరములగు ఇట్టి విశ్వ ద్వీప దృశ్యములు కొన్నివందల మిలియన్ల సంఖ్యలో ఉన్నవి. ఇందు ప్రతిదియు, అనేక మిలియన్ల సహస్రముల తారా సంఖ్యతో నిండియున్న వేరొక విశ్వమే. 200 అంగుళముల (5.08 మీ. లు) పాలమోర్ దూరదర్శిని ఆకసమును భేదించి, మనకు 2000 మిలియన్ల కాంతి వత్సరముల దూరములో ఉన్న తేజోమూర్తులను దృగ్గోచరము కావించుచున్నది.

ఇంకొక విశేషము. ఈ మందాకినులు ఆకసమునందు ప్రత్యేకములుగా గాక గుంపులుగా ప్రోగైయున్నవి. మన మందాకిని, ఆండ్రోమీడా నీహారిక, ఇంను మరి ఇరువది మందాకినులు 25 గుత్తిగా ఉన్నవి. మందాకిని లోని తారలలో ఒకదానిది గాని, లేదా అనేక తారలవి గాని వర్ణమాలల పరీక్షవలన ఆ తారగాని, ఆ మందాకిని గాని మనలను అభిగమించుచున్నదో, అపగమించుచన్నదో, ఇంతేగాక ఈ అభిగమన, అపగమన కార్యము లెంత వేగముతో సాగుచున్నవో తెలిసికొనవచ్చును ఈ పరీక్షకు ఒక వింత ఫలము గోచరించినది. అది ఈ మందాకినులు అన్నియు మనలనుండి అపగమించుచున్నవని, అపగమన వేగము ఆ మందాకినియొక్క దూరముతో సమానుపాతములో ఉన్నదని, ప్రత్యవేక్షణ కందుబాటులో నున్న విప్రకృష్టతమ సీమయందు అపగమన వేగము కాంతి వేగములో అయిదవ వంతని మదింపు వేయబడినది. కాని అపగమన వేగము కాంతి వేగమునకు ఇంచుమించు సమానమగు దూరమునకు పోయిన, మందాకినులు మన దృష్టి నుండి శాశ్వతముగ వైదొలగును. ఈ సంభవము 4000 మిలియన్ల కాంతి వత్సరముల దూరమున లేదా 200 అంగుళముల దూరదర్శనియొక్క దృష్టి విస్తారమునకు రెండింతల దూరమున జరుగును.

చాక్షుష దూరదర్శని అత్యధిక దక్షతగల రేడియో దూరదర్శని యను ఇంకొక పరికరముచే నేడు సహకరించబడుచున్నది. ఇది వాస్తవముగ దూరదర్శనియే కాదు. ఇది ఆకసమునుండి మన వైపు వచ్చుచున్న రేడియో తరంగముల శోధించు పరికరము. వీటిలో మహత్తమ పరిమాణము గల పరికరము ఇంగ్లండులో జాడ్రెల్ బ్యాంకులో నెలకొల్పబడినది. ఇది 76.2 మీ. ల వ్యాసము గల పెద్ద మూకుడు ఆకారము గల ఉక్కు పలకలతో చేయబడిన పాత్ర. దీనిని ఆకసమందు ఏ దిక్కు మొగమునకైన త్రిప్ప వచ్చును. ఆకసములందు పయనించు రేడియో తరంగములు దీనిపైబడి పరావర్తితములై, కేంద్రీకృతములై, ఆ పాత్ర కేంద్రమునుండి పైకిపోడుచుకొని వచ్చిన ఆకాశకముల (ఏరియల్స్) మీదిమొనలను తాకి అందు చిన్న విద్యుత్ప్రవాహములుద్భవించి, సంగ్రాహకమును ప్రవేశించును. ఇచ్చట ఇవి అధికీకరించబడి కదలుచున్న కాగితపు పేలికపై లిఖించబడును. ఈ సంకేతములు అనేక ప్రభవస్థానముల నుండి గ్రహించబడును. తక్కిన వన్నియు అప్రస్తుతములని నిరాకృతము లైనపుడు ఆకసమందు వేరు వేరు దిక్కులలో అసందిగ్ధ రేడియో తరంగ ప్రభవ స్థానములున్నవని తెలిసినది. అట్టి ప్రభవ స్థానములకు రేడియో తారలు అని పేరు. వేలకొలది ఇట్టి తారలు గుర్తించబడినవి. కాని ఒక గణ్యమగు విషయ మేమన ఒక దిక్కులో చాక్షుష దూరదర్శని యందు మనకు వాస్తవముగ అగపడుచున్న తారలతో ఈ ప్రభవస్థానము లెల్లపుడును సంప్రతించుటలేదు చాక్షుష దూర దర్శనితో చూచినపుడు కాంతిమంతమైన తార యున్నచోటు నుండి కనీ కనపడని సంకేతములు లేదా, సంకేతముల అభావమో గోచరించవచ్చును.

చాక్షుష వర్ణమాలతో సరిపోల్చినపుడు, రేడియో వర్ణమాల ఆకసపు లోతును భేదించుటకు విస్తృతతర ప్రత్యవేక్షణ గవాక్ష సౌకర్యమును, తరంగ గోచరత్వమును మన కందజేయుచున్నది రాత్రియనక, పగలనక దీనిని ఉపయోగించవచ్చును. రేడియో తరంగములు విశ్వ ధూళివలన నిరోధించబడవు. 5.08 మీ. లు (200 అంగుళముల) పెద్ద దూర దర్శనికి అందని దూరముల నుండి ఆగతములగు సంకేతములు రేడియో దూరదర్శిని గ్రహించ గలదు.

అందు వలన ఖగోళ శాస్త్రమందు రేడియో దూరదర్శని నవీన యుగమును నెలకొల్పినది. చాక్షుష దూరదర్శని దాని దృష్టిపోగల దూర పరిమితికి పోయి ఇంక సాగలేని కాలమందు రేడియో ఖగోళ శాస్త్రములందు రేడియో దూరదర్శని నూతన యుగమును నెలకొల్పినది.

రేడియో ఖగోళ శాస్త్రనిర్వాహములలో కొన్ని ఈ దిగువ సంగ్రహించబడినవి.

సూర్యగోళము ప్రబలమైన రేడియో తార కాదు, కాని మన కది చాల దగ్గర ఉండుటచే దాని నుండి మన కందు సంకేతములు స్పష్టముగ గోచరించుచున్నవి. సూర్య గోళము యొక్క దీప్తిమంతములైన భాగములు బలహీన మైన సంకేతములు పంపుచున్నవి. కాని సంపూర్ణ సూర్య గ్రహణ సమయమున మన కంటి కగపడని మకుటపు అస్పష్ట కాంతి బలవత్తరములైన సంకేతములు పంపు చున్నది. అందువలన మకుటమందు, బింబావ్యవహిత మండలమందుగల భౌతిక పరిస్థితుల అనుశీలనకై రేడియో ఖగోళ శాస్త్రము సమర్థమగుచున్నది. విశిష్టతరంగ దైర్ఘ్య ములకు పరికరమును సమస్వరించుట వలన సూర్యుని ఉపరితలము నుండి వేరు వేరు దూరములలో ఉన్న వాతా వరణము యొక్క ఉత్తేజిత స్థితులను అనుశీలించవచ్చును. అందు తేలిన గణనీయ విషయమేమన, కంటి కగపడు దూరమునకు మించి, సూర్య మకుటము చాల దూర మునకు అనగా భూపర్యంతము వ్యాప్తమై యున్నది.

రేడియో సంకేతములు చంద్రుని నుండి*, గురుగ్రహము నుండి కూడ గుర్తించబడినవి.

రేడియో తరంగముల ప్రబలతమ ప్రభవ స్థానము కాసియోపియా (శర్మిష్ఠ) రాశిలో వినివేశితమైయున్నది. ఈ స్థానము సరిగా ప్రేలిన యొక తారది యని నిర్ధరించ బడినది. ఇంకొక ప్రబలప్రభవస్థానము సైగ్నస్ (హంస) లో ఉన్నది. ఇది మనకు 260,000,000 కాంతి వత్సరముల దూరములో ఉన్నది. పరస్పరాభిముఖముగ పరువులెత్తు చున్న రెండు మందాకినుల సంఘర్షణ రేడియో సంకేతము లకు ప్రభవమని 200 అంగుళముల (5·08 మీ.లు) దూరదర్శని ఆవిష్కరించినది. తక్కిన సంఘర్షమాణ మందాకినులకు కూడ ఛాయా చిత్రములు తీయబడినవి. రేడియో సంకే తములు జనించు చాలచోట్లు ఇట్టివే అని నేడు విశ్వసించ బడుచున్నది. మందాకినులు ఘన వస్తువులు కావని మరువ రాదు. వాటిలో అపార శూన్య ప్రదేశములు గలవు. అందుచేత సంఘర్షణ తారల మధ్య జరుగుట సంభవించదు. ఇచ్చట సంఘర్షణ యనగా ఆ రెండు మందాకినులు ప్రచండమైన అయస్కాంతక సంక్షోభముల జనింపజేయ గలిగినంతటి సమీపమునకు వచ్చుట యని భావించవలెను.

వ్యాకోచించుచున్న విశ్వము : మందాకినులు అన్నియు మన నుండి దూర దూరముగ జరుగుచున్నవని ఇదివరకే తెలిసికొంటిమి. మన మందాకినియందు విశేషమేమియు లేమిచే వేరుపడుట ఈ విశ్వమందు ఏ రెండు మందాకినుల మధ్య అంతరమైనను అధికమగుచున్నది యను వివరణకు తగియున్నది. అందుచే, కాలము మారుకొద్ది, విశ్వము వ్యాకోచించుచున్నది అను భావము మనకు లభ్యమగు చున్నది. దీనినుండి ఇప్పటికన్న పురాతన కాలమందు ఈ మందాకినులన్నియు పరస్పర సమీపస్థములై యుండెనను పర్యవసానము అనివార్యము.

దూర మధికమగుచున్న రేటు మనకు తెలుసును గనుక, మనము కాలమందు వెనుకకు లెక్క గట్టినయెడల, ఇవన్నియు పరస్పర సమీపస్థములై ఎన్నడుండినవో కను గొనవచ్చును. ఈ లెక్కల ఫలము ఇంచు మించు 6,000,000,000 సంవత్సరముల క్రింద ఇవన్నియు నిబిడముగ గుమిగూడి ఉన్నవని తేలుచున్నది. ప్రత్యవేక్షణీయ విశ్వమందున్న ద్రవ్యరాశియంతయు నాడు 1,28,74,80,000 కి. మీ. వ్యాసము గల గోళములో దట్టముగా ఇమిడి యుండెను. ఈ ఇమిడియున్న ద్రవ్యము యొక్క సాంద్రత క్యూబిక్ సెంటిమీటరుకు ఒక వంద మిలియన్ల టన్నులకు తక్కువగ ఉండదు. ఇది ఒక విధమగు విశ్వాండము. ఇది ప్రసభముగ ప్రిదిలి, నాటి నుండి వ్యాకోచించుచునే యున్నది. రేడియో దూర దర్శనితో నిభృత స్థలముల నుండి మనము గ్రహించుచున్న సంకేతములలో కొన్ని, రేడియో తారలు లేనిచోట్ల నుండి మనల చేరుచున్న సందేశములు - ఇవన్నియు ఈ విశ్వము వ్యాకోచించు చున్నపుడు జనించు అభిఘాతతరంగముఖము నుండి వెలువడినవియే కావచ్చును.

ఈ వాదము లెమైతర్ అను బెల్జియన్ ఖగోళ శాస్త్ర జ్ఞునిచే ఉపపాదింపబడినది. ఈ వాదము ప్రకారము మందా కినులు అన్నియు అనంత కుహరములో మాయమైనచో, మన దొక్కటియే మిగిలియుండును. ఫ్రెడ్ హాయిల్ చే ప్రతిపాదింపబడిన మరియొక వాదము ప్రకారము దూరస్థ మందాకినులు తిరోహితములగుచుండ, నూతనములు వాటి స్థానములందు ఉద్భవించుచున్నవి. వైదొలగు మందాకినుల వలన లోపించిన ద్రవ్యరాశి, ఉచితమైన రేటున మరల నవీనముగా సృజింపబడుచున్నది. ఈ సృష్టియైనను అంత వెక్కసముగా నుండనక్కరలేదు. మనము నివసించు

* సూర్యుని తరంగములే పరావర్తితములై చంద్రుని నుండి వచ్చును.

మామూలు గదియంతటి చోటులో ప్రతి నాలుగువేల యేండ్లకు ఒక ఉదజని పరమాణువు ప్రాదుర్భవించిన చాలును. కాని ఈ సృష్టి ప్రక్రియ విశ్వవ్యాప్తమగుటచే మొత్తముమీద అపారమగు ద్రవ్యరాశి అనగా 5000,000 సూర్యులకు సమముగా ద్రవ్యరాశి ప్రతి సెకనుకు సృజింప బడుచున్నది. ఈ విశ్వము సంకోచవ్యాకోచములకు పర్యాయముగ గురియగుచు, స్పందించుచున్నది అను మరి యొక వాదముకూడ కలదు. ఇది విశ్వము పర్యాయ క్రమమున సృష్టి ప్రలయములకు లోనగుచున్నది అను మన సిద్ధాంతమును చాలవరకు పోలియున్నది. కాలపథమున విశ్వము భూమి యొక్క దైనందిన పరిభ్రమణము వలన సహజ కాలమానము నొకదానిని మనకు ప్రసాదించినది. భారతీయ ఖగోళశాస్త్రమందు రెండు సూర్యోదయముల మధ్య కాలము ఒక దినమని ఎంచబడినది. పాశ్చాత్యదినము అర్ధరాత్రమున ప్రారంభించునని పరిగణించబడుచున్నది. ఈ వ్యత్యాసము అర్ధరాత్రికిని, దాని వెంబడించు ఉదయ మునకును గల కాల వ్యవధి గురించి కొంత భ్రాంతికి అవ కాశమిచ్చుచున్నది. ఏలన పాశ్చాత్య కాలమానములో సోమవారమని వ్యవహరింపబడు కాలఖండము మన గణన ప్రకారము ఆదివారమగుచున్నది. మధ్య మాన సౌర దినము 24 గంటలలోనికి విభజింపబడినది. నాక్షత్రదినము అనగా నక్షత్రములకు సాపేక్షముగ భూమియొక్క సంపూర్ణ పరిభ్రమణ మొనర్చు కాలవ్యవధి. నాక్షత్రదినము సౌరదినము కన్న 4 నిమిషములు కురుచ.

దిన పరిమాణమును అతి జాగ్రత్తగ కొలచినయెడల అది క్రమరహితమై మార్పులకు లోబడి యుండునని తెలిసినది. ఇంతేగాక భూపరిభ్రమణము క్రమముగా మంద గించుచున్నది. ప్రతి వందపండ్లకు ఒక సెకనులో ఒక అంశ వెనుకబడుచున్నది. ఇది బహుశః భూతలముపై వేలల వలని సంఘర్షణమువలన కావచ్చును. ఇట్టి సూక్ష్మ వ్యత్యాసములు కనుగొనుటకు ఖగోళశాస్త్రజ్ఞునికి మిక్కిలి నిశితమైన కాలప్రమాణ మావశ్యకము. నక్షత్ర వీధిని చంద్రుని సంచారము అట్టి ప్రమాణములలో ఒకటి. ఇంకొకటి పరమాణు గడియారము. ఇందు పరమాణువు యొక్క స్పందనా వృత్తి కాలము ప్రమాణముగా తీసికొన బడినది. ఇట్టి అవృత్తులు స్థిరములనియు, భౌతికపరిస్థితులు వాటిని ఏ మాత్రము భంగపరచవనియు తెలిసినది.

సంపూర్ణముగ భిన్నములైన వేరువేరు మార్గములలో భూమి వయస్సు నిర్ధరించబడినది. సముద్రమందలి లవణ రాశి ఎక్కువగుచున్న రేటు ఈ వయోనిర్ధారణ మార్గము లలో ఒకటి. భూమి చల్లబడుచున్న రేటుపై ఆధారపడి యున్నది ఇంకొకటి. సహజ రశ్మ్యుద్గారి ద్రవ్యముల విచ్ఛిత్తిరేటు మరియొక త్రోవ. ఈ విధానము లన్నియు భూమి వయసు 10^{11} పండ్ల తరగతిలో నుండునని ఏక గ్రీవముగ తెల్పుచున్నవి. ఇది ఇంచుమించు సూర్యుని వయస్సుకూడను.

సౌర కుటుంబ ప్రాదుర్భావము విషయమై అనేక కల్పనలు వెలుగుచూచినవి. వాటిలో అనల్ప జనాదర మును పడసినవాదము ప్రకారము ఒక నక్షత్రమొకప్పుడు యాదృచ్ఛికముగ సూర్యుని ఒరసిపోవునంత దగ్గరగవచ్చి పోయినది, దాని గురుత్వాకర్షణబలము కారణముగ సూర్యగోళమునుండి అది ద్రవ్యశకములను ఊడ పెరికినది. ఈ ద్రవ్యఖండములే వేరువేరు గ్రహములయ్యెను. దీనికి పూర్ణముగ విరుద్ధమైన వాదమొకటి రష్యన్ శాస్త్రజ్ఞుడు ష్మిట్ చే ప్రతిపాదింపబడినది. ఈతని అభిప్రాయములో సూర్యగోళము పూర్వమే ఉండెను. ఆగోళము అత్యధిక రాశిలో ధూళిని, వాయువును తనవైపున కాకర్షించు కొనినది. ఈ ద్రవ్యము చిన్నచిన్న గ్రహములుగ ఏర్పడినది. ఇవియే క్రమముగ కలిసికొని భూమి, తక్కిన గ్రహ ములుగా ఏర్పడినవి. ఈతని యూహాప్రకారము లఘుగ్రహ ములు గ్రహవిచ్ఛేదనఫలములు కావు. విశ్వధూళి రాశి నుండి గ్రహములు ఏర్పడుటలో అవి మాధ్యమ దశను ప్రదర్శించుచున్నవి. **అ. న.**

ద్రవ్యరాశి (మాస్) : భౌతికశాస్త్ర ముఖ్య ఆధార భావములలో ఇది ఒకటి. భౌతికశాస్త్రదృష్టిలో ఒక్కొక్క వస్తువును ఒక కణసమూహము. ఒక్కొక్క కణమునకు ఒక ద్రవ్యరాశి ఉన్నది. అన్ని కణముల ద్రవ్యరాశి మొత్తమే ఆ వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి.

ఒక వస్తువుయొక్క ద్రవ్యరాశి, ఆ వస్తువు జడత్వము యొక్క కొలత అనవచ్చును. ఒకే నిర్దిష్టబలమును వేర్వేరు వస్తువులపై ప్రయోగించునపుడు, ఎక్కువ ద్రవ్యరాశిగల వస్తువు త్వరణము తక్కువగ ఉండును; తక్కువ ద్రవ్య రాశిగల వస్తువు త్వరణము ఎక్కువగ ఉండును. న్యూటన్ ప్రతిపాదించిన రెండవగతి నియమము ప్రకారము త్వర ణము = బలము ÷ ద్రవ్యరాశి. ఈ న్యాయమును ఉపయో గించి, ఒకే బలమును వేర్వేరు వస్తువులపై ప్రయోగించి, వాటి ద్రవ్యరాశి నిష్పత్తులను కనుగొనవచ్చును. తరువాత ఏదో ఒక వస్తువు ద్రవ్యరాశిని ఏకాంకముగా తీసికొని మిగిలిన వస్తువుల ద్రవ్యరాశిని కనిపెట్టవచ్చును.

సెంటీమీటర్ - గ్రామ్ - సెకెను విధానములో ద్రవ్య రాశి ఏకాంకము ఒక గ్రామ్ యొక్క ద్రవ్యరాశి. అడుగు - పౌండు - సెకెను విధానములో ఏకాంక ద్రవ్యరాశి ఒక

పౌను యొక్క ద్రవ్యరాశి. ఇంజినీరింగులో స్లగ్ అను ఏకాంకమును వాడుదురు.

ఒక వస్తువుయొక్క ద్రవ్యరాశి దాని శీతోష్ణ, లేదా విద్యుదయస్కాంతస్థితిపై ఆధారపడియుండదు. న్యూటన్ యాంత్రికశాస్త్రము ప్రకారము ఒక వస్తువు ద్రవ్యరాశి దానిచలనముపై ఆధారపడి ఉండదు. అయితే సాపేక్షతా వాదము ప్రకారము ఒక వస్తువు స్థిరముగా ఉన్నపుడు దాని ద్రవ్యరాశి m_0 అయితే, దాని వేగము v అగునపుడు దాని ద్రవ్యరాశి హెచ్చయి $m_0/\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ అగును. ఇచ్చట c అనునది వెలుతురు యొక్క వేగము. ఇది మనము ఉపయోగించు నిరూపకాక్షములపై ఆధార పడి యుండదు. కనుక c ఒక స్థిరరాశి. దీని విలువ సుమారు 3×10^{10} సెంటీమీటరులు/సెకెను. ఒక కణము యొక్క వేగము c ను సమీపించగా దాని ద్రవ్యరాశి అనంతమగును. కనుక (1) ఏ వస్తువు కాంతివేగముతో చలింపదు; (2) క్వాంటమ్ వాదములో కాంతి కణము లను భావము వచ్చుచున్నది. ఈ కణముల వేగము c అగుటచే $\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ శూన్యమగుచున్నది. కనుక $m_0/\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ అనంతముగా నుండకూడదు అనినచో $m_0=0$ గా నుండవలెను. క్వాంటమ్ వాదములో కాంతి కణముల స్థైర్యరాశి m_0 శూన్యముగ నుండును. దాని ద్రవ్య రాశి అంతయు దాని వేగము వలన కలిగినదే. అ. న.

ద్విపద, బహుపద సిద్ధాంతములు : ఈ సిద్ధాంత ములు యూక్లిడ్ సూత్రము $(a+b)^2$ తో ప్రారంభమై, ఘాతము యొక్క ఏ విలువకైన అవి నిజమని ఆబెల్ ఉపపత్తిని కల్పించు సరికి 2 వేల సంవత్సరములు పట్టినది.

ద్విపద సిద్ధాంతము: ద్విపద సిద్ధాంతము బీజగణిత మందు ఒక ముఖ్యమైన సూత్రము. రెండు పదములు గల ఒక బీజగణిత సమాసమును ద్విపదము అని అందురు. $x+a$ ఒక ద్విపదము. n ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము అయినచో $(x+a)^n$ అను సమాసమును దిగువ సూత్రము ప్రకారము విస్తరించి వ్రాయవచ్చును:

$$(x+a)^n = x^n + n\,x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}a^r + \dots + a^n \dots (1)$$

పై సూత్రమును ధనాత్మక పూర్ణాంక ఘాతమునకు అనురూపము అగు ద్విపద సిద్ధాంతము అని చెప్పుదురు. సామాన్య గుణకారము వలన క్రింది ఫలితములు పొంద వచ్చును:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

కాని, ఘాతము హెచ్చినకొలది, సామాన్య గుణకారము వలన ఇట్టి సూత్రఫలములు ఏర్పరచుట కష్టసాధ్యము. n విలువ ఎంత పెద్దది అయినను $(x+a)^n$ యొక్క విస్తరణమును సులభముగా వ్రాయగలము.

ఈ విస్తరణమును దిగువ ఉదాహరించిన వరుస పద ముల నిర్మాణక్రమముబట్టి వ్రాయగలము.

1. మొదటి పదములో x యొక్క ఘాతము n అగును; తరువాత పదములో x యొక్క ఘాతము ఒకటి ఒకటి చొప్పున తగ్గుచుండును.

2. ఏ పదములోనైన x, a ల ఘాతముల మొత్తము n అగును.

3. విస్తరణములో మొత్తము $n+1$ పదములు ఉండును.

4. $(x+a)^n = (x+a)(x+a)\dots\dots(x+a)$ మొత్తము n విభాజకములు ఉండును. మొదట పదములు అన్నిటిలోనుండి x తీసికొని గుణించినచో, x^n లభించును. గుణకము ఒకటి. తరువాత $(n-1)$ విభాజకముల నుండి x ను, మిగిలిన ఒక విభాజకము నుండి a ని తీసికొనినచో $x^{n-1}a$ లభించును. a ల సంఖ్య n. వాటినుండి ఒక a ని ${}_nC_1$ విధములలో ఏరుకొనవచ్చును. కాబట్టి $x^{n-1}a$ యొక్క గుణకము ${}_nC_1$. పిదప మూడవ పదము $x^{n-2}a^2$ ను కల్పించుటకు $(n-2)$ విభాజకముల నుండి x ను, మిగిలిన రెండు విభాజకముల నుండి a ను తీసికొని నచో గుణకము ${}_nC_2$ లభించును. పదము ${}_nC_2\,a^2x^{n-2}$. $(r+1)$ వ పదము వ్యాపక (జనరల్) పదము అన బడును. దాని విలువ ${}_nC_r\,a^rx^{n-r}$. ఇందలి గుణకములు ${}_nC_1, {}_nC_2 \dots\dots {}_nC_r$ అన్నియు ద్విపద గుణకములు.

5. విస్తరణములో ఆదినుండి, చివరలనుండి సమదూర ములో ఉండు పదముల యొక్క గుణకములు సమాన ములు అని ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ సూత్రమువలన తెలియనగును. సూత్రము (1) లో a కి బదులు $-a$ ప్రతిక్షేపించగా

$$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 - \dots$$

$+(-1)^n a^n$ అను విస్తరణము ఏర్పడును.

ఇందలి పదములు ఒకటి విడిచి ఒకటి ధనాత్మకము, ఋణాత్మకము అగును. కడపటి పదము n సరిసంఖ్య

అయినచో $+a^n$ అగును; బేసి సంఖ్య అయినచో $-a^n$ అగును.

సూత్రము (1) లో x కు బదులు 1, a కు బదులు x ప్రతిక్షేపింపగా దిగువ సూత్రము లభించును :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)x^r}{r!} + \dots \dots + x^n =$$

$$1 + {}_nC_1\, x + {}_nC_2\, x^2 + \dots \dots + {}_nC_n\, x^n \dots (2)$$

పై సూత్రములో x కు బదులు 1 వ్రాసిన ఎడల $2^n = 1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots \dots + {}_nC_n$ అగును. అనగా ద్విపద గుణకముల మొత్తము $= 2^n$.

ఈ సూత్రములో x కు బదులు (-1) వ్రాసిన ఎడల

$0 = 1 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 - \dots \dots$ అగును

$$1 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots \dots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \dots \dots$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots \dots + {}_nC_n)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

అనగా, బేసి గుణకముల మొత్తము = సరి గుణకముల మొత్తము $= 2^{n-1}$.

భిన్నాంకీయ, ఋణాత్మక ఘాతములు : n ఘాతము ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము అయినప్పుడు పైన వివరించిన పరంపర $(n+1)$ పదములతో ముగియును. కాని, n ఘాతము ఒక ధనాత్మక భిన్నాంకము, లేదా ఋణాత్మక అకరణీయాంకము అయినప్పుడు పై సూత్రము అదే రూపము కలిగి ఉన్నప్పటికి, పరంపర అనంతము అగును.

పై విస్తరణమందలి పరంపర అనంతము అగునపుడు ద్విపద సిద్ధాంతము కష్టతరము. పరంపర ఉపసరణ పరంపర అగునపుడే అది $(1+x)^n$ యొక్క అంకగణిత విలువకు సమానము. అనగా పరంపరలోని మొదటి n పదముల మొత్తము n అనంతము అగునపుడు ఒక నిర్దిష్ట అవధిని సమీపించవలెను. x యొక్క ప్రకేవల విలువ ఒకటి కంటె తక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఈ పరంపర ఉపసరణ పరంపర అగును. అప్పుడే ఈ విస్తరణము సాధ్యమగును.

n కరణీయరాశి అయినప్పుడు కూడ ద్విపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించవచ్చును. ఇంతేకాక x, n లు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అగునపుడు, అనగా $a+ib$ (a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $i^2 = -1$) అను రూపమును కలిగి ఉండునపుడు కూడ ఈ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించవచ్చును. ఈ సందర్భమునందు కూడ విస్తరణము అనంతపరంపరయే అగును. x యొక్క ఏయే విలువలకు ఇది ఉపసరణ పరంపర అగునో తెలిపెడి సూత్రములు కనుగొనబడినవి.

సమాసముల యొక్క ఉపసన్నమాన విలువలు కనుగొనుటకు ద్విపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదా : ద్విపద సిద్ధాంతమువలన $\sqrt[5]{31}$ యొక్క విలువ 4 దశాంశస్థానముల వరకు కనుగొందము :

$$\sqrt[5]{31} = (32-1)^{\frac{1}{5}} =$$

$$\left\{32\left(1-\frac{1}{32}\right)\right\}^{\frac{1}{5}} = 2\left(1-\frac{1}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}} =$$

$$2\left\{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^{10}} - \dots \dots\right\} =$$

$$2\,(1 - 0{\cdot}00625 - 0{\cdot}00625 \times 0{\cdot}0125) = 1{\cdot}9873$$

ఇచ్చట విలువ 4 దశాంశస్థానములవరకే కావలెను. కాన విస్తరణములోని మొదటి మూడు పదములే ఉపయోగించితిమి.

ద్విపద సిద్ధాంతమువలన సంయోగవాదములోని కొన్ని సర్వసమీకరణములను ఏర్పాటుచేయవచ్చును.

ఉదా : $1^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \dots + {}_nC_n{}^2$ యొక్క విలువ ఎంత ?

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \times (x+1)^n$$

$$= (1 + {}_nC_1\, x + {}_nC_2\, x^2 + \dots \dots + {}_nC_n\, x^n) \times (x^n + {}_nC_1\, x^{n-1} + {}_nC_2\, x^{n-2} + \dots \dots + {}_nC_n)$$

కుడిప్రక్కఉన్న గుణకారలబ్ధములో x^n యొక్క గుణకము

$$1^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \dots \dots + {}_nC_n{}^2$$

ఎడమ ప్రక్క x^n యొక్క గుణకము ${}_{2n}C_n$. కావున

$$1^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \dots \dots + {}_nC_n{}^2 = {}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

బహుపద సిద్ధాంతము : రెండు పదములకంటె హెచ్చు పదములు కల బీజగణిత సమాసము బహుపదము. $(a+b+c+d+\dots\dots)^n$ యొక్క విస్తరణమును బహుపద సిద్ధాంతము అందురు. ఈ విస్తరణమును మరల మరల ప్రయోగించి వ్రాయనగును. కాని ఈ విస్తరణము కన్న దీనిలోని ఒక ప్రత్యేక పదమును కనుగొనుటయే ముఖ్యము.

n ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము అయినచో $(a+b+c+d+\dots\dots)^n$ విస్తరణములోని ఒక సాధారణ పదము $= \dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}\, a^p b^q c^r \dots$; ఇందు p, q, r ... అనునవి శూన్యములు, లేదా ధనాత్మక పూర్ణాంకములు. మరియు $p+q+r \dots \dots = n$.

అట్లే $(a+bx+cx^2+dx^3+\ \dots\ \dots)^n$. విస్తరణము యొక్క సాధారణ పదము

$$= \frac{n!}{p!\,q!\,r!\,s!}\, a^p\,(bx)^q\,(cx^2)^r\,(dx^3)^s\ \dots\ \dots$$

$$= \frac{n!}{p!\,q!\,r!}\, a^p\,b^q\,c^r\,d^s\ \dots\ \dots\ x^{q+2r+3s+\dots\dots}$$

ఇప్పుడు x యొక్క ఏ ప్రత్యేక ఘాతమును (x^t అనుకొనుము) కలిగిన పదముయొక్క గుణకము కావలెనన్న

$$q+2r+3s+\ \dots\ \dots\ = t$$

$$p+q+r+\ \dots\ \dots\ = n$$

అను సమీకరణములను తృప్తిపరచు p, q, r ... ... ల యొక్క ధనాత్మక పూర్ణాంకముల విలువలను అన్ని విధముల కనుగొని, అట్లువచ్చు గుణకములను అన్నింటిని కలుపుదుము. ఈ ప్రకారము కలుపగా వచ్చిన మొత్తము సంఖ్యయే అభీష్టగుణకము.

క. సు. రా.

ధూమకేతువులు (తోకచుక్కలు) : నభోమూర్తులలో అత్యాకర్షణీయమైనవి ధూమకేతువులు. సన్నిహిత భావికాలమందు గొప్ప ఆపద సంభవింపనున్నపుడే ధూమకేతువులు కనబడుచుండునని ప్రాచీనుల విశ్వాసము. మహాభారత యుద్ధ సమయమునందు కూడ ఒక ధూమకేతువు ప్రత్యక్షమయ్యెనట. అందుచే వీటి సంభవము మనోహరమైనదేగాక భీతిజనకము కూడను.

ధూమకేతువుల నామకరణము : ఒక సంవత్సరములో శాస్త్రజ్ఞులు అవేక్షించు ధూమకేతువులను A, B, C అను అక్షరములచే వాటి ఆవిష్కరణ క్రమమున సంవత్సరము, ఆవిష్కరించిన శాస్త్రజ్ఞుని నామమును చేర్చి సూచించుచుందురు. (అప్పుడప్పుడు శాస్త్రజ్ఞుల పేర్లను చేర్చుటలేదు). ఉదా : 1908 D మూర్‌హౌస్ ధూమకేతువు అనగా 1908 వ సంవత్సరమున మూర్‌హౌస్‌చే ఆవిష్కరింపబడిన 4 వ ధూమకేతువు అని సూచన. పిదప పరిహేళిని తరించు క్రమమును బట్టి వానికి సంఖ్య ఇత్తురు. పై ధూమకేతువు పరిహేళిని తరించిన మూడవ ధూమకేతువు అగుటచే 1908 III (మూర్‌హౌస్) అని సూచింతురు. (ఉదా : బొర్రెల్లి 1903 IV).

1900 వ సంవత్సరము వరకు 1056 ధూమకేతువులు ఆవిష్కరింపబడినవి. వీటిలో 19 వ శతాబ్దములో 355 ప్రత్యక్షమైనవి. 1947 వ సంవత్సరములో 14 ధూమకేతువులు కనుగొనబడినవి. ఇంతవరకు ఏ ఒక సంవత్సరములో అన్ని ధూమకేతువులను కనిపెట్టలేదు.

ధూమకేతువుల రూపము - కోమా : ధూమకేతువు ఆదిలో అస్పష్టమైన బింబమువలె గోచరించును. దీనినే "కోమా" అని చెప్పుదురు. ఇది కొన్ని వేళలలో వలయాకారముగా ఉండును. విసనకర్ర ఆకారము గల కోమా యును గోచరించుట కలదు. కనుక దీనికి క్రమమైన ఆకారము లేదు. కక్ష్యయొక్క వివిధ భాగములలో వివిధ రూపములను కలిగి ఉండును. ధూమకేతువు సూర్యునికి అత్యంత సమీపమునకు వచ్చునపుడు ఎల్లప్పుడును అది సంకోచించుచుండును కోమాయొక్క ముఖ్య గుణము పారదర్శకత. ధూమకేతువులగుండా కొన్ని అల్ప దీప్తిగల నక్షత్రములను శాస్త్రజ్ఞులు చూచి ఉన్నారు.

కేంద్రకము : ధూమకేతువు సూర్యుని సమీపించుకొలది కోమా మధ్య భాగమునందు ప్రకాశవంతమైన కేంద్రకము ఏర్పడును. కొన్ని ధూమకేతువులలో ఈ కేంద్రకము కనబడదు. కేంద్రకము తరచుగా కోమా మధ్యభాగమున నక్షత్రమువలె కనబడుచుండును. కొన్ని వేళలలో ఈ కేంద్రకము కోమాలో ఒక భాగమున కాంతి తీక్ష్ణతాధిక్యము వలన ఏర్పడుచుండును. ఇది ధూమకేతువు కక్ష్యను గణించుటకు ఉపయోగపడును.

కేంద్రకముల వ్యాసముల పరిమాణములు 160 కిలోమీటరులనుండి 8,000 కిలో మీటరుల వరకు ఉండును. 1910 వ సంవత్సరమున హాలీ ధూమకేతువు పరిహేళిని సమీపించినపుడు కేంద్రకముయొక్క వ్యాసము సుమారు 805 కిలో మీటరులు. 1882 వ సంవత్సరములో కనపడిన బృహద్ధూమకేతు కేంద్రకవ్యాసము 2,414 కిలో మీటరుల పైగా ఉండెను.

తోక : దీప్తిమంతమైన ధూమకేతువుల పరివారము తోక. అల్ప దీప్తిగల ధూమకేతువులకు, (ఉదా : 1893 - III ఫిన్లే ధూమకేతువు) హ్రస్వావర్తన కాల ధూమకేతువులకును తోకలు ఉండవు. ఈ తోకలు అత్యల్ప దీప్తిగలవై ఉండుటచే దృష్టికి గోచరముగాక పోవచ్చును. కాని, పెద్ద ధూమకేతువుల తోకలను పగటివేళలో కూడ చూడవచ్చును.

సూర్యునికి సుమారు 2 ఖగోళ శాస్త్రయూనిట్ల సమీపమునకు రానిదే పెద్ద ధూమకేతువులకు కూడ తోకలు జనించుటలేదు. చాల ధూమకేతువులలో 1 ఖగోళ శాస్త్రయూనిట్ కంటె తక్కువ దూరములో ఉన్నపుడే వానికి తోకలు పెరుగును. ఈ దూరము తగ్గు కొలది తోకలు పెరుగుచుండును.

తోకలు కేంద్రకము నుండి పుట్టునట్లు కనబడుచుండును. కేంద్రకమందు పరస్పరాకర్షణబలముచే మిళితమైన ద్రవ్య ఖండములు ఉండును. ధూమకేతువు సూర్యుని సమీపించు కొలది వీని నుండి కొన్ని వాయువులు బహిర్గతములై



కొన్ని ప్రఖ్యాత ధూమకేతువులు

Blank Page

కోమూగా ఏర్పడును. ఈ వాయువులును, కొన్ని వస్తువులును సూర్య వికిరణ ప్రేషముచే సూర్యునికి ఎదురు దిశలో ఎగురగొట్టబడి తోకగా ఏర్పడును. సూర్యుని నుండి దూరముగా పోయిన కొలది తోక దీప్తిలో క్షీణత, వెడల్పులో అభివృద్ధి కనపడును.

ధూమకేతువు సూర్యుని సమీపించునపుడు తోక దానిని అనుసరించుచుండును. కాని పరిహేళిని దాటిన పిదప తోక (సూర్యునికి ఎదుటి దిశలో) ముందు పోవుచుండును. అనగా తోక ఎల్లప్పుడును సూర్యునివైపు ఉండక ఎదుటి వైపున వ్యాపించి ఉండును.

తోకల రూపములు పలు విధములు. కొన్ని పొట్టివిగను, మరికొన్ని ఎక్కువ నిడివిగను ఉండును. మరియు కొన్ని ధూమకేతువులకు పెక్కు తోకలు ఉండవచ్చును. ఉదా: చెసో 1744 ధూమకేతువునకు 6 తోకలు, బొరెల్లి 1903-IV ధూమకేతువునకు 9 తోకలు, 1861 వ సంవత్సరములో కనపడిన ధూమకేతువునకు 4 తోకలును కలవు.

పరిమాణము - దీప్తి: ధూమకేతువుల నిడివి 28,968 కిలోమీటరుల నుండి (ఉదా: 1845-V ధూమకేతువు) 18,50,750 కిలోమీటరుల వరకు (1811 ధూమకేతువు) ఉండును. ధూమకేతువుల తోకల నిడివి కొన్ని వేళలలో 15 కోట్ల కిలోమీటరుల కంటె హెచ్చుగా ఉండును. 1848 వ సంవత్సరములో కనపడిన ధూమకేతువు తోకయొక్క నిడివి సుమారు 30 కోట్ల కిలోమీటరులు.

ధూమకేతువుల ద్రవ్యరాశి అల్పమైనది: గ్రహముల ద్రవ్యరాశులకంటె తక్కువ.

ధూమకేతువుల దృశ్యదీప్తి చాలవరకు మారుచుండును. కొన్ని నిస్సహాయ నేత్రములకు కనబడుచుండును. మరి కొన్ని పరిహేళి సమీపమున ఉన్నప్పుడు కూడ దూర దర్శనితో చూచుట కష్టము. ఉదా: 1882 వ సంవత్సరములో కనపడిన ధూమకేతువు పగటివేళలో కనబడి పరిహేళిని దాటిన పిదప దాని దీప్తిలోని క్షీణత వలన దూర దర్శనితో కూడ వీక్షింప అశక్యమయ్యెను. కొన్ని వేళలతో కొన్ని దినముల లేదా గంటల అవధిలో ధూమ కేతు దీప్తిలో మార్పులు అగపడుచుండును. 1931 వ సంవత్సరములో 1925-II ధూమకేతు దీప్తి కొన్ని దినములలో నూరింతలు పెరిగెను.

కక్ష్యలు: ధూమకేతువులు పరాసీయ కక్ష్యలలోను, అధిక వికేంద్ర విలోప కక్ష్యలలోను సంచరించుచున్నవి. కొన్ని ధూమకేతువులు సూర్యుని సమీపమున అతిపరాసీయ కక్ష్యలలోను సంచరించును. స్ట్రామ్‌గ్రెన్ మొదలగువారు అవి మొదట అనుసరించిన కక్ష్యలు విలోపములుగా ఉన్నవనియును, బృహద్గ్రహ పరిక్షోభవలన అవి అతిపరాసీయ కక్ష్యలుగా మారినవి అనియు రుజువుచేసి ఉన్నారు.

పరాసీయ, అతిపరాసీయకక్ష్యలలో సంచరించు ధూమ కేతువులు ఒక్కసారి మాత్రమే కనుపించును. వీనిలో సగము పడమటినుండి తూర్పుదిశగాను, మిగిలినవి తూర్పు నుండి పడమరగాను సంచరించును. ఈ కక్ష్యాతలములు క్రాంతి వృత్త తలమునకు మిక్కిలి ఏటవాలుగా ఉండును.

విలోప కక్ష్యలలో సంచరించు ధూమకేతువులు మరల మరల కనబడుచుండును. వీని వ్యవధి నియమితమై ఉండుటచే వీటిని 'ఆవర్తన ధూమకేతువులు' అని పిలుతురు. ఈ ఆవర్తన కాలములు 3.3 సంవత్సరముల నుండి 1000 సంవత్సరముల వరకు ఉండును. ఈ కక్ష్యలలో తిరుగు ధూమకేతువులలో కొన్ని మరల కనపడవు. ఇందుకు హేతువు ఆవర్తన కాల గణనలో పొరబాటు లేదా గ్రహ పరిక్షోభ ఫలముగా కక్ష్యలలో సంభవించు వైకల్యము (ఉదా: లెక్సెల్ ధూమకేతువు 1779, వుల్ఫ్ ధూమకేతువు 1875, 1922). ఈ ధూమకేతువులలో పెక్కు పడమర నుండి తూర్పు దిశలో సంచరించుచున్నవి.

ధూమకేతువుల విభజన: ధూమకేతువులను రెండు తరగతులుగా విభజింపవచ్చును: 1. హ్రస్వావర్తన ధూమ కేతువులు; 2. దీర్ఘావర్తన ధూమకేతువులు.

మొదటి తరగతిలో సుమారు 70 ధూమకేతువులు 100 సంవత్సరములకు తక్కువ ఆవర్తన కాలము కలవి; 40 ధూమకేతువులు 5½—7 సంవత్సరముల ఆవర్తనకాలము కలవి. ధూమకేతువులు గురు గ్రహ కర్షణముచే వాని పూర్వ పరాసీయ కక్ష్యలనుండి ప్రస్తుతపు విలోప కక్ష్యలకు మారినవని చెప్పుటకు హేతువులు కలవు. ఈ ధూమకేతు కక్ష్యలు గురు కక్ష్యకు కొద్దిగ ఏటవాలుగ ఉండును. సూర్యునిచుట్టు వీని కక్ష్యలు గ్రహకక్ష్యలను పోలి ఉండును. అందుచే ఈ ధూమకేతువులను 'గురు కుటుంబ ధూమ కేతువు'లు అని పేర్కొందురు. ఈ కుటుంబమునకు చెందిన ధూమకేతువుల ఆవర్తన కాలములు 3.3 మొదలు 8.9 సంవత్సరముల వరకు ఉండును. ఇక శని కుటుంబములో మూడు, ఇంద్ర కుటుంబములో రెండు, వరుణ కుటుంబములో తొమ్మిది (అందు హాలీ ధూమకేతువు ఒకటి) ధూమకేతువులు ఉన్నవి. కాని హ్రస్వావర్తన కాల ధూమ కేతువులలో ఎక్కువ సంఖ్య గురు కుటుంబమునకు చెందినవే.

రెండవ తరగతిలో 40 ధూమకేతువులను కనుగొని ఉన్నారు. వీటి ఆవర్తన కాలము 100 నుండి 1000 సంవత్సరముల వరకు ఉండును.

పై రెండు తరగతులే కాక ధూమకేతువులలో కొన్ని సమూహాములును ఉన్నవి. వీటిలో పేర్కొనదగినవి 1688, 1843, 1880, 1882, 1887 సంవత్సరములలో కనపడిన ధూమకేతువులు. వీని కక్ష్యలు ఒకటై ఉండును. ఇట్టి సమూహాములు బృహద్ధూమకేతు భాగములుగా ఉండ వచ్చుననుటకు కారణములు కలవు.

ధూమకేతువుల ఉత్పత్తి : ధూమకేతువుల ఉత్పత్తి కడు వివాదాస్పదమైనది. ఇందు అనేక వాదములు కలవు. వీటిలో ముఖ్యాంశములు మాత్రము క్రింద చెప్పబడును :

1. ధూమకేతువులు సూర్యునినుండి బహిర్గత వస్తువులు అనుట ఒక వాదము ;

2. అవి గ్రహములనుండి బహిర్గతములనుట ప్రాక్టర్ వాదము ;

3. మరియొకటి గ్రాహసిద్ధాంతము. ఇది హ్రస్వావర్తన ధూమకేతువులకు అన్వయించును. ఈ సిద్ధాంత ప్రకారము ధూమకేతువులు గురుగ్రహాకర్షణముచే వాటి పూర్వ పరాసీయ కక్ష్యలనుండి ప్రస్తుతపు విలోప కక్ష్యలకు మారినవి.

4. ఆకాశములో ఒక పెద్ద నభోమూర్తి చుట్టు ఒక చిన్న నభోమూర్తి తిరుగుచున్నప్పుడు హద్దుమించి అల్పమూర్తి పెద్దమూర్తిని సమీపించినచో అల్పమూర్తి అనేక ఖండములుగా విచ్ఛిన్నమగునని రోషే కనుగొనెను. ఈ పరిమితికి 'రోషే హద్దు' అనిపేరు. కొన్ని అల్పగ్రహములు బృహద్గ్రహముల రోషే హద్దును సమీపించినపుడు విచ్ఛిన్నములై ధూమకేతువులుగా ఏర్పడినవి అని క్రోమ్‌లిన్ మున్నగువారి వాదము.



చిత్రము 224 హాలీ ధూమకేతువు

5. అతి ప్రాచీన కాలములో సూర్యకుటుంబము గగనములో ఒక నెబ్యులా స్థితిని దాటినపుడు చెదిరిన ధూళి, వాయువులు, తదితర వస్తువులు సూర్య గురుత్వ బలమునకు లోబడి ధూమకేతువులుగా ఏర్పడినవని మరియొక వాదము.

6. గ్రహకుటుంబనిర్మాణానంతరము శేషించిన ద్రవ్యములే ధూమకేతువులు అని ఇంకొక వాదము.

పై వాదములలో చివరి వాదమే శ్లాఘనీయమైనదని నేడు శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు.

హాలీ ధూమకేతువు : ఇది ఆవర్తన ధూమకేతువులలో ప్రసిద్ధి గాంచినది. ఇది వరుణగ్రహ కుటుంబ ధూమకేతువులలో ఒకటి. ఆవర్తన ధూమకేతువులలో వక్రగతిగల ఒకటే ధూమకేతువు. కోవెల్, క్రోమ్‌లిన్‌లు హాలీ ధూమకేతువు క్రీ. పూ. 240వ సంవత్సరమునుండి కనబడుచుండ వచ్చునని అభిప్రాయపడిరి. కాని, ఈ ధూమకేతు కక్ష్యావర్తన కాలమును మొట్టమొదట హాలీ గణించెను. 1551, 1607, 1682 వ సంవత్సరములలో కనబడిన ధూమకేతువుల అంశముల పోలికల నుండి, ఆ సంవత్సరములలో కనబడిన ధూమకేతువులు అన్నియు ఒకటే అని హాలీ ఊహించెను. ఆ ధూమకేతువు ఆవర్తన కాలము సుమారు 75.5 సంవత్సరములు అని గణించి, అది మరల 1759 వ సంవత్సరములో కనబడునని రూఢిగా చెప్పెను. అతని ఊహాప్రకారమే 1759, 1835, 1910 వ సంవత్సరములలో అది కనబడుటచే దానికి హాలీ ధూమ

కేతువు అని నామకరణము చేయుట సమంజసము. దీనిని మరల 1985 వ సంవత్సరములో చూడవచ్చును.

1909 వ సంవత్సరము సెప్టెంబరు నెలలో హాలీ ధూమకేతువు సూర్యుని నుండి సుమారు 3 ఖగోళ శాస్త్ర యూనిట్ల దూరములో ఉండినపుడు దాని కోమా వ్యాసము 22, 531 కిలోమీటరులు ఉండెను. కాని, సూర్యుని ఇంకొక ఖగోళ శాస్త్ర యూనిట్ దూరము సమీపించినపుడు పై వ్యాసము 3,54,056 కిలోమీటరులు వృద్ధిచెందెను. పిదప పరిహేళివద్ద (పై యూనిట్లలో) 1,93,121 కిలోమీటరుల వరకు తగ్గి దూరము రెండింత లయినపుడు మరల సుమారు 5,14,990 కిలోమీటరుల వరకు వృద్ధిచెందెను. కడపట ఒక సంవత్సరానంతరము 4 ఖగోళ శాస్త్ర యూనిట్ల దూరములో ఉండినపుడు కోమా వ్యాసము సుమారు 48,280 కిలోమీటరులే ఉండెను. ధూమకేతువుల శిరో వ్యాసముల పరిమాణములు మారుచుండుననుటకు హాలీ ధూమకేతువు ఉదాహరణము.

1811 బృహద్ధూమకేతువు: ఈ ధూమకేతువు 1811 వ సంవత్సరములో ఆవిష్కరింపబడెను. ఇది ఒక దీర్ఘకాలావర్తన ధూమకేతువు. దీని ఆవర్తన కాలము సుమారు 3,000 సంవత్సరములకు పైన ఉండునని గణింపబడినది. దీని వ్యాసము 2,41,40,200 కిలోమీటరులు. తోక నిడివి 16,09,34,000 కిలోమీటరులు.

బేలా ధూమకేతువు: ఈ ధూమకేతువు 1826 వ సంవత్సరములో బేలాయను ఆస్ట్రియా దేశపు శాస్త్రజ్ఞునిచే ఆవిష్కరింపబడెను. దీని ఆవర్తనకాలము సుమారు 6—7 సంవత్సరములు. దాని నియత వ్యవధిలో 1832 వ సంవత్సరములో తిరిగి అది కనబడినది. తదనంతరము 1839 వ సంవత్సరములో సూర్యునికి అత్యంత సమీపమున ఉండినందున దీనిని చూచుట అశక్యమయ్యెను. కాని తరువాత 1846 వ సంవత్సరములో ప్రత్యక్షమైనపుడు అది రెండు భాగములుగా విచ్ఛిన్నమై కనబడెను. వాటిలో ఒకటి అల్ప దీప్తియును, మరియొకటి అధిక దీప్తియును కలిగి ఉండెను. రెండు నెలల వ్యవధిలో అవి సుమారు 2,89,682 కిలోమీటరుల దూరము వేరుపడినవి. 1852 వ సంవత్సరములో ఈ ద్వయము మరల కనబడినపుడు వాని మధ్య దూరము సుమారు 24,14,020 కిలో మీటరులు ఉండెను. 1859, 1866 వ సంవత్సరములలో వీనిని చూచుటకు వీలు కాలేదు. 1872 వ సంవత్సరములో వాని కొరకు ఎదురు చూచిన శాస్త్రజ్ఞులకు ఆశాభంగమే కలిగెను; ఆ ద్వయము కనబడలేదు. కాని 1872 వ సంవత్సరము నవంబరు 27 వ తేదీయందు ఉల్కాపాతము ఒకటి ఆ ధూమకేతువులు ప్రత్యక్షమై ఉండవలసిన ప్రాంతము నుండి కలిగెను. అందువై బేలా ధూమకేతువు విచ్ఛిన్నము అగుటచే ఏర్పడిన ద్రవ్యఖండములే ఈ ఉల్కాపాతముగా మారినవి అని శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు (చూ. ఉల్కలు - పు. 157). కె. ఎస్. వి. న.

ధ్వని శాస్త్రము: ధ్వని శాస్త్రమందు ధ్వని యొక్క లక్షణములు, గమనము విమర్శింప బడును, వివిధ సందర్భములలో ధ్వని యొక్క ఉత్పాదనము, ప్రేషణము, విచూషణము మొదలగు వానిని గురించి ఆలోచించబడును. ఈ లక్షణముల ప్రయోగము లెక్కువ. అవి భవన నిర్మాణము నందును, వచో విశ్లేషణము నందును ఉపయోగింపబడును. విద్యుచ్ఛక్తిని, కాంతిని శబ్దముగా మార్చుటకు మార్గములు కల్పింపబడినవి. సమతల తరంగ ప్రాపణ లక్షణములను ఉపయోగించి వలయునట్టి ధ్వని శృంగములు (ఊదు కొమ్ములు) తయారుచేయవచ్చును. ఇవి సాధారణముగా పౌరలు వాడి తయారుచేయు ఉచ్చభాషుల (లౌడ్‌స్పీకర్లు) కంటె మేలయినవి.

ఇట్లే గోళీయ తరంగ ప్రాపణముచే ఒక సభలో ఒక వాచకుని స్థానము ఎట్లు ఏర్పాటుచేసినచో సభలోనివారెల్లరు అతని మాటలు వినవీలగునో అను సమస్య సాధింపబడినది. ఒక వరుసలో నిలబడిన వారి పలుకులను సభ్యులు వినుటకు వీలయిన ఏర్పాట్లు చేయుటకు సాధ్యమయినది. ఇందు ఊదుకొమ్ముల కంటె శంకుభాషులు ఎక్కువ ఉపయోగకరములు.

వాస్తుధ్వనివిద్య: క్వాంటమ్ యాంత్రికశాస్త్ర విధానములను అనుసరించి ఒక ఆవరణములో శబ్దము యొక్క గమనము విషయమై క్రొత్త భావములు ఏర్పడినవి. ఇందు శబ్దము యొక్క ఋజురేఖా ప్రాపణ సిద్ధాంతము కంటె తరంగ ప్రాపణ సిద్ధాంతము చాల ఉపయోగకరమయినది. ఒక ఆవరణములో ధ్వని స్థితి, ధ్వని ప్రాపణములో మార్గము రెండవ సిద్ధాంతముచే విశదమగుచున్నవి.

a, b, c కొలతలు గల ఒక గదిని తీసికొందము. అది దీర్ఘచతురస్రరూపము గలది. ఆ గదిలోని ధ్వని స్పందనముల సరళ ప్రసారము యొక్క సూత్రము

$$f = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

అందు f = ధ్వని తరంగ పౌనఃపున్యము; l, m, n పూర్ణ సంఖ్యలు, c = ధ్వని ప్రాపణ వేగము.

l, m, n ల యొక్క విలువలు తెలిసినపుడు ఒక గదిలో ధ్వని క్షీణించు పరిస్థితులున్నవా యను విషయము ఈ సమాసముచే తెలిసికొనవచ్చును. రెండు విధములగు సరళ

ధ్వని స్పందనములు ఒకే పౌనఃపున్యము కలిగియున్నచో ధ్వనికి క్షీణత కలిగినదని చెప్పెదము. కాబట్టి, ఒక గది యొక్క మూడు కొలతలు ఒకే పూర్ణాంకము యొక్క గుణకములుగా ఉండకూడదని ఫలితము వలన విశదమగుచున్నది. సౌష్ఠవమునకు గాను ఒక గదియొక్క కొలతలు $\sqrt{5}+1 : 2 : \sqrt{5}-1$ నిష్పత్తిలో తీసికొనుట మంచిది. ఇట్టి గదిలో స్వల్ప పౌనఃపున్య ధ్వని క్షీణత లేకయుండును. ప్రతిధ్వని లక్షణము మార్పులేక ఒకే విధముగ ఉండును.

ఒక గదిలో స్థావరముగ ఉండు ధ్వని తరంగములలోని అవరోధము $e^{-\beta t}$ గుణకముపై ఆధారపడియున్నది. (అవరోధకము = ఒత్తిడి/గోడలతలమునందు కల వాయు వేగము).

ప్రౌఢగణిత మూలమున ధ్వని విచూషణ ద్రవ్యములను ఇతరచోట్ల నుంచుటకంటె మూలలందుంచిన ఎక్కువ ఉపయోగకరమని తెలియుచున్నది.

గణితమును ఉపయోగించి ఊదుకొమ్ముల ఆకారమును నిర్ణయింప వచ్చును. (1) శంకు రూపము, (2) ఘాతాంకీయ రూపము, (3) శృంఖలా రూపము. వీని సమీకరణములలోని పరిమాణములను సవరించి తగినంత ధ్వని తీవ్రత కలుగునట్లును, ప్రతి ధ్వని లేకుండునట్లును చేయవచ్చును.

ఇట్లే ఉచ్చభాషి, సూక్ష్మభాషి నిర్మాణములో ముఖ్యాంశముల సాధింపవచ్చును.

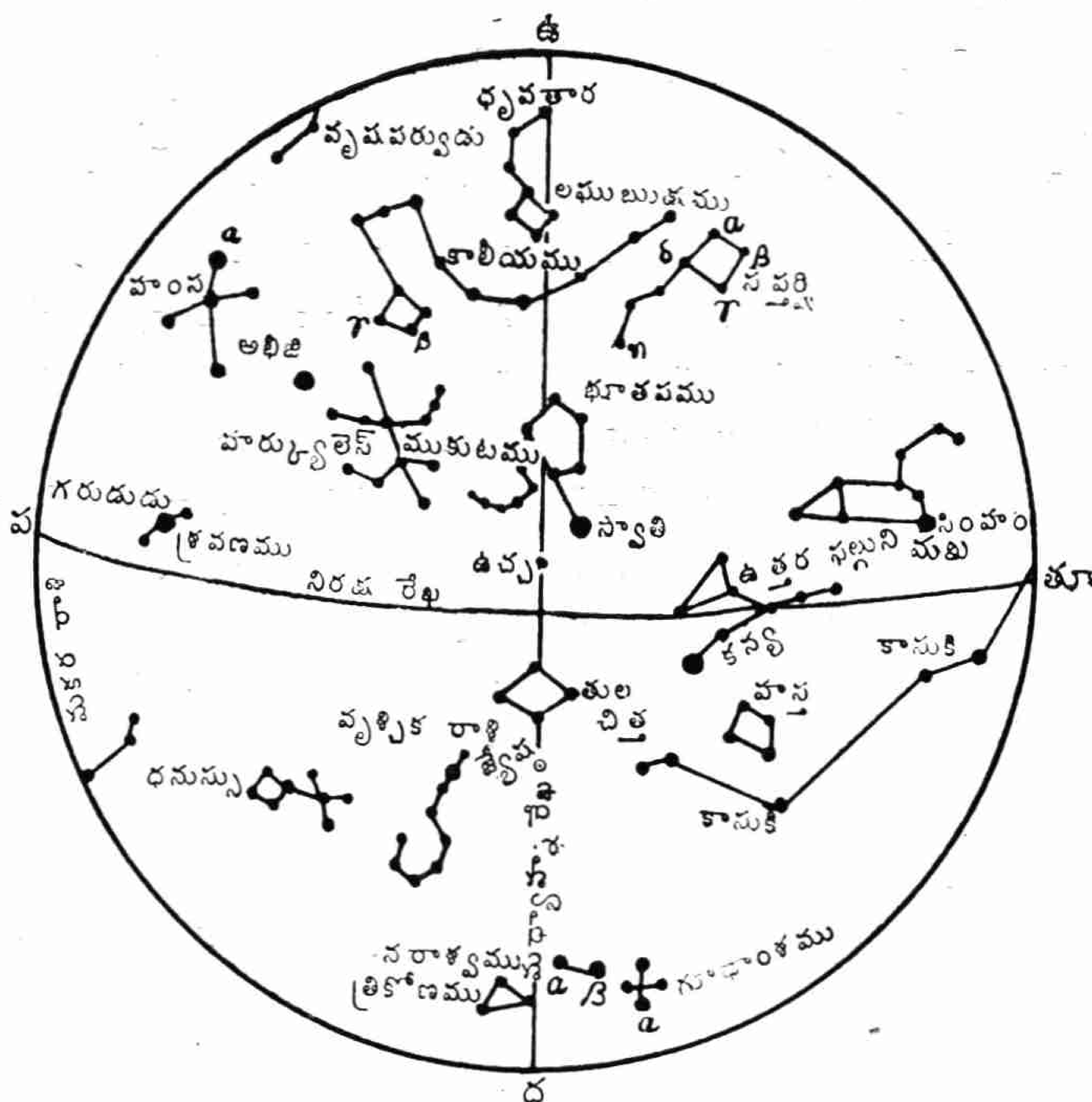
రెండుమైకోల ప్రతివచన వక్రములను తగినట్లు మేళనము చేయుటవలన ప్రతివచన వక్రము యొక్క రూపమును మనకు కావలసినట్లు అమర్చవచ్చును.

బహిరంగ ప్రదేశములో పైనుండు వాయువు భూమి కంటె వేడిగా ఉండవచ్చును, లేదా చల్లగా ఉండవచ్చును. అపుడు ప్రాపణదిశ పైకిగాని, లేదా క్రిందికిగాని ఉండును. ఇట్టి మార్పు తాపక్రమనతి దూరము భూమిపై ఎత్తు మొదలగు వానిపై ఆధారపడి ఉండును. ఈ రాశులు తెలిసినచో, ధ్వని ప్రాపణ మార్గమును గణిత మూలముగా సాధింపవచ్చును. ధ్వన్యుత్పాదక యంత్రముల స్థాపనమునందు ఈ తత్త్వములను ఉపయోగించి సభాసదుల రంజిల్లచేయవచ్చును.

ఆర్. సి.

నక్షత్రములు : నక్షత్రములు స్వయం ప్రకాశములగు దివ్యమూర్తులు. సూర్యుడు కూడ ఒక నక్షత్రమే. నక్షత్రములు అత్యధిక దూరములో ఉండుటచే స్థిరముగ ఉండునట్లు గోచరించును. వీని సాపేక్షిక స్థితులలో మార్పులను చూడలేని ప్రాచీనులు వీనిని స్థిరములు అని పిలిచెడివారు. వీనిలో అనేకములు సూర్యునికన్న పెద్దవైనను, అవి ఎక్కువ దూరములోఉండుటచే తేజోబిందువులవలె కనుపించుచుండును.

రాశులు (తారామండలములు): నక్షత్రములను సులభముగ గుర్తించుట కొరకు వానిని బృందములుగ ప్రాచీనులు విభజించిరి. వానికి జంతువుల యొక్కయో, లేదా ఇతిహాస పురుషుల యొక్కయో పేర్లు పెట్టిరి. ఈ బృందములకు రాశులు, లేదా, తారామండలములు అని పేరు. ఇపుడు సుమారు 89 రాశులు అంగీకరింపబడినవి.



జూన్ 15 వ తేదీ పరాహ్నము 10 గంటలకు

చిత్రము 225

క్రాంతి వృత్తమునకు ఇరువైపుల సుమారు 5° లు విస్తరించియుండు పట్టకమునకు రాశి చక్రము అని పేరు. ఇదియే మన పురాణముల లోని శింశుమార చక్రము. ఈ పట్టకములో 12 రాశులు కలవు (చూ. క్రాంతి వృత్తము - పు. 205). ఈ రాశులనే మన ప్రాచీనులు 27 నక్షత్రములుగ విభజించిరి.

నామకరణము : నక్షత్రములను మూడు విధముల గుర్తించుచున్నారు.

1. ఒక్కొక్క రాశి లోని నక్షత్రములను వాని దీప్తిక్రమమున α, β, γ ... ... అను గ్రీక్ అక్షరములతో, లేదా, a, b, c, d... అను రోమన్ అక్షరములతో సూచించుచుందురు. ఇది బేయర్ పద్ధతి.

2. ఫ్లామ్‌స్టీడ్ సుమారు 3000 నక్షత్రములను పరిశీలించి వానికి రాశి క్రమమున సంఖ్యల నిచ్చెను. వీనికి ఫ్లామ్‌స్టీడ్ సంఖ్యలు అని పేరు.

3. నక్షత్రముల యొక్క స్థితి, క్రాంతి, నతకాలము మున్నగు వానిని సూచించు జాబితాలు తయారుచేయబడి ఉన్నవి. లాలండ్ 32,363 అను నక్షత్రము లాలండ్ జాబితాలోని 32,363 వ నక్షత్రమును సూచించును.

డిశంబరు 15 వ తేదీ పరాహ్ణము 10 గంటలకు

చిత్రము 226

నక్షత్రముల వర్ణమాలలు : నక్షత్రములు సూర్యునివలె ఒక (అవిచ్ఛిన్న) నిర్విరామ ఉద్గమన వర్ణమాలను లేదా, ఒక విచ్ఛిన్న విచూషణ వర్ణమాలను, లేదా, కృష్ణ రేఖా వర్ణమాలలను కలిగి ఉండును. నక్షత్రముల వర్ణమాలలను పరిశీలించి, నక్షత్రముల వర్ణములనుబట్టి వానిని నాలుగు రకములుగ సెచ్చీ మొట్టమొదట విభజించెను. కాని ప్రస్తుతము డ్రేపర్ విభజననే ముఖ్యముగ వాడుచున్నారు. నక్షత్రముల వర్ణమాలలను వాని రకములను బట్టి ఒక అనుపూర్విలో నుంచి ఆ క్రమములోని తరగతులను వరుసగ O, B, A, F, G, K, M, R, N, S ... ... అను అక్షరములతో సూచింతురు. ఒక్కొక్క తరగతిలో కొన్ని విశిష్ట రేఖలను చూడవచ్చును. సుమారు 99% నక్షత్రముల వర్ణమాలలు B – M

వర్ణమాల తరగతి	వర్ణము	తాప క్రమము K°	వర్ణమాల
O	నీలము	50,000–25,000	హైడ్రోజన్, అయనీకృత హీలియమ్, ఆక్సిజన్, నైట్రోజన్ రేఖలు. వీటికి వుల్ఫ్‌హాయట్ నక్షత్రములని పేరు.
B	నీలశ్వేతము	25,000	కృష్ణ హైడ్రోజన్ రేఖలు, అయనీ కృత నైట్రోజన్, ఆక్సిజన్ రేఖలు, తటస్థ హీలియమ్ రేఖలు. వీటికి ఒరియన్ నక్షత్రములని పేరు. ఉదా: రీగెల్, చిత్త.
A	శ్వేతము	8,000	హైడ్రోజన్ రేఖలు గరిష్ఠతీక్ష్ణతను పొంది ఉండును. ఉదా : మృగవ్యాధుడు, అభిజిత్తు.
F	పీతశ్వేతము	7,500	హైడ్రోజన్ రేఖల తీక్ష్ణత తక్కువ, ధాతురేఖల తీవ్రత పెరిగి ఉండును. ఉదా : అగస్త్యుడు, పూర్వశ్వానము.
G	పీతము	6,000	పెక్కు ధాతువుల రేఖలు – హైడ్రోజన్ రేఖలు. ఉదా : సూర్యుడు, బ్రహ్మరంధ్రము.
K	అరుణపీతము	5,000	కాల్షియమ్ రేఖలు గరిష్ఠతీక్ష్ణతను పొంది ఉండును ; టైటానియమ్ ఆక్సైడ్, హైడ్రో కార్బన్‌లు – వీటి పట్టకములు ఉండును. ఉదా : పార్వతి, రోహిణి.
M	అరుణము	3,500	టైటానియమ్ ఆక్సైడ్ పట్టకములు. ఉదా : ఆరుద్ర, జ్యేష్ఠ.

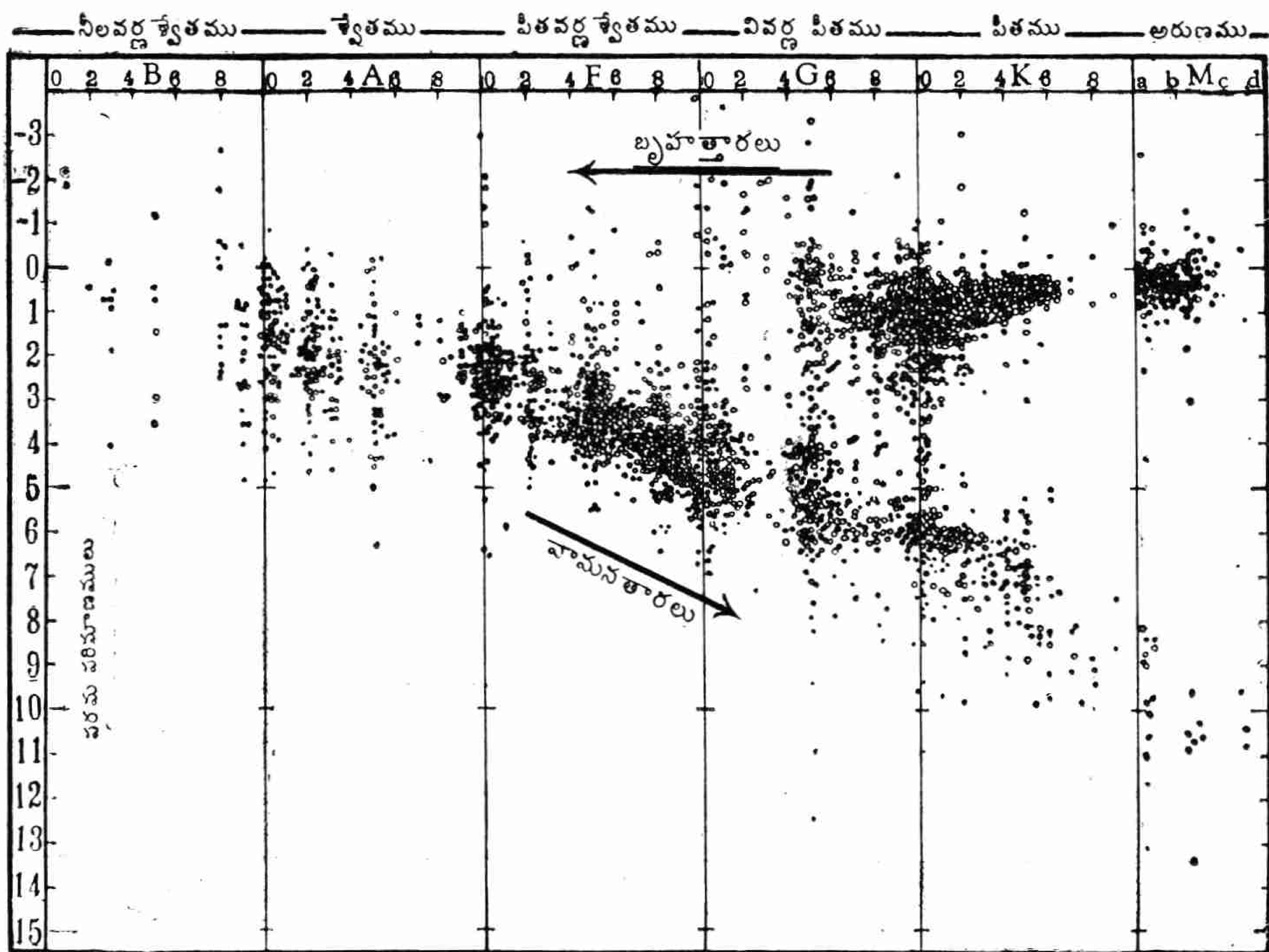
తరగతులకు చెందినవి. ఈ వర్ణమాలావిభజన నక్షత్రములను, వాని వర్ణ, తాపక్రమములను కూడ సూచించును.

దీప్తి పరిమాణములు : వివిధ నక్షత్రముల యొక్క సాపేక్షక దీప్తులను సూచించు సంఖ్యకు నాక్షత్ర పరిమాణము అని పేరు. హిపార్కస్ సుమారు 20 అత్యధిక దీప్తి గల నక్షత్రములను మొదటి పరిమాణపు నక్షత్రములనియు, అసహాయ నేత్రములకు కనబడు నక్షత్రములను 6 వ పరిమాణపు నక్షత్రములనియు సూచించెను. కాలక్రమమున పరిమాణమానము పరిశోధకుని బట్టి మారుచుండుటచే దానికొక నిశ్చయతను ఏర్పరచవలసి వచ్చెను. m, n లు వరుసగ వాని పరిమాణములను సూచించినచో,

$$\frac{I_1}{I_2} = K^{n-m} \text{ లేదా } \log \frac{I_1}{I_2} = 0{\cdot}4\ (n-m)$$

(ఇచ్చట $K = 2{\cdot}512$; దీనిని జ్యోతిర్నిష్పత్తి అందురు.

మొదటి పరిమాణపు నక్షత్రములకంటె 1 పరిమాణము అధిక దీప్తిగల నక్షత్రములు శూన్య పరిమాణము కలిగి ఉన్నవనియు, ఇంకను అధిక దీప్తిగల నక్షత్రములు ఋణ పరిమాణము కలిగి ఉన్నవనియు నిర్ణయించిరి. ఉదా : సిరియస్ దీప్తిపరిమాణము $-1{\cdot}6$, సూర్యుని దీప్తి పరిమాణము $-26{\cdot}7$.



చిత్రము 227 తారలను బృహత్తారలుగ, వామన తారలుగ వర్గీకరించుట

మొదటి పరిమాణపు నక్షత్రములు 6 వ పరిమాణపు నక్షత్రములకంటె సుమారు వందరెట్లు అధిక తేజోవంతములై ఉండుటచే క్రింద సూచించబడిన మానమును అంగీకరించిరి.

ఒక నక్షత్రము మరియొక నక్షత్రముకంటె 2.512 రెట్లు తేజోవంతమైనచో, అది రెండవ నక్షత్రముకంటె 1 పరిమాణము అధిక దీప్తి కలిగి ఉన్నదని చెప్పుదురు. కనుక ఒక నక్షత్రము మరియొక నక్షత్రముకంటె 5 పరిమాణములు అధిక దీప్తి కలిగి ఉండినచో, అది రెండవ నక్షత్రముకంటె $(2{\cdot}512)^5$, లేదా 100 (సుమారు) రెట్లు తేజోవంతమైనది. I_1, I_2 లు రెండు నక్షత్రముల దీప్తులను,

ఒక నక్షత్రము యొక్క కేవల పరిమాణముగాని దృశ్య పరిమాణముగాని దాని వ్యక్తదీప్తిని సూచించును. ఛాయా చిత్రముల సహాయమున నక్షత్రముల పరిమాణములను కొలుచుటకు వీలగుచున్నది. వీనికి ఛాయా చిత్ర పరిమాణములు అని పేరు. ఛాయా చిత్రములలో కొన్ని అల్ప పరిమాణపు నక్షత్రములను కనుగొనిరి. ఒక నక్షత్రము యొక్క ఛాయా చిత్ర, దృశ్య పరిమాణముల భేదమును ఆ నక్షత్రము యొక్క వర్ణసూచకము అని చెప్పుదురు.

ప్రస్తుతము తేజో విద్యుచ్ఛాయా చిత్రముల సహాయమున నక్షత్రముల పరిమాణములను శుద్ధముగ కనుగొను

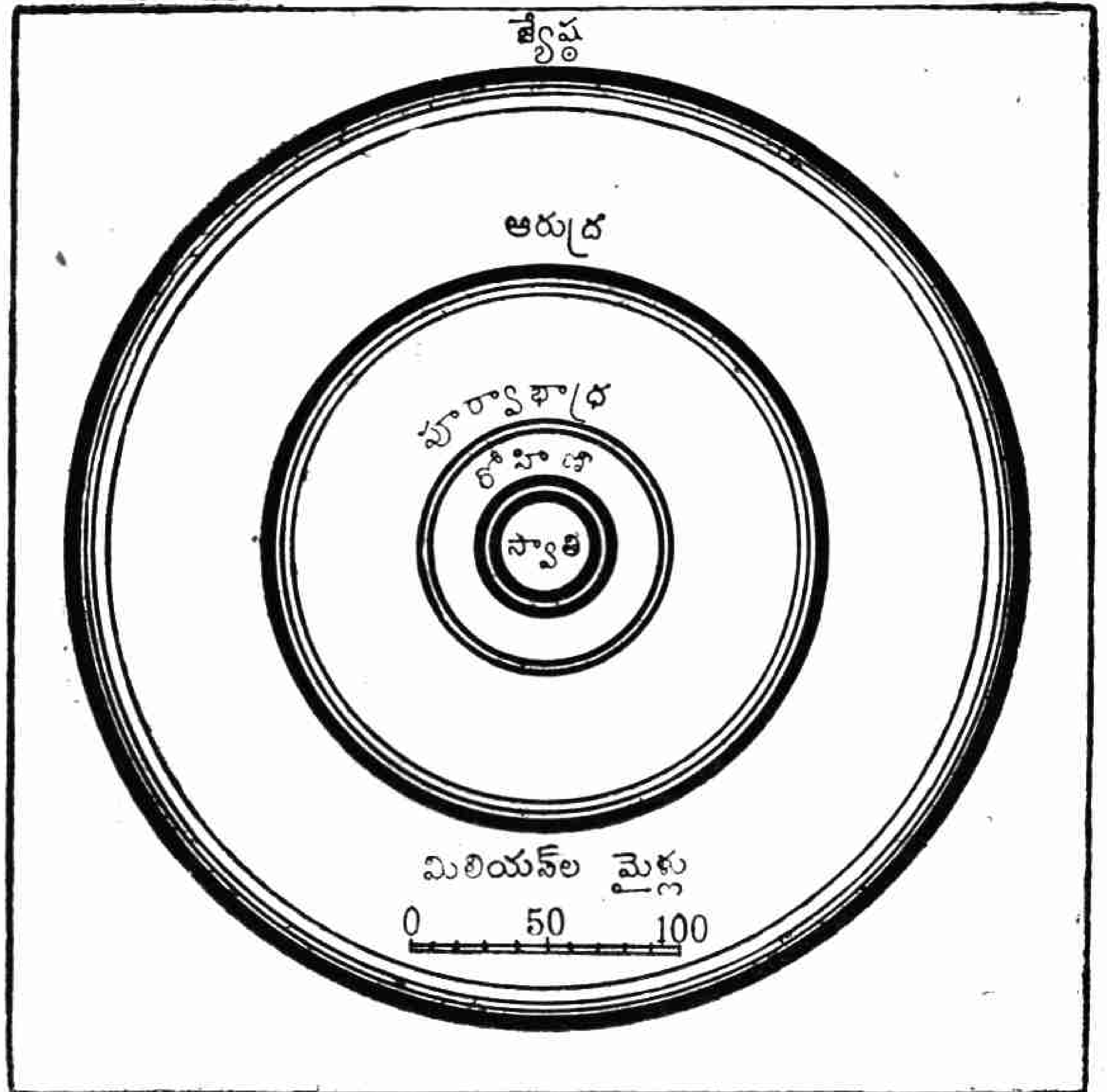
చున్నారు. వివిధవేధశాలలలో వివిధ పరికరములతో పరిగణింపబడు పరిమాణములు ఒకేమానమును పొంది ఉండుటకుగాను క్రమ పరిమాణ పరంపరలను ఏర్పరచిరి. ఉదా : ఉత్తర ధ్రువపరంపర.

ఒక నక్షత్రము యొక్క కేవల పరిమాణము దాని సహజ దీప్తిపై, దూరముపై ఆధారపడి ఉండును. నక్షత్రముల యొక్క సహజ దీప్తిని సూచించుటకు పరమ పరిమాణము అను పదమును వాడుచున్నారు. ఒక నక్షత్రము 10 పరశకముల దూరములో కలిగి ఉండు కేవల పరిమాణమునకు పరమపరిమాణము అని పేరు.

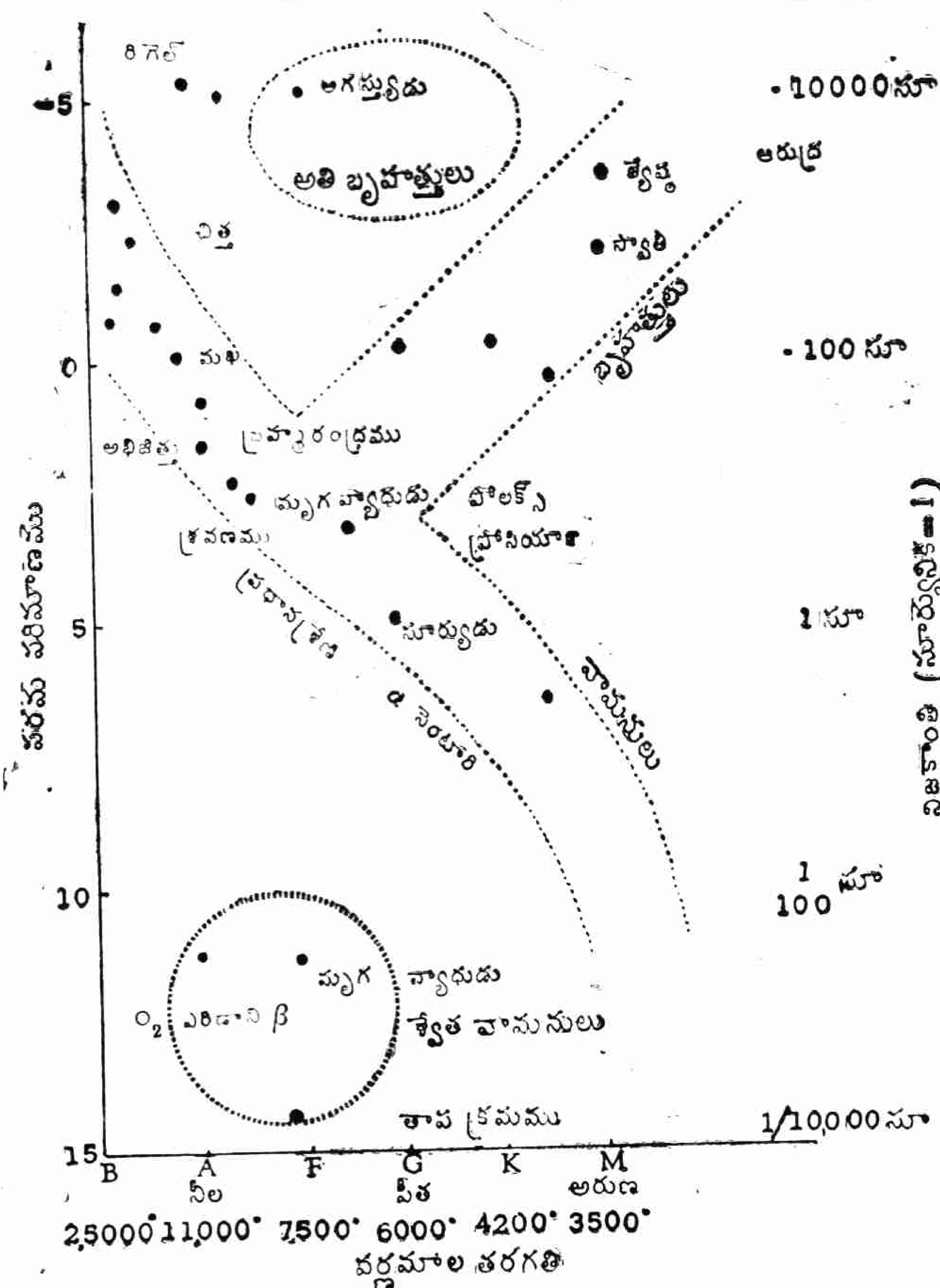
ఒక నక్షత్రము యొక్క అతివర్తనము (లంబనము) p, కేవల పరిమాణము m ఈయబడినచో, దాని పరమ పరిమాణము M క్రింది సూత్రము వలన కనుగొనవచ్చును.

$$M = m + 5 + 5 \log p$$

రసెల్ చిత్రము : నక్షత్రముల యొక్క పరమ పరిమాణములను, వానికి అన్వయించు వర్ణమాల తరగతులను చూపు రేఖా చిత్రమును గీచినచో లభించు చిత్రమే రసెల్ చిత్రము. రేఖాచిత్రములోని బిందువులు చాల వరకు చిత్రమునకు కర్ణముగ ఉండు ఒక పట్టకములో ఉండును. ఈ పట్టకమునకు ప్రధాన శ్రేణి అని పేరు. ఈ శ్రేణికి ఊర్ధ్వభాగములో ఒక ఇమిడికయైన నక్షత్ర సముదాయమును చూడవచ్చును. దీనికి బృహత్ శాఖ అని పేరు. పై రెండు శాఖలలోని నక్షత్రములకు వరుసగ వామనులు, బృహత్తులు అని రసెల్ పేరిడెను. కొన్ని నక్షత్రముల కాంతి తీక్ష్ణత బృహత్తుల సహజ కాంతి తీక్ష్ణత కంటె అధికముగ ఉండును. వీనిని అతి బృహత్తులు అని పిలుతురు. ప్రధానశ్రేణికిదిగువగ ఉండు కొన్ని అల్ప సాంద్రతకల నక్షత్రములకు శ్వేతవామనులు అని పేరు.



చిత్రము 229 బృహత్తారలు



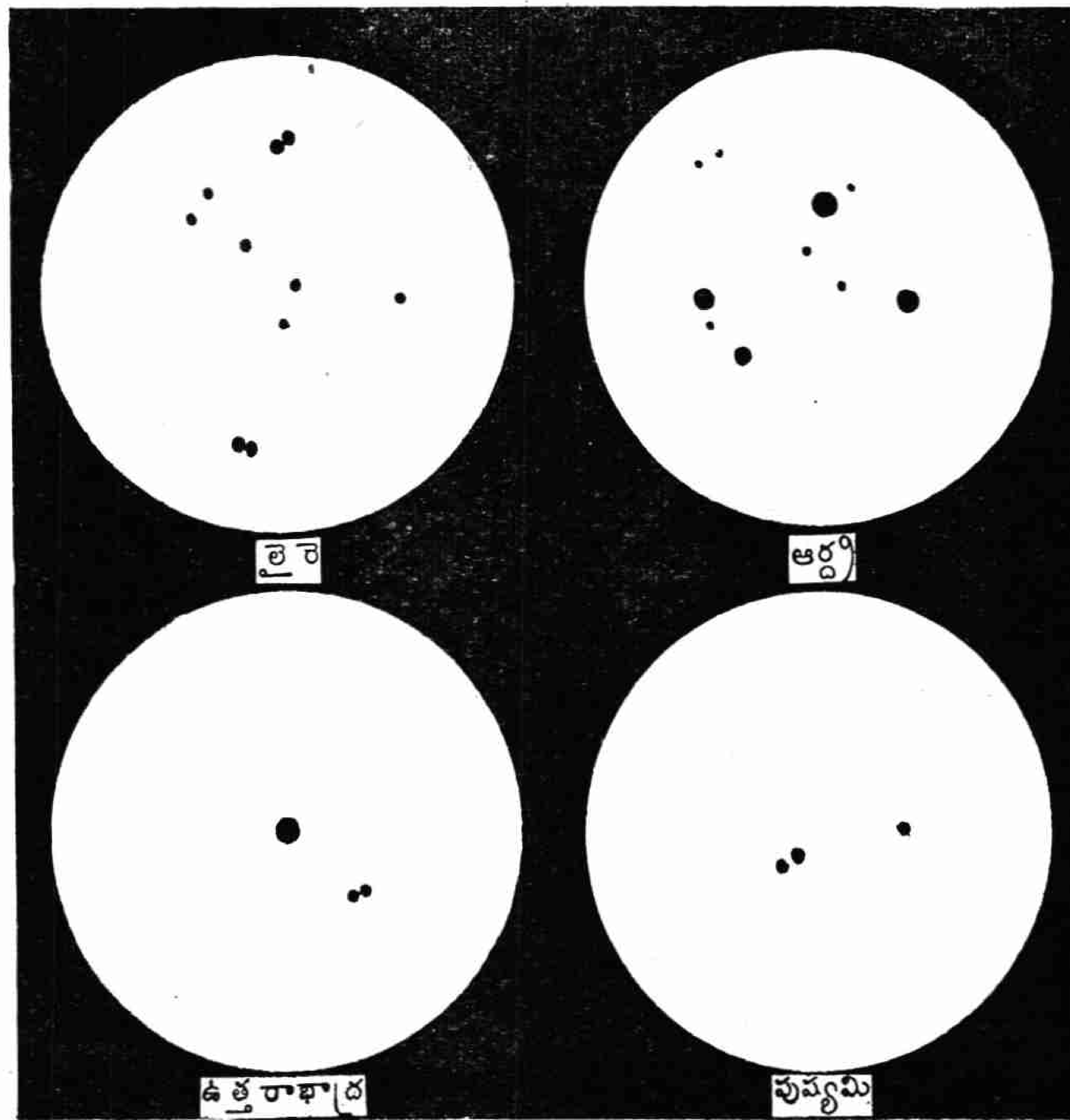
చిత్రము 228 రసెల్ చిత్రము

యుగళతారలు : అసహాయ దృష్టికి ఏక నక్షత్రములుగ కనపడునవి కొన్ని దూరదర్శనిలో ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక అనుచర నక్షత్రముతో కూడి ఉండునట్లు అగపడును. ఇట్టి నక్షత్రముల జతలకు యుగళతారలు అని పేరు (ఉదా : పునర్వసు, హంస 61). రెండు అనుచర నక్షత్రములు కలవి త్రికతారలు. కొన్ని నక్షత్రములకు అనేక అనుచరులు ఉందురు. అట్టి నక్షత్రములు బహుళతారలు (చూ. చిత్రము 230). ధ్రువ నక్షత్రము ఒక త్రికతార (చూ. చిత్రము 231).

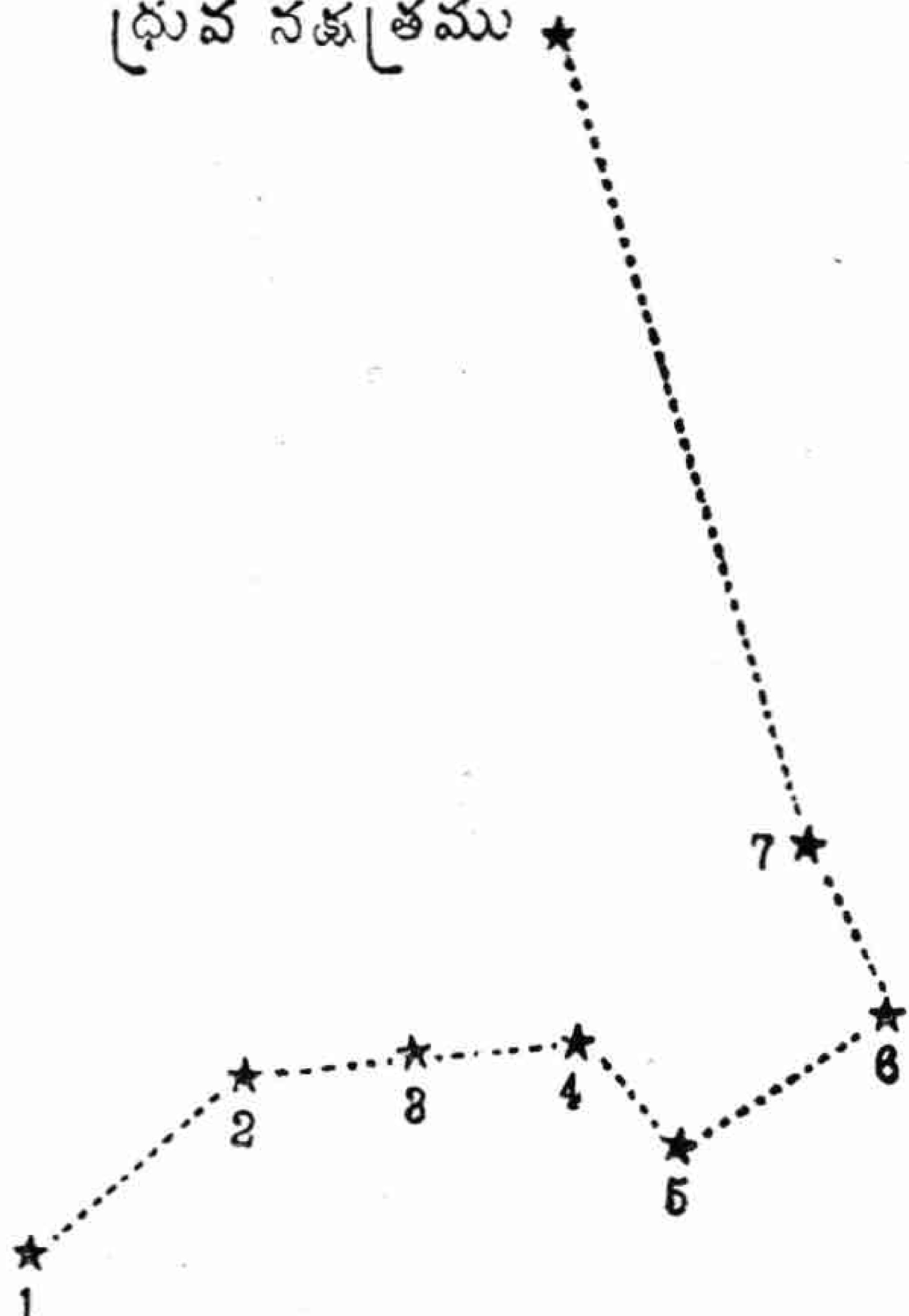
ఒకదానికొకటి బహుదూరములో ఉండు రెండు నక్షత్ర

ములు సుమారు ఒకే దృష్టి పథములో ఉండుటచే జంటగ కనబడవచ్చును. అట్టి నక్షత్రద్వయములకు దృశ్య యుగళములు అని పేరు. ఈ నక్షత్రములకు ఎట్టి భౌతిక సంబంధములు కానరావు. కాలక్రమమున వానిని వాని క్రమ గమనములు వేరు పరచుచుండును.

మరి కొన్ని ద్వయములు పరస్పర గురుత్వాకర్షణమునకు లోబడి సహజముగ జంటలుగ ఉండును. వీనిలో కొన్ని ఒకే క్రమగమనమును కలిగి ఉండును. వీనికి 'భౌతిక యుగళములు' అని పేరు. మరికొన్ని జంటలు వాని గరిమనాభిని బట్టి కక్ష్యలలో తిరుగుచుండును. వీనిని ద్వికములు అని పిలుతురు. ఉదా: మృగవ్యాధుడు, పూర్వ శ్వానము. కొన్ని నక్షత్రముల యుగళత్వమును వాని వర్ణమాలల విశ్లేషణము నుండియే కనుగొన శక్యమగును. ఇట్టి నక్షత్రములకు వర్ణమాలా ద్వికములు అని పేరు. ఉదా: మిజార్. నేటి వరకు 1000 కన్న ఎక్కువ వర్ణమాలాద్వికములు ఆవిష్కరింప బడినవి. మరికొన్ని



చిత్రము 230 బహుళతారలు



చిత్రము 231

జంటలలో ఒక నక్షత్రము మరియొక దానిని మరుగు పరచుటచే వాని కాంతి మారుచుండును. వీనికి గ్రహణ తారలు అని పేరు. ఉదా: పెర్సియస్ రాశి లోని అల్గాల్ నక్షత్రము.

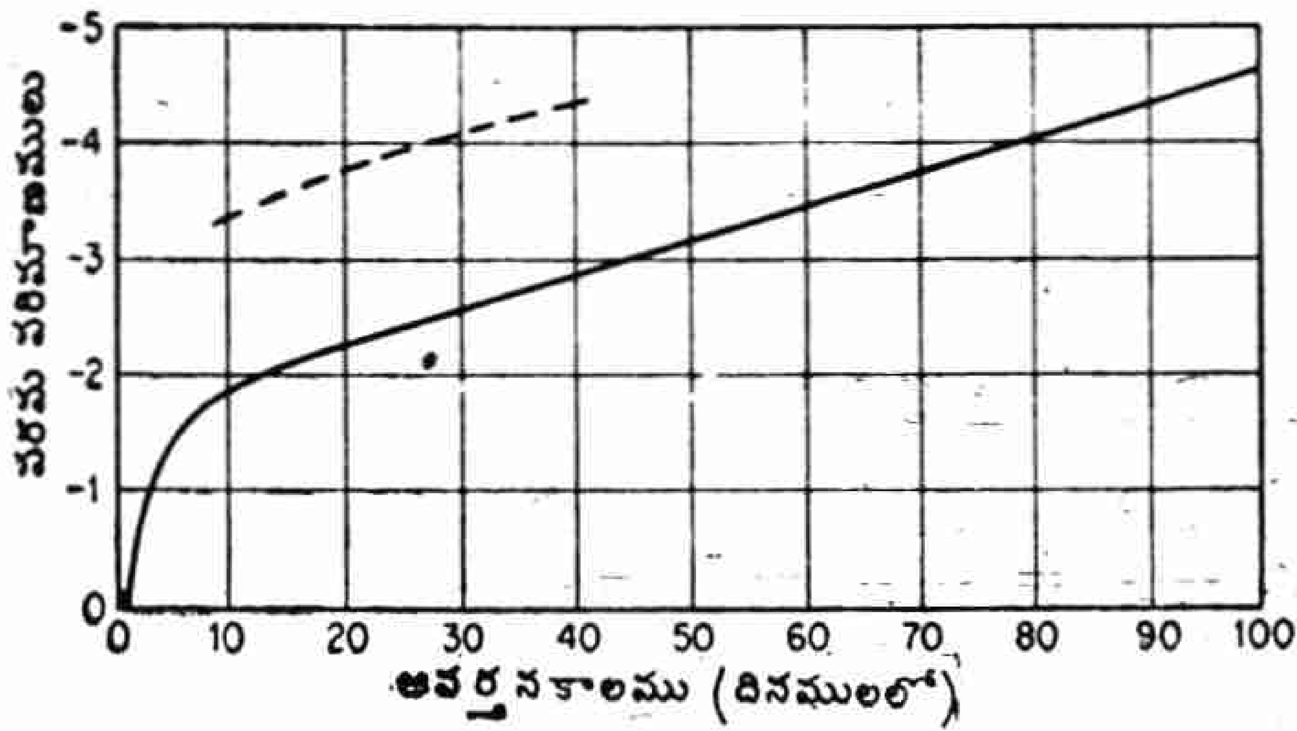
చలతారలు: కొన్ని తారల దీప్తి స్థిరముగ ఉండక నియత వ్యవధులలో మారుచుండును; మరికొన్ని నక్షత్రముల దీప్తి ఎట్టి నియమమునకు లోబడకయే మారుచుండును. వీనికి చల తారలు అని పేరు. నియత వ్యవధులలో క్రమముగ మారుచుండు దీప్తిగల నక్షత్రములను 'దీర్ఘావర్తన చల తారలు' (ఉదా: మీరా) అని, దీప్తి మార్పులు క్రమముగ ఉండని తారలను 'హ్రస్వావర్తన చలతారలు' (ఉదా: ఆరుద్ర) అని పిలుతురు. చలతారలు గగనములో క్రమముగ వ్యాపించి యుండవు, మందాకినిలో గుమికూడి ఉండును. వీనిలో ముఖ్యముగ పేర్కొనదగినవి సెఫీడ్ చలతారలు, నవీనములు (నోవా).

సెఫీడ్ చలతారలు: ఈ జాతి నక్షత్రముల నామమునకు ఆధారము వానిలో మొట్టమొదట కనుగొనబడిన సెఫస్ రాశిలోని - 'సెఫి' అను తారయే. దీని దీప్తి సుమారు $5\frac{1}{2}$ దినములలో 0·7 పరిమాణము మారుచుండును.

నేడు సుమారు 500 సెఫీడ్‌లను ఆవిష్కరించిరి. వీని దీప్తి పరిమాణములలో ఆవర్తన కాలములు 1 దినము నుండి 50 దినముల వరకును ఉండును. ఈ తారల దీప్తిలో హెచ్చుదల అధికముగను, శీఘ్రముగను ఉండును. ఇంతే కాక వాని దీప్తిక్షీణత క్రమముగను, నిదానముగను ఉండును. ఈ తారల వర్ణమాలలు సాధారణముగ F—G తరగతులకు చెందినవి.

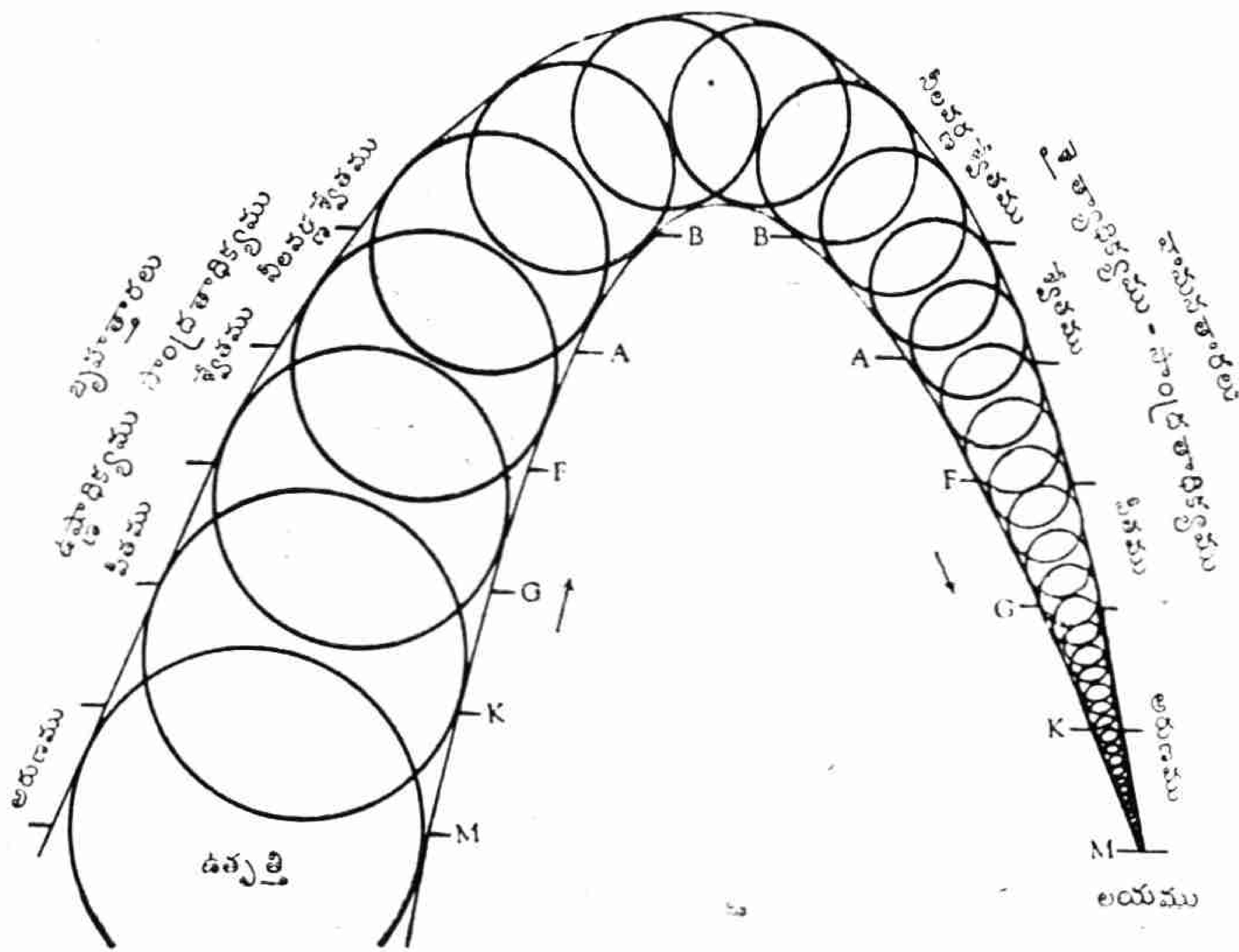
ఒక దినముకంటె తక్కువ ఆవర్తనకాలము కలిగి ఉండు ఈ తరగతిలోని తారలకు చలన గుచ్ఛములు అని పేరు (ఉదా: మెస్సియర్ 3).

1908 లో కుమారి లీవిట్ అల్పమెగలనిక్ మేఘము లోని సెఫీడ్ చలతారల ఆవర్తనకాలములు వాని పరమ పరిమాణములపై ఆధారపడి ఉండుటను కనుగొనెను. తరువాత షేప్లీ వర్తుల గుచ్ఛములోని పెక్కు చలతారలు కూడ పై నియమమునకు లోబడి ఉండుటను రూఢిపరచెను. చలతారల ఆవర్తన కాలములకు, పరమ పరిమాణములకు గల సంబంధమును వెలిపుచ్చు రేఖా చిత్రమునకు 'ఆవర్తన దీప్తి వక్రము' అని పేరు. ఈ రేఖాచిత్ర సహాయముతో మన మందాకినిలోని వర్తులగుచ్ఛములలోను, తారామేఘ



చిత్రము 232 సెఫీడ్ చలతారల ఆవర్తన దీప్తివక్రము

ములలోను కల చలతారల దూరములనే కాక, ఇతర మందాకినులలోని తారల దూరములను కూడ కనుగొనుట సాధ్యమగుచున్నది. ఒక సెఫీడ్ చలతార యొక్క ఆవర్తన కాలము 30 దినములు, కేవల పరిమాణము 7·4 అని అనుకొందము. ఆ రేఖాచిత్రము నుండి (చూ. చిత్రము 232) దాని పరమ పరిమాణము సుమారు —2·6 అని తెలియుచున్నది. కనుక పరిమాణములో మార్పు 10. ఒక వస్తువు యొక్క దీప్తి దాని దూర వర్గమునకు విలోమ సామ్యములలో ఉండును. ఒక వస్తువు యొక్క దీప్తిని 1 పరిమాణము తగ్గించుటకు దాని దూరములోని మార్పును కనుగొందురు.



చిత్రము 233 తారల జీవితచరిత్ర

ఒక నక్షత్రము యొక్క దీప్తి b_1, దూరము l_1 అనుకొందము. b_2, l_2 లు వాని క్రొత్త విలువలైనచో

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2.512\ b_3}{b_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2} \ (\because b_2 = 2.512\ b_1)$$

$$\therefore l_2^2 = 2.512\, l_1^2; \text{ లేదా } l_2 = 1\,585\, l_1$$

కనుక ఒక నక్షత్రము యొక్క దీప్తిని ఒక పరిమాణము తగ్గించుటకు దాని దూరమును 1.585 రెట్లు హెచ్చింపవలయును. 5 పరిమాణములు తగ్గించుటకు $(1.585)^5 = 10$ రెట్లును, 10 పరిమాణములు తగ్గించుటకు $(1.585)^{10} = \{(1.585)^5\}^2 = 10^2 = 100$ రెట్లును దూరమును హెచ్చింపవలయును. కావున పరిమాణములో మార్పు 10 అయిన, అది దూరములో మార్పు 100 కు అన్వయించును. ఒక నక్షత్రము 10 పరశకముల దూరములో ఉండిన, అది పరమ పరిమాణము కలది అగును. కనుక నక్షత్రము యొక్క దూరము $100 \times 10 = 1000$ పరశకములని తెలియుచున్నది.

నవీనములు (నోవా) : సహజముగ కాంతిహీనములైన కొన్ని నక్షత్రములు ఉన్నట్లుండి, అధిక దీప్తితో కొలది కాలము ప్రకాశించి, పిదప కాంతిహీనము లగుచుండును. వీనికి నవీనములు అని పేరు. దీప్తిలోని హెచ్చుదల వాని సహజ దీప్తికి 7000 - 8000 రెట్లుండును.

దీప్తిమంతములైన నవీన (నవ) తారలలో పేర్కొనదగినవి : (1) కాసియోపియా నవీనము (1572 - టైకోబ్రాహి) : ఇది శుక్రునియంత ప్రకాశవంతముగ నుండెను. (2) ఒపికీ నవీనము (1604 - కెప్లర్) : ఇది గురుగ్రహమంత ప్రకాశవంతముగ నుండెను. సుమారు 18 నెలల వరకు కనపడెను.

నేడు ఈ నవీనములు చాల కాంతిహీనములై ఉండుటచే వానిని గుర్తించుట బహుకష్టసాధ్యము.

20 వ శతాబ్దములో గుర్తింపబడిన నవీనములలో పేర్కొనదగినవి :

1. పెర్సీనవీనము (1901) : పరిమాణము 0·1; బ్రహ్మరంధ్రము కంటె ప్రకాశవంతముగ కనబడెను.

2. ఆక్విలా నవీనము (1918) పరిమాణము 1·4; సిరియస్ నక్షత్రమంత ప్రకాశముతో వెలసెను.

3. పిక్టొరిస్ నవీనము (1925) పరిమాణము 1·2. చిత్త నక్షత్రమంత దీప్తి కలిగి ఉండెను.

4. పాపిస్ నవీనము (1942) పరిమాణము 0·3. రిగల్ నక్షత్రమంత ప్రకాశముగ ఉండెను.

ఆవిష్కరింపబడిన నవీనములలో అనేకములు మందాకిని లోను, దాని పరిసరములలోను కనబడినవి. నవీనములను త్వరితములు, మందములు అని రెండు విధములుగ విభజించుట వాడుక (చూ. సూపర్నోవాలు : సమీక్ష - పు. 94). కె. ఎస్. వి స.

నవీనజ్యామితి : జ్యామితిలో **మానవ** హృదయమును ఎక్కువ ఆకర్షించిన చిత్రము త్రిభుజము. ఆధునికముగా కూడ గణితశాస్త్రనవపరిచితులకు త్రిభుజము పరిశోధనకు ఎక్కువ అవకాశము ఇచ్చుచున్నది. దీని విషయమున గ్రీకులు, భారతీయులును అనేక సిద్ధాంతములను వివరించి ఉన్నారు. భారతీయులు సమ (లంబ) కోణ త్రిభుజమును ఎక్కువ వాడిరి. శుల్బ సూత్రములో కర్ణవర్గ (పితాగొరస్) సిద్ధాంతము సాధింపబడెను. సమకోణమునకు ఇరువైపుల ఉండు భుజములకు భుజము, కోటి అని వారు పెట్టిన పేర్లు.

ప్రాచీన సిద్ధాంతములు : సామాన్య విషయములు పాఠకులకు పరిచితములు. ముఖ్యములగు విషయములు కొన్ని మాత్రము చెప్పబడును.

(ఏ) ఒక సమకోణ త్రిభుజమునకు చెందిన కర్ణము యొక్క వర్గము ఇతర భుజ వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.

(బి) మధ్యగతములు (మీడియన్స్) అనుషక్తములు. అనుషక్త బిందువునకు మధ్య కేంద్రము లేదా గురుత్వ కేంద్రము అని పేరు.

(సి) ప్రతి శీర్షము నుండి ఎదుటి భుజమునకు గీయబడిన లంబరేఖలు అనుషక్తములు.

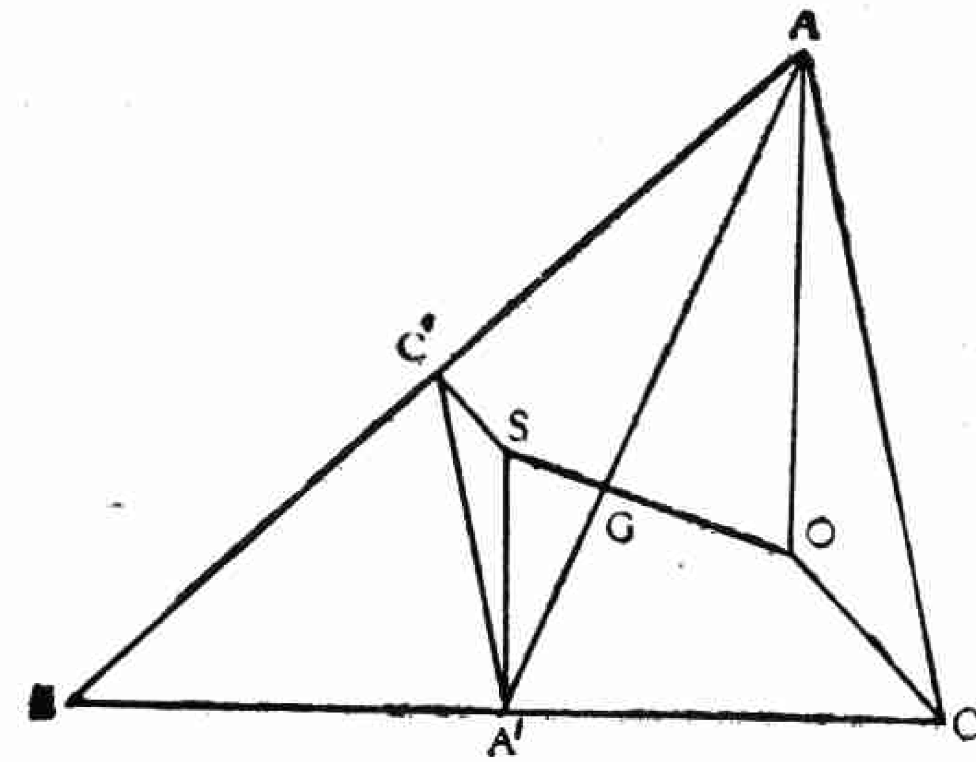
(డి) ప్రతి భుజము యొక్క విదళన లంబరేఖలు పరికేంద్రము వద్ద అనుషక్తములు.

(ఈ) రెండు భుజముల మధ్య బిందువుల గుండ వెళ్ళు ఋజురేఖ మూడవ భుజమునకు సామ్యముగ ఉండును. అది 3 వ భుజములో సగముండును.

నవీన సిద్ధాంతములు : (ఏ) ABC త్రిభుజములో O లంబకేంద్రము. S పరికేంద్రము. BC, AB ల మధ్యబిందువులు క్రమముగా A', C'; AO, CO, $A'S$, $C'S$, $A'B'$ చేర్చుము (చూ. చిత్రము 234).

ΔAOC, $\Delta A'SC'$ సదృశములు.

$$\text{కాబట్టి } \frac{AO}{SA'} = \frac{AC}{A'C'} = 2$$



చిత్రము 234

$\therefore SA' = \frac{1}{2}AO$; $SC' = \frac{1}{2}CO$; $SB' = \frac{1}{2}BO$. ఇచ్చట AC యొక్క మధ్యబిందువు B'; AA' చేర్చుము. అది SO ను G లో ఖండింపనిమ్ము.

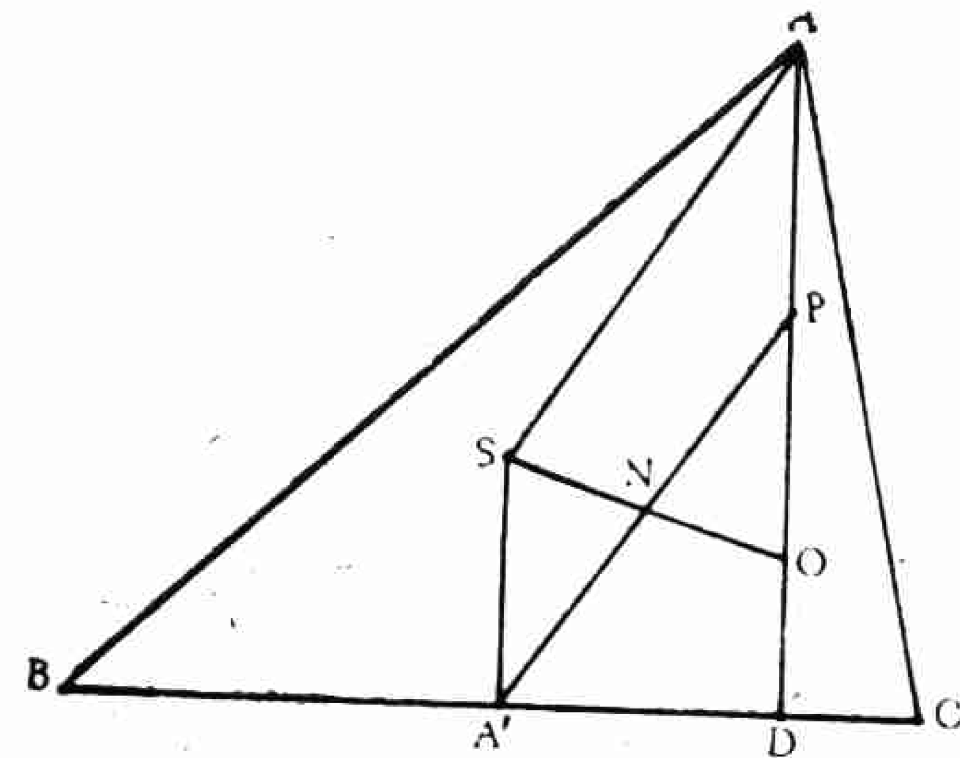
$\Delta SGA'$, ΔOGA సదృశములు.

$$\therefore \frac{SG}{GO} = \frac{SA'}{AO} = \frac{1}{2} = \frac{GA'}{AG}$$

$\therefore$ మధ్యగత AA' ను G బిందువు $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును. కాబట్టి G మధ్యకేంద్రము లేదా గురుత్వకేంద్రము. $SG/GO = \frac{1}{2}$.

S, G, O బిందువులు ఒకే ఋజురేఖలో నుండును. ఈ ఋజురేఖకు ఆయ్‌లర్ రేఖ అని పేరు.

నవబిందు వృత్తము : ΔABC లో S పరికేంద్రము; O లంబకేంద్రము (చూ. చిత్రము 235). BC కి లంబరేఖ AD; BC యొక్క మధ్య బిందువు A'; AO యొక్క మధ్య బిందువు P; $A'S$, $A'P$, SO లను చేర్చుము. PA', SO ను Nలో ఖండింపనిమ్ము. $AP = \frac{1}{2}AO = SA'$.



చిత్రము 235

AP, SA' సామ్యములు.

$\therefore APA'S$ ఒక సామ్యచతుర్భుజము. $PA' = AS = R =$ పరివృత్త వ్యాసార్ధము.

ΔAOS లో భుజము AO యొక్క మధ్యబిందువు P. PN, AS సామ్యములైనందున N బిందువు SO యొక్క మధ్యబిందువు.

$$NP = NA' = \frac{1}{2}R$$

$\angle PDA' = 90°$ అయినందున N కేంద్రముగా $R/2$ వ్యాసార్ధముతో గీసిన వృత్తము బిందువులు P, D, A'

గుండ వెళ్లును. ఇచట AO యొక్క మధ్యబిందువు P. శీర్షము A నుండి ఎదుట భుజమునకు గీసిన లంబరేఖ యొక్క పాదము D బిందువు. BC యొక్క మధ్య బిందువు A'.

కాబట్టి N కేంద్రముగా, వ్యాసార్థము $R/2$తో గీసిన వృత్తము AO, BO, COల యొక్క మధ్య బిందువుల గుండను, భుజముల మధ్య బిందువుల గుండను, ప్రతి శీర్షము నుండి ఎదుటి భుజములకు లంబరేఖల పాదముల గుండను వెళ్ళును. ఇదియే నవబిందు వృత్తము.

చిత్రము 236 పాదరేఖ

పాదరేఖ : ఒక త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము పై నుండు ఒక బిందువు నుండి భుజములకు గీసిన లంబ రేఖల పాదములు ఏక రేఖీయములు. ABC త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము పై ఒక బిందువు P తీసికొనుము (చూ. చిత్రము 236). P నుండి భుజములు BC, CA, AB లకు PL, PM, PN క్రమముగా లంబ రేఖలు గీయుము. L, M, N బిందువులు ఏక రేఖీయములు అని చూపవలయును. PL పొడుగించినపుడు వృత్తమును A_1 లో ఖండింపనిమ్ము. A, A_1 లను చేర్చుము.

$\angle BLP$, $\angle BNP$ సమానములు.

$\therefore$ PBLM ఒక చక్రీయ చతుర్భుజము.

కాబట్టి $\angle BNL = \angle BPL = \angle BPA_1$.

$\angle BNL$, $\angle BPA_1$ అనురూపకోణములు అయినందున LN, AA_1 సామ్యములు. అట్లే LM, AA_1 సామ్యములు. కాబట్టి బిందువులు L, M, N ఒక ఋజు రేఖలో ఉండవలయును.

ఉపసిద్ధాంతములు : P, Q బిందువులు ఒక వ్యాసాంతములు అయినచో వాని పాద రేఖలు పరస్పర లంబములు. అవి $\triangle ABC$ యొక్క నవబిందువృత్తముపై ఖండించుకొనును.

కొన్ని నూతన భావములు : ఋజు రేఖా ఖండములు, కోణములు, వైశాల్యములు మొదలగు వాటికి ధన, ఋణ సంజ్ఞలు కలవు (చూ. చిత్రములు 237, 238, 239. 240, 241).

ఋజురేఖా ఖండములు : AB ధనాత్మకమయిన CD ఋణాత్మకము.

చిత్రము 237

ఒక దిశ ధనాత్మకమయిన, దాని ఎదుటి దిశ ఋణాత్మకము. సాధారణముగా కుడి వైపు ధనాత్మకముగా తీసికొందుము.

కోణములు : $\angle AOB$ ధనాత్మకము, $\angle QOP$ ఋణాత్మకము; అప్రదక్షిణ దిశ ధనాత్మకము (చూ. చిత్రములు 238, 239).

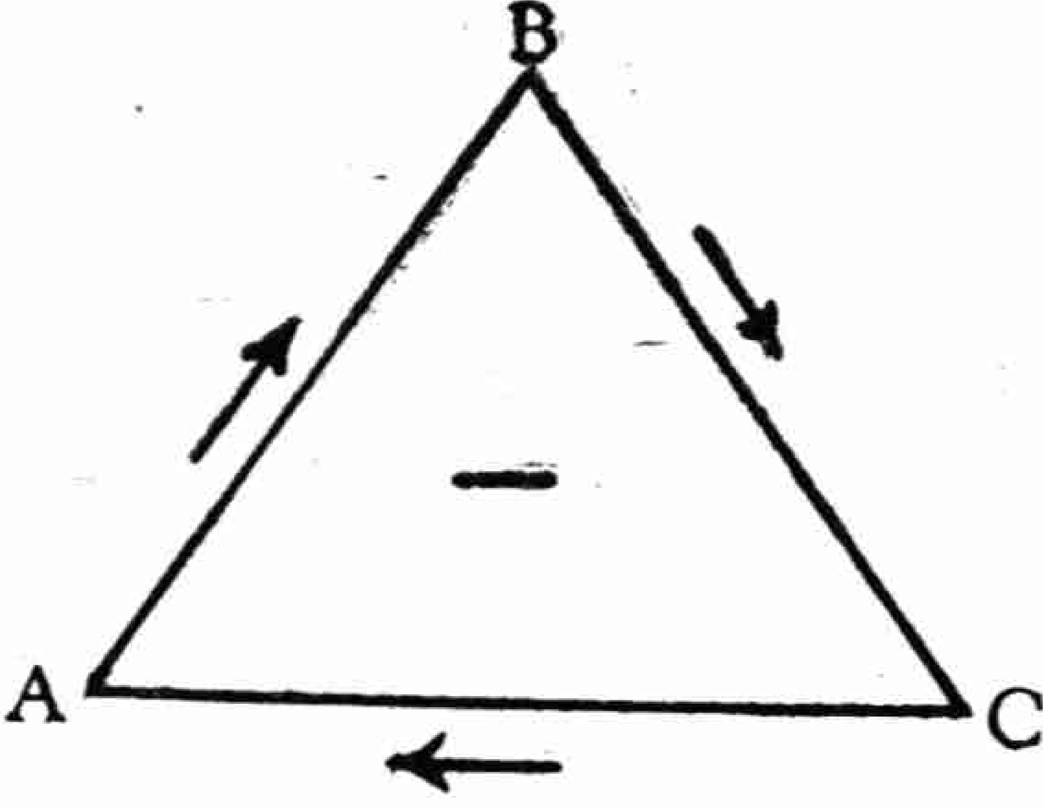
చిత్రము 238

చిత్రము 239

వైశాల్యములు : ఒక పట వైశాల్యము యొక్క అంచును అప్రదక్షిణముగా చుట్టినపుడు ధన సంజ్ఞ యును, ప్రదక్షిణము చుట్టునప్పుడు ఋణ సంజ్ఞ యును వైశాల్యమునకు చేర్చవలయును (చూ. చిత్రములు 240, 241).

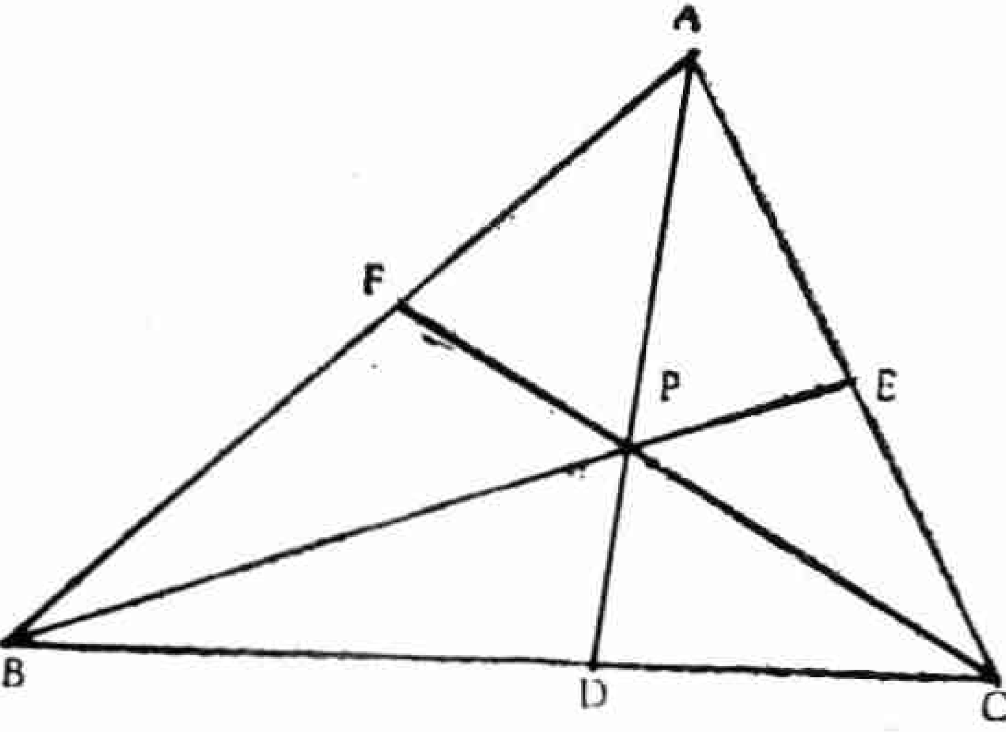
చిత్రము 240

పాస్క్ ఆధార తత్త్వము : ABC ఒక త్రిభుజము. P బిందువు దాని లోపల నుండినచో AP, BP, CP లను



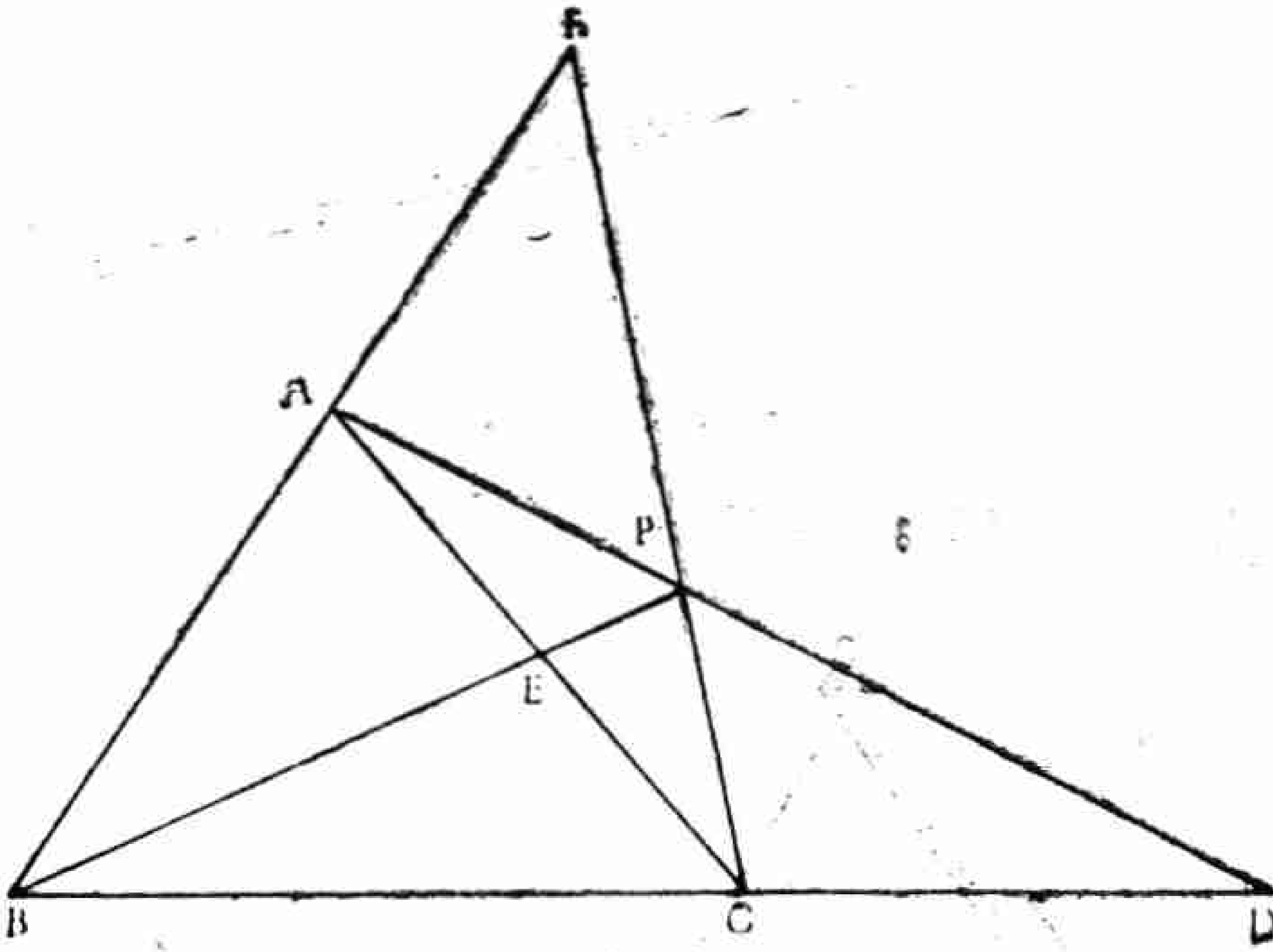
చిత్రము 241

పొడుగించినపుడు అవి BC, CA, AB భుజములను క్రమముగా త్రిభుజము లోపలనే ఖండించును (చూ. చిత్రము 242).



చిత్రము 242

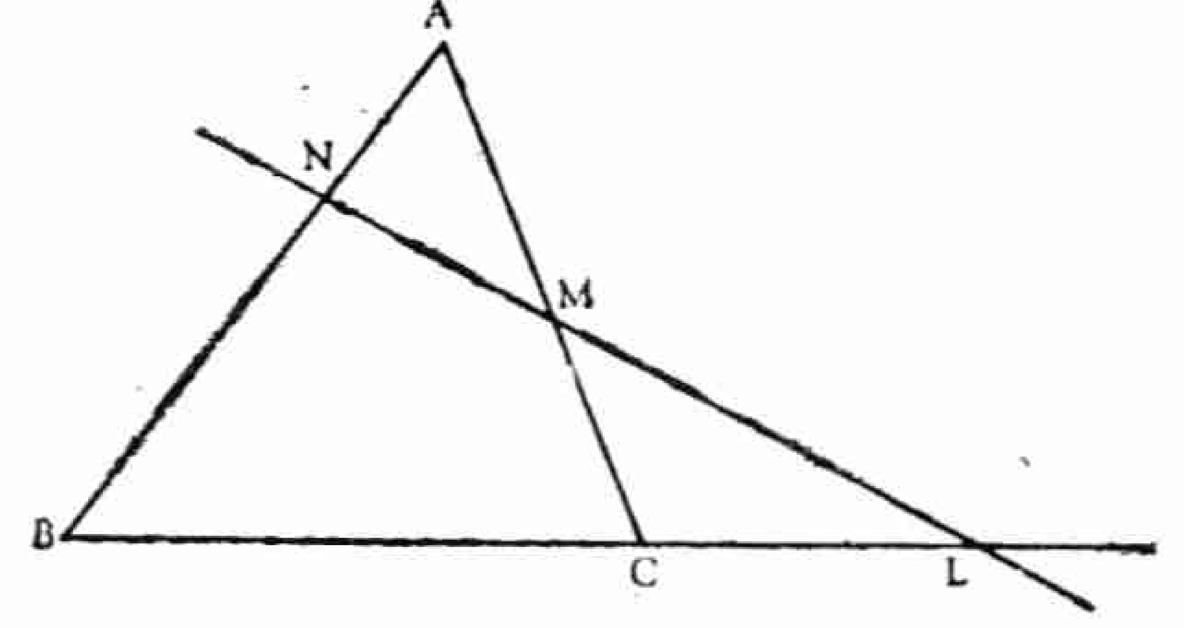
P బిందువు త్రిభుజమునకు వెలుపల నుండినచో AP, BP, CP లను పొడుగించినపుడు దానిలో ఒకటి మాత్రము



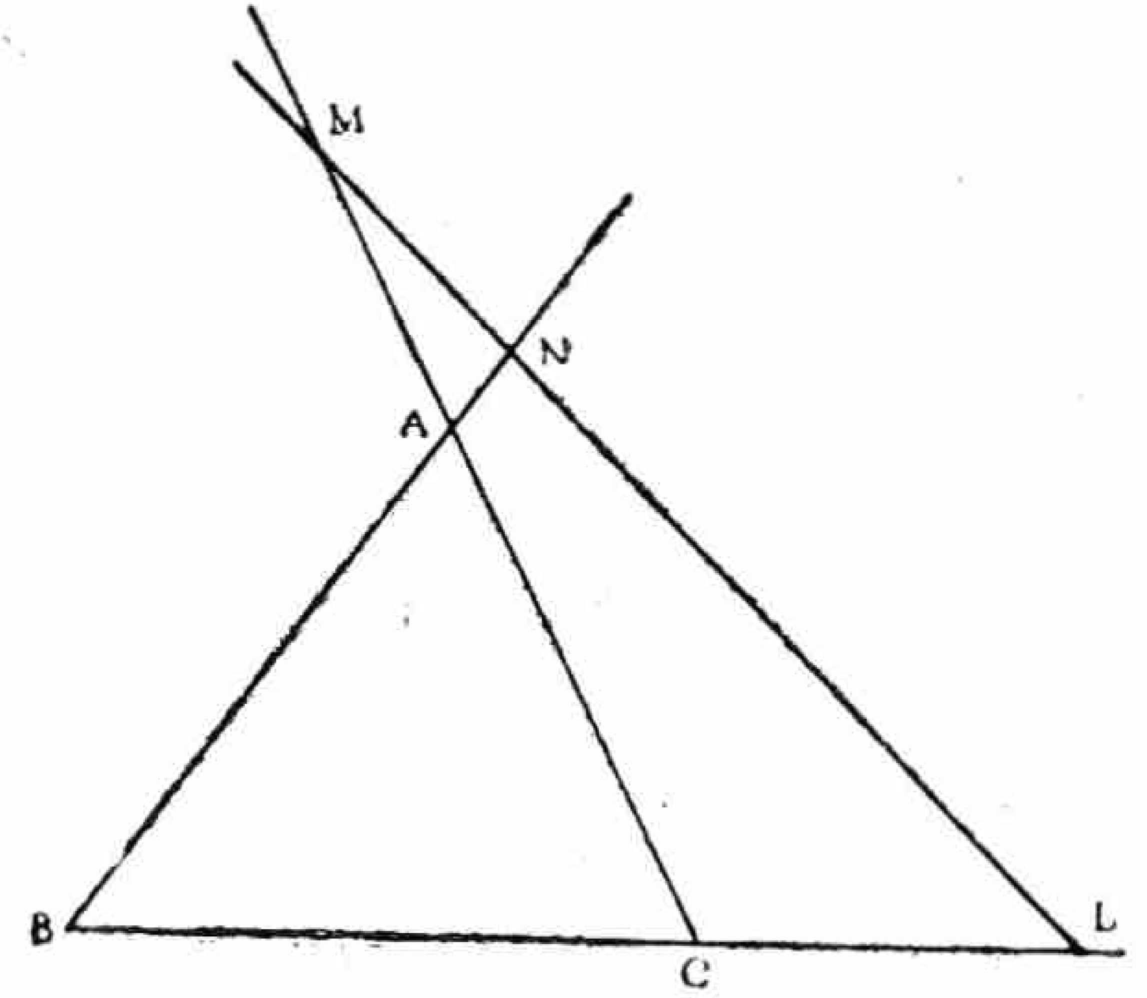
చిత్రము 243

ఒక భుజమును లోపలను, తక్కినవి రెండు భుజముల పొడుగించు భాగములలోను ఖండించును (చూ. చిత్రము 243).

ఒక త్రిభుజముయొక్క భుజములను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించునపుడు ఒక భుజమును బయటను లేదా అన్నిటిని బయటను ఖండించును (చూ. చిత్రములు 244, 245).



చిత్రము 244



చిత్రము 245

అనుషక్త సిద్ధాంతము : ABC ఒక త్రిభుజము ; ఆ తలములో P ఒక బిందువు. AP, BP, CP ఎదుటి భుజములను D, E, F లో ఖండించిన

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=+1$$

ఉపపత్తి : $$\frac{BD}{DC}=\frac{\Delta\, ABD}{\Delta\, ACD}=\frac{\Delta\, PBD}{\Delta\, PCD}$$

$$=\frac{\Delta\, ABP-\Delta\, PBD}{\Delta\, ACD-\Delta\, PCD}=\frac{\Delta\, APB}{\Delta\, APC}$$

కాబట్టి

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\left\{\frac{\Delta\, APB}{\Delta\, APC}\right\}\left\{\frac{\Delta\, CPB}{\Delta\, APB}\right\}\left\{\frac{\Delta\, APC}{\Delta\, BPC}\right\}=1$$

నిష్పత్తులు BD/DC, CE/EA, AF/FB లలో అన్నియు ధనాత్మకములు (చూ. చిత్రము 242).

(1) లేదా ఒకటి ధనాత్మకము రెండు ఋణాత్మకములు (చూ. చిత్రము 243) కాబట్టి వాని లబ్ధము ధనాత్మకము.

విపర్యయముగా, ఒక త్రిభుజము ABC యొక్క భుజములు BC, CA, AB లలో బిందువులు D, E, F క్రమముగా తీసికొనినప్పుడు

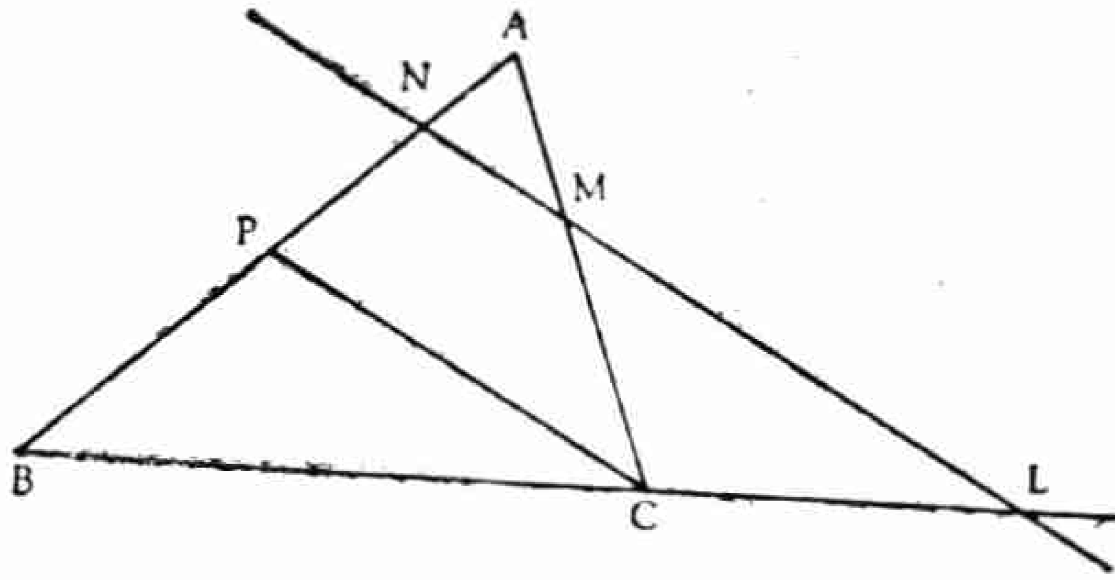
$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ అయిన, ఋజు రేఖలు AD, BE, CF అనుషక్తములు.

ఉపపత్తి : విరోధాభాస విధానమున సాధింపవచ్చును.

ఏకరేఖీయ సిద్ధాంతము : ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు BC, CA, AB లను క్రమముగా ఒక తిర్యగ్రేఖ L, M, N బిందువులలో ఖండించినచో

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AM}{MB} = -1$$

చిత్రము 244 (పు. 338) లో ఒక నిష్పత్తి ఋణాత్మకము, రెండు ధనాత్మకములు ; చిత్రము 245 లో అన్నియును ఋణాత్మకములు, కాబట్టి వాని లబ్ధము ఋణాత్మకము.



చిత్రము 246

ఉపపత్తి : L, M, N లకు సామ్యముగ C గుండ CP ఋజురేఖ AB ని P లో ఖండించునట్లు గీయుము (చూ. చిత్రము 246) :

$$\therefore \frac{BL}{LC} = \frac{BN}{NP} ; \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NA}$$

$$\text{కాబట్టి } \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$$

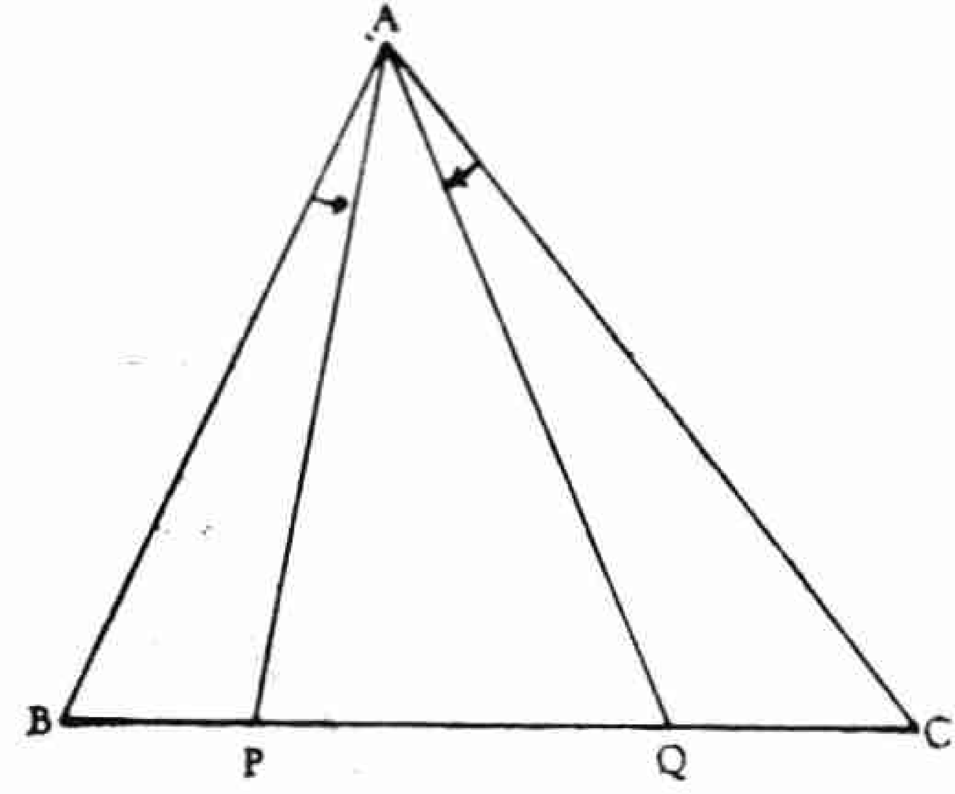
విపర్యముగా బిందువులు L, M, N క్రమముగా ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు BC, CA, AB లపై నుండునపుడు $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$ అయినచో బిందువులు L, M, N ఏకరేఖీయములు.

గమనిక : భుజముల ఖండముల నిష్పత్తుల పేర్కొనునపుడు, ఒక శీర్షము నుండి బయలుదేరి ప్రక్కశీర్షము వద్ద ఆగవలయును.

ఉదా : $\frac{BD}{DC}$ లేదా $\frac{BL}{LC}$

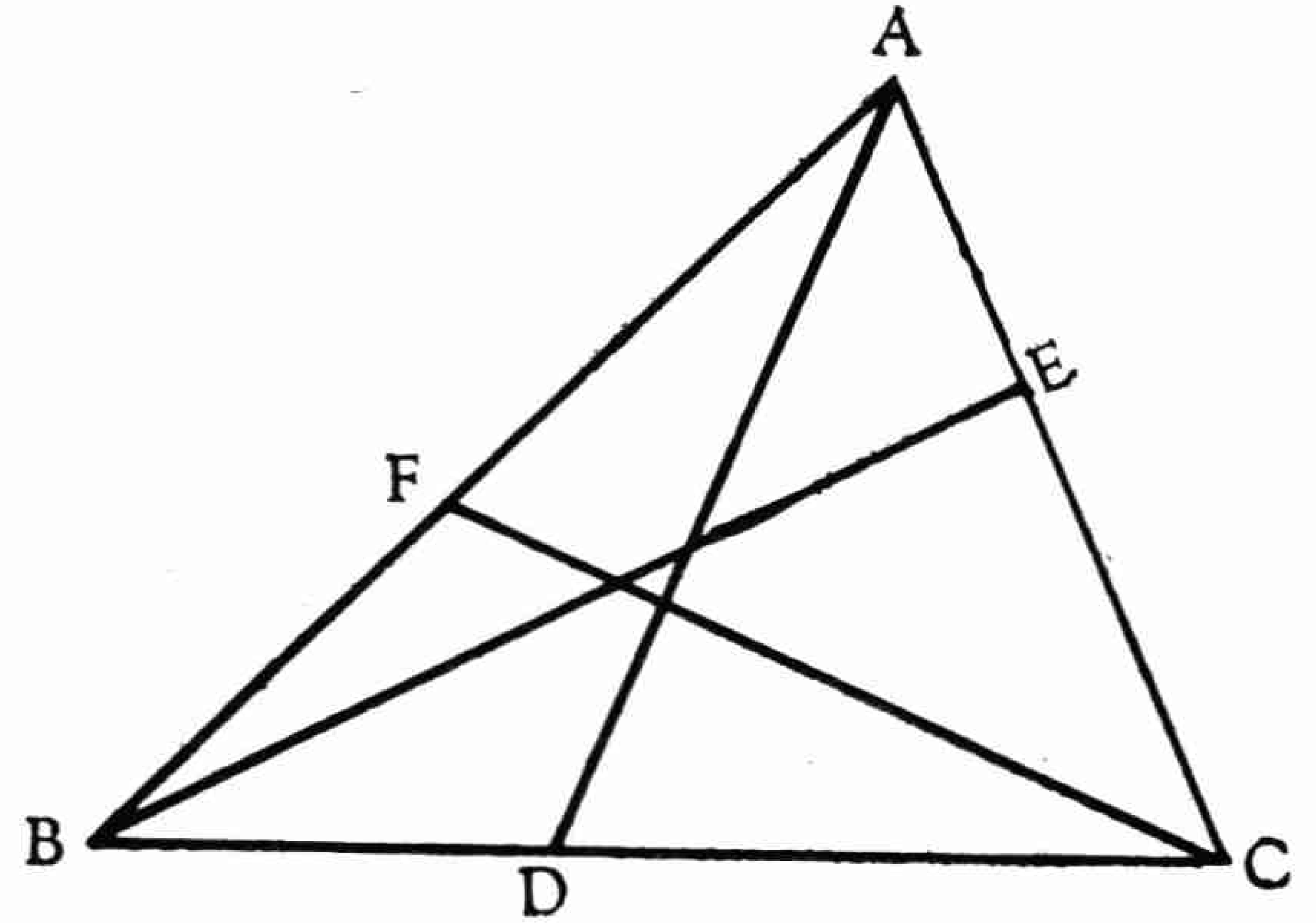
సమాన లేదా తుల్యకోణ సంయుగ్మములు : $\triangle ABC$ లో $\angle BAP = \angle CAQ$ అయినచో AP, AQ లకు సమాన కోణ సంయుగ్మరేఖలని పేరు.

$\angle BAC$, $\angle PAQ$ లకు ఒకే ద్విఖండనరేఖ ఉండును.



చిత్రము 247

సిద్ధాంతము : (ఏ) ఒక త్రిభుజము ABC యొక్క భుజములు BC, CA, AB లపై క్రమముగా బిందువులు D, E, F లు తీసికొనినచో (చూ. చిత్రము 248)



చిత్రము 248

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\sin BAD}{\sin DAC} \cdot \frac{\sin CBE}{\sin EBA} \cdot \frac{\sin ACF}{\sin FCB}$$

$$\text{ఉపపత్తి : } \frac{BD}{DC} = \frac{\triangle BAD}{\triangle DAC} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin BAD}{\frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin DAC}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin BAD}{\sin DAC}$$

ఉపపత్తి : ఇట్లే ఇతర నిష్పత్తులకును విలువలు కనుగొనిన ఫలితము లభించును.

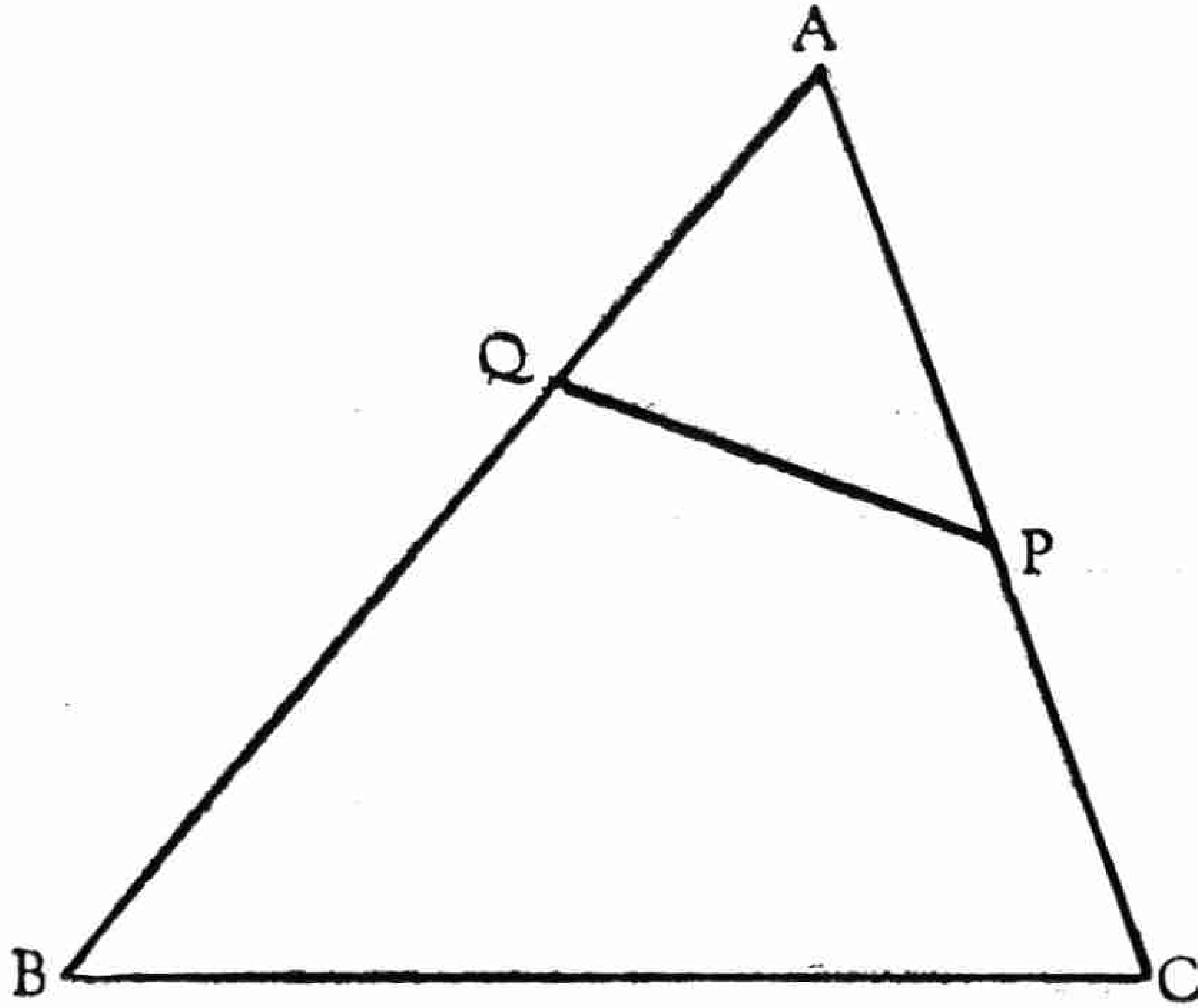
(బి) AD, BE, CF లు అనుషక్తములయిన, వాని సమానకోణ సంయుగ్మములు AD', BE', CF' లు అనుషక్తములు.

నిర్వచనము : ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములను అనుసరించి, మధ్యగతముల యొక్క సమానకోణ సంయుగ్మ రేఖలకు సమ్మధ్యగతలు అని పేరు.

(సి) సమ్మధ్యగతలన్నియును అనుషక్తములు. అనుషక్త బిందువునకు సమ్మధ్యబిందువు అని పేరు. దీనికి

లెమాయన్ బిందువని కూడ పేరు. ఇది K చే గుర్తింప బడును. K, G (మధ్యమ కేంద్రము) బిందువులు సమాన కోణ సంయుగ్మ బిందువులు.

నిర్వచనము : ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు AB, AC లను QP ఋజు రేఖ Q, P బిందువులలో

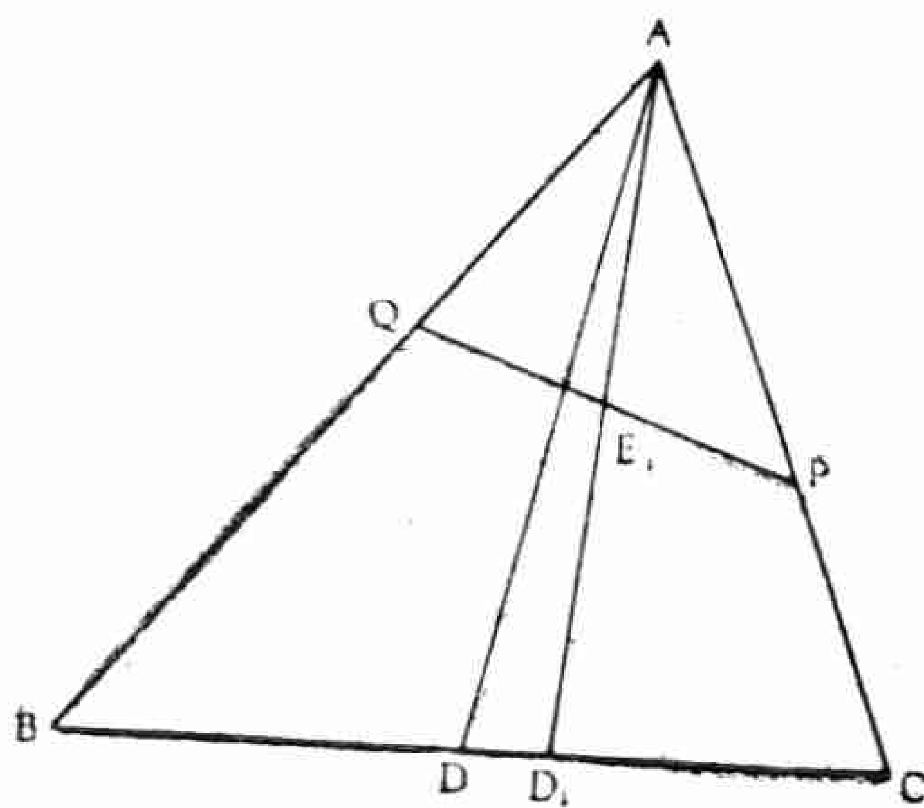


చిత్రము 249 ప్రతిసామ్య రేఖ

ఖండింపనిమ్ము. $\angle APQ = \angle B$, $\angle AQP = \angle C$ అయినచో PQ ఋజు రేఖ BC కి ప్రతి సామ్య రేఖ అని పేరు.

ఒక సమ్మధ్యగత అనురూప ప్రతిసామ్య రేఖలను రెండు సమ భాగములుగా చేయును.

AD, AD_1 లు త్రిభుజము ABC యొక్క మధ్యగత, సమ్మధ్యగతలు; PQ ఋజు రేఖ BC భుజము యొక్క ప్రతి సామ్య రేఖ, అది AD_1 ను E లో ఖండించును. (చూ. చిత్రము 250)



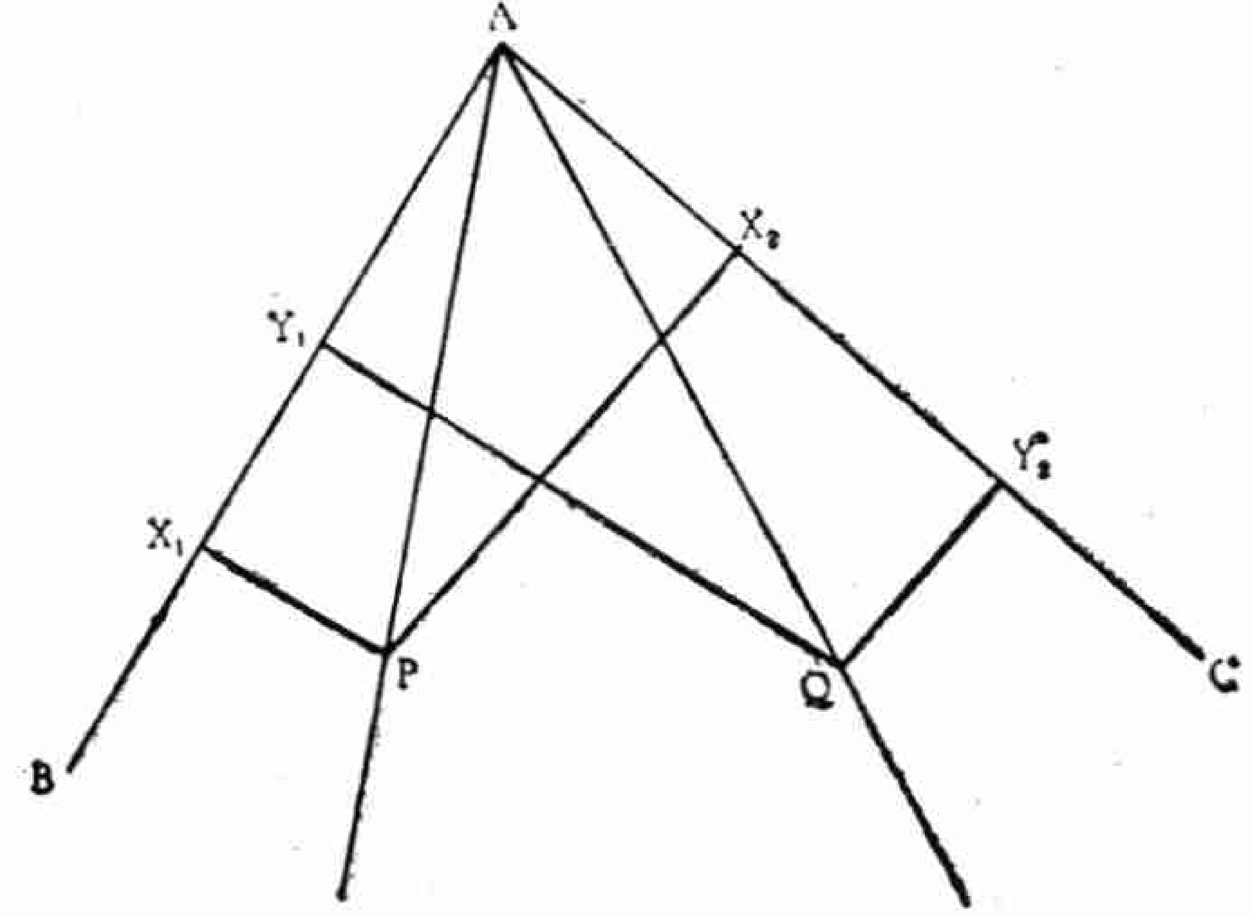
చిత్రము 250

$\triangle APE$, $\triangle ADB$ సదృశములు, $\triangle AEQ$, $\triangle ADB$ సదృశములు.

$$\therefore \frac{PE}{BD} = \frac{AE}{AD};\ \frac{EQ}{BD} = \frac{AE}{AD}$$

కాబట్టి $PE = EQ$.

(బి) భుజములు AB, AC లను అపేక్షించి, ఒక $\triangle ABC$ లో AP, AQ లు సమానకోణ సంయుగ్మ రేఖలు.



చిత్రము 251

AB కి PX_1, QY_1 లంబములు ;

AC కి PX_2, QY_2 లంబములు (చూ. చిత్రము 251)

$PX_1 \cdot QY_1 = PX_2 \cdot QY_2$ అని చూపుము.

$\triangle APX_1$, $\triangle AQY_2$ సదృశములు.

కాబట్టి $\dfrac{AP}{PX_1} = \dfrac{AQ}{QY_2}$ అనగా $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{PX_1}{QY_2}$

$\triangle APX_2$, $\triangle AQY_1$ తీసికొనినచో $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{PX_2}{QY_1}$

$$\therefore \frac{PX_1}{QY_2} = \frac{PX_2}{QY_1}$$

అనగా $PX_1 \cdot QY_1 = PX_2 \cdot QY_2$. అదియు గాక $AX_1 \cdot AY_1 = AX_2 \cdot AY_2$ అని నిరూపింప వచ్చును. అందుచే X_1, Y_1, X_2, Y_2 బిందువులు చక్రీయము లగుచున్నవి.

కోటిజీవ వృత్తము : ABC త్రిభుజము యొక్క సంమధ్య బిందువగు K గుండా భుజముల ప్రతి సామ్య రేఖలు ఇతర భుజములను వరుసగా $\gamma, \gamma_1; \beta, \beta_1; \alpha, \alpha_1$ లలో ఖండింపనిమ్ము. అపుడు $K\gamma = K\gamma_1$; $K\beta = K\beta_1$; $K\alpha = K\alpha_1$ $\angle K\gamma_1\beta = \angle K\beta\gamma_1 = \angle A$

కాబట్టి $K\gamma_1 = K\beta$. ఇట్లే ఇతరములు కూడ (చూ. చిత్రము 252 పు. 341).

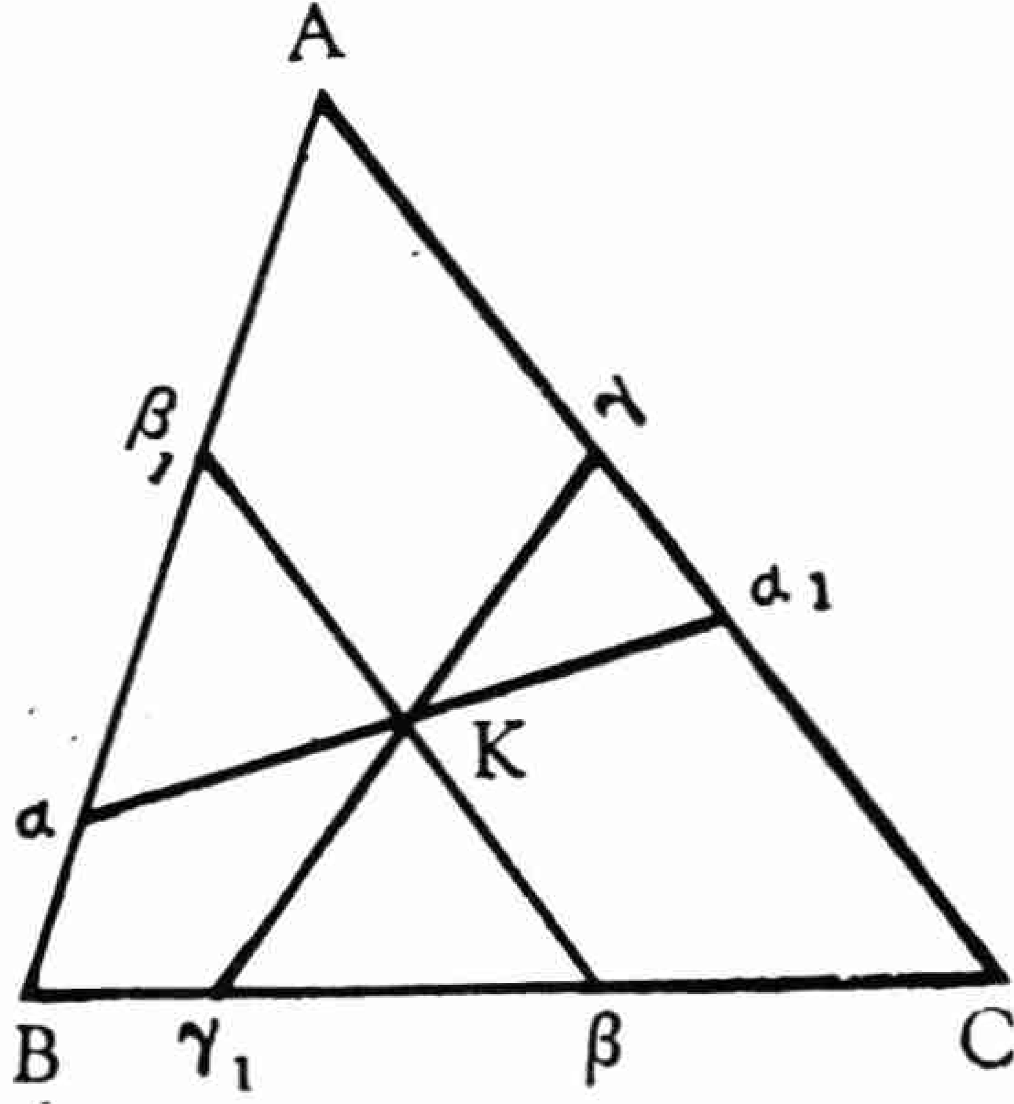
$\therefore \gamma, \gamma_1, \beta, \beta_1, \alpha, \alpha_1$ బిందువులు చక్రీయములు.

$K\gamma_1 = \rho$ అని తీసికొనినచో $\triangle K\gamma_1\beta$ నుండి $\gamma_1\beta = \rho \cos A$ అని చూపవచ్చును.

$\alpha_1\gamma = \rho \cos \beta$; $\alpha\beta_1 = \rho \cos C$

కాబట్టి వృత్తము $\gamma_1\beta\alpha_1\gamma\beta_1\alpha$ ను కోటిజీవ (కోసైన్) వృత్తము అని చెప్పుదురు (చూ. చిత్రము 252). దీనినే లెమాయిన్ ద్వితీయ వృత్తమని కూడ అందురు.

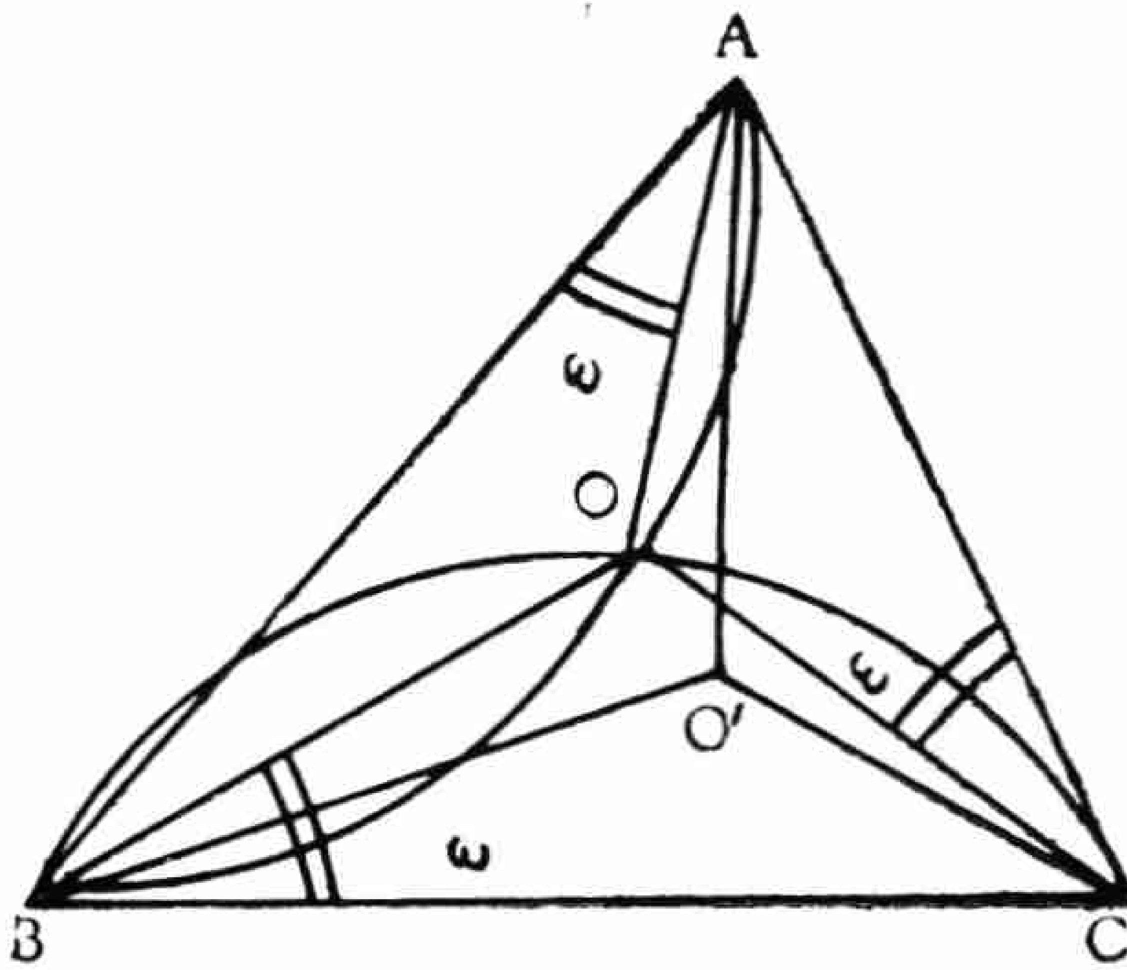
లెమాయిన్ ప్రథమ వృత్తము : ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములకు సామ్యముగా సంమధ్య బిందువు K గుండ



చిత్రము 252

వెళ్లు ఋజు రేఖలు భుజములను ఖండించినచో ఆ బిందువులు చక్రీయములగును. S పరివృత్త కేంద్రమయినచో వృత్త కేంద్రము K యొక్క మధ్యబిందువు. వృత్త వ్యాసార్ధము = $\frac{1}{2}\sqrt{R^2+\rho^2}$. ఇచట R = త్రిభుజము యొక్క వ్యాసార్ధము; ρ = లెమాయిన్ ద్వితీయ వృత్త వ్యాసార్ధము.

బ్రోకార్డ్ బిందువులు : చిత్రము 253 లో త్రిభుజము ABC యందు $\angle OBC = \angle OCA = \angle OAB$ అగునట్లు



చిత్రము 253

O బిందువు తీసికొనుము. O′ బిందువు O బిందువు యొక్క సమానకోణ సంయుగ్మము.

O, O′ బిందువులు బ్రోకార్డ్ బిందువులు ; O ధనాత్మక బిందువు ; O′ ఋణాత్మక బిందువు. ఆచార్య

నాక్షత్రకాలము (సైడీరియల్ టైమ్): ఖగోళ శాస్త్ర గణితమంతయు మేష విషు బిందువు (♈) యొక్క నత కాలముపై ఆధారపడి ఉండును. మేష విషు బిందువు యామ్యోత్తర వృత్తమును ఉత్తమ ప్రతరణము చేయునపుడు నాక్షత్రమధ్యాహ్నమనియు, అధమ ప్రతరణము చేయునపుడు నాక్షత్ర అర్ధరాత్రియనియు చెప్పుదురు.

నాక్షత్ర దినము నాక్షత్ర మధ్యాహ్నము నుండి ప్రారంభమగును. సాయన లేదా సౌరదినము అర్ధరాత్రి నుండి ప్రారంభమగును. ఒక సంవత్సరమునకు సాయన దినములు 365.2422, వీనికి ఎన్ని నాక్షత్ర దినములు సమానములో కనుగొనవలయును.

క్రాంతి వృత్తములో సూర్యుడు పడమట నుండి తూర్పు వైపు అనగా అప్రదక్షిణముగా సంవత్సరమునకు ఒక సారి పరిభ్రమణము చేయుచుండును. కాని (♈) మేష విషువునకు అట్టి పరిభ్రమణములేదు.

ఒక దినమున విషుబిందువును, సూర్యుడును ఒకే సమయములో ఉత్తమ ప్రతరణము చేసినట్లు అనుకొందము.

మరుచటి దినమునకు సూర్యుడు తూర్పునకు ఒక డిగ్రీ వెళ్లి యుండుటచే మేషవిషుబిందు ప్రతరణము కొంత ముందుగాను, సూర్యుని ప్రతరణము కొంత ఆలస్యముగాను జరుగును. ప్రతిదినము ఈ ప్రతరణముల వ్యత్యాసము ఎక్కువ అగు చుండును.

ఒక సాయన సంవత్సరములో సూర్యుడు ఒక పరిభ్రమణము పూర్తిచేసి మరల మేషవిషుబిందువును చేరును, కాబట్టి ఒక సాయన సంవత్సరములో సూర్యుని ప్రతరణములు మేషవిషుబిందువు ప్రతరణములకంటె ఒక ప్రతరణము తక్కువగా ఉండును.

కాబట్టి ఒక సాయన సంవత్సరములో 365.2422 సాయన దినములు (సౌరదినములు) ఉన్నందున నాక్షత్ర దినములు ఒకటి ఎక్కువగా ఉండును.

365.2422 సాయన దినములు = 366.2422 నాక్షత్ర దినములు. 1 నాక్షత్ర దినము = 24 నాక్షత్ర గంటలు. 1 నాక్షత్ర గంట = 60 నాక్షత్ర నిమిషములు. 1 నాక్షత్ర నిమిషము = 60 నాక్షత్ర సెకనులు.

కాలపరివర్తనము

సాయనమానము		నాక్షత్రమానము
365.2422 దినములు	=	366.2422 దినములు
1 దినము	=	1.00242 దినములు
1 గంట	=	1 గంట + 4 ని. − 4 సె.
1 గంట − 4 ని. + 4 సె.	=	1 గంట.

నాక్షత్రకాలముయొక్క ఉపయోగము : ఖగోళ చిత్రము 118 (పు. 211) లో Z మస్తకబిందువు, P దివ్య ఉత్తర ధ్రువము, S_0 EN. క్షితిజము, QER విషువృత్తము, S ఒక నభోమూర్తి, PSM ద్యుజ్యావృత్తము విషువృత్తమును M వద్ద ఖండించును. ♈ మేషవిషు బిందువు.

S యొక్క విషువాంశ =

$\gamma M = \gamma R - MR = \angle \gamma PR - \angle \gamma MP$

నాక్షత్ర కాలము - S యొక్క నత కాలము $= T - h$

$\therefore$ α (విషునాంశ) $= T - h$ అనగా $T = \alpha + h$.

S ఉత్తమప్రతరణము చేయునపుడు దాని నత కాలము $h = 0$, అపుడు $T = \alpha$. అనగా నాక్షత్ర కాలము = విషువాంశ.

ఒక వేధశాలలో ఉండు నాక్షత్ర ఘటీయంత్రము మూలముగా ఒక నభోమూర్తి ఉత్తమ ప్రతరణ చేయునపుడు దాని నత కాలము దాని విషువాంశకు తుల్యము. నాక్షత్ర ఘటీ యంత్రములో అన్ని నభోమూర్తుల విషువాంశలు కనుగొనవచ్చును.

మాధ్యమ నాక్షత్రకాలము: మేష విషుబిందువు γ స్థిరముగా ఉండదు; మధ్యస్థితి నుండి ముందుకు, వెనుకకు స్పందనము చేయుచుండును. కాబట్టి ఒక మాధ్యమ విషుబిందువును శాస్త్రజ్ఞులు సృష్టించిరి. అది ఏకరూప వేగముతో విషు వృత్తముపై చలించును. అది స్పందన చలనములో పాల్గొనదు. γ మాధ్యమ విషుబిందువు వ్యక్త విషు బిందువునకు ± 1.2 సెకనులు దూరములో నుండును. వ్యక్త విషుబిందువుతో వ్యక్త నాక్షత్ర కాలమును, మాధ్యమ విషుబిందువుతో మాధ్యమ నాక్షత్ర కాలమును గణింతురు. వ్యక్త నాక్షత్ర కాలము — మాధ్యమ నాక్షత్ర కాలము = విషువాంశలో విచలనము.

నాక్షత్ర కాలమానములోని లోపములు: మార్చి 21 తేదీన సూర్యుడు మేష విషువులో ఉండును. అవి రెండును ఆ దినములో ఏకకాలములో ఉదయాస్త మానములు కలవై ఉండును. కాని 3 నెలల తర్వాత, జూన్ 22న మేషవిషు బిందువునకు తూర్పున 90 డిగ్రీల దూరములో సూర్యుడు ఉండును. కాబట్టి సూర్యుడు ఉదయించునపుడు మేషవిషువు ఉత్తమ ప్రతరణము చేయుచుండును. అనగా అపుడు నాక్షత్రకాల మధ్యాహ్నము. సెప్టెంబరు 23 తేదీన సూర్యుడు ఉదయించునపుడు γ అస్తమించును. డిశంబరు 22 తేదీన సూర్యుడు ఉదయించునపుడు మేషవిషువు అధః ప్రతరణము చేయుచు, నాక్షత్ర కాల అర్ధరాత్రిని సూచించును.

మానవుని దైనికచర్య సూర్యుని అనుసరించి ఉన్నది. సూర్యుడు ఉదయించునపుడు మనము నిద్ర లేచి, అస్తమయానంతరము దిన చర్యలు పూర్తిచేసి, విశ్రాంతి పుచ్చుకొందుము. సూర్యునిచే ఏర్పడు రాత్రియందు మానవుడు నిద్రించును. పగటియందు పనులు చేయును. కాబట్టి సూర్యునిపై ఆధారపడు సాయన కాలమానమే మానవునికి ఉపయోగకరము. నాక్షత్ర కాలమానము వాడిన మానవునికి దైనిక చర్యలందు అంతులేని చిక్కు లేర్పడును.

ఆచార్య.

నారాయణ పండితుడు: నృసింహ పుత్రుడగు నారాయణ పండితుడు క్రీ. శ. 1356లో అంకగణితమునకు, జ్యామితికి అంకితము చేయబడిన తన గణిత కౌముదిని వ్రాసెను. ఇతడే 'నా బీజగణితము' అని అందు పేర్కొనినాడు. గణిత కౌముదిని శోధించిన పద్మాకర ద్వివేది ఆ గ్రంథము యొక్క ఉపోద్ఘాతమునందు నారాయణబీజము అను పేరిట బీజగణితమును విమర్శించు ఖండమొకటి వారణాసి ప్రిన్స్ ఆవ్ వేల్స్ సరస్వతీ భవన కోశభాండాగారమందు కలదని చెప్పెను. ఇంతకన్న వేరేమియు దాని విషయమై మనకు తెలియదు. కొందరు దాని అతి విస్తృత లక్షణమును పురస్కరించుకొని కాబోలు గణిత కౌముదిని లీలావతీ వ్యాఖ్యానమని చెప్పుటకద్దు. అది భ్రాంతిమూలకము. క్రమరహితముగ గణిత కౌముది యందు కూర్పబడిన విషయములలో అత్యంత ప్రధానములైనవి: పూర్ణాంక, భిన్నాంకములకు సంబంధించిన మూల పరికర్మాష్టకము; వర్గములకు, వర్గమూలములకు అన్వయించు భిన్నాంకములను గురించిన కఠిన సమస్యలు (సంకీర్ణ ప్రజాతయః); వర్గములను గురించిన కొన్ని విచిత్ర సమస్యలు (కృతి); వ్యస్తవిధి (ఇన్వర్షన్); త్రైరాశికము; మిశ్రమ వ్యవహారము; వృద్ధి ధనము (వడ్డీ); కాలము - దూరము; కాలము - పని - వీటిని గూర్చిన సమస్యలు; శ్రేఢీ వ్యవహారము, స్థూలవ్యవహార విధి; ఋజు రేఖా చిత్రముల యొక్క కర్ణముల, ఎత్తుల, పరివ్యాసముల లెక్కలు; వృత్తముల చాపములు, జ్యాలు; అంకశ్రేఢుల జ్యామితీయనిరూపణ (శ్రేఢీ క్షేత్రములు); పూర్ణాంక నిడుపులుగల చిత్రములు: జ్యామితియందు మిక్కిలి కఠినమైన (పైశాచిక) సమస్యలు; త్రవ్వటములు (ఖాతవ్యవహారములు), ఛాయావ్యవహారములు, కుట్టకములు, వర్గప్రకృతి; భాగదానవిధానము, అనగా ఒక దత్త సంఖ్యను నిశ్శేషముగా భాగింపగల సంఖ్యలను కనుగొనుట (ఫాక్టొరైజేషన్); భిన్నాంక క్షేత్రమందలి ఇతర సమస్యలు, అంకపాశములు, భద్రగణితము (ఇంద్ర జాలిక చతురస్ర కల్పనము).

పైన చెప్పిన విషయములన్నియు మనకు పూర్వపరిచితములే కాని భద్రగణితమన్నది సంపూర్ణముగా నూతనము. అయినను నారాయణుని ఈ వ్యవహార నిర్వహణమునకు కొన్ని గణనీయ లక్షణములు కలవు. తనకు ముందున్న వారలకన్న ఇతనికి కేవల సంఖ్యల

యందు ఆదరము హెచ్చు. భాగజాతి, ప్రభాగజాతి మొదలగు వ్యవహారములకు చేర్చబడిన దృష్టాంతములు పూర్వగ్రంథములందట్టి సందర్భములలో మనకు తారసిల్లు దృష్టాంతములవలె ఆచరణ యోగ్యములు, ఊహా స్పష్టములు కావు. కాని అవి అమూర్తములు. 'ఆరు ఏకలవ భిన్నముల సంకలన ఫలము ఒకటి అయితే, భిన్నము లేవి ?' అనునది అమూర్తములకొక మచ్చు. అంకపాశములను చర్చించు ప్రకరణములో ఒక దత్తసంఖ్య ఘటకములనుండి కల్ప్యములగు పాకములు ఈయబడిన ఒక అంకెల గుంపు నుండి కల్పించుటకు వీలైన విధములగు సంఖ్యలు మొదలైన వ్యవహారములను ఇతడు పరిశీలించెను. కాని గ్రంథమునందధికభాగము సహజ సంఖ్యలను వ్రాసి, వాటిని విశిష్ట విధానముల నుపయోగించి, వివిధములగు సంఖ్యాపరంపరలను (ప్రస్తారములను) ఎట్లు వ్రాయ వీలగునో అను ప్రశ్నను పరామర్శించినది. ఒక వస్తు సముదాయమును అంకపాశ విధిని వేరువేరుగా ప్రస్తరించుటకు విధానము తీయబడినవి. ఆ వస్తువుల వేరు వేరు సంయోజనములు వ్రాయుటకన్న ఈ వ్యవహారము భిన్నము కాదు.

భద్ర చతురస్రములు (మాజిక్ స్క్వేర్స్) తాయెత్తులు చేయుట కుపయోగింపబడుచుండెడివి. తాంత్రిక శాస్త్ర ప్రవణులగు ఆచార్యులకు, దైవజ్ఞులకు అట్టి చతురస్ర రచన చిరపరిచితము. కాని, ఇది ఐంద్రజాలికమని పరిగణింపబడుటచే గణిత, ఖగోళ గ్రంథములందు ఈ విషయము చర్చించబడుచుండుటలేదు. నారాయణ పండితుడు సమయభంగము కావించి, ఇట్టి ఐంద్రజాలిక గణితమును తన గ్రంథములో విస్తరించినాడు.

నారాయణ పండితుని జ్యామితి బహు శ్రమ కల్పితమే కాక, చక్రీయచతుర్భుజ విజ్ఞానమందు విశిష్టమగు అతిశయమును ప్రదర్శించునదికూడను. చతుర్వేద పృథూదక స్వామికి పరిచితమై అతనిచే సోపపత్తికముగ నిరూపింపబడిన టాలెమీ సిద్ధాంతము నారాయణ పండితునకు కూడ తెలిసినట్లు కన్పించుచున్నది. పరివ్యాసార్ధమునకును, ఆధార భుజముపై ఇతర భుజముల విక్షేపములకును ఇతడు నవీన సమాసము లిచ్చినాడు.

గణిత కౌముదిలోని మరియొక నూతన వ్యవహారము సమభుజ సమలంబములచే అంకశ్రేఢులను వ్యక్తపరచుట; వాటి ముఖముగాని, ఆధారముగాని ఋణ చిహ్నితమైనపుడు శిఖలచే కలుపబడిన రెండు త్రిభుజముల రూపమును అది స్వీకరించుట. మహావీరునివలె నారాయణుడుకూడ భిన్నాంకీయ ఋణాత్మక అవృత్తులుగల అంకశ్రేఢులను వాటి చిత్రీయ నిరూపణ సందర్భమున మాత్రము ఇచ్చినాడు (శ్రేఢి క్షేత్రములు). ఈ ప్రకరణమందే అతడు సంకలన ఫలము శూన్యముగాగల సంకలనశ్రేఢులను కూడ చర్చించినాడు. ఋణాత్మక అవృత్తులు గల పరంపరలు తక్కిన గణితలోకమునకు అపరిచితమైన భావమని తోచుచున్నది.

వృత్తమునకు, గోళమునకు చెందిన జ్యామితిలో నారాయణపండితుడు గోళముయొక్క ఉపరితల వైశాల్యమునకు, ఘనమునకు యథార్థ సమాసముల నిచ్చెను. π కి భాస్కరునిచే సాధింపబడిన యథార్థమూల్యములు అతనికి అందుబాటులో ఉన్నను, నారాయణ పండితుడు 3, $\sqrt{10}$ అను మూల్యములతోనే సంతృప్తి పడినాడు. ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞుడు కాకపోవుటచే వృత్తముల విషయమున అతడంతగా ఆదరము చూపలేదు. సరస్వతి

నిరుపాధిక ఆకాశములు (అబ్‌స్ట్రాక్ట్ స్పేసెస్):

యూక్లిడీయ ఆకాశము : మనము నివసించియున్న ఆకాశము యొక్క ధర్మములను క్రీ. పూ. 3 వ శతాబ్దమందు అభ్యుపగతతత్త్వముల ద్వారా యూక్లిడ్ అన్వేషించెను. తరువాత మరి 2000 ఏండ్లకు డేకార్ట్ ఈ పనికే నిరూపక జ్యామితి శాస్త్రమును సృజించెను. ఆకాశము బిందు సమూహము. ఇందు ప్రతిబిందువు P ను మూడు నిరూపకములు (x, y, z) లచే నిర్దేశించ వచ్చును. ఇదికాక x, y, z నిరూపకములను OP అను సదిశరాశి ఘటకములుగా పరిగణించవచ్చును.

$OP = ix + jy + kz$ ఇచట i, j, k లు లంబ కోణ నిరూపకాక్షముల దిక్కులుగల యూనిట్ సదిశరాశులు. కనుక యూక్లిడీయ ఆకాశమును సదిశరాశి ఆకాశముగా గ్రహించవచ్చును. ఇందు x, y, z అను మూడు నిరూపకములును వాస్తవిక సంఖ్యలు. అంతేగాక ఈ సదిశరాశులను కూడుటగాని, దిశమారకుండ పొడవులను ఎక్కువ చేయుటగాని, తక్కువ చేయుటగాని (అనగా ఒక సంఖ్యతో గుణించుట) సాధ్యమైన పరికర్మములు.

n - పరిమాణిక సదిశరాశి **ఆకాశము :** భావమును విశాలీకరించుటయే గణితశాస్త్ర హృదయము గనుక, యూక్లిడీయ ఆకాశముకంటె విశాలీకృతమైన సదిశరాశి ఆకాశముల భావమును మనము కల్పించవచ్చును. మొదట నిరూపకఘటకముల సంఖ్యను 3 నుండి మరియే పూర్ణాంకము n కైనను హెచ్చింతము. ఇట్టి ఆకాశమందు P అను బిందు వేదియైన $i_1 x_1 + i_2 x_2 \dots + i_n x_n$ అను సదిశరాశిచే, లేదా $x_1, x_2, \dots x_n$ అను నిరూపకములచే నిర్దేశింపబడును. రెండవది నిరూపకములు వాస్తవిక సంఖ్య

లుగా నుండనక్కరలేదు. అవి సంకీర్ణ సంఖ్యలుగా నుండ వచ్చును; లేదా ఏ క్షేత్రము F కైనను చెందినవిగా ఉండ వచ్చును. దీని అర్థమేమనిన ఈ సంఖ్యలను అంకగణిత పరికర్మలగు సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహార ములకు గురిచేయవచ్చును (హారము శూన్యము కాకూడదు). పై పరికర్మల ఫలముగా ఆ క్షేత్రమునకు చెందిన ఇంకొక సంఖ్య లభ్యమగును. ఈ విశాలీకృత ఆకాశములందుకూడ

$$(x_1, x_2, \dots x_n) = X; \ (y_1, y_2, \dots y_n) = Y$$

అను సదిశరాశులను సంకలనము చేయవచ్చును. దీనిఫలము $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n)$ అను మరియొక సదిశరాశి. ఆ క్షేత్రము F నకే చెందిన ఒక సంఖ్య c చే గావించబడిన గుణకారము cX ను $(cx_1, cx_2, \dots cx_n)$ అను సదిశరాశిని ఇచ్చును.

F వాస్తవిక సంఖ్యల క్షేత్రమైనచో, ఇప్పుడు ఆంతర గుణకారము అనునొక పరికర్మను నిర్వచింతము. ఆ నిర్వచనము ఇదియే:

$$X \cdot Y \text{ లేదా } (XY) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$$

ఇది మూడు పరిమాణముల త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో పైన వివరించిన సదిశరాశిగుణన ఫలమునకు అనురూపముగా బిందుగుణకారముగ ఉన్నది. ఈ ఫలముకూడ ఒక సంఖ్యయే. ఇప్పుడు ఏ సదిశరాశి X పొడవునైనను $|X| = \sqrt{(X \cdot X)}$ అను సమీకరణముచే నిర్వచించవచ్చును. ఏలన $(X \cdot X) = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2$ ధనాత్మకము. వర్గమూలమున కొక వాస్తవిక మూల్యము కలదు. రెండు సదిశరాశుల మధ్య ఉన్న కోణము A ను

$$\cos A = \frac{(XY)}{\sqrt{(X \cdot X)} \sqrt{(Y \cdot Y)}}$$

అను సమీకరణముచే నిర్వచించవచ్చును. ఈ మూల్యము ఎప్పుడును 1 కంటే తక్కువగానే ఉండును కనుక, A వాస్తవికకోణమే అయిఉండవలెను. $X \cdot Y = 0$ అయినచో, ఆ సదిశరాశులు 'లంబములు' అనబడును.

చివరకు $(x_1, x_2, \dots x_n)$, $(y_1, y_2, \dots y_n)$ అను రెండు బిందువుల మధ్యదూరము $|X - Y|$ అని అనగా $\sqrt{\{(x_1 - y_1)^2 + \dots (x_n - y_n)^2\}}$ అను వర్గమూలముగా నిర్వచింతము. ఇవన్నియు త్రిపరిమాణిక జ్యామితి నుండి సాక్షాత్ విశాలీకృతభావములు.

F సంకీర్ణ సంఖ్యల క్షేత్రమగుచో $\sqrt{(X \cdot X)}$ అను పొడవు వాస్తవిక సంఖ్య అగునట్లు (XY) నిర్వచనమును కొంచెము మార్చవలెను. దీనికై $(XY) = X \cdot Y = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \dots x_n \overline{y}_n$ అని నిర్వచింతము. ఇచ్చట $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \dots$ అనగా $y_1, y_2 \dots$ యొక్క సంకీర్ణ ప్రతియోగి; అనగా $y_1, y_2 \dots$ లోని i ని $-i$ గా మార్చుటవలన లభ్యమైన సంకీర్ణ సంఖ్య. కాని, ఇచ్చట A అను కోణము ఎల్లప్పుడును వాస్తవ కోణముగా ఉండ నేరదు.

హిల్బర్ట్ ఆకాశము: పైన చెప్పిన ఆకాశములయందు n ను అనంతము చేసినక్లైన, X అను ఒక బిందువునకో లేదా సదిశరాశికో $x_1, x_2 \dots$ అను అనంత సంఖ్య ఘటకము లుండును. $(XX) = X \cdot X$ ఇప్పుడు $x_1^2 + x_2^2 \dots$ అగును. ఇది యొక అనంతపరంపర. ఇది ఉపసరణశ్రేణి అయిన తప్ప $|X|$ ను Σx_r^2 యొక్క వర్గమూలముగా నిరూపించ లేము. అందువలన, ఇచ్చట ప్రతి సదిశరాశియొక్క ఘటకముల వర్గము ఒక ఉపసరణ పరంపరగా ఉండవలెను అను ఇంకొక నియమమును స్థాపించవలెను. ఇట్లు లభ్యమైన ఆకాశమునకు హిల్బర్ట్ ఆకాశమని పేరు.

అనంత పరిమాణికమగు ఆకాశమునకు మరియొక దృష్టాంతము 'ఫలాకాశము' (ఫంక్షన్ స్పేస్), $0 \leq x \leq x_1$ అను అంతరాళములో నిర్వచించబడిన x యొక్క ఫలములగు $f(x)$ ల నన్నిటిని తీసికొనుము. అట్టి ప్రతిఫలమును ఈ ఫలాకాశమందు ఒక బిందువుగనో, సదిశరాశిగనో భావించుము. అట్టి రెండు సదిశరాశులు $X = f(x)$, $Y = g(x)$ అయిన, $X \cdot Y \ (= XY)$ సంఖ్యను $(XY) = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$ గా తీసికొనెదము. $f(x)$ అను సదిశరాశి యొక్క పొడవును $\int_0^1 [f(x)]^2 \, dx$ యొక్క వర్గమూలముగను నిర్వచించవచ్చును. $\int_0^1 f(x) g(x) \, dx = 0$ అయినట్లయిన $f(x)$, $g(x)$ లు లంబ సదిశరాశులనెదము.

ఈ ఆకాశములలో రెండు బిందువులు A, B మధ్యనున్న దూరము $|A - B|$ మామూలు ఆకాశములలో దూరములతోబాటు ఈ క్రింది ధర్మముల ననుసరించును.

(i) A, B ఏకీభవించునపుడే దూరము AB శూన్యమగును; (ii) A, B లు పరస్పర భిన్నములైనపుడు దూరము AB ధనాత్మకమగును; (iii) A, B, C మూడు బిందువులైనచో దూరము AB + దూరము $BC \geq$ దూరము AC అగును.

దూరభావమును నిరుపాధిక ఆకాశములకు విస్తరింప జేయు ఏ ప్రయత్నములలోనైనను, పైన నిరూపించిన ధర్మములు నిలుచునట్లు నిర్వచనములు కల్పింపబడవలెను.

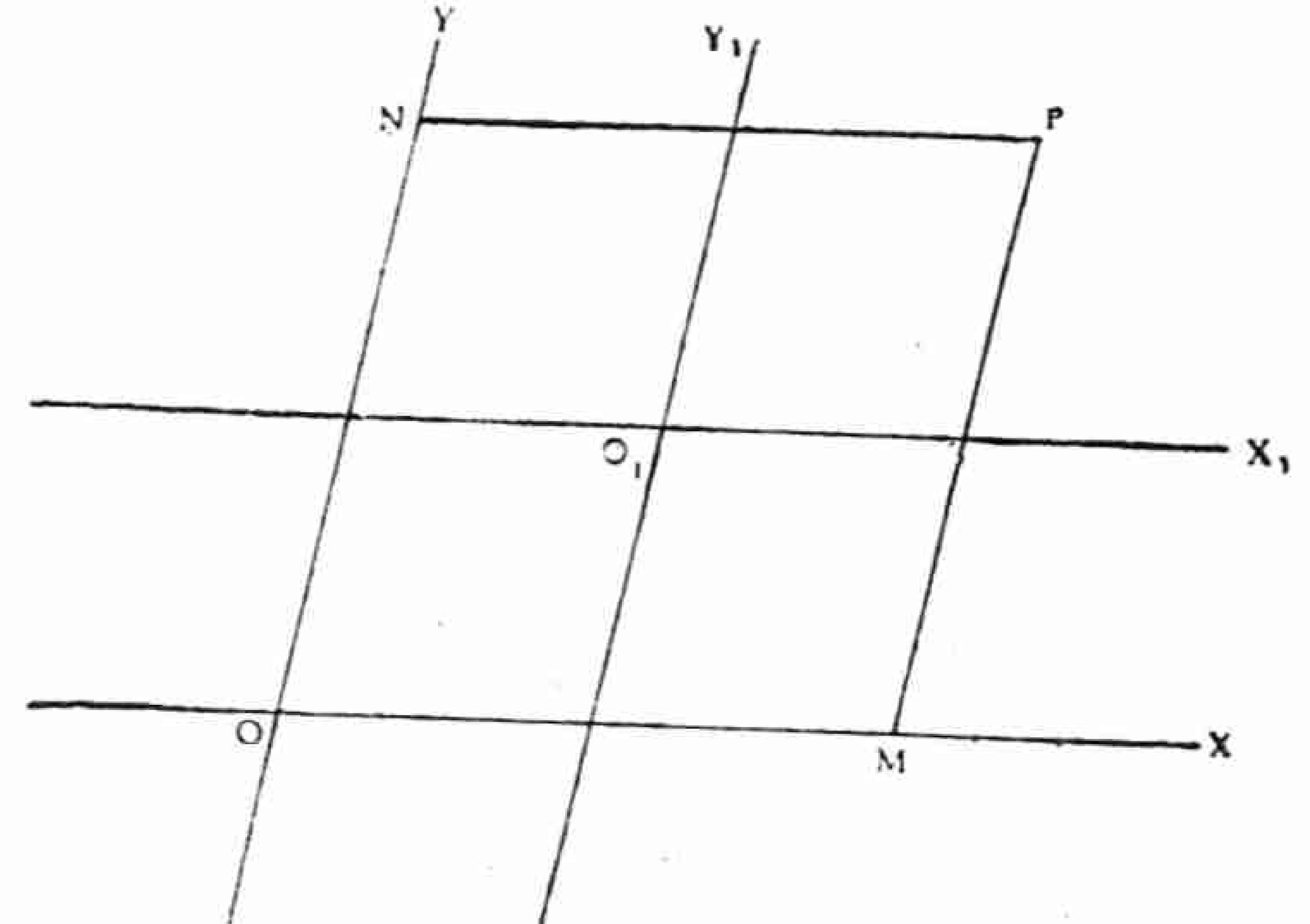
రీమాన్ ఆకాశములు: n-పరిమాణములు గల రీమాన్ ఆకాశము కూడ బిందువుల సముదాయమే. ప్రతి

బిందువును $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ అను n వాస్తవిక నిరూపకములు గుర్తించును. ఈ బిందువునకు, మరియొక ప్రక్కన ఉన్న బిందువు $(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots x_n + \delta x_n)$ నకు మధ్యగల దూరము

$\delta s^2 = a_{11}(\delta x_1)^2 + a_{22}(\delta x_2)^2 + \ldots + a_{rr}(\delta x_r)^2 + 2a_{12}\,\delta x_1\,\delta x_2 + \ldots + 2a_{rs}\,\delta x_r\,\delta x_s + \ldots$ గా తీసికొనెదము. ఇట్టి దూరనిర్ణయముకల ఆకాశములే రీమాన్ ఆకాశములు. ఇచ్చట $a_{11}, \ldots a_{rr}, \ldots a_{12}, \ldots a_{rs}$ సాధారణముగా నిరూపక ఫలములై ఉండును. అయితే అన్నియు స్థిరసంఖ్యలగుచో ఈ ఆకాశము n — పరిమాణిక యూక్లిడీయ ఆకాశమగును. ఉదాహరణమునకు $a_{11} = a_{22} = a_{33}, a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$ అగునపుడు $\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$ అగు కార్టిసియన్ దూరసూత్రము ద్విపరిమాణికమగు రీమాన్ ఆకాశమునకు దృష్టాంతము. ఒక వర్తుల గోళము యొక్క ఉపరితలముపై ఒక బిందువు స్థాననిరూపకములగు రేఖాంశము $= x_1$, అక్షాంశము $= x_2$. సమీపమున ఉన్న రెండు బిందువులు (x_1, x_2); $(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2)$ అయిన వాటిమధ్యన ఉన్న దూరము $(\delta s)^2 = \cos^2 x_2 (\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2$. ఇచ్చట a_{11} స్థిరరాశికాదు, అది x_2 అను నిరూపకము యొక్క ఫలము. అందువలన అది (అనగా గోళతలము) రీమాన్ ఆకాశమగుచున్నది. రీమాన్ ఆకాశమందు ఒక బిందువు గుండ వెళ్ళు రెండు భిన్న దిశలమధ్య ఉన్న కోణమును, ఒక వక్రరేఖ యొక్క కొలతను నిర్వచించవచ్చును. ఒక తలముపైన ఉన్న రెండు బిందువులను చేర్చు రేఖలెన్నియో ఉన్నవి. వాటిలో హ్రస్వతమరేఖలకు జియోడెసిక్‌లు అని పేరు. గోళముపైన ఉన్న ఇటువంటి జియోడెసిక్ రేఖలు మహావర్తులములు (చూ. అంతరీకరణ జ్యామితి - పు. 111). ఒక వక్రతలముపైన ఉన్న హ్రస్వతమరేఖలను ఋజురేఖలుగా భావించి ఆ తలముపై ఒక జ్యామితిని నిర్మించవచ్చును. కాని అది యూక్లిడ్ జ్యామితికాదు, గోళీయ జ్యామితికి ఒక ఉదాహరణము. ఆ. స.

నిరూపక జ్యామితి : జ్యామితిలోని సమస్యలను బీజగణితమును ఉపయోగించి సాధించుటకు మార్గదర్శకుడు డేకార్ట్. ప్రతి బిందువును రెండు దత్తరేఖలనుండి ఏర్పడు దూరములతో గుర్తింపవచ్చునని అతడు ప్రతిపాదించెను. దత్తరేఖలకు నిరూపక అక్షములు అని పేరు. ఒకటి X అక్షము, రెండవది Y అక్షము. అవి ఖండించుకొను బిందువు (O) మూల బిందువు అని చెప్పబడును. X అక్షమును O వద్ద నుండి కుడివైపు ధనాత్మకముగను, ఎడమవైపు ఋణాత్మకముగను, అట్లే Y అక్షమును మీదివైపు ధనాత్మకముగను, క్రిందివైపు ఋణాత్మకముగను తీసికొనవలయును. నిరూపకాక్షముల మధ్య కోణము లంబకోణము అయిన, ఆ అక్షములను ఆయతాక్షములు అనియు, ఇతర కోణము అయినచో వాటిని నిమ్నాక్షములు అనియు చెప్పుదురు. నిరూపకములను గుర్తించు రేఖలు నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగ ఉండును. వీటికి కార్టీసియన్ నిరూపకాక్షములు అని పేరు.

అక్షముల మార్పులు : O_1X_1, O_1Y_1 నిరూపకాక్షములు OX, OY లకు సమాంతరములు. OX, OY అపే



చిత్రము 254

క్షయా O_1 యొక్క నిరూపకములు h, k గా ఉండనిమ్ము. P యొక్క నిరూపకములు x, y అయినచో క్రొత్త నిరూపకాక్షములు O_1X_1, O_1Y_1 గ తీసికొన్నఅపుడు P యొక్క నిరూపకములు $(x - h)$, $(y - k)$ అని విశదము అగును. కనుక $x_1 = x - h$; $y_1 = y - k$;

త్రిభుజముల వైశాల్యము : త్రిభుజము ABC యొక్క శీర్షములు (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) అయినచో దాని వైశాల్యము

$$\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \sin \omega \qquad \ldots \ldots (1)$$

ఇందు కోణము $XOY = \omega$.

ఆయతాక్షములలో $\sin \omega = 1$ అగును.

నిర్ధారకరూపములో ఇది

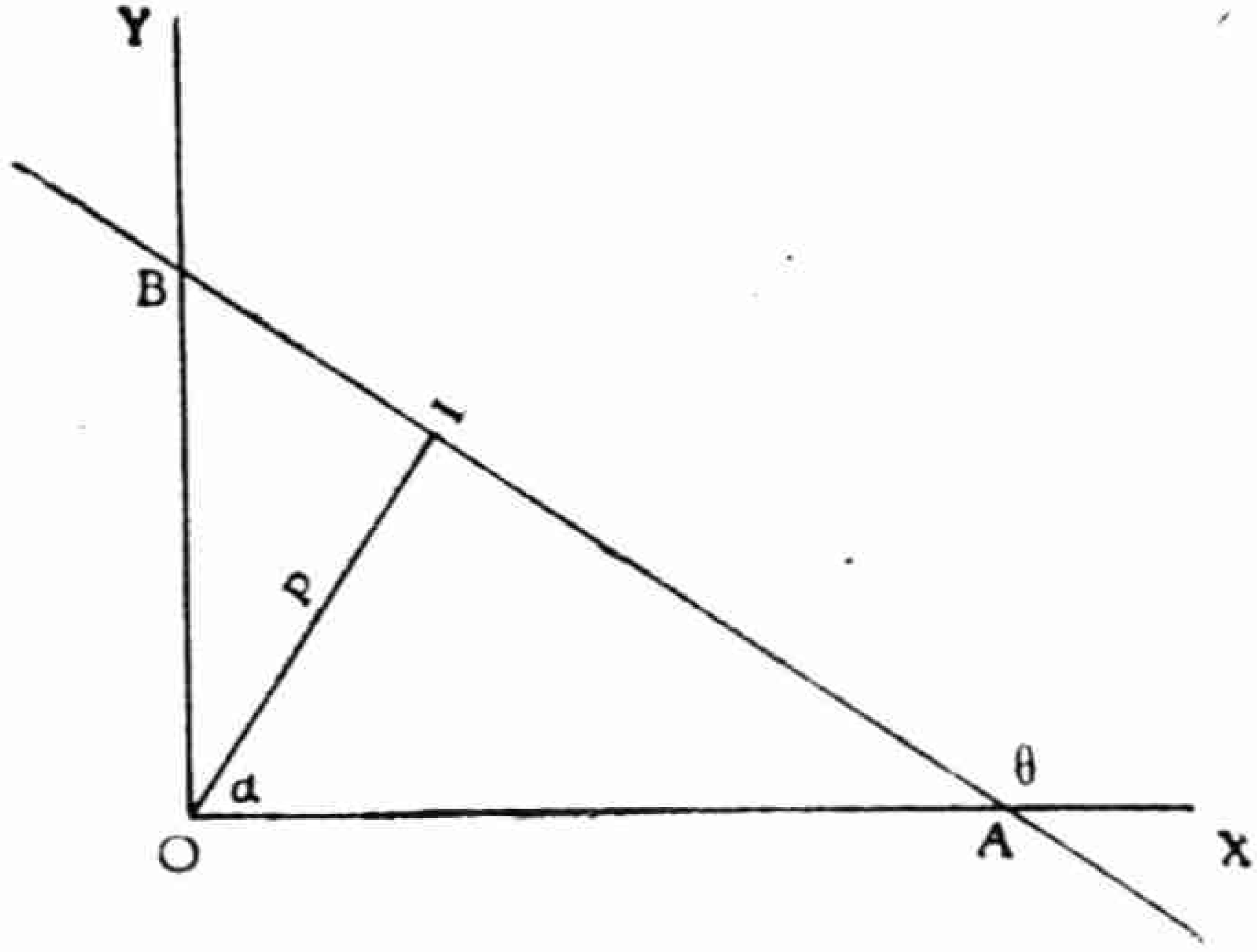
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \omega \qquad \ldots \ldots (2)$$

ఋజురేఖల సమీకరణములు : (i) బిందువులు $(x, y, x_1, y_1; x_2, y_2)$ ఒకే ఋజురేఖ యందుండినచో వానిచే ఏర్పడు త్రిభుజ వైశాల్యము శూన్యము. కాబట్టి

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

అనగా దానిని $Ax + By + C = 0$ అని కూడ వ్రాయవచ్చును.

(ii) రెండు బిందువుల (x_1, y_1), (x_2, y_2) గుండా వెళ్లు ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.



చిత్రము 255

(iii) $\angle XBA = \theta$, $OA = c$ అయినచో, AB రేఖ యొక్క సమీకరణము :

$y = x \tan\theta + c$, లేదా $y = mx + c$ అగును

ఇందు $m = \tan\theta$.

ఈ సూత్రము ఆయతాక్షములకు అన్వయించును. అపుడు $m = \tan\theta$; X అక్షము యొక్క ధనదిశతో AB ఋజురేఖ చేయు కోణము θ. నిమ్నాక్షములు వాడినపుడు $m = \frac{\sin\theta}{\sin(\omega - \theta)}$. ఇందు $\omega = XOY$. 'm' ను నిమ్నత (గ్రేడియంట్) అని అందురు. రెండు ఋజురేఖల 'm' సమానమయినచో అవి సమానాంతరములు.

(iv) AB ఋజురేఖకు OI లంబము ; $\angle AOI = \alpha$, $OI = p$. అప్పుడు AB యొక్క సమీకరణము :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p \qquad \ldots \quad (3)$$

అని చూపవచ్చును. P ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకముగాను, $0 \leq \alpha < 360^\circ$ గను తీసికొనవలయును (చూ. చిత్రము 255).

(v) x అక్షము యొక్క ధనదిశతో θ కోణము చేయుచు, బిందువు (x_1, y_1) గుండ వెళ్లు ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము :

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \qquad \ldots \quad (4)$$

అని చూపవచ్చును.

లంబరేఖలు : ఋజురేఖలు PA, PB లు పరస్పర లంబములు. అనగా $\angle APB = 90^\circ$. వాని నిమ్నతలు వరుసగా m_1, m_2 అయిన

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$; లేదా $m_1 m_2 = -1$ అగును.

అనుషక్త రేఖలు : ఇవి ఒకే బిందువునందు ఏకీభవించు రేఖలు ;

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ అనుషక్త రేఖలు అయినచో

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots \quad (5)$$

రెండు బిందువుల (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) మధ్యదూరము :

(అ) ఆయతాక్షములలో ఈ రెండు బింధువుల మధ్య దూరము d అయినచో

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad \ldots \quad (6)$$

నిమ్నాక్షములలో

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\omega \qquad \ldots \quad (7)$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, x_2)$ బిందువులనుచేర్చు ఋజురేఖను బిందువు $P(x, y)$, $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించినచో

$$x = \frac{mx_1 + lx_2}{l + m}\ ;\ y = \frac{my_1 + ly_2}{l + m} \qquad \ldots \quad (8)$$

బహిర్విభజనములో l/m ఋణాత్మకముగ ఉండును.

ఋజురేఖాద్వయము : వీటిని $(y - m_1 x + c_1)(y - mx_2 + c_2) = 0$ రూపములోగాని,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

రూపములోగాని వ్రాయవచ్చును.

రేఖలు మూలబిందువుగుండ వెళ్లునపుడు

$a_1 x + b_1 y = 0$; $a_2 x + b_2 y = 0$ అను ప్రత్యేక రూపములలోగాని, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ అను కలిపిన ఒకే రూపములోగాని ఉండును.

వ్యాపక సమీకరణ పరిశీలనము : రెండవ తరగతి వ్యాపక సమీకరణము రెండు రేఖలను గుర్తించునని అను

కొందము. అవి ఖండించు బిందువు $O_1(X_1, Y_1)$ అను కొందము, మూలబిందువును O_1 వద్దనుంచి, పూర్వపు నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగాను నిరూపకాక్షములు O_1X_1, O_1Y_1 తీసికొనుము. P అను బిందువు యొక్క పూర్వపు నిరూపకములు x, y; వర్తమాన నిరూపకములు X, Y అయినచో $x = X + X_1$; $y = Y + Y_1$ అగును.

రెండవ తరగతి వ్యాపక సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినచో

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c =$$
$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2X(aX_1 + hY_1 + g) +$$
$$2Y(hX_1 + bY_1 + f) + X_1(aX_1 + hY_1 + g) +$$
$$Y_1(hX_1 + bY_1 + f) + gX_1 + fY_1 + c = 0.$$

రేఖలు క్రొత్త మూల బిందువుగుండ వెళ్లుటచే ఇందు రెండవతరగతి పదములు మాత్రము ఉండవలయును. X, Y యొక్క గుణకములు, స్థిరపదము వేరువేరుగా శూన్యముగా ఉండవలయును. కనుక

$$\left.\begin{aligned} aX_1 + hY_1 + g &= 0; \\ hX_1 + bY_1 + f &= 0; \\ gX_1 + fY_1 + c &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (10)$$

పై సమీకరణములను సాధించిన X_1, Y_1 లభించును. రెండవ తరగతి వ్యాపకసమీకరణము రెండు ఋజు రేఖలుగా ఉండవలయునని పై సమీకరణములకు తగిన విలువలు (X_1, Y_1) ఉండవలెను.

వాటినుండి X_1, Y_1 లను నిరాసనముచేసిన నిర్ధారక రూపములో లభించు ఫలితము :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots \quad (11)$$

అనగా $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$. రెండవ తరగతి వ్యాపకసమీకరణము రెండు ఋజురేఖలై ఉండుటకు (11) తృప్తిచేయవలెను. మరియు

$$X_1 = \frac{hf - bg}{ab - h^2}; \ Y_1 = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

ఇవియే వాటి ఖండన బిందు నిరూపకములు.

రెండు ఋజురేఖలు సమాంతరములు అయినచో $ab - h^2 = 0$; అవి పరస్పరలంబములు అయినచో $a + b = 0$ కావలెను.

రెండు ఋజురేఖల మధ్యకోణము : $y = m_1x$, $y = m_2x$ ఋజురేఖల మధ్యకోణమును కనుగొనుటకు $m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$ అని అనుకొనుము. వాటి మధ్యకోణము $\phi = \theta_2 - \theta_1$

$$\therefore \tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \cdot \tan\theta_1}$$

$$\text{అనగా } \tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

దీనిని ఉపయోగించి $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$. రేఖాద్వయము మధ్యకోణము ϕ అయితే

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = \pm\frac{2\sqrt{(h^2 - ab)}}{a + b} \quad \cdots \quad (12)$$

అని చూపవచ్చును.

ϕ లఘుకోణమయిన $+$ అనియు, గురుకోణమయిన $-$ అనియు తీసికొనవలెను.

లంబములు : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ అను సమీకరణమునందు మూలబిందువు O నుండి ఋజురేఖకు ఉండు లంబముయొక్క పొడవు p అని చూచితిమి. బిందువు (x_1, y_1) నుండి $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ కి లంబము $= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$ అగును. (చూ. చిత్రము 255). సమీకరణము వ్యాపక రూపము $Ax + By + C = 0$ రూపములో ఉన్నచో $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ తో సరిపోల్చి (x_1, y_1) నుండి లంబము $= \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ అని లభించును.

కోణవిదళనరేఖలు : కోణ విదళనరేఖపై ఒక బిందువును (x_1, y_1) తీసికొని దానినుండి కోణభుజములకు గీసిన లంబములు సమానములు.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 = a(y - m_1x)(y - m_2x).$$

x_1, y_1 విదళనరేఖపై ఉన్నచో

$$\frac{y_1 - m_1x_1}{\sqrt{(1 + m_1^2)}} = \pm\frac{y_1 - m_2x_1}{\sqrt{(1 + m_2^2)}}$$

సంబంధములు $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{a}$, $m_1m_2 = b/a$ లు ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించినచో

$$\frac{x_1^2 - y_1^2}{a - b} = \frac{x_1y_1}{h}$$

లభించును. కాబట్టి రెండు విదళనరేఖల సమీకరణము

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \quad \cdots \quad (13)$$

వృత్తములు : నిర్వచనము : ఒక బిందువు A నుండి స్థిర దూరములో మరియొక బిందువు P చలించినచో P యొక్క బిందు పథమునకు వృత్తము అని పేరు. A కేంద్రము అని,

స్థిర దూరము వ్యాసార్థము అని జ్ఞాపకముంచుకొనవలెను. $P(x, y)$; A మూలబిందువు, r స్థిరదూరము అయినచో లంబాక్ష నిరూపకములతో వృత్తసమీకరణము $x^2+y^2=r^2$; A బిందువు x_1, y_1 అయిన వృత్తసమీకరణము

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2 \quad \cdots \quad (14)$$

ఇందు xy పదము లేదు, x^2, y^2 యొక్క గుణకములు సమానములు. కాబట్టి,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (15)$$

తో 14 ను సరిపోల్చినచో కేంద్రముయొక్క నిరూపకములు $(-g, -f)$. వ్యాసార్థము $=\sqrt{(g^2+f^2-c)}$.

నిమ్నాక్షములు తీసికొనిన, వృత్త సమీకరణము

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots \quad (16)$$

అను రూపమున ఉండును.

బిందువు (x_1, y_1) నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ యొక్క పొడవు: వృత్త సమీకరణము క్రింది వ్యాపక రూపములో తీసికొందము:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

(x_1, y_1) బిందువుగుండ వెళ్లు ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$$

$$\therefore x=x_1+r\cos\theta;\ y=y_1+r\sin\theta \quad \cdots \quad (17)$$

వృత్త సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరించిన

$$r^2+2r\{(x_1+g)\cos\theta\ (y_1+f)\sin\theta\}+$$
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \cdots \quad (18)$$

ఇది r లో రెండవతరగతి సమీకరణము. దీని మూలములు r_1, r_2 అయినచో x_1, y_1 నుండి వృత్తమునకు గల ఛేదకముల (సీకంట్స్) లబ్ధము $=r_1r_2=t^2$ (స్పర్శరేఖ యొక్క వర్గము).

$$\therefore t^2=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \quad \cdots \quad (19)$$

(x_1, y_1) బిందువు వృత్తముపై ఉన్న దీని విలువ శూన్యము. బిందువు వృత్తము బయట ఉన్న ఈ విలువ ధనాత్మకము, లోపల ఉన్న ఋణాత్మకము.

స్పర్శరేఖ: (x_1, y_1) వృత్తముపై ఉన్నచో $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ సమీకరణము (18) లో r_1, r_2 రెండును శూన్యములు.

కాబట్టి $(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta=0$

(17) లో θ ను నిరాసనము చేసిన క్రింది సమీకరణము లభించును:

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \cdots (20)$$

ఇది స్పర్శరేఖ సమీకరణము.

దత్త మధ్యబిందువుకల జ్యా: x_1, y_1 జ్యాయొక్క మధ్యబిందువులు అయినచో సమీకరణము (18) లోని మూలములు r_1, r_2 లు సమానములు, కాని విరుద్ధ సంజ్ఞలు కలవి. కాబట్టి $r_1+r_2=0$

$$\therefore (x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta=0$$

మునపటివలెనే ఇందుండి θ ను నిరాసనము చేసినచో

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=$$
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \quad \cdots \quad (21)$$

అనగా $T=T_1$

ఎడమవైపున ఉన్న T స్పర్శరేఖ సమీకరణ రూపము: దానిని T అని గుర్తింపవచ్చును. కుడివైపు T సమీకరణములో x_1, y_1 ప్రతిక్షేపింపబడినవి. దానిని T_1 అని గుర్తింపవచ్చును.

వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=r^2$ అయినచో, (x_1, y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ $xx_1+yy_1=r^2$; $(x_1\ y_1)$ మధ్య బిందువుగా కల జ్యా $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$.

స్పర్శజ్యా: ఒక బిందువు C (x_1, y_1) నుండి ఒక వృత్తమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు CA, CB గీయవచ్చును. వీటి స్పర్శ బిందువులు A, B అని అనుకొందము. అపుడు AB ఋజురేఖకు C యొక్క స్పర్శజ్యా అని పేరు. వృత్తము యొక్క సమీకరణము $x^2+y^2=r^2$ అయి, C యొక్క నిరూపకములు x_1, y_1 అయినచో స్పర్శజ్యా AB యొక్క సమీకరణము $xx_1+yy_1=r^2$ అగును.

ధ్రువము - ధ్రువరేఖ: నిర్వచనము: ఒక దత్త బిందువు P గుండ వెళ్ళు ఒక ఋజురేఖ వృత్తమును A, B బిందువులలో ఖండించుచున్నది అనుకొందము. A, B బిందువులందు వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖలు C అను ఒక బిందువులో ఖండించును. P ద్వారా వేర్వేరు ఋజురేఖలు PA, PB తీసికొనగా C బిందుపథము ఒక ఋజురేఖయై ఉండును. దీనికి P యొక్క ధ్రువరేఖ యని పేరు. ఈ రేఖకు P ధ్రువ బిందువు అని చెప్పుదుము.

P యొక్క నిరూపకములు (x_1, y_1) అయినచో P యొక్క ధ్రువరేఖ సమీకరణము $xx_1+yy_1=r^2$ అగును. ఇచ్చట వృత్తమును $x^2+y^2=r^2$ అని తీసికొంటిమి. O వృత్తకేంద్రము అయినచో P యొక్క ధ్రువరేఖ OP రేఖకు లంబమై ఉండును. P యొక్క ధ్రువరేఖ CD అనుకొందము. ధ్రువరేఖకు కల మరియొక గుణము ఏమనగా P నుండి ఏ ఋజురేఖనైనను గీసినచో అది వృత్తమును రెండు బిందువుల (R, S) లోను, P యొక్క ధ్రువరేఖ యగు CD ని ఏదో ఒక బిందువు T లోను ఖండించును. అపుడు PT ను బిందువులు R, S స్వరాత్మకముగ (హార్మోనికల్లీ) విభజించును. అనగా

$$\frac{PR}{RT} = -\frac{PS}{ST}$$

సిద్ధాంతము: A యొక్క ధ్రువరేఖ B గుండ వెళ్ళిన, B యొక్క ధ్రువరేఖ A గుండ వెళ్లును. దీనికి **ఉపపత్తి** చాల సులభము.

మూలాక్షము (రాడికల్ ఆక్సిస్): బిందువు (x_1, y_1) నుండి

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c = 0$

అను రెండు వృత్తములకు స్పర్శరేఖలు తీసికొనిన, వాని నిడుపులు సమానము అయినచో

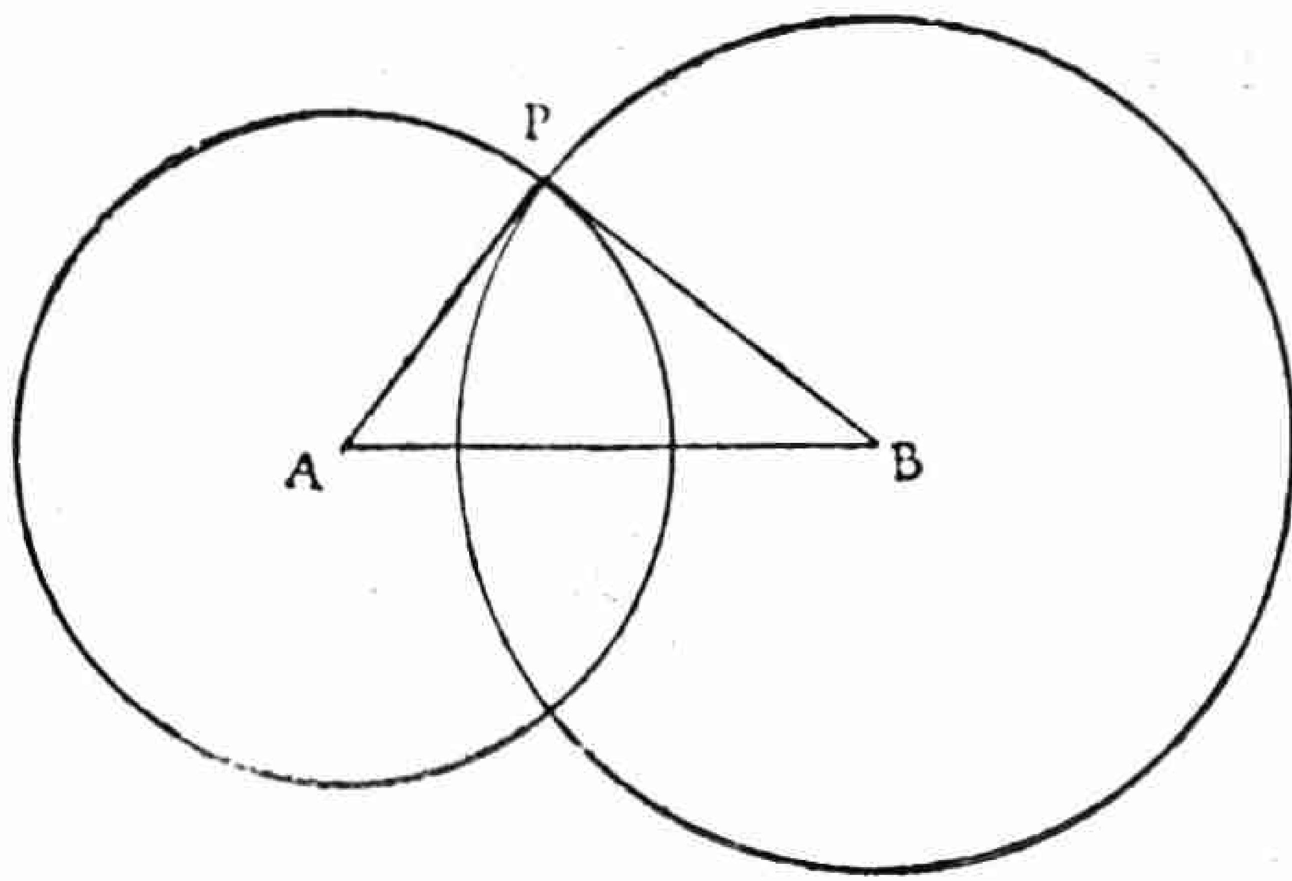
$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c =$

$x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1 y_1 + c_1$ అగును. కనుక

$2x_1(g - g_1) + 2y_1(f - f_1) + c - c_1 = 0$ ... (22)

అనగా పై రెండు వృత్తములకు సమాన స్పర్శరేఖలు కల బిందువుయొక్క పథము ఒక ఋజురేఖ. దీని సమీకరణము (22). ఆ రెండు వృత్తములకు ఇది మూలాక్షము. వృత్తముల కేంద్రరేఖ మూలాక్షమునకు లంబముగా ఉండును.

లంబవృత్తములు: వృత్తములను వాటి కేంద్రములతో గుర్తించుట వాడుక. చిత్రము 256 లోని వృత్తముల



చిత్రము 256 లంబవృత్తములు

కేంద్రములు A, B. వాటిని వృత్తములు (A), (B) అని గుర్తింపవచ్చును. అవి P వద్ద ఖండించుకొననిమ్ము. PA, PB లు వాటి వ్యాసార్థములు. $\angle APB = 90^\circ$ అయినచో, (B) వృత్తమునకు AP స్పర్శరేఖ; (A) వృత్తమునకు BP స్పర్శరేఖ. (A), (B) వృత్తములు పరస్పర లంబములు. వాటికి లంబవృత్తములు అని పేరు. వాటిలో ఒక వృత్తముయొక్క వ్యాసార్థము ఖండించు బిందువువద్ద రెండవ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అగును.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ... (23)

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2fy_1 + c_1 = 0$ ... (24)

అను వృత్తములు లంబ వృత్తములు అగుటకు నిబంధన:

$2gg_1 + 2ff_1 = c + c_1$ ... ... (25)

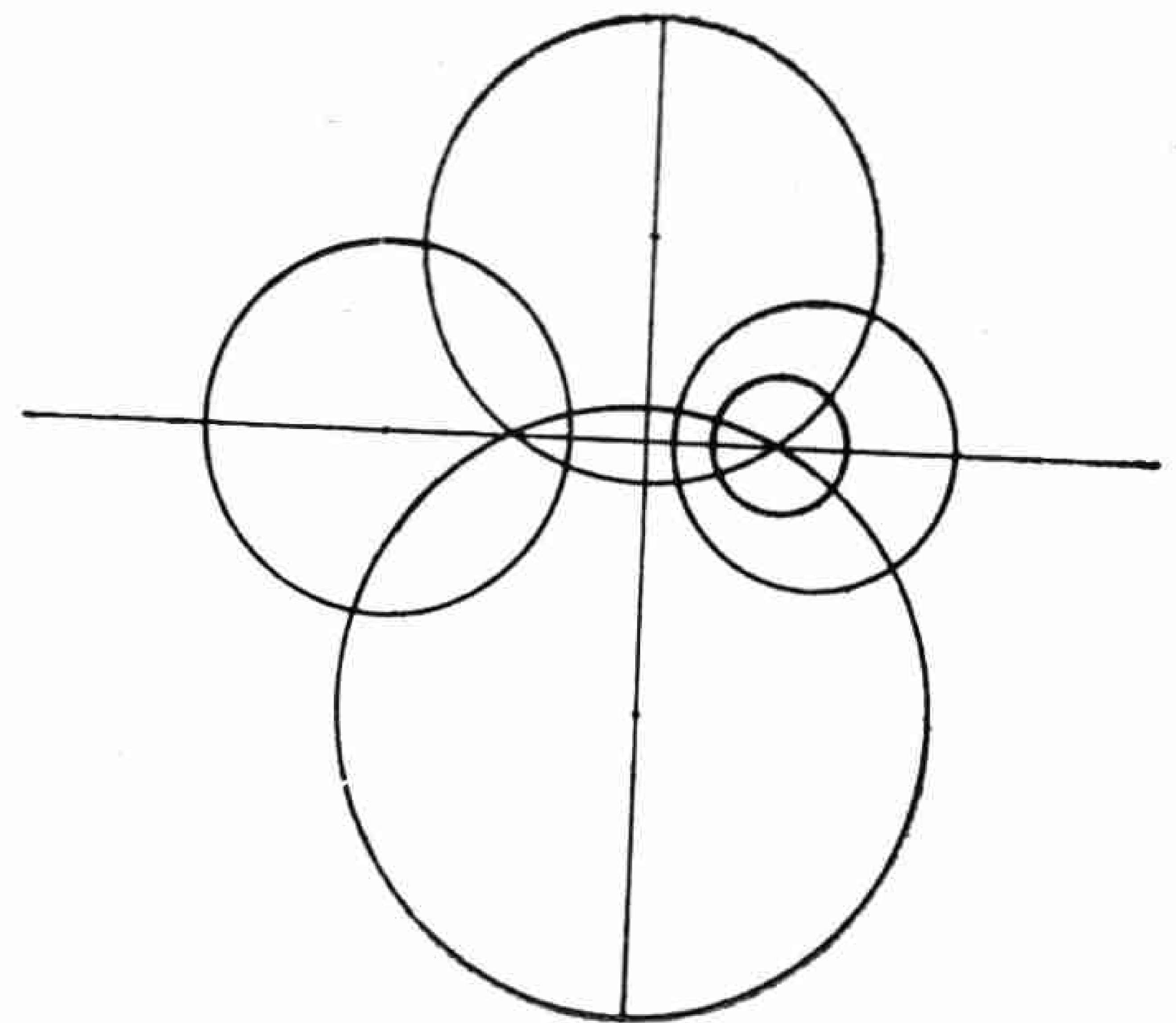
S, S_1 వృత్తముల కేంద్రములు x — అక్షముపై ఉండుటచే f, f_1 శూన్యములు. ఇపుడు వీటి మూలాక్షమునకు సమీకరణము $2(g - g_1)x + c - c_1 = 0$

ఇందు y — అక్షము, అనగా $x = 0$ అయిన, $c - c_1 = 0$, అనగా $c = c_1$.

ఏకాక్ష వృత్తములు: వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ ... ... (26)

ఇందు λ చలరాశి, c స్థిరరాశి. λ యొక్క విలువ మారునపుడు కావలసినన్ని వృత్తములు ఏర్పడును. వాటికి మూలాక్షము y — అక్షము. వాని కేంద్రములు అన్నియు x — అక్షముపై ఉండును. వీనికి ఏకాక్షవృత్తములు అని పేరు. వీటి వ్యాసార్థము $\sqrt{(\lambda^2 - c)}$. ఇందు $\lambda = \pm\sqrt{c}$ అగునపుడు వ్యాసార్థము శూన్యము. అపుడు వృత్తములు బిందురూపములో ఉండును. వాటి నిరూపకములు $(+\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$. వీటికి ఏకాక్షవృత్త బృందము యొక్క అవధి బిందువులు అని పేరు. ఇవి **వాస్తవ** బిందువులగుటకు c ధనాత్మకరాశిగా ఉండవలెను.



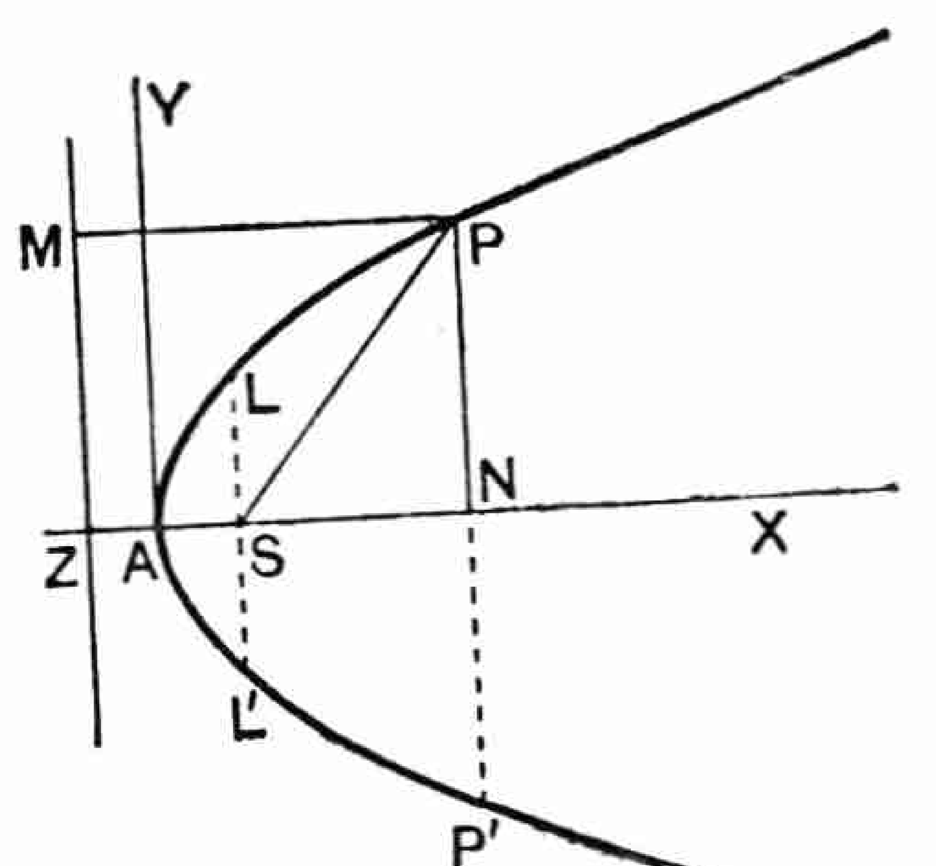
చిత్రము 257 ఏకాక్షవృత్తములు

ఒక ఏకాక్ష వృత్తసమూహములోని అన్ని వృత్తములకు వాటికి ఉమ్మడి అయిన మూలాక్షముపై ఉన్న ఒక బిందువు P నుండి స్పర్శరేఖలు గీచినచో అవి అన్నియు ఒకే నిడుపు (t) కలిగి ఉండును. కనుక P కేంద్రముగను, t వ్యాసార్థముగను కల వృత్తము సమూహములోని అన్ని వృత్తములను లంబముగా ఛేదించును. మూలాక్షముపై వేరువేరు బిందువులు P_1, P_2, లను, వాటికి తగిన స్పర్శరేఖ నిడుపులను తీసికొని, వృత్తములు గీసినచో మరి ఒక ఏకాక్ష వృత్తసమూహము ఏర్పడును. ఈ రెండు సమూ

హాములలో ఒక సమూహాములోని ఏ వృత్తమైనను రెండవ సమూహాములోని ఏ వృత్తమునైనను లంబముగా ఛేదించును. మొదటి ఏకాక్ష వృత్తసమూహాము సమీకరణము $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ అయితే, రెండవ ఏకాక్ష వృత్తసమూహాము సమీకరణము:

$x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$ అగును. ఇట్టి రెండు వృత్తసమూహాములను చిత్రము 257 (పు. 349) లో చూడవచ్చును.

పరాస: నిర్వచనము: దత్తబిందువు S నుండి ఒక బిందువు P యొక్క దూరము ఒక దత్తరేఖ MZ కు కల



చిత్రము 258 పరాస

దూరమునకు సమానమయిన, P యొక్క బిందు పథమునకు పరాస అని పేరు.

S కు నాభి (ఫోకస్) అనియు, MZ కు నియతరేఖ (డైరక్ట్రిక్స్) అనియు పేర్లు. MZ కు SZ లంబమయినచో, SZ ను పరాసయొక్క అక్షము అని చెప్పుదురు. నిర్వచనము ప్రకారము SZ యొక్క మధ్య బిందువు A పరాసపై ఉండును.

పరాససమీకరణము: SZ ను x — అక్షముగాను AY ని y — అక్షముగాను తీసికొనుము. A బిందువును శీర్షము అందురు. P యొక్క నిరూపకములు (x, y) కానిమ్ము. $ZA = AS = a$; x — అక్షమునకు PN లంబము. అది మరల పరాసను P′ లో ఖండించును. నిర్వచనము ప్రకారము $PS^2 = PM^2$

$$\text{అనగా } SN^2 + PN^2 = PM^2$$

$$(AN - AS)^2 + PN^2 = (NA + AZ)^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

$\therefore y^2 = 4ax$ పరాస సమీకరణమగును.

అక్షము AZ పరాసయొక్క సౌష్ఠవరేఖ. అక్షమునకు లంబముగా ఉండు L′SL ను ఉత్థానము (లేటస్ రెక్టమ్) అని అందురు. SL ఉత్థానార్ధము.

స్పర్శరేఖ: $y^2 = 4ax$ కు x_1, y_1 వద్ద స్పర్శరేఖ: $yy_1 = 2a(x + x_1)$

ధ్రువరేఖ: $y^2 - 4ax$ కు x_1, y_1 యొక్క ధ్రువరేఖ $yy_1 = 2(x + x_1)$. నాభి $(a, 0)$ యొక్క ధ్రువరేఖ $x = -a$. ఇది పరాసయొక్క నియతరేఖ. నాభియొక్క ధ్రువరేఖ పరాసయొక్క నియతరేఖ అగును.

పరాసకు $y = mx + c$ స్పర్శరేఖ అయినచో

$(mx + c)^2 = 4ax$ సమీకరణముయొక్క x విలువలు రెండును సమానములు. కాబట్టి $c = a/m$

m విలువ ఎట్లున్నను $y^2 = 4ax$ పరాసకు $y = mx + \dfrac{a}{m}$ స్పర్శరేఖ అగును.

$x = a/m^2$, $y = 2a/m$ స్పర్శబిందు నిరూపకములు ఇచ్చు సమీకరణము. వీటినే $x = at^2$, $y = 2at$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $t = 1/m$ అని తీసికొంటిమి.

పరాస $y^2 = 4ax$ ను ప్రాచక (పరామీటర్) రూపములో $x = at^2$, $y = 2at$ అని వ్రాయుదురు.

't' వద్ద అభిలంబరేఖ: $y^2 = 4ax$ పరాసకు 't' వద్ద స్పర్శరేఖయొక్క సమీకరణము $y = x/t + at$. కనుక t యందు అభిలంబరేఖయొక్క సమీకరణము:

$$y + xt = 2at + at^3$$

ఇది (x_1, y_1) గుండ వెళ్లిన, $y_1 + x_1 t = 2at + at^3$ అగును.

ఇది 't' లో 3వ తరగతి సమీకరణము. కాబట్టి పరాస $(y^2 = 4ax)$ కు ఒక బిందువు x_1, y_1 గుండా 3 అభిలంబరేఖలు గీయవచ్చును.

వ్యాసములు: పరాసపై t_1, t_2 బిందువులను చేర్చు జ్యాయొక్క సమీకరణము $y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$. ఇది ఒక స్థిరదిశలో ఉండినచో $t_1 + t_2$ ఒక స్థిరరాశి. t_1, t_2ల చేర్చు జ్యాయొక్క మధ్య బిందువుయొక్క నిరూపకములు:

$$x = \frac{a}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right);\ y = a\left(t_1 + t_2\right).$$

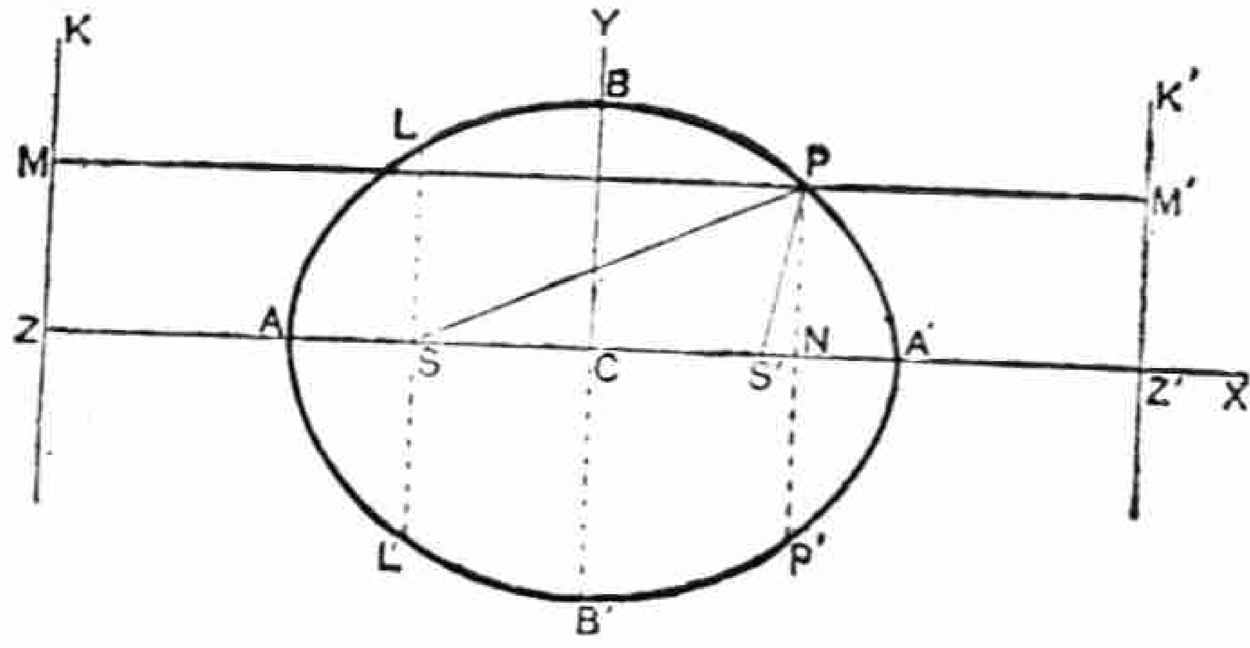
ఈ జ్యా ఒక స్థిరదిశలో ఉన్నచో, దాని మధ్య బిందువుయొక్క పథము $y = a(t_1 + t_2) =$ ఒక స్థిరరాశి.

ఇది పరాసయొక్క అక్షమునకు సమాంతరముగ ఉండు ఋజురేఖ. ఈ రేఖకు పరాసవ్యాసము అని పేరు.

దీర్ఘవృత్తము: సమీకరణము: S నాభిగాను, MZ నియతరేఖగాను తీసికొనుము. $PS/PM = e < 1$ అయినచో P యొక్క బిందుపథము ఒక దీర్ఘవృత్తము. $e =$ వికేంద్రత.

నియతరేఖ MZ కు SZ లంబముగా గీయుము. ZS, ZM నిరూపకాక్షములుగ తీసికొనుము. $SZ = c$ అను

కొనుము. P యొక్క నిరూపకములు x, y అయిన $PS = (x-c)^2 + y^2$; $PM^2 = x^2$; $PS^2/PM^2 = e^2$.
$\therefore (x-c)^2 + y^2 = e^2x^2$



చిత్రము 259 దీర్ఘ వృత్తము

మూలబిందువును $\left(\frac{c}{1-e^2}, 0\right)$ వద్దకు మార్చుము.

$\frac{e^2 c^2}{(1-e^2)^2} = a^2$ అని తీసికొనిన, దీర్ఘవృత్తము సమీకరణము

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

లేదా $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అగును. ... (27)

క్రొత్త మూలబిందువును C అనుకొని క్రొత్త నిరూపకాక్షములు ACA', BCB' అని తీసికొనుము, A, A' బిందువులకు శీర్షములు అని పేరు.

దీర్ఘ వృత్తమునకు సౌష్ఠవాక్షములు ACA', BCB'. ఇవి దీర్ఘవృత్తమును A, A' ; B, B' లలో ఖండించిన

$AC = CA' = a$; $BC = CB' = b$.

$2a$ ని దీర్ఘాక్షము అనియు, $2b$ ని హ్రస్వాక్షము అనియు చెప్పుదురు.

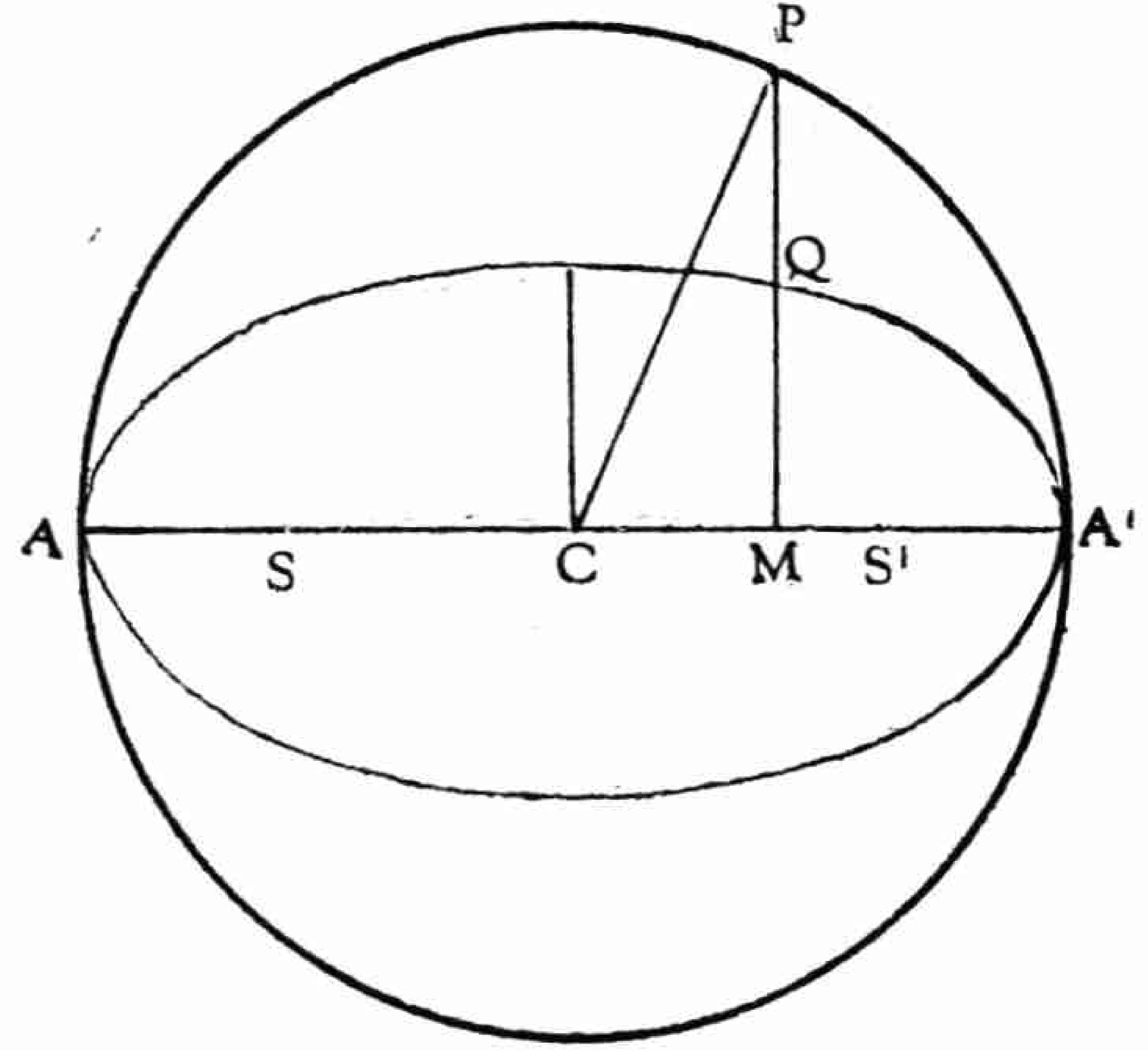
$\therefore CZ = a/e$; $CS = ae$ అని సులభముగ చూపవచ్చును.

దీర్ఘవృత్తమునకు నాభులు రెండు (S, S'); నియత రేఖలు రెండు.

స్పర్శరేఖలు : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తమునకు $y = mx + c$ స్పర్శరేఖ అయినచో, మామూలు మార్గమును అనుసరించి, $c = \pm\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ అని చూపించవచ్చును.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తమునకు స్పర్శరేఖ $y - mx \pm \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$. దీనికి లంబముగా ఉండు స్పర్శరేఖ $my + x = \sqrt{(a^2 + b^2m^2)}$. ఇరువైపులను వర్గీకరించి, కూడి, భాజకము $1 + m^2$ తీసివేసిన వచ్చు ఫలితము $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. దీనిని ఒక దీర్ఘవృత్తము యొక్క నియత వృత్తము అందురు. ఇది లంబ స్పర్శరేఖల ఛేదకబిందు పథము.

సహకార వృత్తము - ప్రాచకములు : AQA' దీర్ఘ వృత్తము. దాని సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. కేంద్రము C. అదియే మూలబిందువు. C కేంద్రముగా, వ్యాసార్థము



చిత్రము 260 సహకారవృత్తము

a గ కల వృత్తము సహకార వృత్తము. దాని సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$. దాని పై నుండు P బిందువునుండి కోటి PM దీర్ఘవృత్తమును Q లో ఖండింపనిమ్ము.

$\angle PCM = \theta$ అయినచో $CM = a\cos\theta$, $MQ = b\sin\theta$. ఇవి దీర్ఘవృత్తము పై నుండు Q బిందువు యొక్క నిరూపకములు. 'θ' కు P యొక్క వికేంద్ర కోణము (ఎక్సెంట్రిక్ ఆంగెల్) అని పేరు.

అభిలంబరేఖ : దీర్ఘవృత్తమునకు θ బిందువునందు స్పర్శ రేఖ యొక్క సమీకరణము :

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

అదే బిందువునందు అభిలంబరేఖ యొక్క సమీకరణము :

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

ఈ సమీకరణము నుండి తలములోని ఏ బిందువునుండి అయిన దీర్ఘవృత్తమునకు 4 అభిలంబ రేఖలు గీయవచ్చునని చూపవచ్చును.

సంయుగ్మవ్యాసములు (కాన్జుగేట్ డయామీటర్స్): $y = m_1 x$ వ్యాసము యొక్క చివర బిందు స్పర్శరేఖలు

$y = m_2 x$ కు సమానాంతరములైన అవి రెండును సంయుగ్మ వ్యాసములు అగును.

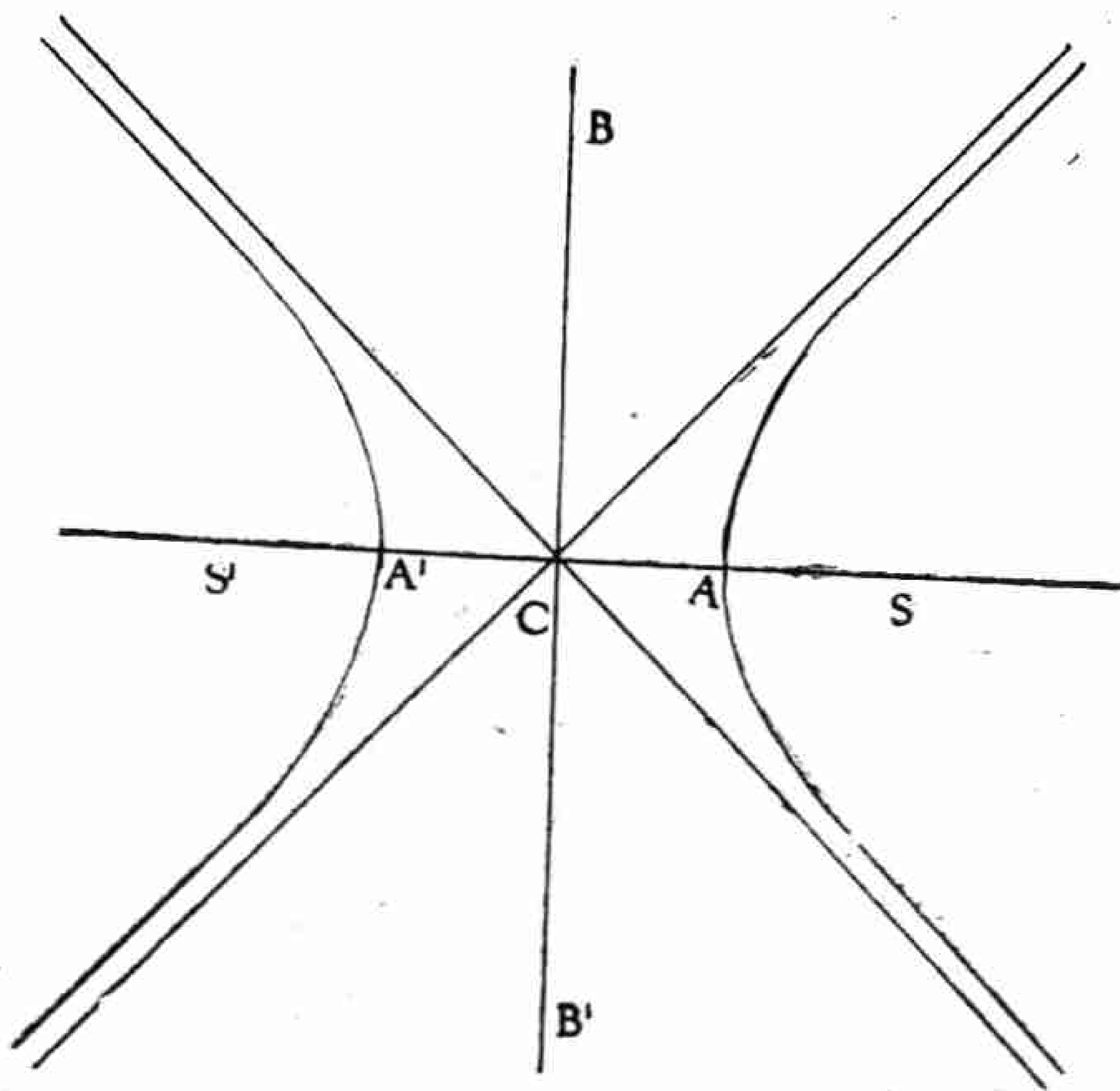
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తమును $y = m_1 x$ వ్యాసము $(x_1, m_1 x_1)$ బిందువులో ఖండింపనిమ్ము. ఈ బిందువునందు స్పర్శరేఖ యొక్క సమీకరణము :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{ym_1 x_1}{b^2} = 1$$

దీని నిమ్నత $= -b^2/a^2 m_1$. ఇది m_2 కు సమానము.

$\therefore m_2 = -b^2/a^2 m_1$. అనగా $m_1 m_2 = -b^2/a^2$. మరియు $y = m_1 x$ కు సమానాంతరముగా ఉండు జ్యా రేఖల మధ్య బిందువులు అన్నియు $y = m_2 x$ పై నుండును.

అతిపరాస: సమీకరణము : పు. 351 లో ఇచ్చిన దీర్ఘ వృత్త నిర్వచనమును అనుసరించి, $e > 1$ అని తీసికొనిన అతిపరాస ఏర్పడును. దాని సమీకరణము: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



చిత్రము 261 అతి పరాస

అని చూపవచ్చును. ఇచ్చట $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. ఇది ప్రధానాక్షములను నిరూపకాక్షములుగా తీసికొనిన లభించు సమీకరణము.

$AA' = 2a$ తిర్యగక్షము. అతిపరాస y అక్షము అగు BB' ను వాస్తవిక బిందువులలో ఖండించదు.

బిందువు x_1, y_1 నుండి స్పర్శ రేఖా ద్వయము యొక్క సమీకరణము: దీర్ఘవృత్త సమీకరణము అగు $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ నుండి b^2 ను $-b^2$ గా మార్చుటవలన (అనగా $+b$ ను ib గా మార్చుటవలన) అతిపరాస సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ లభించుచున్నది. కనుక దీర్ఘ వృత్తమునకు సంబంధించిన రేఖల సమీకరణములనుండి ఇదే మార్పువలన అతిపరాసకు సంబంధించిన రేఖల సమీకరణమును పొందవచ్చునని ఊహించెదము. ఈ ఊహ సరియైనదని నిరూపింపవచ్చును. అనగా

$T: \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ స్పర్శరేఖా రూపము

$S: x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ అతిపరాస

$S_1: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

అసంపాతములు : కేంద్రము C నుండి శంకుచ్ఛేదమునకు ఏర్పడు స్పర్శరేఖలు అసంపాతములు అనబడును. అవి శంకుచ్ఛేదమును అనంతములో స్పర్శించును. కేంద్రము C మూలబిందువు అయినందున (x_1, y_1) లకు $(0, 0)$ లు ప్రతిక్షేపించిన లభించురూపము

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \text{ లేదా, } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

ఇదియే అసంపాతముల సమీకరణము. దీర్ఘవృత్తమునకు వాస్తవిక అసంపాతములు లేవు.

లంబకోణీయ అతిపరాస (రెక్టాంగులర్ హైపర్ బోలా): $b = a$ అయిన లంబకోణీయ అతిపరాస లభించును. దాని సమీకరణము $x^2 - y^2 = a^2$. కనుక లంబకోణీయ అతిపరాసయొక్క అసంపాతముల సమీకరణము $x^2 - y^2 = 0$. ఇచ్చట అసంపాతములు పరస్పర లంబములు. వీటిని నిరూపకాక్షములుగాతీసికొనిన లభించు అతిపరాస సమీకరణము $xy = c^2$; ప్రాచకములరూపములో $x = \frac{c}{t}$; $y = ct$.

ఇంతవరకు మనము 2 వ తరగతి సమీకరణములను పరిశీలించితిమి. ఇటులనే 3 వ తరగతి, లేదా, 4 వ తరగతి, ఇంకను n వ తరగతి సమీకరణములు కల వక్రములను నిరూపక గణితమార్గములో పరిశీలింప వచ్చును. 3 వ తరగతి వక్రము యొక్క వ్యాపకసమీకరణము

$$lx^3 + mx^2y + nx^2y + py^3 + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ఈ సమీకరణముకల వక్రములు ఒక ఋజురేఖను 3 బిందువులలో ఖండించును. ఒక బిందువునుండి ఒక వక్రమునకు 6 స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చును. అయితే ఈ బిందువు P ఆవక్రముమీద ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువునందున్న స్పర్శరేఖకాక, 4 స్పర్శరేఖలు ఆ బిందువునుండి గీయవచ్చును. పైసమీకరణము వర్ణించు వక్రములలో కొన్ని ఒక ఋజురేఖగ శంకుఛేదికను, లేదా 3 ఋజురేఖలుగనో భగ్నము కావచ్చును.

కొన్ని సమయములలో అనగా గుణకములకు తగిన విలువలు ఇచ్చినయెడల ఈ వక్రము తన్నుతానే ఒక బిందువునందు ఛేదించును. అట్టి స్థలములో ఆ వక్రమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు ఉండును. ఇవిరెండు ఏకీభవించిన ఆ వక్రమునకు ఒక సూచీ (కస్ప్) కలుగును. ఇటులైతే, ఆ వక్రమునకు ఏదో ఒక బహిర్బిందువుగుండా వెళ్ళు స్పర్శరేఖల సంఖ్య 6 నుండి 4, లేదా 3 విలువను తీసికొనును. ఏ తరగతి వక్రము అయినను దాని గుణములను దాని సమీకరణమును ఉపయోగించి పరీలించ వచ్చును.

ఎన్. శ్రీ. రా.

నిర్ధారకములు (డిటర్మినెంట్స్): సమీకరణవాదము, నిరూపకజ్యామితి, కలనశాస్త్రములలో వచ్చు సమస్యలను సాధించుటకు అత్యుపయోగమైనవి నిర్ధారకములు. వీటిని జపాన్ దేశీయుడు సేకీకోవా 1683 లోను, లైబ్నిట్జ్ 1693 లోను విడివిడిగా కనుగొనిరి. ఆ తరువాత వాండర్ మాండే, లాప్‌లాస్, లాగ్రాంజ్, కోషీ, జాకోబీలు నిర్ధారకములలో నూతన విధానములను ప్రవేశపెట్టిరి. అయితే 'డిటర్మినెంట్స్' అను పదమును 1801లో గౌస్ ప్రవేశపెట్టెను.

నిర్వచనము : n వరుసలలోను, n స్తంభములలోను చతురస్రాకారములో వ్రాయబడిన n^2 రాశుల క్రింద వివరింపబడిన ఫలమును n వ తరగతి-నిర్ధారకమందురు. ఈ నిర్ధారక వ్యాకోచనములో దీని రాశులందు సమఘాతముతో కూడిన $n!$ పదములుండును.

ఉదా : 1 : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ అనునది రెండవ తరగతి నిర్ధారకము. ఇందు a_1, b_1 ఒక వరుస; a_1, a_2 ఒక స్తంభము. దీని విలువ $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

ఉదా : 2 : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అనునది మూడవతరగతి నిర్ధారకము. దీని విలువ :

$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$.

నిర్ధారకములో పైభాగమున ఎడమ మూలనుండి, అడుగు భాగమున కుడి మూలను చేర్చు వికర్ణమును ప్రధాన వికర్ణము అందురు. పైన పేర్కొనిన మూడవ తరగతి నిర్ధారకములో $a_1 b_2 c_3$ ప్రధానవికర్ణము. దాని సంజ్ఞ ధనాత్మకము.

నిర్ధారక వ్యాకోచనము : ప్రధాన వికర్ణము $a_r b_s c_t$ అయిన తక్కిన పదములు a, b, c ల పాద సంకేతముల వరుసను సాధ్యమైనన్ని విధములుగ మార్చుచు వ్రాసిన లభ్యమగును. అనగా వాటి ప్రస్తారముల వలన లభ్యమగును. కాబట్టి మూడవతరగతి నిర్ధారకములో $3! = 6$ పదములుండును. ఇట్లే n వ తరగతి నిర్ధారకములో $n!$ పదములుండును.

అయితే నిర్ధారక వ్యాకోచనములోని ఒక పదము ధనాత్మకమా? లేదా ఋణాత్మకమా? అని నిర్ణయించుటకు ప్రధానవికర్ణములోని పాదసంకేతములను ఎన్నిమార్పులు చేయగా మనకు ఆ పదములో పాదసంకేతములు లభించినవో మొదట గుర్తించవలెను. ఆ మార్పుల సంఖ్య బేసి అయిన ఆ పదము యొక్క సంజ్ఞ ఋణాత్మకము; మార్పుల సంఖ్య సరి అయిన ఆ పదము యొక్క సంజ్ఞ ధనాత్మకము అగును. ఉదాహరణకు పైన పేర్కొనిన మూడవతరగతి నిర్ధారక ప్రధాన వికర్ణము $a_1 b_2 c_3$. మనము $a_3 b_2 c_1$ అను పదసంజ్ఞ ఏమో కనుగొందము. ప్రధాన వికర్ణములోని పాదసంకేతములు 1, 2, 3. $a_3 b_2 c_1$ పదములోని పాదసంకేతములు 3, 2, 1.

1 2 3 నుండి మొదటి మార్పు	1	3	2
రెండవ మార్పు	3	1	2
మూడవ మార్పు	3	2	1

ఇచ్చట మార్పుల సంఖ్య 3 అనగా బేసి సంఖ్య. కనుక $a_3 b_2 c_1$ పదసంజ్ఞ ఋణాత్మకము. ఇచ్చట మార్చుకొనుట అనగా పరస్పరము మార్చుకొనుట.

మైనర్ - కోఫాక్టర్ : ఎక్కువ తరగతి నిర్ధారకములను మైనర్‌లు ఉపయోగించి వ్యాకోచనముచేయుట సులభతరమైన విధానము. నిర్ధారకములో ఏదో ఒక మూలరాశి (ఎలిమెంట్) యొక్క మైనర్, ఆ నిర్ధారకములో ఆ మూలరాశి ఉన్న వరుసను, స్తంభమును వదలివేయగా మిగిలిన నిర్ధారకమగును.

ఆ విధముగ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అను నిర్ధారకములో

b_3 యొక్క మైనర్ $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ అను నిర్ధారకమగును.

ఈ మైనర్‌నకు తగిన సంజ్ఞకూడా చేర్చిన అది మూలరాశి b_3 యొక్క 'కోఫాక్టర్' అగును. అయితే ఒక మూలరాశి మైనర్ సంజ్ఞను క్రింది నిబంధన ప్రకారము నిర్ణయించవలెను.

'మూలరాశి ఉన్న వరుస సంఖ్యను, స్తంభసంఖ్యను సంకలనము చేసిన సరిసంఖ్య లభించిన ఆ రాశి మైనర్ ధనసంజ్ఞను, బేసిసంఖ్య లభించిన ఋణాత్మక సంజ్ఞను పొందును'. పై ఉదాహరణములోని b_3 మూడవ వరుసలోను, రెండవ స్తంభములోను ఉన్నది: $3+2=5$ బేసిసంఖ్య. అందుచేత b_3 యొక్క కోఫాక్టర్

$$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 + a_2 b_1$$ అగును.

నిర్ధారకమును వ్యాకోచనము చేయుటకు ఆ నిర్ధారకములో ఏదో ఒక వరుసను, లేదా, స్తంబమును ఎన్నుకొనవలెను. ఆ నిర్ధారపు విలువ, ఆ వరుస లేదా స్తంభమునందలి ప్రతి రాశి, దాని కోఫాక్టర్ల గుణకార లబ్ధముల సంలకనము అగును. ఉదా: క్రింద నీయబడిన మూడవ తరగతి నిర్ధారకము దాని రెండవవరుసపై వ్యాకోచనము చేయబడినది:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-1(2-0)+4(4-0)-1(6-6) =$$
$$-2+16=14.$$

ఏ వరుసనైనను, లేదా ఏ స్తంభమునైనను తీసికొని పై విధాన ముపయోగించినచో దొరకు విలువ ఎల్లప్పుడును ఒకే విలువ అగును. పైన పేర్కొనిన విధానమును ఎన్నోవ తరగతి నిర్ధారక వ్యాకోచనమునకైనను అవలంబింపవచ్చును.

నిర్ధారకముల విలువలను సులభముగ నిర్ణయించుటకు క్రింది సిద్ధాంతములు దోహదము చేయును

నిర్ధారకముల ధర్మములు: (i) నిర్ధారకమునందలి వరుసలను స్తంభములుగ (లేదా స్తంభములను వరుసలుగ) అదే క్రమములో వ్రాసినచో, ఆ నిర్ధారక విలువలో మార్పు ఉండదు.

ఉదా: $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii) నిర్ధారకమునందలి రెండు వరుసలు (లేదా స్తంభములు) ఒకదాని స్థానమును మరియొక దానికిమార్చినచో, నిర్ధారక సంజ్ఞ మారును, అనగా విలువ (-1) చేత గుణించబడును.

ఉదా: $$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(iii) నిర్ధారకమునందలి రెండు వరుసలు (లేదా స్తంభములు) సమానమైనను లేదా ఒకే అనుపాతములో ఉన్నను ఆ నిర్ధారక విలువ శూన్యము అగును.

ఉదా: $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(iv) నిర్ధారకముయొక్క ఒక వరుస (లేదా స్తంభము) లోని రాశులన్ని ఒకే సంఖ్య k చేత గుణించబడిన ఆ నిర్ధారక విలువ k చేత గుణించబడును.

ఉదా: $$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(v) నిర్ధారకముయొక్క ఒక వరుస (లేదా స్తంభము) లోని ప్రతిరాశిని ఒకే సంఖ్యచే గుణించి, మరొక వరుస (లేదా స్తంభము) లోని అనురూపరాశితో సంకలనము చేసినను లేదా వ్యవకలనము చేసినను నిర్ధారక విలువ మారదు.

ఉదా: $$\begin{vmatrix} (a_1+mb_1) & b_1 & c_1 \\ (a_2+mb_2) & b_2 & c_2 \\ (a_3+mb_3) & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

నిర్ధారకముల ఉపయోగములు: బహు రాశులలో మొదటి తరగతి సమీకరణములను నిర్ధారకముల ఉపయోగించి సాధింపవచ్చును.

ఉదా: $$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

అను మూడు రాశులతో కూడిన మూడు మొదటి తరగతి సమీకరణముల సాధనములు:

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div D$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \div D$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div D$$

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

నిరూపకజ్యామితిలో నిర్ధారకములు అనేక సమస్యలందు ఉపయోగించబడుచున్నవి.

ఉదా: 1 (x_1, y_1); (x_2, y_2) అను రెండు బిందువుల గుండ పోవు ఋజురేఖ సమీకరణము:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ఉదా: 2 (x_1, y_1); (x_2, y_2), (x_3, y_3) అనునవి ఒక త్రిభుజ శీర్షముల నిరూపకములయిన, ఆ త్రిభుజ వైశాల్యము:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ఫలనిర్ధారకములు: ఒక మాత్రిక (మాట్రిక్స్) లోని రాశులు ఫలములుగ ఉన్నచో ఆ మాత్రిక నిర్ధారకమును ఫలనిర్ధారకము అందురు.

ఉదాహరణకు క్రింది నిరూపక మార్పును పరిశీలింపుము:

$$x = f(u, v); \quad y = g(u, v)$$

నిర్ధారకము $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ ను జేకోబీ నిర్ధారకము అందురు. ఒక బిందువు (x, y) చుట్టు ప్రదేశములో $J \neq 0$ అయినచో, ఆ ప్రదేశములో u, v ల కొరకు పై సమీకరణములను ఏకరూపముగ సాధింపవచ్చును. బహురాశి చయనమార్పుల యందును పై జేకోబియన్ నిర్ధారకము క్రింది ఫార్ములాలో తటస్థించును.

$$\int\int F(x, y)\, dx\, dy =$$

$$\int\int F\left[f(u, v);\, g(u, v)\right] |J|\, du \cdot dv$$

పా. ల. నా.

నిష్పత్తి - అనుపాతము (రేషియో-ప్రొపోర్షన్): ఒకే జాతికి చెందిన రెండు రాశులు ఒకదానికి మరియొకటి ఎన్ని రెట్లు ఉన్నదో సూచించు సంఖ్యను ఆ రాశుల నిష్పత్తి అందురు. a, b అను రెండు రాశుల నిష్పత్తి $a \div b$ లేదా $a : b$ లేదా a/b అను భాగ ఫలమగును. ఇందు a ని నిష్పత్తి యొక్క పూర్వపదము అని b ని ఉత్తరపదము అని అందురు.

ఒకే జాతికి చెందిన రాశులకే నిష్పత్తి కట్టవలెను. ఆ రాశులు తూకములు కావచ్చును, వయస్సులు కావచ్చు, వైశాల్యములు కావచ్చు, కోణములు కావచ్చు, లేదా మరియే రెండు సజాతి రాశులు కావచ్చును.

ఉదా: తండ్రి వయస్సు 25 ఏండ్లు, కుమారుని వయస్సు 8 మాసములు అయిన వారి వయస్సుల నిష్పత్తిని కనుగొనుటకు వారి ఇరువురి వయస్సులను ఒకే యూనిట్‌ల లోనికి మార్చుకొని, ఆ నిష్పత్తి $\frac{12 \times 25}{8} = \frac{75}{2}$ అని అందుము. నిష్పత్తి ఒక సంఖ్య. $a/b = \frac{3}{4}$ అయిన $a = 3$, $b = 4$ అని భావించరాదు. ఇందు $a = 9$, $b = 12$ గ ఉండవచ్చును; లేదా వాటిలో ఉండు ఉభయ విభాజకములను కొట్టివేసిన $\frac{3}{4}$ విలువను పొందు ఏ జత విలువలైనా a, b లకు ఉండవచ్చును.

నిష్పత్తి పదములు పూర్ణాంకములు అయిన ఆ నిష్పత్తిని గణ్య నిష్పత్తి అని అందురు. అట్లు కానిచో ఆ నిష్పత్తిని అగణ్య నిష్పత్తి అందురు.

అనుపాతము: రెండు నిష్పత్తుల సమానతను అనుపాతము (ప్రొపోర్షన్) అందురు. ఆ విధముగ $a/b = c/d$ అనునది ఒక అనుపాతము. ఈ అనుపాతమునే $a : b :: c : d$

అని గాని, $a : b = c : d$ అని గాని వ్రాయుట కలదు. ఈ అనుపాతములో

(1) a, b, c, d లు అనుపాత భాగములు లేదా అనుపాత పదములు.

(2) b, c లు మధ్యమములు.

(3) a, b లు అంత్యములు.

(4) d ను a, b, c ల అనుపాత చతుర్థము అందురు.

(5) a, c లు, అట్లే b, d లు అనురూప పదములు.

(6) $b = c$ అయిన $a/c = c/d$ అగును. అప్పుడు ఇందలి d ను a, c ల తృతీయ అనుపాతము అని, c ను a, d ల మధ్యమ అనుపాతము అని అందురు.

అనుపాతముల ధర్మములు : $a/b = c/d$ అయిన ఎడల

(1) $ad = bc$ (మధ్యమముల గుణకార లబ్ధము = అంత్యముల గుణకార లబ్ధము)

(2) $a/c = b/d$;

(3) $b/a = d/c$;

(4) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ఇది క్రింది విధముగ లభించును.

ఇచ్చిన అనుపాతములోని రెండు ప్రక్కలకు 1 సంకలనము చేసిన $a/b + 1 = c/d + 1$ అనగా $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

(5) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ఇది దత్త అనుపాతముల ఇరుప్రక్కలనుండి 1 ని తీసివేసిన లభించును. $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ లేదా $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

(6) $a/b = c/d$ మరియు $p/q = r/s$ అయిన $ap/bq = cr/ds$.

(7) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [ఇది (4) ని (5) చే భాగించిన లభించును] ;

(8) $a/b = c/d = e/f$ అయిన ఎడల ఈ సమాన నిష్పత్తులు $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ అను నిష్పత్తికి సమానము.

(9) $a/b = c/d = e/f = k$ అయి l, m, n ఏ సంఖ్యలయినప్పటికి $\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf} = k$ అగును.

పా. ల. నా.

నీలకంఠ సోమయాజి : భారత గణిత, ఖగోళ విద్వాంసులలో ఉత్కృష్టుడు నీలకంఠ సోమయాజి. ఈయన రచించిన గ్రథములలో మనకు తెలిసినవి :

(1) ఆర్యభటీయ భాష్యము - ఇది ఆర్యభటీయమునకు వ్యాఖ్యానము - దీనికి రచయితయే మహాభాష్యమని ఉచిత నామమిడినాడు ; (2) గోళసారము ; (3) సిద్ధాంత దర్పణము - దీని వ్యాఖ్యానము ; (4) చంద్రచ్ఛాయా గణితము (వెన్నెలలో వస్తువుల నీడలను కొలిచి కాలమును గణించుట) - దీని వ్యాఖ్యానము ; (5) తంత్ర సంగ్రహము ; (6) సుందర రాజప్రశ్న ; (7) గ్రహణ గ్రంథము.

వీటిలో ఆర్యభటీయ భాష్యము అత్యుత్తమ గణిత గ్రంథము. కఠినమయిన ఆర్యభటీయ మూలమును అవగాహనము చేసికొనుటకు మనకు గల ఒకేఒక నిస్సంశయ సహాయమిది. ఇందనేక నూతన విషయములు కూడ చేర్చబడినవి. ఆర్యభటీయమందు తడవబడని వర్గశ్రేఢులిందు పరామర్శింపబడినవి. పదముల నిష్పత్తి $\frac{1}{2}$ కాగల వర్గశ్రేఢి యొక్క సంకలనఫలము, పదముల నిష్పత్తి $\frac{1}{4}$ అగు సందర్భములో చిత్రీయ నిరూపణయును ఇందు పొందుపరుపబడినవి. ఈ రెండవది వ్యాపక వర్గ శ్రేఢిగ సులభముగ విస్తరింపబడవచ్చును. వృత్తచాపమునకు దాని అర్ధ జ్యా మానములో $\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)h^2 + c^2}$ అని ఒక సమాసము ఈయబడినది. ఈ సూత్రమును సాధించు విధానము ఇది : చాపమును మరల మరల ద్విభాగించుచు అట్లు లభ్యములగు జ్యాలను తొలి జ్యా యొక్క దైర్ఘ్యము, ఎత్తు - ఈ రెండింటి మానములలో వ్యక్తపరచి గణించవలెను. ఈ పనిని కొనకు చాపముతో తాదాత్మ్యమును పొందుటకు వీలగునంత అల్ప పరిమాణములుగ జ్యాలుండునట్లు సాగించవలెను. తరువాత ఈ గణిత ఫలములనుండి వెనుకకు లెక్కపెట్టుచు అవిభక్తమయిన చాపమును, దాని అర్ధ జ్యాలయు, అర్ధ చాపముల శ్రేణియొక్క ఎత్తులయు మానములలో వ్యక్తపరచుచు గణించవచ్చును. బుద్ధి కుశలతతో ఎత్తుల ఉన్నత తర ఘాతములను ప్రతిష్ఠాపించియో, లోపింపజేసియో తరువాత ఇంకొక ఆసన్న సమాసమును కూడ పొందవచ్చును.

జ్యామితీయ నిరూపణయందు నీలకంఠునికి ఆదర మెక్కువ. అంకశ్రేఢులను చిత్రముల సహాయముతో కళ్ళకు గట్టునట్లు చేయుటయందు ఇతనికి ఉత్సాహము మెండు. ఈ చిత్రములకు శ్రేఢీక్షేత్రములని పేరు. ఈ చిత్రముల సహాయముతో అంకశ్రేఢియొక్క ఆవృత్తికి వర్గసమాసమును పరికల్పించుటవంటి అనేక ఫలితములకు ఈతడు జ్యామితీయ నిరూపణలను పొందుపరచినాడు. ఇట్లే సహజ సంఖ్యల సంకలన ఫలములను, వాటి వర్గముల, ఘనముల

సంకలిత ఫలములను చిత్రములచే బోధపరచినాడు. ఘనముల సంకలనకర్మకు ఇతడు వాడుకచేసిన విధానము 11 వ శతాబ్దములో ఆర్కరీ వాడుకచేసిన నోమన్ విధానమే. సుఖప్రత్యయజనకత్వము ఈ విధానముల విశిష్టత.

తంత్ర సంగ్రహము కేవలము ఖగోళ ప్రకరణము. కాని ఇందలి గణిత ప్రక్రియలకు ఆధారము ఆర్యభటీయ సంప్రదాయమందు నెలకొల్పబడిన గణితశాస్త్రీయ వికాసమే. ఇందువలననే తంత్రసంగ్రహ విషయమగు ఖగోళ శాస్త్రమును వ్యాఖ్యానించుటకు పూనుకొన్న తన యుక్తి భాష యందు నీలకంఠుడు చాలభాగము గణిత ప్రక్రియలకే అంకితమొనర్చినాడు. యుక్తి భాషలోని గణితమంతయు తంత్రసంగ్రహ గణితమే. నీలకంఠ ప్రశంసకుడు, తమిళ ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞుడు అగు సుందరరాజు తనకు పంపించిన ప్రశ్నలకు నీలకంఠుడిచ్చిన సమాధానములే సుందరరాజ ప్రశ్న యను గ్రంథము.

తన ఆర్యభటీయ భాష్యమందలి గ్రంథావసాన పద్యమందు నీలకంఠుడు స్వీయ సమాచారము ఇచ్చియున్నాడు. ఈతడు కేరళదేశమందు తిరుక్కంటియూర్ నివాసి; జాతవేదుని పుత్రుడు; పరమేశ్వరుని పుత్రుడు, దృగ్గణిత గ్రంథకర్తగా సుప్రసిద్ధుడు అగు దామోదరునకు శిష్యుడు. తంత్రసంగ్రహ రచనాకాలము క్రీ. శ. 1501. ఇతడు సహస్రాధిక మాసజీవి. అందువలన ఇతని కాలము 15 వ శతాబ్దము పరార్ధమైనను, లేదా, 16 వ శతాబ్దము పూర్వార్ధమైనను అయి ఉండవచ్చును. సరస్వతి.

నెప్ట్యూన్ : చూ. వరుణుడు.

నేపియర్, జాన్ (1550 - 1617) : లాగరిదమ్‌లను కల్పించిన ప్రసిద్ధ స్కాట్‌లాండ్ గణితశాస్త్రవేత్త. ఇతడు 1550 లో ఎడింబరో నగరమునకు సమీపముగ ఉన్న మెర్చిస్టాన్ దుర్గమునందు జన్మించి, సెయింట్ ఆండ్రూ యూనివర్సిటీలో విద్య నభ్యసించెను.

దశాంశపద్ధతిని ప్రోత్సహించిన వారిలో నేపియర్ ఒకడు. లాగరిదమ్‌లను కల్పించి 'కనోనిస్' అను తన గ్రంథమున 1614లో ప్రచురించెను. ఇతడు ప్రవేశపెట్టిన లాగరిదమ్‌లను హెన్రీ బ్రిగ్స్ అభివృద్ధి చేసెను. గుణకార, భాగహారములను చేయుటకు, వర్గమూల, ఘనమూలములను కనుగొనుటకు ఎముకలు' లేదా కడ్డీలను



చిత్రము 262 నేపియర్

కూడా నేపియర్ కనుగొనెను. వీనిని 'నేపియర్ బోన్స్ లేదా నేపియర్ రాడ్స్' అందురు.

రెండు త్రికోణమితీయఫలముల గుణకారలబ్ధమును మరిరెండు త్రికోణమితీయఫలముల సంకలనము లేదా వ్యవకలనముగ $\{$ఉదా: $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)\}$ వ్యక్తపరచవచ్చునని నేపియర్ కనుగొనెను. గోళీయత్రికోణమితిలో కూడా కొన్ని ముఖ్యసూత్రములను నేపియర్ ప్రవేశపెట్టెను. యుద్ధరహస్యపరికరములను కొన్నింటిని నేపియర్ కల్పించెను. ఇతడు 1617, ఏప్రియల్ 4 న మెర్చిస్టాన్‌లో మరణించెను. (చూ. బ్రిగ్స్, హెన్రీ; లాగరిదమ్‌లు) పా. ల. నా.

నేమిచంద్రుడు : క్రీ. శ. 974 నుండి 984 వరకు రాజ్యమేలిన గాంగవంశపు రాజు రాయమల్లునికి మంత్రియగు చాముండరాయనిచే సంభావితుడైన నేమిచంద్రుడు ఒక గొప్ప జైన విద్వాంసుడు. ఈ చాముండరాయడే మైసూరు రాష్ట్రములో శ్రావణ బెళ్గోలావద్ద పెద్ద గోమ్మటస్వామి విగ్రహమును స్థాపింపజేసినాడు. నేమిచంద్రుని రచనలగు 'త్రిలోకసారము', 'గోమ్మటసారము' అను రెండు గ్రంథములును గణిత విషయములను చర్చించినవి. అతని మూడవ ప్రధాన గ్రంథము లబ్ధిసారము. ద్రవ్యసంగ్రహము, క్షపణసారము, ప్రతిష్ఠాపథము అను మూడును అతనిచే రచింపబడినవనుటకు చాల సంభావన కలదు.

త్రిలోకసారమందు కేవలము జైన స్పష్టమగు అర్ధచ్ఛేద భావమును వ్యాఖ్యానించు సందర్భమున ఇతడు ఘాత నియమమును చర్చించెను. ($N = 2^n$ అయినచో N యొక్క అర్ధచ్ఛేదము n అగును).

(1) $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$

(2) $\dfrac{2^m}{2^n} = 2^{m-n}$

(3) $(2^{2n})^{2m} = 2^{2\,n+m}$

అను ఈ మూడును విదిత నియమములు. అంక, వర్గ శ్రేఢులు కూడ తడవబడినవి. ఇవి గాక సహజ సంఖ్యల నుండి ఒక విశిష్ట క్రమమును అనుసరించి కల్పించబడిన 14 రకముల పరంపరలను అతడు గుర్తించెను. ఇవి సహజ సంఖ్యలపరంపర, సరిసంఖ్యల పరంపర, బేసి సంఖ్యల పరంపర, సహజ సంఖ్యల వర్గముల పరంపర, వాటి ఘనముల పరంపర, పూర్వవర్తి పదవర్గముల పరంపర ($2^2, 2^4, 2^8, 2^{16} \ldots 2^{2n}$) మొదలైనవి.

జ్యామితిలో వృత్తమువకు, అంగుళీయకవలయమునకు $\pi = 3$ లేదా $\sqrt{10}$ అను విలువలను ఉపయోగించి మాపన

సూత్రములను ఉపకల్పించుటయేగాక, పూర్వ జైన గ్రంథములలో మనకు తారసిల్లు ఖండ, చాపములకు కూడ స్థూల మాపనసూత్రములను ఇతడు ఇచ్చియున్నాడు ; ఇదిగాక త్రిలోకసారమందు శంకువుయొక్క, సూచియొక్క ఘన పరిమాణములకు యథార్థ సమాసములను పొందుపరచెను. $V = \frac{3}{2}\pi r^3$ అనునది ఆతడు గోళ ఘన పరిమాణమునకు ఇచ్చిన స్థూలసమాసము. సమభుజ ట్రెపీజియమ్‌ను కూడ అతడు చర్చా విషయమును గావించినాడు.

గోమ్మట సారమందలి గణితము ప్రస్తారసంయోజనలు. సంయోజనముల మొత్తపు సంఖ్యను ఎరుంగుటయేకాక ఏ సంయోజనకు చెందిన క్రమ సంఖ్యనయినను ఒక విశిష్ట సంయోజనకు అందలి ఘటకములను సులభముగా కనుగొనబడునట్లు ఒక విశిష్ట ప్రస్తారములోని ఘటకములను ఊహించుట ఈ గ్రంథము బోధించును. ప్రస్తార శబ్దము చాల ప్రాచీనకాలమందు ఛందోమాత్రల సంయోజనమునకు వాడబడినది. తరువాత ఈ పదము భద్రగణితము (ఐంద్రజాలిక చతురస్రకల్పనము) నందు మనకు తారసిల్లినది.

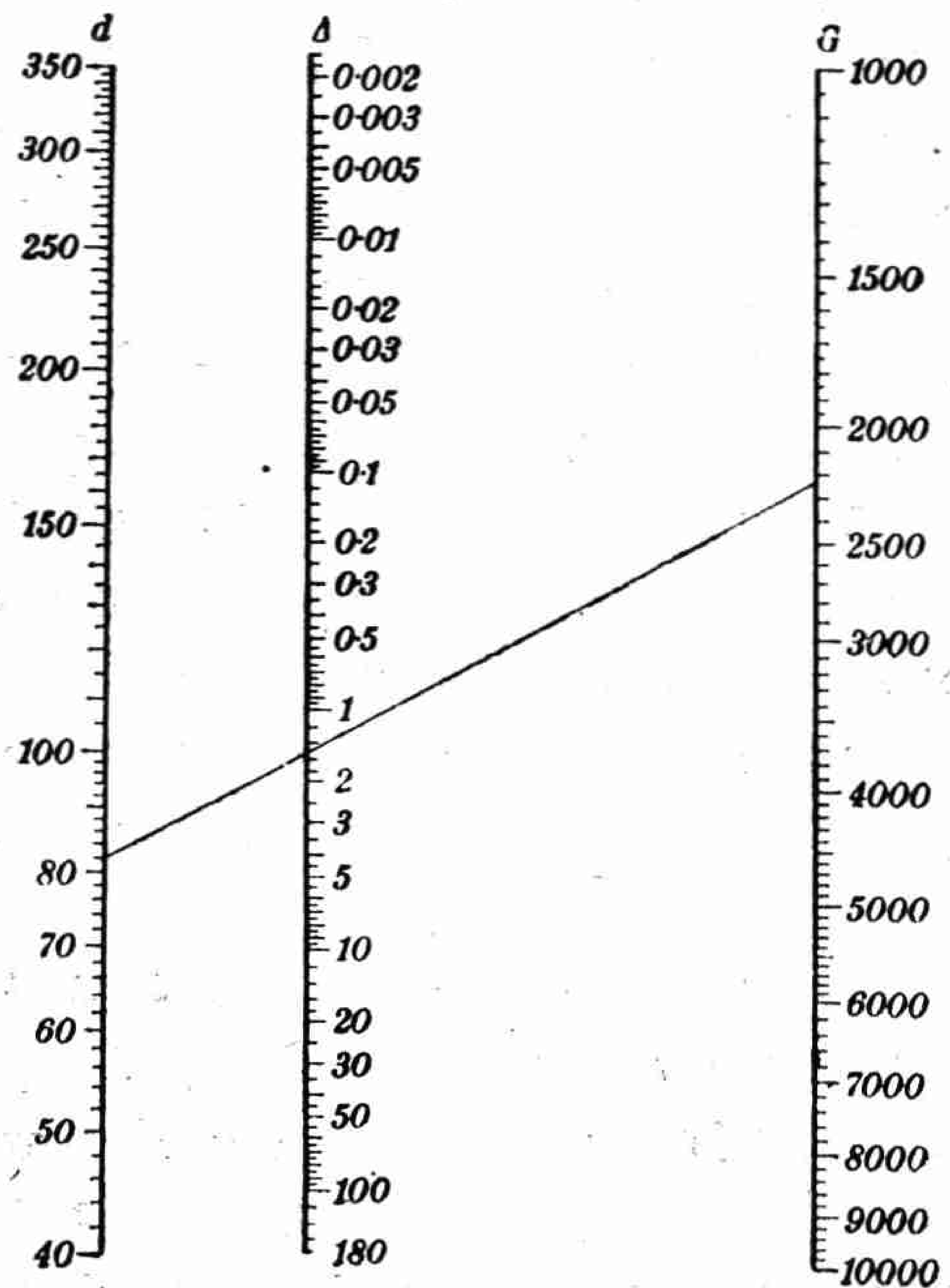
నేమిచంద్రుడు గణిత శాస్త్రమున క్రొత్త విషయములను కనుగొనలేదు. కాని అతని గ్రంథములనుండి జైన గణితము ఎట్టి పురోగతి నందుకొనినదో తెలిసికొనవచ్చును.

సరస్వతి

నోమోగ్రాములు (నోమోగ్రామ్స్) : నోమోగ్రాములనగానేమి ? యంత్రశాస్త్రములో బరువైన సంఖ్యా సంబంధ గణనలనుచేయు ఆవశ్యక మేర్పడుచున్నది. పెక్కు సందర్భములలో ఒకే సమాసములోని వేర్వేరు చలరాశులకు వేర్వేరు విలువలిచ్చి వాటిపై ఆధారపడియున్న మరొక రాశి విలువను కనిపెట్టవలసి యుండును.

$$\text{ఉదా : } \Delta = 3160 \ \frac{G^{1.85}}{d^{4.97}} \quad \cdots (1)$$

అను సమీకరణమును తీసికొనుము. ఇచ్చట d, G చలరాశులకు వేర్వేరు విలువలిచ్చి, వాటిపై ఆధారపడిన Δను కనిపెట్టవలెను. ఇట్లు చేయుటకు లాగరిదమ్‌లను లేదా స్లైడ్‌రూల్‌ను ఉపయోగింపవచ్చును : పై సమాసమే కాక మరియు కఠినమైన సమాసములను గణనము చేయుటకు నోమోగ్రాములు మరియొక ముఖ్యమైన సాధనము. ఇచ్చట ఒక జ్యామితీయ చిత్రము నుపయోగించెదము. పై సమస్యను సాధించు నోమోగ్రాము చిత్రము 262 లో చూడవచ్చును. ఇచ్చట 3 సమాంతర రేఖలున్నవి. ఒక్కొక రేఖయందును కొన్ని గురుతులును సంఖ్యలును, ఉన్నవి. G, d రాశుల విలువలను ఇచ్చినచో, వీటికి అనుగుణమగు గురుతులను G రేఖ పైనను, d రేఖ పైనను తీసికొని, ఈ గురుతు బిందువులను ఒక ఋజురేఖ ద్వారా చేర్చినచో,



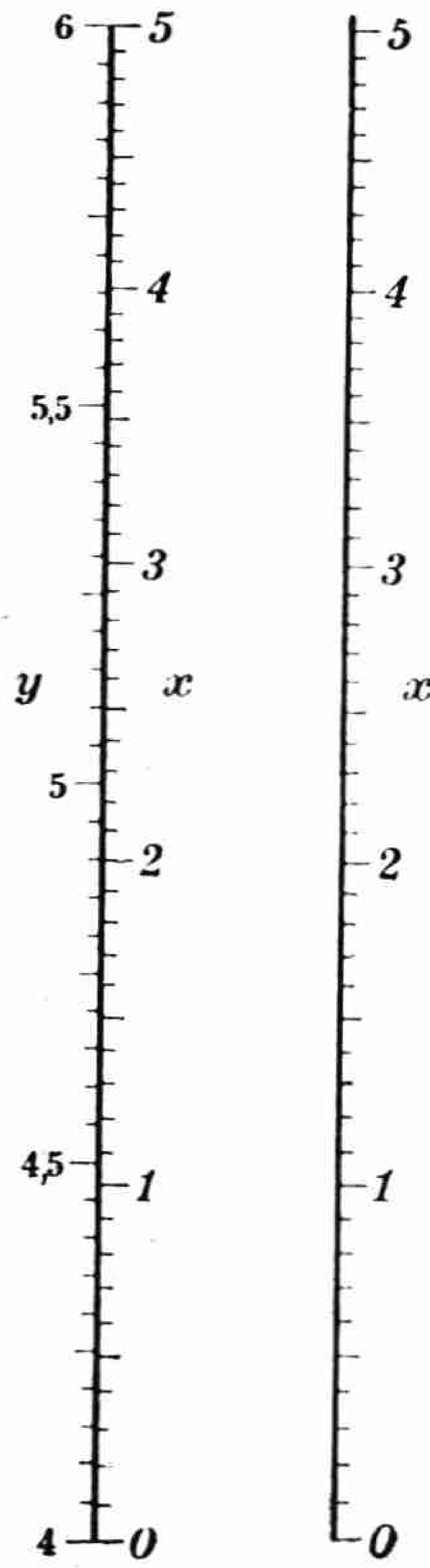
చిత్రము 263 నోమోగ్రాము

అది మధ్యనున్న Δ రేఖను ఒక బిందువునందు ఖండించును. ఈ బిందువుకు తగిన సంఖ్యయే Δ యొక్క విలువ : చిత్రములో వ్రాసిన ఋజురేఖ G = 2238, $d = 82$ విలువలకు తగిన Δ విలువ ఇచ్చుచున్నట. ఈ విలువ సుమారు $\Delta = 1{\cdot}52$ అని చిత్రములో చూడవచ్చును. ఛేదన బిందువు రెండు గురుతుల మధ్య ఉన్నచో, దాని విలువ కంటితో ఊహించవలసినదే. ఋజురేఖను గీయుటకు బదులు ఒక దారమునో, లేదా గాజుపై గీయబడిన ఋజురేఖనో ఉపయోగించవచ్చును. ఇట్లు ఒకే చిత్రమునుండి వేర్వేరు G, d విలువలకు తగిన Δను కనుగొనవచ్చును. G, d, Δ రేఖలందు గురుతు వేసిన సంఖ్యలు ఏకరూపముగా నుండవు అను విషయము గమనించతగినది.

ఇపుడు ఇట్టి నోమోగ్రాములు ఎటుల నిర్మించుట అను విషయమును వివరించెదము.

ఫలమానములు (ఫంక్షనల్ స్కేల్స్) : ఏదైన ఒక ఫలము $y = 2\sqrt{x+4}$ ను తీసికొనుము. ఇచ్చట x విలువ 0 కును 5 కును మధ్య ఉన్నచో, y విలువ 4 కును 6 కును మధ్య నుండును. ఇప్పుడు ఒక ఋజురేఖ తీసికొని దాని ఒక కొనను 4 అనియు మరొక కొనను 6 అనియు ఒక ప్రక్కన గుర్తు

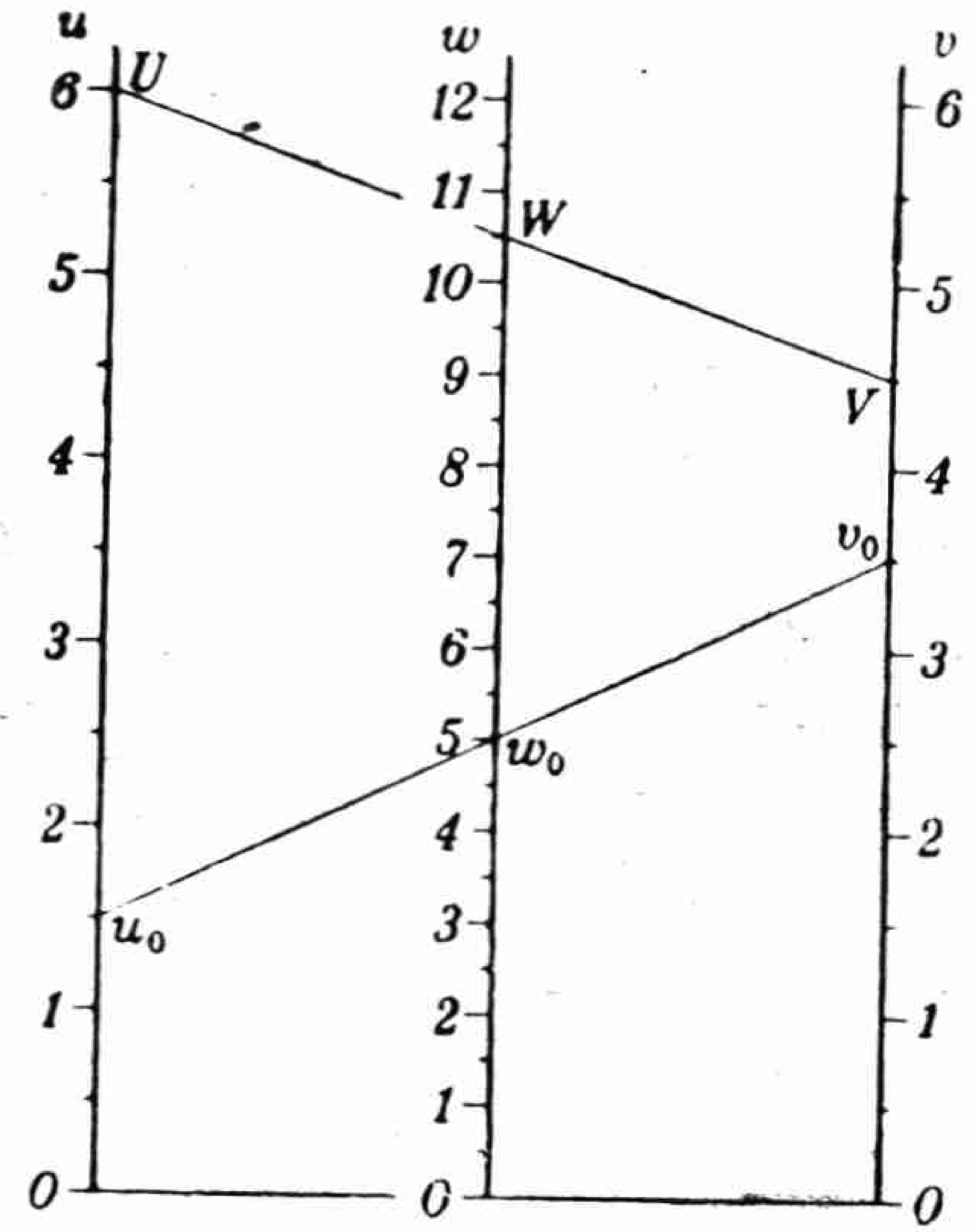
చేయుము. ఇవి y విలువల ప్రక్క (ఎడమ ప్రక్క అనుకొనెదము.). 4 కును 6 కును మధ్యనున్న 4.1, 4.2, ... 5.9, 6 సంఖ్యలకు తగినట్లు బిందువులను తీసికొని, అచ్చటను అదే ప్రక్క గురుతులు చేసి ఈ సంఖ్యలను వ్రాయుము. ఇట్లు లభించినది సాధారణముగా మనము వాడుకొను కొలతమానము (స్కేల్). ఇపుడు అదే రేఖకు మరియొక ప్రక్క (కుడిప్రక్క) మునుపు చేసిన గురుతులకు ఎదురుగ సంఖ్యలను వ్రాయవలెను. ఇది x ప్రక్క అనెదము. x కు 0, 0.1, 0.2,......5 వరకు విలువలిచ్చి, ఈ విలువలను $y = 2\sqrt{x+4}$ లో ప్రతిక్షేపించినచో దొరకు y విలువల బిందువులకు ఎదురుగ x విలువను వ్రాయవలెను. ఉదా : $x = 1$ అయినచో $y = 2\sqrt{5} = 4.47$ అగుచున్నది. కనుక y ప్రక్కన 4.47 అను గురుతుకు నేరుగ x ప్రక్కన 1 అని వ్రాయవలెను. అనగా ఆ ఋజురేఖపైనున్న ఏ బిందువు తీసికొనినను ఆ బిందువు దగ్గర ఎడమ ప్రక్కన వ్రాసిన y సంఖ్యయు, కుడి ప్రక్కన వ్రాసిన x సంఖ్యయు $y = 2\sqrt{x+4}$ అను సమీకరణమును తృప్తి చేయవలెను. కనుక ఒక కొనలో 4 కు ఎదురుగ 0ను, మరియొక కొనలో 6 కు ఎదురుగ 5ను వ్రాయబడి యుండును. ఇటువంటి ఋజురేఖకు '$y = 2\sqrt{x+4}$ ఫలము యొక్క ఫలమాన రేఖ' అని పేరు. ఇట్టి రేఖ చిత్రము 264 లో చూడవచ్చును. ఇచ్చట ఎడమ ప్రక్క దూరములకు అనురూపముగా సంఖ్యలు పెరుగును. కాని x ప్రక్క దూరములకు అనురూపముగా సంఖ్యలు పెరుగవు. కొన్ని సమయములలో ఎడమ ప్రక్కనున్న y కొలతల సంఖ్యలు విడిచిపెట్టి కుడివైపునున్న x సంఖ్యలు మాత్రము పెట్టుకొనెదము.



చిత్రము 264

పై చిత్రములోనున్న మరియొక రేఖ ఇట్లులభించినదే.

సంకలనమునకు నోమోగ్రాము ($w = u + v$) : ఇపుడు $w = u + v$ అను సమీకరణమును తీసికొనెదము. u, vసంఖ్యల నిచ్చిన వాటి సంకలన ఫలము w ను కనిపెట్టుటకు ఒక నోమోగ్రామ్ సులభముగా నిర్మించవచ్చును. $0 \leq u \leq 6$, $0 \leq v \leq 6$ అనుకొనెదము. అపుడు $0 \leq w \leq 12$ అగును. కనుక రెండు సమానాంతర రేఖలు AB, CD తీసికొనెదము. వీటికి సరిగ మధ్యలో మరొక సమానాంతర రేఖ EF గీయుము. ఈ మూడు రేఖల పొడవు ఒకటిగనే ఉండవలెను. అదికాక AEC ఒకే ఋజురేఖపైనున్న బిందువు లనియు, ఈ రేఖ సమానాంతర రేఖలకు లంబమగునట్లు తీసికొనుము. ఇపుడు ఏదో ఒక నిడుపును యూనిట్‌గ తీసికొని AB యందును CD యందును కొలతకు తగిన సంఖ్యలను వ్రాయుము. పైన తీసికొనిన నిడుపులో సగమును యూనిట్‌గ తీసికొని మధ్యరేఖ EF నందు గుర్తులును, సంఖ్యలును వ్రాయుము. మనము ఈ మూడు



చిత్రము 265

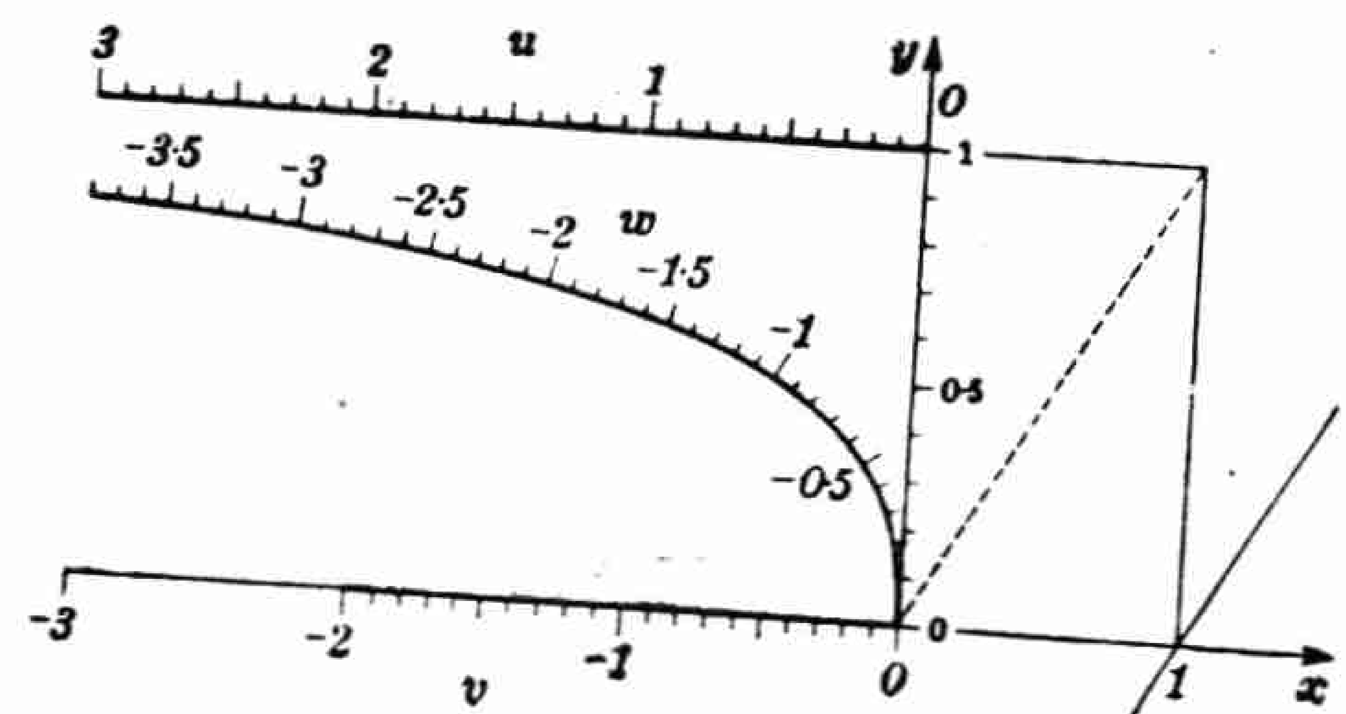
రేఖలపైన గురుతు చేసినవి క్రమమానములు (రెగ్యులర్ స్కేల్స్); అనగా ఇచ్చట నిడుపులకు అనుగుణముగా సంఖ్యలు పెరుగును. AB రేఖ u చలరాశి విలువ అనియు CD రేఖ v చలరాశి విలువ అనియు, EF రేఖ w చలరాశి విలువను గుర్తించుచున్నదనియు తీసికొనినచో, ఇది $w = u + v$ యొక్క నోమోగ్రామగుచున్నది. అనగా $u = U$, $v = V$ అని ఇచ్చి, $w = U + V = W$ కనిపెట్టుటకు, U, V విలువలకు తగిన గురుతులను ఒక ఋజురేఖతో చేర్చినచో ఆరేఖ w రేఖను $U + V$ విలువలో సంధించును. చూ. చిత్రము 265. ఈ చిత్రములో $6 + 4.5 = 10.5$; $1.5 + 3.5 = 5$ అను సంబంధములను చూపు ఋజురేఖలు గీయబడి ఉన్నవి:

వేరు సంబంధ నోమోగ్రాములు ($f_1(u) + f_2(u) + f_3(w) = 0$) : అను మూడు చలరాశులు u, v, w లకు

పై సంబంధమున్నదనుకొనెదము. అపుడు ఏదో రెండు రాశులిచ్చినచో మూడవ రాశిని కనిపెట్టుటకు ఒక నోమోగ్రామును సృజించు విధమును కనిపెట్టెదము. $f_1(u) = U$, $f_2(v) = V$, $f_3(w) = -W$ అని వ్రాసినచో పై సమీకరణము $U+V=W$ అగుచున్నది. ఈ సంబంధమునకు నోమోగ్రామ్ పైన వివరించియున్నాము. కనుక చిత్రము 265 లో u రేఖలో $f_1(u)$ ఫలమానమును. v రేఖలో $f_2(v)$ ఫలమానమును, w రేఖలో $-f_3(w)$ ఫలమానమును ప్రవేశపెట్టి, u, v, w లకు మునుపు వ్రాసిన క్రమకొలత సంఖ్యలను చెరిపివేసినచో, $f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=0$ యొక్క నోమోగ్రామ్ దొరకును. ఉదా: $x^2+y^2=z^2$ అను సంబంధమునకు నోమోగ్రామ్ కావలెనంటే, చిత్రము 265 ఉన్న నోమోగ్రాములో u, v, w క్రమకొలతలకు బదులు $u=x^2$, $v=y^2$, $w=z^2$ ఫలమానములువ్రాసి u, v, wలకు వ్రాసిన సంఖ్యలు చెరిపి వేసినచో, మనకు లభించు నోమోగ్రాము $x^2+y^2=z^2$ ను గణించుటకు ఉపయోగపడును. అనగా $u, v, w = 4$ అని గుర్తించిన స్థలమందు $x, y, z = 2$ అని వ్రాయవలెను. కనుక u, v లు 0 నుండి 16 వరకు ఉన్న $u+v=w$ నోమోగ్రాము x, y లు 0 నుండి 4 వరకును, $w=0$ నుండి 32 వరకును ఉన్న సంఖ్యలకు బదులు $z=0$ నుండి $\sqrt{32}$ వరకును సంఖ్యలుండును.

కొన్ని సమయములలో u, v, w గీతలు ఒకే కొలత లేక పెద్ద చిన్న నిడుపులు కలవిగా నుండును. అపుడు తగిన విక్షేప మార్పువలన వీటిని సమనిడుపులు గలవిగ మార్చవచ్చును. అయితే ఇటువంటి మార్పులలో w రేఖ u, v రేఖలకు సరిమధ్యమున ఉండక ఒక ప్రక్కకు జరుగును. ఇటువంటి మార్పే చిత్రము 263 లో చూడవచ్చును. ఇచ్చట $\triangle = 3160 \frac{G^{1.85}}{d^{4.97}}$ అను సమీకరణమును $\log \triangle = 1{\cdot}85 \log G - 4{\cdot}9 \log d + \log 3160$ అని, $u = 1\cdot85 \log G$, $v = -4.977 \log d$, $w = \log \triangle - \log 3160$ అని తీసికొనినచో $w=u+v$ అను సంబంధము దొరకును. మనకు $40 < d < 350$, $100 < G < 10{,}000$ విలువలు కావలెననుకొనెదము. అపుడు $5{\cdot}55 < u < 7{\cdot}4$; $-12.6 < v < -8$ అగుచున్నది. కనుక u, v లకు ఈ మూల్యములను సీమమూల్యములుగా తీసికొని, దొరకిన $u+v=w$ నోమోగ్రాములలో u, v, సంఖ్యలకు బదులు $G, d, \triangle$ ఫలమానములను వ్రాసి, ఆ చిత్రమును విక్షేపించిన చిత్రము 263 దొరకును.

$1/f_1(u) + 1/f_2(v) + 1/f_3(v)$ సంబంధము యొక్క నోమోగ్రాము, $f_1(u)\,f_2(v) = f_3(w)$ల నోమోగ్రాములు: నోమోగ్రాములు ఎల్లపుడును సమాంతర రేఖల రూపమునననే ఉండనక్కరలేదు. ఉదా: $1/u+1/v=1/w$ అను సంబంధము 3 రేఖలు OA, OB, OC తీసికొని, ఈ రేఖలపై క్రమ కొలతలను గుర్తుచేసి సాధించవచ్చును. ఇచ్చట OA, OB రేఖల మధ్యకోణము 60° ను OB, BC ల మధ్యకోణము 60° గను ఉండవలెను. దీనినుండి u రేఖలో $f_1(u)$ ఫలమానమును, v రేఖలో $f_2(v)$ ఫలమానమును, w రేఖలో $1/f_3(w)$ ఫలమానమును తీసికొని $1/f_1(u) + 1/f_2(v) = 1/f_3(w)$ అను సంబంధముగల చలరాశులు u, v, w లలో ఏ రెండు ఇచ్చినను మూడవది కనిపెట్టుటకు నోమోగ్రాము నిర్మించవచ్చును. ఇటులనే N రూపములు గల నోమోగ్రాములున్నవి. ఇవి $f_1(u)\,f_2(v) = f_3(w)$ వంటి సమీకరణములకు అత్యంత ఉపయోగమైనవి.



చిత్రము 266

ఇవికాక ఋజురేఖలకు బదులు వక్రరేఖల నుపయోగించు నోమోగ్రాములుకూడా ఉన్నవి. క్రింద అటువంటి వక్రరేఖ నోమోగ్రాము (చిత్రము 266) రెండవ తరగతి సమీకరణము యొక్క ధనమూల్యము w ను కనిపెట్టుటకు ఉపయోగమగును. రెండవ తరగతి సమీకరణము

$$w^2 + w\,u + v = 0.$$

మరియొక మూలము w_2 ను $w_1 + w_2 = -u$ అను సంబంధమునుండి పొందవచ్చును. ఈ నోమోగ్రాములో u, v విలువ బిందువులను చేర్చురేఖ w వక్రమును ఎచ్చట ఖండించుచున్నదని కనుగొని, w ను కనిపెట్టవలెను. ఆ. స.

న్యూటన్, సర్ ఐజాక్ (1642 - 1727):

గ్రీకుల కాలమునుండి నేటివరకు గణితశాస్త్ర చరిత్రలో న్యూటన్ పేరు అద్వితీయమయినది. కలన గణితశాస్త్రము ద్వారా ఆధునిక గణితమునకును, గతి నియమముల ద్వారా భౌతిక ఖగోళశాస్త్రములకును అతడు పునాదులు వేసెను. ఇతనికి ముందు కడచిన శతాబ్దములలో వెలుగు చూచిన గణితశాస్త్రవిషయములకన్న ఈతని నిర్వాహము ఎక్కువ అని ఈతనిని లైబ్‌నిట్జ్ ప్రశంసించినాడు.

జన్మచే ఇతడు ఆంగ్ల దేశీయుడు. ఒక కృషికుని పుత్రుడు. ఇతడు తల్లి కడుపులోనుండగనే తండ్రి గతించెను. పుట్టినప్పుడు అతడు జీవముతో నిలువగలడాయను సంశయ మొదవినంత బలహీనుడుగా ఉండెను. కేంబ్రిడ్జి యూనివర్సిటీలో చాల ఏండ్లు పనిచేసిన తరువాత, తన చివరి రోజులలో అతడు టంకసాలకు అధికారిగా నియమింపబడెను.



ఐజాక్ న్యూటన్
చిత్రము 267

న్యూటన్ తన 23 వ ఏటనే $(a + b)^n$ అను సమాసము యొక్క విస్తరణమును ఇచ్చు ద్విపద సిద్ధాంతము n ధనాత్మక పూర్ణాంకము కాకపోయినను సత్యమని రుజువుచేసెను. n ధనాత్మక పూర్ణాంకము కాని పరిస్థితులలో ఈ విస్తరణము అనంతపరంపరయగును. a, b లను గురించిన సంపూర్ణ నిబంధనలస వివరవిమర్శ 19 వ శతాబ్దమందే తలచూపినది.

1665 లో ఈతడు అంతరీకరణకలనమును ఆవిష్కరించెను. తరువాత మరియొక ఏడాదికి ద్రవ్యకణముల గురుత్వాకర్షణ నియమమును వెలిపుచ్చి, ఈ నియమము సహాయముతో మూడు కెప్లర్ నియమములను గణిత రీతిగా సాధించి, సూర్యుని ద్రవ్యరాశిని ఎట్లు లెక్కించ వచ్చునో సూచించినాడు. చంద్రుడు భూమిచుట్టు ఆకర్షణ బలము కారణముగనే తిరుగుచున్నాడు. కాని సూర్యుడు కూడ చంద్రుని ఆకర్షించి చంద్రునిగతిలో క్షోభములు కలుగజేయుచున్నాడు. ఈ సంక్షోభములు కారణముగ చంద్రగతిలో సంభవించు వ్యతిక్రమములను తొమ్మిదింటిని న్యూటన్ గణించెను. ధూమకేతువులు కూడ సౌరకుటుంబమునకు చెందిన నభోమూర్తులే అనియు, అతిదీర్ఘీకృత కక్ష్యలలో అవి సూర్యునిచుట్టు తిరుగుచుండుననియు న్యూటన్ నిరూపించెను. తన మధ్యరేఖా ప్రాంతమున ఏర్పడిన గుబురుపై సూర్యచంద్రుల ఆకర్షణ ప్రభావముచే బొంగరమువలె భ్రమించుచున్న భూమియొక్క అక్ష దిక్కు చలనమును గ్రహించుచున్నదని, విషు చలనమును అద్భుతముగా వివరించినాడు.

సముద్ర జలాశయములపై సూర్యునికి, చంద్రునికి గల ఆకర్షణ ప్రభావముచే స్రోతస్సులు ఉద్భవించుచున్నవని న్యూటన్ నిరూపించెను. భూమి ధ్రువములవద్ద అదుమబడి ఉండుటకు కారణము దాని దైనందిన భ్రమణమేయని, గ్రహము యొక్క ఆకృతికిని దినపరిమాణమునకును ఉన్న సంబంధమును కనిపెట్టెను. ఒక వస్తుస్థలము యొక్క అక్షాంశనుబట్టి దాని భారము ఎట్లు మారునో లెక్కగట్టి చూపినాడు. ఈతని గతిశాస్త్ర, ఖగోళశాస్త్ర ఆవిష్కరణలు అన్నియు 1687 లో ప్రిన్సిపియా అను మూడు సంపుటముల గ్రంథములో ప్రచురింపబడినవి.

గణితశాస్త్ర వ్యాసంగమేకాక, ఇతడు తెల్ల వెలుతురును పట్టకముద్వారా పంపి దానిని ఘటకములగు వివిధవర్ణముల కాంతుల క్రింద విశ్లేషించెను; పరావర్తన దూరదర్శనిని, సూక్ష్మదర్శనిని కూడ నిర్మించెను.

వైదుష్య జీవితమునందు మానవునకు లభించు సమస్త గౌరవములు న్యూటన్‌కు లభించినవి; 1672 లో ఈయన రాయల్ సొసైటీ ఫెల్లోగా ఎన్నుకొనబడినాడు. 1705 లో సర్ బిరుదముచే గౌరవింపబడినాడు. 85 ఏండ్ల పూర్ణాయుర్దాయమును గడపి, 1727 లో న్యూటన్ దివంగతుడయ్యెను. ఇతనిని వెస్ట్‌మినిస్టర్ ఏబ్బీలోపూడ్చిరి (చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష - పు. 81). అ. స.

పంచాంగ కాలము : కాల మానమును గుర్తించుటకు ముఖ్య సాధనము భూభ్రమణమే. సూర్యుని అపేక్షయా భూమి తన అక్షముపై ఒకసారి పరిభ్రమణము చేయుటకు పట్టుకాలమును ఒక సావనదినమందురు. ఈ కాలము స్థిర రూపము అని ఇదివరలో అందరు తలచియుండిరి. ప్రస్తుత పరిశోధనవలన ఈ అభిప్రాయములో మార్పు ఏర్పడినది.

భూపరిభ్రమణగతి ఏకరూపముగా లేదు. దానిమార్పులో క్రమములేదు. పరిభ్రమణ గతి తగ్గుచున్నది. అందుచే దిన మానము క్రమేణ హెచ్చుగుచున్నది. ఈ మార్పులకు కారణములు : (1) లోతులేని సముద్రపుటడుగున ఏర్పడు జలప్రవాహముల ఒత్తిడి, (2) భారవస్తువులను ఒకచోటనుండి మరియొక చోటికి మార్చుట, (3) భూమియొక్క రూపములోని మార్పు, (4) ప్రబల వాతములచే నేర్పడు ఒత్తిడి.

భూపరిభ్రమణ కాలములోని ప్రమాదములు అతి సూక్ష్మములైనవి; వేధశాలలోని సాధారణ ఘటికాయంత్రములచే కనుగొనుటకు వీలుకానివి. వానిని కనుగొనుటకు స్ఫటిక ఘటీయంత్రము, లేదా, అమోనియా ఘటీయంత్రము కావలయును. గత 250 సంవత్సరములలో ఏర్పడిన మార్పులను శాస్త్రజ్ఞులు చాలా శ్రమపడి సంపాదించిరి.

గతిశాస్త్ర ఖగోళశాస్త్రమునకు నిర్దిష్ట కాల మానము ఆవశ్యకము. ఇదివరలో గ్రినిచ్ మధ్యాహ్న రేఖను

మధ్య రవి ప్రతరణము బట్టి కాలమును నిర్ణయించుచుండిరి. కాని ఇందు స్థిరత లేదు. కాబట్టి ఇప్పుడు ప్రతిపాదింపబడిన కాల మానము భూపరిభ్రమణముపై ఆధారపడియుండదు. అది గతకాల భూపరిభ్రమణముల సరాసరి (మధ్యమ) విలువపై ఆధారపడి యున్నది. మధ్యమ సావన సెకనులో శుద్ధత లేదు. కాబట్టి 1900 లో నాక్షత్ర మానమును కాల మానముగ తీసికొనవలయునని శాస్త్రజ్ఞులు తీర్మానించిరి. దీనికి పంచాంగ కాలము ($E . T$) అని పేరు. గ్రీనిచ్ మీన్ టైమ్ (జి. ఎమ్. టి.)నకు యూనివర్సల్ టైము ($u . T$) అను పర్యాయ నామము కలదు. $u \cdot T$, $E \cdot T$ లకు గల సంబంధము క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$E . T = u \cdot T + \Delta T$$

$$\Delta T = 24'' \cdot 319 + 72'' . 318\ T + 29'' . 950\ T^2 + 1{\cdot}82144 . \beta$$

ఈ సమాసములో 1900 జనవరి నుండి తీసికొను శతాబ్దములను T గుర్తించును. 1800 కు T యొక్క విలువ -1; 1961 కు T యొక్క విలువ $+0{\cdot}61$. ఇచ్చట β ని గమనింప నక్కరలేదు. ఈ గణితములకు ఒక కృత్రిమ రేఖ గ్రీనిచ్ దగ్గర ఏర్పరచబడినది. దానికి పంచాంగ రేఖ అని పేరు. గ్రీనిచ్ రేఖకు పంచాంగ రేఖ 1.00274 (ΔT) సెకనుల కాలము తూర్పులో నున్నది. 1.00274 (ΔT) సెకనుల కాలము $=$ 0.25068 ($\Delta 7$) నిమిషముల ధనుస్సు. వాస్తవముగా పంచాంగరేఖ 1900 లో గ్రీనిచ్ రేఖకు $0' \cdot 95$ పశ్చిమమునను, 1954 లో $7' \cdot 77$ తూర్పునను, 1960 లో $8' \cdot 77$ తూర్పునను ఉండెను.

ఇందు గల గుణకము 1.00274 ను గుర్తింపవలయును. సావన కాలమును నాక్షత్ర కాలముగా మార్చుటకు వాడిన గుణకము అని చదువరులు గ్రహింతురుగాక, (చూ. నాక్షత్ర కాలము - పు. 34).

"$u \cdot T$ సర్వ వ్యాపక కాలములో మార్పులేమియు చేయలేదు. దానికిని నాక్షత్ర కాలమునకును గల సంబంధములలో మార్పు లేదు.

$S \cdot T = 12$ గ $+ u.\ T$ 18 గ. 38 ని 45.838 సె $+$ 8640184.542 T సెకనులు.

$+ 0\ 0929\ T^2$ సెకనులు.

T శతాబ్దములలో గుర్తింపబడును. ప్రారంభము 1900 జనవరి 0 తేది.

ఆచార్య

పంచాంగము : తిథి, వార, నక్షత్ర, యోగ, కరణములు ఐదును కలది పంచాంగమని వ్యవహారము. సామాన్య కర్మకాండమునకు తిథి, వారములే ఉపయోగములోనున్నను కొన్ని వ్రతాదులందును, ముహూర్తాదులందును నక్షత్ర, యోగ, కరణములకును ఉపయోగము కలదు.

తిథి : చంద్రకళావృద్ధిని గాని, చంద్రకళాక్షయమును గాని విస్తరింపచేయునది కావున తిథి యని చెప్పబడు చున్నది.

> " తన్యం తే కలయా యస్మా త్తస్మా త్తా స్తిథయస్మృతాః
> తనోతి విస్తారయతి వర్ధమానాం క్షీయమాణాం వా
> చంద్రకళా మితి తిథి "   (కాలమాధవీయము).

అమావాస్యాంతమునకు చంద్ర సూర్యులు కలియుదురు. అపుడు చంద్రకళలకు పూర్ణక్షయము. పూర్ణిమాంతమునకు చంద్రుడు సూర్యునకు 180 భాగల దూరమున నుండును. అపుడు రవి చంద్రులు పరస్పర సమ్ముఖముగ నుందురు. కావున చంద్రకళలు సంపూర్ణముగ నుండును. 180 భాగలు దూర మగునప్పటికి 15 తిథులు (15 కళలు) పూర్తియగుచున్నవి. కావున $180/15 = 12$; ఒక తిథికి 12 భాగలు అగుచున్నవి.

రవి చంద్రులలో రవిగతి మందమైనది. చంద్రగతి శీఘ్రమైనది. అమావాస్య అంతమున కలిసిన రవి చంద్రులు క్రమముగ నడచుచుండుటచే ఒకరి కొకరు దూరమగుచు తిథులను గలుగచేయుచున్నారు. సూర్యుడు ఒక రోజునకు మధ్యమ గతిచే $59' \cdot 1$ లిప్తలు నడచును. చంద్రుడు ఒక రోజునకు $790' \cdot 56$ లిప్తలు నడచుచుండును. మధ్యమ గతిచే ఒకరోజుకు సూర్యునకు చంద్రుడు $790' \cdot 56 - 59' \cdot 1 = 731' \cdot 46$ లిప్తలు అనగా $12 \cdot 19$ భాగలు దూరమగుచున్నాడు 12 భాగలు దూరమగుచో ఒక తిథి పూర్తియగును. అట్లు క్రమముగ రవి చంద్రాన్తరము 24 భాగలగుచో ద్వితీయతిథి, 36 భాగలగుచో తృతీయ తిథి, 48 భాగలగుచో చతుర్థతిథి, ఇట్లు పంచమి, ఇత్యాది తిథులగును. కావున సాయన మేషాదినుండిగాని నిరయన మేషాదినుండిగాని ఇష్టకాలమునకు రవి చంద్రులను వేరు వేరుగా గణించి యుంచవలెను. పిమ్మట చంద్రునిలో రవిని తీసివేసి ఆ అంతరమును 12 చే భాగింప లబ్ధము గత తిథులగును. శేషము వర్తమాన తిథి సంబంధమైనది. అట్లు తిథిగణితము చేయుటకు స్ఫుట రవి చంద్రులు గావలయును. స్పష్టగ్రహ సాధనమునకు వలయు పద్ధతి గణిత గ్రంథములందు ఇట్లుండును. ఆ గణిత గ్రంథమునందు ఒక శకసంవత్సరము మొదటిదిగ గ్రహింపబడియుండును. ఆ సంవత్సర ప్రారంభమునకు మధ్యమ గతిచే నగు గ్రహములు ఎంత యుండునో వాటి పరిమాణము ఈయబడి యుండును. ఆ పరిమాణమునకు గ్రహ ధ్రువమని సంజ్ఞ. ఆ గ్రంథ ప్రారంభమునుండి మనకు

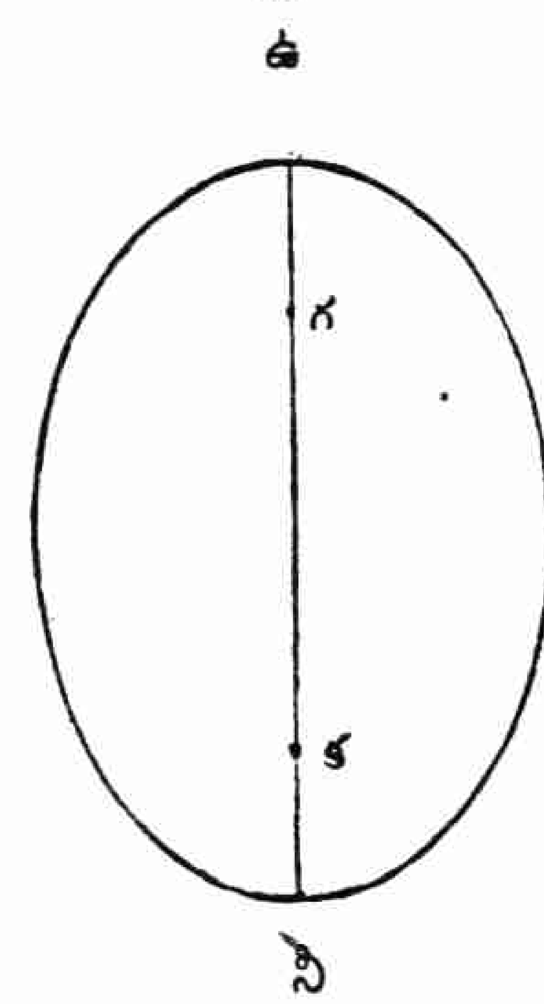
కావలసిన కాలమునకు అగు దిన గణమును లెక్కించ వలెను. ఈ దిన గణమునే అహర్గణమని గణకులు వ్యవహరింతురు. ఒక్కొక్క గ్రహము ఒక్కొక్క రోజున కెంత గమనము గలదియు అందుండును. ఈ గమనమును తొలుత వేధశాలలందు పరీక్షచే గనుగొని నిశ్చయించియున్నారు. ఆ దినగతిని అహర్గణముచే గుణించి ఆ గ్రహధ్రువము నందు కలుప అభీష్ట కాలమునకు మధ్య గ్రహమగును. పూర్వ సిద్ధాంతములందు ఒక్కొక్క గ్రహమునకు దినగతిని బట్టి రాశి చక్రమును చుట్టివచ్చుట కగుకాలము కనుగొనబడినది.

భగణములు, మహాయుగము : పై కాలము భగణ కాలము. రాశి చక్రము భగణము. అట్టి భగణములు ఒక మహాయుగమున కెన్నియగునదియు లెక్కించి చెప్పబడెను. 43,20,000 సంవత్సరములు ఒక మహాయుగము. వేయి యుగములు ఒక కల్పము. అనగా 4,320,000,000 సంవత్సరములు. ఒక కల్ప కాలమునకు అగు గ్రహ భగణములును చెప్పబడినవి. ఈ కల్ప సంవత్సరములు యుగ సంవత్సరములును సౌరములు. యుగమునకును కల్పమునకును నగు చాంద్రమాసములును, సావన దినములును చెప్పబడినవి.

కాలమానము : ఒక సౌర సంవత్సరమునకు, సాయన సంవత్సరమునకు దినములు 365 గం. 5 ని. 49 లు. ఇత్యాదులు అగును. ఒక నిరయన సౌర సంవత్సరమునకు దినములు 365 గం. 6 ని. 9 లు. ఇత్యాదులు అగును. ఒక చాంద్ర మాసమునకు దినములు 29 గం. 12 ని. 44 . 05 అగును. వీనినిబట్టి అనుపాతముచే యుగసావన దినములు, యుగ చాంద్రమాసములు తెలియును. యుగ సౌరమాసములను యుగచాంద్రమాసముల వలన వ్యవకలింప శేషము యుగాధి మాసములు. చాంద్రమాసములను 30 చే గుణింప చాంద్రదినములు. యుగ చాంద్రదినములకును, యుగ సావనదినములకును అంతరము యుగక్షయ దినములు. ఈ పద్ధతిచే యుగాది నుండిగాని కల్పాది నుండిగాని, లేదా గ్రంథారంభ సంవత్సరము నుండియగు ధ్రువాబ్దముల వలన గాని అనుపాతముచే నధికమాసములను గనుగొని, అభీష్ట సంవత్సరముల కగు సౌరమాసములలో సంస్కరించి, ఆ చాంద్ర తిథుల వలన నగు క్షయ దినములను చాంద్ర తిథుల వలన వ్యవకలించి, సావన దినములను సాధించి, ఆ అహర్గణముచే యుగ సావనదినములకు యుగ భగణము లగుచో అభీష్టాహర్గణమున కెన్ని ? అను అనుపాతముచే అభీష్ట కాలమునకు మధ్య గ్రహమగును.

అహర్గణము - నవీన మార్గము : ఇంగ్లీషు తారీఖులను (క్రీస్తుశకము) బట్టి అహర్గణమును తెలిసికొనవలసినచో సంవత్సరములను 365 చే గుణించి, అందు లీప్ సంవత్సరముల కగు రోజులను కూడ సంస్కరింపవలెను.

గ్రహస్ఫుటము : ఈ అహర్గణమునే అనుపాతముచే సాధింప మధ్య గ్రహమగును. రవి చంద్రులకు భూ కేంద్రము నుండి స్పష్టముగ కన్పించు గ్రహమును సాధించు నిమిత్తము మధ్య గ్రహమునందు చేయదగిన సంస్కారమును గనుగొనవలెను. ఇతర కుజాది గ్రహములను సూర్య కేంద్రమునకును, భూ కేంద్రమునకును సంస్కారములను గనుగొని సంస్కరింపవలెను. కుజాది గ్రహములు సూర్యుని చుట్టును తిరుగుచున్నవి. చంద్రుడు భూమికి ఉప గ్రహము. భూమియు సూర్యుని చుట్టును తిరుగుచుండుటచే భూమి చుట్టును సూర్యుడు తిరుగుచున్నట్లే కనుపట్టును. కావున భూమికి ఉపగ్రహమైన చంద్రునకువలె భూ కేంద్రమునకు కన్పించునట్లు మాత్రమే సంస్కరణము చేయబడుచున్నది.



చిత్రము 268

గ్రహములు తిరుగు పథములు విలోపములైయున్నవి. ఆ విలోపమునందు నాభి బిందువులు రెండు గలవు రవిగాని చంద్రుడుగాని భ్రమించు వృత్తములందు ఒక నాభి భూమి, రెండవ నాభి శూన్యము. చిత్రము 268 లో క, గ, అనునవి నాభిబిందువులు. క బిందువు భూమియగుచో 'ఉ' ప్రదేశము భూమికి విశేష దూరమున నున్నది. కావున 'ఉ' బిందువునకు ఉచ్చయని సంజ్ఞ. 'నీ' ప్రదేశము భూమికి సమీపప్రదేశమగును. దీనికి నీచయని సంజ్ఞ. అట్లు విలోపమునందు గ్రహములు భ్రమణము చేయుట సూర్యసిద్ధాంతమున సూచింపబడెను. తక్కిన సిద్ధాంతములందు సమవృత్తమునందు భ్రమించుచున్నట్లే చెప్పబడెను. మధ్య గ్రహమునందు స్పష్టగ్రహము తెలియుటకై చేయబడు సంస్కారమునకు మందఫలమని పేరు. ఈ మందఫలమును విలోపసంబంధ గణితముచే గాక వృత్తద్వయ కల్పనచే మన పూర్వులు సాధించిరి. అట్టి మందఫలముచే సంస్కరింపబడిన గ్రహము మంద స్పష్ట గ్రహము. కుజాదులకు శీఘ్రఫలమను మరియొక సంస్కారము గలదు. మంద స్పష్టగ్రహము సూర్య కేంద్రమునకు స్పష్టగ్రహమగును. శీఘ్రఫలసంస్కృత గ్రహము భూ కేంద్రమునకు స్పష్ట గ్రహమగును. రవి చంద్రులు మందఫల సంస్కారము చేతనే భూమధ్య స్పష్ట గ్రహములగుదురు. కాని చంద్రునియందు శీఘ్ర ఫల సంస్కారము లేక పోయినను మరికొన్ని సంస్కారములు ఆకర్షణ శాస్త్రమును బట్టి గలుగుచున్నవి. శీఘ్రఫల మనగా సూర్య

కేంద్రిక గ్రహమునకును, భూకేంద్రిక గ్రహమునకును గల అంతరము. చంద్రునియందు గలుగు ఆకర్షణశాస్త్రసంబంధమైన సంస్కారములు పూర్వ సిద్ధాంతములందు చెప్పబడలేదు. కాని ముంజూలుడు, శక 854, శ్రీపతి శక 961, భాస్కరాచార్యులు శక 1072, ఆ సంస్కారములను చెప్పియున్నారు. భాస్కరాచార్యులు తమ బీజోపనయమను గ్రంథమున రవిచంద్రాంతరమును బట్టి, 3¾ భాగల చొప్పున గలుగు సంస్కారములను చెప్పెను. సులభముగ గణితము చేయుటకు సాధనములగు గ్రంథములందు ఇపుడు భాగ భాగకు ఫలములను చూపుచున్నారు. పూర్వులు 3¾, 3¾ భాగలకు చెప్పిరి. ప్రస్తుతము చంద్రునియందు ఆకర్షణ శాస్త్రముచే సంస్కరింపదగిన సంస్కారములు చాల యున్నను విశేష వైషమ్యము లేకుండుటకు చేయతగిన సంస్కారములు 3-4 మాత్రమే గలవు. మందఫలము గాక అధికము లగునవి 1. తిథి సంస్కారము, 2. చ్యుతి సంస్కారము, 3. కక్షా పరిణతి సంస్కారము. అని ఆధునికులు వాడుచున్నారు. భాస్కరాచార్యులు 1, 2 సంస్కారములకు చరబీజమను సంజ్ఞను చేసి యుండెను.

తిథిమానము : ఈ సంస్కారములను సంస్కరింపక మంద ఫల సంస్కారమును మాత్రమే సంస్కరింపుచో తిథికి పరమ వృద్ధి 5 గడియలును, పరమక్షయము 6 ఘటికలును సుమారుగ నుండును. ఈ సంస్కారములను గూడ సంస్కరించుచో పరమవృద్ధి 8 ఘటికలును, పరమక్షయము 10 ఘటికలును సంభవించును. స్మృతి కర్తలగు ఋషులు ధర్మశాస్త్రములగు స్మృతి పురాణాదులందు 10 ఘటికల క్షయమును ఉదహరించి యుండిరి.

శ్లో॥ పూర్వాహ్ణే చే త్ప్రతిపదో భూతే సాయ మమా యది,
ఆరభ్య కుతపే శ్రాద్ధం రౌహిణం తు న లంఘయేత్
(గౌతమస్మృతి)

చతుర్దశి సాయంకాలమువరకు ఉండి, సాయంకాలమునకు అమావాస్య వచ్చి మరునాడు మధ్యాహ్నము వరకు మాత్రమే అమావాస్యయున్నచో కుతపకాలమునందే ధర్మశ్రాద్ధ మారంభించి తొందరగ సమాప్తి చేయవలయునని కలదు. ఈ యుదాహరణ ననుసరించి దినమానము 30 యగు సమకాలమున చతుర్దశి 25 ఘటికల వరకు నుండిన సాయంకాలమునకు అమావాస్య వచ్చినది యగును. మరునాడమావాస్య 15 ఘటికలు మాత్రమే యున్నచో తిథ్యాద్యంతము 50 ఘటికలున్నది యగును.

"అర్కా ద్వినిస్సృతః ప్రాచీం యద్యాత్యహరహశ్శశీ,
తచ్చాంద్రమాన మంశైస్తు జ్ఞేయా ద్వాదశభి స్తిథిః"
(సూర్య సిద్ధాంతము)

దర్శాంతమున సూర్యుని యొద్దనుండి బయలుదేరిన చంద్రుడు ప్రతిదినమును దూరదూరముగ నడచుట చాంద్రమానముచే నైనదినము. ఆ దూరగమనమున 12 భాగలచే నొక్కొక తిథి యగును.

తిథిపరిశీలన : అట్టి తిథిని ఆకాశమునందు పరిశీలించు పద్ధతులు గలవు.

(1) శ్లో॥ తిథ్యంకే శశిని సితా సితాత్తి థిస్స్యాత్
(యన్త్ర చింతామణి)

"వ్యా...రాత్రౌ జలే దర్పణే వా చంద్ర ప్రతిబింబ మవలోక్య తదను రూపం వృత్తం విధాయ పంచదశధా విభజ్య తత్రాప్తే చిహ్నం కుర్యాత్. శుక్లపక్షే తన్మితాః కృష్ణేశేష మితాశ్చతిథయో భుక్తా స్సావయవా జ్ఞేయాః... అత్రోప పత్తిః :- శుక్ల ప్రతిపదాదితః ప్రతిదినం చంద్ర స్యైకైక కలావృద్ధిర్హ్రాసౌ భవతో తశ్చంద్రబింబా త్సితా సిత తిథిసాధనం యుక్తమేవ కృతం"

చంద్రబింబ ప్రమాణమగు వృత్తమును భూమియందు చేసి, అందు శుక్లమెంతగలదో యా భాగమును గుర్తించి చంద్రబింబమంతయు కళాపూర్ణమగుట 15 తిథులచే నగుచో వర్తమాన శుక్లమునకు ఎన్ని తిథులగును? అను అనుపాతముచే లబ్ధము గత తిథులగుచున్నవి; కృష్ణపక్షమున నలుపు వలన గత తిథులగును అని చెప్పబడినది

(2) శ్లో॥ కేంద్రార్థ యష్టివేధా దర్కేందోర్వా రంతరాం
శకాద్యాంశః

స్ఫుటనష్ట తిథిర్జ్ఞేయా తన్మాత్కార్యా తథాచాన్యా,
(పంచ సిద్ధాంతిక, సూర్య సిద్ధాన్తము)

భాగలిప్తాది చిహ్నితమగు కర్ర మొదలగు వాటిచే చేయబడిన ఒక అర్ధవృత్తమునకు కేంద్రమునందు అర్ధవ్యాస (వ్యాసార్ధ) తుల్యములగు రెండు సన్నని గొట్టముల నునిచి వాటినుండి రవి చంద్రుల నొకమారు చూడవలెను. ఆ రెండు గొట్టములును కేంద్రమునందు కలియవలెను. ఒక గొట్టమునుండి సూర్యుడు, రెండవ గొట్టమునుండి చంద్రుడును కనుపింపవలయును. శుక్లపక్షమున సూర్యాస్తమయమునకు పూర్వమందును, కృష్ణపక్షమందు సూర్యోదయానంతరమునను రవి చంద్రులు ఆకసమునందు కనుపింతురు. ఆ అర్ధవృత్తముయొక్క పరిధియందు ఒక గొట్టము నుండి రెండవ గొట్టము వరకు గల యంతరమును భాగలిప్తా విలిప్తలను గణించి 12 చే భాగింప లబ్ధము గత తిథులగును. ఆ మరునాడు ఆ కాలముననే తిరిగి అట్లు రవిచంద్రుల యంతరమును గనుగొని, 12 చే భాగింప లబ్ధము గతతిథులగును. పూర్వ పరదినముల రవి చంద్రాంతరముల యంతరము ఒక దినమున కగు తిథిగతి యగును. ఇది వ్యర్కేందుగతియని వ్యవహరింపబడుచున్నది. ఇట్లు ఆ సమయముననే గణితముచే సాధించుచో ఇష్ట సమయమునకు

స్పుట రవిచంద్రులను వేర్వేరుగ సాధించి చంద్రునిలో సూర్యుని తీసివేయవలెను. ఇది వ్యర్కేందు సంజ్ఞగలది. ఇదియే రవిచంద్రాంతరము. రవిచంద్రాంతరమును 12 చే భాగింపనగు శేషమును వ్యర్కేందు గతిచే గుణించి 60 చే భాగింపనగు ఘటికలు తిథిలో గతమైనవి. 12 భాగలలో ఆ శేషమును తీసివేసి, దీనిని వ్యర్కేందు గతిచే గుణించి 60 చే భాగింపనగు ఘటికాదికము ఇష్టకాలములో గలుప తిథి సమాప్తి కాలమగు చున్నది.

ఇట్లు ప్రతి దినమును తిథిని వేధించి చూచుచున్న ఎడల ఆకర్షణ సంస్కారములను అన్నిటిని సంస్కరించిన చంద్రుని వలననగు తిథియే మనకు గోచరించును. ఇట్లు చూచుటలో తిథిలో స్వల్పవైషమ్యము గలుగు చున్నది. రవి చంద్రులు ఒక కక్షయందు నడచుటలేదు. సూర్యుడు క్రాంతి వృత్తమందును, చంద్రుడు విమండల మందును సంచరించుచుందురు. రవిచంద్రాంతరము క్రాంతి వృత్తమందే గ్రహింపవలెను. చంద్ర విమండల మందున్న చంద్రుని క్రాంతి వృత్తీయ చంద్రునిగ సాధించుటకు కక్షా పరిణతి యను సంస్కారము చేయవలెను. అనగా వేధించి తెలియబడిన చంద్రునియందు కక్షాపరిణతి సంస్కారమును మిశ్రితమై యున్నది. దానిచే స్వల్పమగు అంతరమే గలుగుచున్నది. కక్షాపరిణతి సంస్కారముచే గలుగు పరమాంతరము 26 విఘటికలు అనగా సుమారు 10 నిమిషములు మాత్రమే. చంద్రుని యందు తక్కిన సంస్కారముల సంస్కరింపక మందఫలమును మాత్రమే సంస్కరింపుచో అష్టమీ ప్రాంతమున రమారమి 6 గంటల కాలము పరమాంతరము వ్యత్యాసము గలుగుచున్నది.

సూర్యసిద్ధాంత గణిత విశిష్టత : చంద్రుని పరిశీలించుటలో పర్వాంతములందు మాత్రమే పరిశీలింపుచో ఇతర సంస్కారములు గోచరింపవు. మధ్య తిథులందును పై రీతిగ పరిశీలింపుచో ఇతర సంస్కారములును గోచరించును. పర్వాంత వేధను (పరిశీలనమును) సాధారణముగ మన ప్రాచీనులు జాగ్రత్తగ చేసిరనియే చెప్పవలెను. సూర్య సిద్ధాంతముచే నగు చంద్రమధ్యగతికిని 'న్యూకంబ్' పద్ధతిచే నగు చంద్ర మధ్య గతికిని 100 సంవత్సరములకు 2 విలిప్తలు తేడా గలుగుచున్నది యని వి. బి. కేత్కార్ వ్రాసియున్నారు. అది దిగువ చూపబడుచున్నది.

'సూర్య సిద్ధాంతీయ చంద్ర మధ్యమగతి బ్రహ్మసిద్ధాంత, ఆర్యభట సిద్ధాంతముల చంద్రగతి కంటె సూక్ష్మమై నవీన సూక్ష్మ వేధ సిద్ధ చంద్రగతితో సమముగ నున్నది.

ఒక మహా యుగమునకు = 4320000 రవి భగణములు.

ఒక మహాయుగమునకు = 57753336 చంద్ర భగణములు.

ఒక మహా యుగమునకు = 53433336 చాంద్ర మాసములు

సూర్య సిద్ధాంతముచే = 29.530588258 చాంద్ర మాస దినములు

హానసన్ మతముచే = 29.530587698 చాంద్ర మాస దినములు

అంతరము = 0.000000460 దినము

ఒక రోజునకు చంద్రగతి = 13° 10′ 35″

ఒక రోజునకు చంద్రగతి = 47435 వికలలు

$$\text{పై అంతరమునకు గతి} = \frac{47435 \times 46}{100000000}$$

= 0.02182 వికలలు.

నాక్షత్ర సౌరసంవత్సరము = 365.25637442 రోజులు.

100 సంవత్సరములకు = 36525.637442 రోజులు.

హానసన్ మతముచే నగు 29.530588 చాంద్ర మాస దినములకు 0.02182 వికలాత్మకమగు అంతరము కలుగు చున్నది. కాన నూరు సంవత్సరములకు అగు దినములకు ఎంత ?

$$\frac{29.530588 \times 0.02182}{36525.637442} = 26''.99$$

స్వల్పాంతరముచే = 27 వికలలు.

సూర్య సిద్ధాంతీయ చంద్ర మధ్య గతి కంటె హానసన్ గ్రహించిన చంద్ర మధ్య గతిలో 100 సంవత్సరములకు 27 వికలలు అధిక్యము గలుగుచున్నది, న్యూకంబ్ గ్రహించిన చంద్రగతి కంటె హానసన్ చంద్రగతి 29 వికలలు అధికము. కావున హానసన్ చంద్రగతిలో 29 వికలలు తీసివేసినచో, న్యూకంబ్ చంద్రగతితో సరిపడును. కావున న్యూకంబ్ చంద్ర మధ్యగతి కంటె సూర్య సిద్ధాంతీయ చంద్ర మధ్యగతి 100 సంవత్సరములకు 2 విలిప్తలు మాత్రమే అధికమగుచున్నది (వి. బి. కేత్కార్).

దీనింబట్టి మన పూర్వులును, సూక్ష్మముగ వేధ (పరిశీలనము) ను చేసిరని తెలియుచున్నది. సూర్యాది సిద్ధాంతములు నవీనమైనవని చెప్పు కారణములు సరియైనవి గావు. స్మృతి వచనములు నవీన సంస్కారములను సూచించుట ఆశ్చర్యావహము.

చంద్ర దర్శనము : కర్మకాండము నందు చంద్ర దర్శనము ప్రధానమైనది. పర్వ ప్రతిపత్సంధియందు చేయదగిన ఇష్టి దినమున తూర్పునగాని, పడమటి దిక్కునగాని చంద్ర దర్శనము కాగూడదు - అనియు శ్రుతి గలదు. ఈ శ్రుతిని కొన్ని శాఖలవారు పాటించెదరు. కావున చంద్ర దర్శ

నము, ప్రతిపత్తునాడు ఎపుడగును? అనువివేచనమును స్మృతి సూత్ర కారులు చేసియున్నారు.

ప్రతిపద్దినమున సూర్యాస్తమునకు పూర్వము 3 ముహూర్తములకు ద్వితీయ వచ్చియున్నచో, ఆనాడు చంద్ర దర్శనము సంభవించుననియు, ప్రతిపద్దినమున సూర్యాస్త కాలమునకు ప్రతిపత్తులో ¼ వ భాగము గతించి నాలుగవ భాగ మారంభమైనచో ఒకపుడు చంద్ర దర్శనము కావచ్చుననియును స్మృతి కర్తలు సూచించియుండిరి.

స్మృతి సూత్ర కారాదులు చూపిన ఉదాహరణములు మొదలగు విషయములం బట్టి సర్వ సంస్కార సంస్కృత చంద్రునివలన రవిని తీసివేసి, ఆ రవి చంద్రాంతరమును 12 చే భాగించి లబ్ధము గత తిథులనియు, శేషమును వ్యర్కేందు గతిచే గుణించి, 60 చే భాగింప వర్తమాన తిథిలో గతము తెలియుననియు, శేషమును 12 భాగలలో తీయనగు అంతరమును వ్యర్కేందుచే గుణించి 60 చే భాగింప వర్తమాన తిథి భోగ్యము వచ్చుననియు తెలియుచున్నది. ఈ గుణనభజనాదులందు అవసరమును బట్టి లిప్తలుగను, విలిప్తలుగను మార్చి గణితము చేయుటయు గమనింపదగినది. అట్లు అక్షాంశల బట్టి గలుగు చర సంస్కారము, రేఖాంతర సంస్కారము మొదలగునవియు గమనింపదగియున్నవి.

నక్షత్రము: నక్షత్రము కేవలము చంద్రుని బట్టియే గలుగుచున్నది. క్రాంతి వృత్తము 27 భాగములుగ చేయబడినది. గ్రహములన్నియు వాటివిమండలములందు చరించుచున్నను, గ్రహ సంచారము క్రాంతి వృత్తమునందే చూపబడును. క్రాంతివృత్తమును సంబంధించియున్న నక్షత్ర పుంజములు 27 నక్షత్రములుగ గుర్తింపబడినవి. వాటికి అశ్విన్యాది నామములు ప్రాయికముగ వాటి ఆకారమును బట్టి యుంచబడినవి. అశ్విని అశ్వ ముఖమువలె నుండునది, రోహిణి శకటాకారము గలది (రోహము = ఎక్కుట), రోహిణియందు 5 చుక్కలు గలవు. అందు రెండు జంట చుక్కలు, వాటినిగూడ లెక్కింపుచో 7 చుక్కలగును. ఇట్లు ఒక్కొక్క తారా పుంజమునకు ఒక్కొక్క నక్షత్ర నామము చేయబడెను. ఆ పుంజములలో పెద్ద చుక్క ప్రధాన తార, యోగతార అనియు చెప్పబడును. చిత్ర, స్వాతి మొదలగు నక్షత్రములు ఏకతార గలవియు కొన్ని గలవు. యోగతారనుండి క్రాంతి వృత్తమందు లంబ రూపముగ నుండు దూరము అనగా కదంబ ప్రోతవృత్త* మందలి దూరము శరమను పేరు గలది.

సాయన మేషాదినుండిగాని నిరయన మేషాదినుండిగాని క్రాంతి వృత్తమందు యోగతార మీదుగా చేయబడిన కదంబ ప్రోత వృత్తస్థానము వరకు గల దూరము నక్షత్ర స్థానము, నక్షత్ర ధ్రువము అని చెప్పబడును. సాయన మేషాది నుండి యగు దూరము సాయన ధ్రువము. నిరయన మేషాది నుండి యగు దూరము నిరయన ధ్రువము. విషు చలనముచే సాయన ధ్రువములు విషుచలనముతో సమానముగ చలనము గలవి యగుచున్నవి. శరములు మార్పు చెందవు. కావున నిరయన ధ్రువములును శరములును స్థిరముగ నుండునవి యనవచ్చును. ధ్రువము అనగా స్థిరము. కావున కదంబ ప్రోతీయ నిరయన నక్షత్ర భోగములు నక్షత్ర ధ్రువములని చెప్పబడినవి. పూర్వ సిద్ధాంతము లందు నక్షత్ర యోగతారలకు ధ్రువములు శరములును చెప్పబడినవి. ధ్రువములను పదమును ధ్రువ ప్రోతీయ భోగమని కొందరు తలంచుచున్నారు. ధ్రువ ప్రోతీయము అని స్పష్ట వాక్యమున్నచో అట్లు గ్రహింపక తప్పదుగాని కేవల ధ్రువమను పదమునకు కదంబ ప్రోతీయ భోగమనుటయే యుక్తము. ఈ నక్షత్ర ధ్రువములచే నగు క్రాంతి వృత్తమందలి నక్షత్ర స్థానములు సమాన దూరములో లేవు. కొన్ని నక్షత్రములు దూర దూరముగను, కొన్ని కొన్ని నక్షత్రములు సమీపముగను గలవు. చంద్రుడు ప్రతి దినమును ఒక్కొక నక్షత్రమునకు సమీపమున సంచరించుచుండును. ఒక దినమునకు చంద్రుడు మధ్యగతిచే సుమారు 790 లిప్తలు నడచును. 360 భాగలను 27 చే భాగింప 13° — 20′ అగుచున్నది. క్రాంతి వృత్తమును 27 నక్షత్రపు దేశములుగ విభజింప ఒక్కొక నక్షత్ర ప్రదేశమునకు 800 లిప్తలగుచున్నవి. అనగా చంద్రగమనము ప్రతి దినమునకును ఇంచుమించుగ ఒక్కొక నక్షత్ర ప్రమాణముతో సమానమైయున్నది. క్రాంతి వృత్తమును 27 సమాన భాగములుగ చేయుటలో ఆ యా నక్షత్రపు దేశములలో విశేషముగ ఆ యా నక్షత్రములుండునట్లు గమనించి అనాదిగ విభాగము చేయబడినది.

ఈ నక్షత్ర విభాగము వేదములందే గలదు. మైత్ర్యుపనిషత్తునందు

"మఘాద్యం శ్రవిష్ఠార్ధం ఆగ్నేయం క్రమేణ ఉత్క్రమేణ సార్పాద్యం శ్రవిష్ఠార్ధాంతం సౌమ్యం"

ఇందు మఘా నక్షత్ర ప్రారంభము నుండి ధనిష్ఠార్ధము వరకు అగ్నిదేవతాకమగు దక్షిణాయన మనియును, ఆశ్లేషాంతము నుండి (తలక్రిందుగ) వెనుకకు ధనిష్ఠార్ధము వరకు అనగా ధనిష్ఠా నక్షత్ర తృతీయచరణ ప్రారంభము నుండి ఆశ్లేషాంతము వరకు సూర్యుడు సంచరించు

* కదంబప్రోతవృత్తము లేదా కదంబ భ్రమణవృత్తము క్రాంతి వృత్తధ్రువము.

కాలము ఉత్తరాయణమనియును చెప్పబడినది. మఘాద్యం, ధనిష్ఠార్ధం, ఉత్క్రమేణ సార్పాద్యం, ఈ పదములు నక్షత్ర విభాగమును సూచించుచున్నవి. వేదాంగ జ్యోతిషమునందు 'శ్రవిష్ఠాదా' అను పదముచే నక్షత్ర విభాగముదహరింపబడినది. ఋతు విభాగమును చెప్పు నపుడు ధనిష్ఠా నక్షత్ర ప్రారంభమున సూర్యుడుండ సూర్యున కుత్తరాయణమగునని చెప్పి అది శిశిరర్తు ప్రారంభమగుననియు, $4\frac{1}{2}$ నక్షత్రములు సూర్యుడు సంచరించు కాలము ఒక్కొక ఋతువగుననియు, 'అర్ధ పంచమ భస్త్వృతుః' అను వాక్యముచే వేదాంగ జ్యోతిషమున చెప్పబడినది. నక్షత్ర చక్రరూపమగు క్రాంతి వృత్తము నందు ధనిష్ఠా యోగతారను మొదలిడి అటనుండి 27 సమాన భాగములు చేయబడినవి. నక్షత్రములలో ధనిష్ఠ మొదటి నక్షత్రమనుట వేదములందు సూచించబడెను.

"అష్టౌ దేవా వసవ స్సోమ్యాసః
చతస్రో దేవీ రజరా శ్రవిష్ఠాః
తే యజ్ఞం పాంతు రజసః పరస్తాత్
సంవత్సరీణ మమృతగ్ం స్వస్తి" (కృష్ణ యజుర్వేదము)

ఇందు వసువులు దేవతగాగల ధనిష్ఠానక్షత్రమున 8 చుక్కలు గలవనియును, 4 చుక్కలు బాగుగ ప్రకాశించునవి యనియును, ఆ ధనిష్ఠా నక్షత్రములు సంవత్సరమంతయును నాశన రహితమై ఆనందరూపమగు శుభము నిచ్చుగాక యని కోరబడినది. సంవత్సరీణం సంవత్సరమందంతటను అగు శుభమును అనుటచే సంవత్సరారంభ కత్వము, దానిచే నక్షత్ర చక్రారంభ కత్వము సూచింపబడెను.

"వసవో వా అకామయంత, అగ్రం దేవానాం
పరి యా మేతి" (తైత్తిరీయశ్రుతి)

ఇందు నక్షత్రములకు ముందు నడువవలెనని ధనిష్ఠలు కోరి తపస్సు చేసినట్లు గలదు.

మహాభారతమునందు,

ధనిష్ఠాది స్తదా కాలో బ్రహ్మణా పరికల్పితః
(అరణ్య పర్వము)

బ్రహ్మచే ధనిష్ఠాది కాలము కల్పింపబడెనని కలదు. ధనిష్ఠా యోగతార ధనిష్ఠాదియందు ఉండునట్లు విభాగము చేసిన చిత్రా నక్షత్రము చిత్రా విభాగ ప్రదేశమునకు మధ్యయందున్నది యగును. చిత్రా నక్షత్రమునకు ఎదుట 180 భాగలలో అశ్విన్యాది చేయబడెను. అటనుండి 13° — 20′ చొప్పున 27 సమాన భాగములు అశ్విన్యాది నక్షత్రములు. చంద్రుడొక్కొక్క రోజు ఒక్కొక్క నక్షత్రమునందు సంచరించునని ఇదివరలో చెప్పబడినది. రాత్రియందు మేఘావరణముగాని, మంచుగాని లేక నిర్మలమగు వసంత రాత్రులు, శరద్రాత్రులు మొదలగు రోజులలో చంద్రుడు ఏ నక్షత్ర ప్రాంతమున నున్నదియు చూచి స్థూలముగ ఆనాడు ఏ నక్షత్రమైనదియు తెలిసికొనవచ్చును. సామాన్యముగ పంచాంగ కర్తలచే పంచాంగములందు ప్రతి దినమును చంద్రుడే నక్షత్ర ప్రదేశములో సంచరించునదియు, ఆసంచారమునకు ప్రారంభమును, సమాప్తియును నక్షత్రముగ చూపబడును. రవ్యాది సమస్త గ్రహములకును నక్షత్ర ప్రవేశమును, పాద ప్రవేశమును తెలియచేయుటయు గలదు. చంద్రుని నక్షత్ర సంచారము మాత్రమే నక్షత్రముగ చూపబడుచున్నది. ముహూర్త విచారమునందు చంద్ర సంచార నక్షత్రమే ప్రధానముగ గ్రహింపబడుచున్నది. చంద్రుడు దినమున కొక నక్షత్రముననుండుట మారుచుండుటచే చంద్రుడు ఒక్కొక్క రాత్రి ఒక్కొక్క నక్షత్రముతో నుండును. కావున చంద్రునకు నక్షత్రములు భార్యలుగ చెప్పబడినది. అందు రోహిణి నక్షత్రము శకటాకారముగ నుండుట దాని నడుమనుండి నడచుట చంద్రునకు తరచు సంభవించుటచే రోహిణి ప్రియ భార్యగ చెప్పబడినది. ఈ సంఘటనము రోహిణిలో సంపాతముండు కాలమున విశేషముగ సంభవించి యుండునని నవీనులు తలంచుచున్నారు. ప్రాచీనులు రామాయణాదులందు ఈ చంద్ర నక్షత్ర సమాగమమును విశేషముగ వర్ణించియుండిరి.

"విరరాజ మహాబాహు శ్చిత్రయా చంద్రమా ఇవ"
"ఆదిత్యే భ్యుదితే రాత్రౌ మధ్యస్థ ఇవ చంద్రమాః"
(రామాయణము)

ఆదిత్యమన పునర్వసు, పునర్వసులో 5-6 నక్షత్రములున్నను పెద్ద చుక్కలు రెండు గలవు. ఆ రెండింటి నడుమనున్న చంద్రునివలె కర్ణభూషణముల నడుమనున్న కుంభకర్ణు శిరము ప్రకాశించెనని గలదు.

తాభ్యాపి భ్రాజతి తత్స కుండలం
విశాఖయో ర్మధ్యగత శ్శశీ యథా
(భారతము, కర్ణపర్వము)

ఇట్టి ఉదాహరణములు చాల గలవు. అట్టి చంద్ర నక్షత్ర సమాగమములచే చంద్రుని పరీక్షింపవచ్చును. గ్రహ నక్షత్ర సమాగమములచే గ్రహముల పరిశీలింప వచ్చును.

పురాణ నక్షత్ర భోగములు: సూక్ష్మ నక్షత్రానయనమను మరియొక పద్ధతిని ప్రాచీనులు నిర్ణయించి యుండిరి. అది లోక వ్యవహారమునందు లేకపోయినను శాస్త్రమునందు గలదు.

శ్లో॥ అధ్యర్ధ భోగాని షడత్ర తజ్ఞాః
ప్రోచు ర్విశాఖా వితిభధ్రువాణి

షడర్ధ భోగానిచ భోగి రుద్ర
వాతాంత కేంద్రాధిప వారుణాని
శేషాణ్యతః పంచదశైక భోగా
న్యుక్తో భభోగ శ్శశిమధ్య భుక్తిః
సర్వర్క్ష భోగోనిత చక్రలిప్తా
వైశ్వాగ్రతస్స్యా దభిజిద్భ భోగః (సిద్ధాంత శిరోమణి)

భాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంత శిరోమణి స్పష్టాధికారాంతమునందు 'స్థూలంకృతం భానయనం య దేత జ్జ్యోతిర్విదాం సంవ్యవహార హేతోః సూక్ష్మం ప్రవక్ష్యేథ ముని ప్రణీతం వివాహ యాత్రాది ఫల ప్రసిద్ధ్యై' అని క్రాంతి వృత్తమున 27 సమాన భాగములుగ విభజించి చేయబడిన నక్షత్రానయనము స్థూలమనియును, పులిశ, గర్గ, వసిష్ఠాదులచే చెప్పబడిన సూక్ష్మ నక్షత్ర పద్ధతిని చెప్పెదనని ఈ పద్ధతి చెప్పి యుండెను. ఇందభిజిత్తుగూడ చేర్చబడెను. నక్షత్రములు మూడు విధములుగ విభజింపబడినవి. విశాఖ, పునర్వసు, రోహిణి, ఉత్తరాత్రయము ఇవి అధ్యర్ధ భోగములు. అనగా $1\frac{1}{2}$ నక్షత్ర ప్రమాణము గలవి. ఆశ్లేష, ఆర్ద్ర, స్వాతి, భరణి, జ్యేష్ఠ, శతతార, ఇవి అర్ధ భోగములు అనగా 1/2 నక్షత్ర ప్రమాణము గలవి. తక్కిన అశ్విని, కృత్తిక, మృగశిర, పుష్యమి, మఘ, పూర్వ ఫల్గుని, హస్త, చిత్ర, అనూరాధ, మూల, పూర్వాషాఢ, శ్రవణము, ధనిష్ఠ, పూర్వాభాద్ర, రేవతి ఇవి ఏక నక్షత్ర ప్రమాణము గలవి. ఒక నక్షత్ర ప్రమాణము 790′ 35″. అధ్యర్ధభోగము $1\frac{1}{2}$ నక్షత్ర ప్రమాణము 1185′ 52″. అర్ధభోగము $\frac{1}{2}$ నక్షత్ర ప్రమాణము 395′ 17″. అన్నిటియొక్క మొత్తము $(790'\,35'') \times 6 + (1185'\,52'') \times 15 + (395'\,17'') \times 6 = 21345'\,42''$. నక్షత్ర ప్రమాణము నందును తదర్ధము నందునుగల స్వల్పావయవములను గమనింప 3 విలిప్తలు అధికమైనవి. వీటిని చక్రలిప్తలు 21600 లో తీసివేయ 254′ 18″ అభిజిత్ప్రమాణమగును అని చెప్పబడినది. చంద్ర మధ్యమగతి నక్షత్ర ప్రమాణమని చెప్పబడినది. చంద్ర మధ్యమగతి 790′ 34″ · 86. ఈ పద్ధతికి ఆగమ ప్రామాణ్యము కంటె వేరుగ యుక్తి లేదని పూర్వులే వ్రాసియుండిరి. దీనిని గూర్చి విమర్శింపవలసియున్నది.

యోగము : రవి చంద్రాంతరమువలన తిథి, కేవల చంద్రునివలన నక్షత్రము అగునట్లు రవి చంద్ర యోగము వలన యోగము అగుచున్నది. మేషాదినుండి స్ఫుట రవి, మేషాదినుండి స్ఫుట చంద్రుడు ఈ రెండింటిని భాగలిప్తా విలిప్తలతో సాధించి, లిప్తలను 800 చే భాగింప లబ్ధము గత యోగము లగును. శేషమును రవి చంద్రుల దినగతుల యోగముచే గుణించి 60 చే భాగింప వర్తమాన యోగమున గత ఘట్యాదిక మగును. శేషమును 800′ లో తీసివేసి దానిని రవి చంద్రగతి యోగముచే గుణించి 60 చే భాగింప వర్తమాన యోగము నందేష్య (భోగ్య) ఘటిక లగును. ఇందును తాత్కాలిక గతి సంస్కార మావశ్యకము.

నక్షత్రమునుబట్టియు తిథిని బట్టియు యోగమును తెలిసికొనవచ్చును.

2 చం. − (చం − ర) =

2 చం. − చం + ర = చం + ర

కావున సావయవ నక్షత్ర సంఖ్య × 2 − సావయవ తిథి సంఖ్య = యోగము అనవలయును.

కాని 360 భాగలకు నక్షత్రములు 27

360 భాగలకు యోగములు 27

360 భాగలకు తిథులు. 30

తిథికి హారము 720, నక్షత్ర యోగములకు హారము 800, ఈ కారణముచే నక్షత్ర ప్రకరణమున చెప్పబడిన రీతిని తిథి సంఖ్యలో దానిలోని పదియవ వంతునుతీసి యట్టి తిథి సంఖ్యను వ్యవకలింపవలెను.

$$\text{కావున, } 2\ \text{గతనక్షత్ర} + \frac{\text{శే}}{800} - \left\{ \text{గతతిథి} + \frac{\text{శే}}{720} - \text{స్వ}\ 1/10 \right\} =$$

సావయవ యోగ సంఖ్య అగును.

ఈ యోగములు విష్కంభ, ప్రీతి, ఆయుష్మాన్ మొదలగు పేర్లతో 27 గలవు.

వ్యతీపాతము : సాయన రవి చంద్రుల యోగము 180°, గాని 360° గాని యున్నచో రవి చంద్రులకు క్రాంతి సామ్యము ప్రాయికముగ గలుగును. సూర్యునకును, చంద్రునకును క్రాంతి సమముగనున్న యెడల ఏకాహోరాత్ర వృత్తమందాతఃణముననున్న వారయ్యెదరు. అపుడు రవి కిరణములు చంద్రుని యందును, చంద్రకిరణములు రవి యందును పరస్పర సమ్ముఖముగనున్న రవి చంద్రులందు పడుట సంభవించును. ఇట్లు కిరణ పతనముగల కాలము పాత కాలము అని చెప్పబడును. ఈ విషయము సూర్య సిద్ధాంతమున నిట్లు చెప్పబడినది.

శ్లో ॥ తుల్యాంశు జాలసంపర్కాత్తయోస్తు ప్రవహాహతః
తద్దృక్క్రోధభవో వహ్నిర్లోకాభావాయ కల్పతే....

సమానమైన కిరణ సముదాయము యొక్క సంపర్కము ఆ రవి చంద్రులకు సంభవించుటచే ఆ రవి చంద్రుల యొక్క పరస్పర దృష్టిచేనగు క్రోధము వలన గలిగిన యగ్ని ప్రవాహము వాయువుచే కొట్టబడినదై లోకముల నశింపచేయునది యగును. ఇట్టి క్రాంతి సామ్యము రవి చంద్రులు ఏకాహోరాత్ర వృత్తమందుండక పోయి

నను, ఒక గ్రహము విషువృత్తమునుండి దక్షిణపు వైపున అహోరాత్రవృత్తమందును, రెండవ గ్రహము విషువృత్తమునకు అంతియ దూరమున ఉత్తరమున నున్న యహోరాత్ర వృత్తమందును, నున్నపుడును గలుగుచున్నది. ఇదియును అట్టి దోషము గలదియే యగును. దీనినే ఇట్లు చెప్పవచ్చును. రవి చంద్రులు భిన్నగోళము లందుండి ఏకాయన గతులగునపుడొక క్రాంతి సామ్యము; ఏకగోళ మందుండి భిన్నాయన గతులగునపుడొక క్రాంతి సామ్యము. ఈ యోగములు వివాహాది శుభ కర్మలందు నిషేధింపబడినవి.

యోగనామములు : ఆ యోగముల యొక్క పేర్ల చేత నే క్రూరములని తెలియదగిన వాటికే నిషేధము. 1 విష్కంభము, 6 అతిగండము, 9 శూల, 10 గండము, 13 వ్యాఘాతము, 15 వజ్రము, 17 వ్యతీపాతము, 19 పరిఘము, 27 వైధృతము - ఈ యోగములు దుష్టములు. తక్కినవి: 2 ప్రీతి, 3 ఆయుష్మాన్, 4 సౌభాగ్యము, 5 శోభనము, 7 సుకర్మ, 8 ధృతి, 11 వృద్ధి, 12 ధ్రువము, 14 హర్షణము, 16 సిద్ధి, 18 వరీయాన్, 20 శివము, 21 సిద్ధ, 22 సాధ్యం, 23 శుభం, 24 శుక్లం, 25 బ్రహ్మము, 26 ఐంద్రము - ఈ యోగములు శుభములు. ఇందలి దుష్ట యోగములు గలిగినపుడెల్లను శుభకార్య నిషేధము పాటింపబడుట లేదు.

కరణములు : ఒక్కొక తిథికి రెండు కరణములు. తిథి యొక్క ఆద్యంత ప్రమాణమును గనుగొని దానిని 2 చే భాగింప నగు సగములలో పూర్వార్ధ మొక కరణము, ఉత్తరార్ధ మొక కరణము. తిథి రవిచంద్రాంతరము వలన కలుగుచున్నదని ఇదివరకే చెప్పబడినది.

అట్లే రవిచంద్రాంతరము వలననే కరణమును గలుగుచున్నది. స్ఫుటచంద్రునిలో స్ఫుట రవిని తీసివేయగా నగు రవి చంద్రాంతరమును లిప్తలలోనికి మార్చి, ఆ లిప్తాదికమును 720 చే భాగింప గత తిథులగును. అట్లు స్ఫుట రవిని స్ఫుట చంద్రునిలో తీసివేసి, ఆ అంతరమును 360 చే భాగింప లబ్ధము గత కరణములగును. శేషమును వ్యర్కేందుగతిచే గుణించి 60 చే భాగింప వర్తమాన కరణమునందు గతఘట్యాదికమగును. ఆ శేషమును 360 లో తీసివేయగా మిగిలిన దానిని వ్యర్కేందుగతిచే గుణించి, 60 చే భాగింప కరణమునందు ఏష్య (భోగ్య) ఘటికాదికమగును. పూర్వ తిథిని 60 లో తీసివేయ వర్తమాన తిథిగత మగును. సూర్యోదయము నుండి వర్తమాన తిథికి సమాప్తికాల మీయబడును. అట్టి వర్తమాన తిథి యందు వర్తమాన తిథిగతమును కలుప తిథ్యాద్యంత మగును. దానిని సగముచేసి, దానిని పూర్వ తిథిలో కలుప తిథిపూర్వార్ధమగు కరణమునకు సమాప్తి కాల మగును. ఆ పూర్వార్ధ సమాప్తి కాలము 60 కంటె ఎక్కువగ నున్నచో దానినుండి 60 ని తీసివేయగా మిగిలినది సూర్యోదయానంతరము తిథి పూర్వార్ధ సమాప్తి కాలముగ నెరుంగ వలెను. 60 కంటె తక్కువగ నున్న ఎడల ఉత్తరార్ధము అప్పటినుండి యారంభమగుననియును, ఆ పూర్వార్ధ సమాప్తి కాలమందు ఉత్తరార్ధమగు సగమును గూడ చేర్ప నగు ఘట్యాదికము వలన 60 ని తీసివేయగా మిగిలిన ఘటికాదులు సూర్యోదయమునుండి ఉత్తరార్ధ సమాప్తి కాలమనియు తెలియవలయును. ఒక మాసమునకు తిథులు 30 గావున కరణములు 60 యగుచున్నవి. కాని కరణములు చర కరణములు 7, స్థిర కరణములు 4, మొత్తము కరణములు 11 అగుచున్నవి. 1 బవ, 2 బాలవ, 3 కౌలవ, 4 తైతుల, 5 గర, 6 వణిక్, 7 విష్టి, (భద్ర) అను నవి చర కరణములు. శకుని, చతుష్పద, నాగవ, కింస్తుఘ్న అను నవి స్థిర కరణములని చెప్పబడుచున్నవి. కృష్ణపక్షమందలి చతుర్దశి యొక్క ఉత్తరార్ధము శకుని, అమావాస్య యొక్క పూర్వార్ధము నాగవము, ఉత్తరార్ధము చతుష్పదము, శుక్ల ప్రతిపత్తుయొక్క పూర్వార్ధము కింస్తుఘ్నము. ఈ నాలుగు కరణములను 60 లో తీసివేయగా నగు 56 ను 7 చే భాగింప 4 వచ్చును. అనగా చరకరణము లేడును మాసము నందు 4 పర్యాయములు తిరిగి తిరిగి వచ్చుచున్నవి. ఇట్లొక మాసమునందు తిరిగి వచ్చుటచేత నే చరకరణములని చెప్పబడినవి. బహుళ చతుర్దశ్యుత్తరార్ధము నుండి శుక్ల ప్రతిపత్పూర్వార్ధము వరకు నగు 4 కరణములును ఆ రోజులందే యుండి ఇతర దినములందు గలుగవు. కావున నివి స్థిర కరణకములని చెప్పబడుచున్నవి. అమావాస్య యొక్క పూర్వార్ధము చతుష్పదమనియును, ఉత్తరార్ధము నాగవమనియును చెప్పుదురు.

వారములు : రవి చంద్ర కుజ బుధ గురు శుక్ర శనులను సప్తగ్రహముల యొక్క నామములచే సావన దినములు వ్యవహరింపబడుచున్నవి.

ఈ వారములకు రవిచంద్రకుజాదిక్రమముగ గ్రహనామముల నేర్పరచుటకు కారణమిట్లు కలదు. గ్రహములు సూర్యుని చుట్టు తిరుగుచున్నను మన వ్యవహారము భూమి నుండియే జరుగుచున్నది. కావున భూమి చుట్టునుగల గ్రహకక్షాక్రమము ప్రతిపాదింప బడినది. భూమికి చంద్ర, బుధ, శుక్ర, రవి, కుజ, గురు, శని, నక్షత్రములు క్రమముగ ఊర్ధ్వోర్ధ్వములుగా నున్నయట్లు సిద్ధాంతములందు గలదు. అనగా భూమినుండి అన్ని గ్రహములకంటెను అతి

దూరమున నక్షత్రకక్ష. ఆనక్షత్ర కక్షకుదిగువ శనికక్ష. అట్లు శని, గురు, కుజ, రవి, శుక్ర, బుధ, చంద్రకక్షలు క్రమముగా భూమికి సమీపమున నున్నవి.

శ్లో॥ మందామరేజ్య భూపుత్ర సూర్య శు క్రేందు జేందవః
పరిభ్రమంత్య ధోధస్థా స్సిద్ధ విద్యాధరా ఘనాః
(సూర్య సిద్ధాంతము, భూగోళాధ్యాయము)

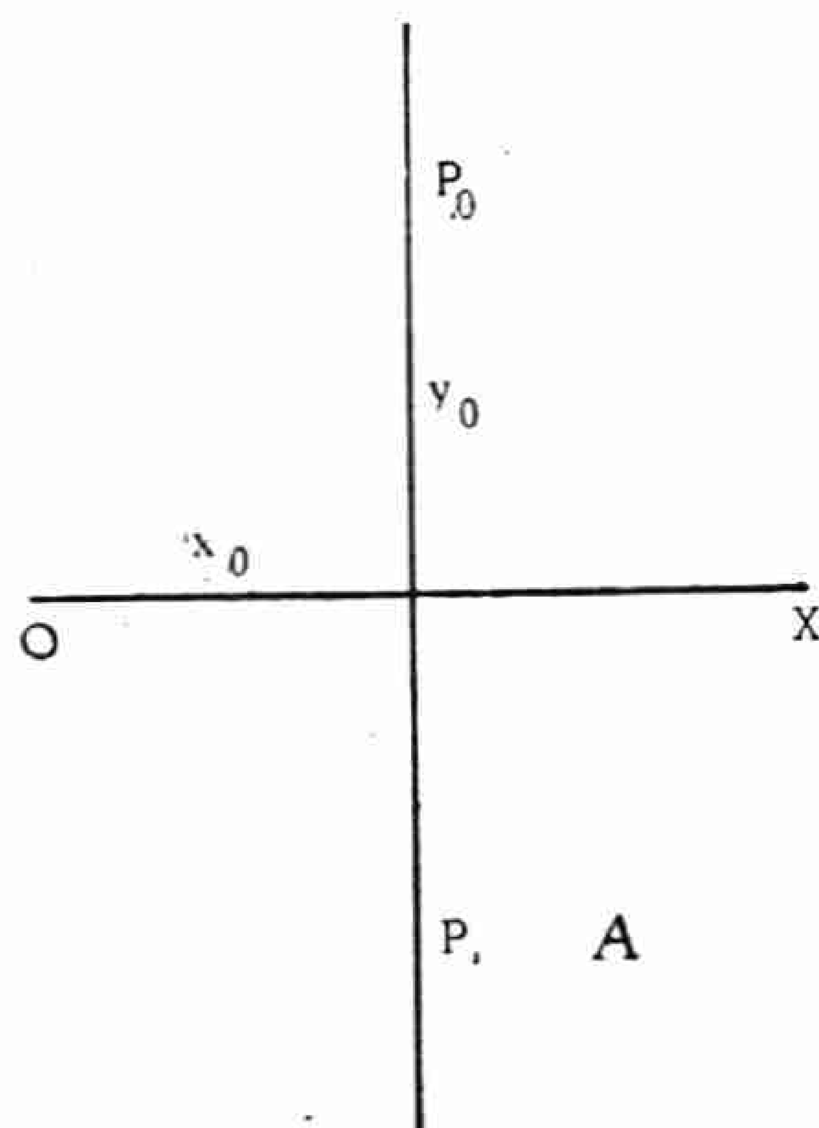
ఈ క్రమము ననుసరించి ప్రతి దినమునకును హోరాధిపతులు : దినమునకు 24 హోరలు. శని గురు కుజ రవి శుక్ర బుధ చంద్ర హోరలు తిరుగ తిరుగ నావృత్తియగుచో 3 అవృత్తులైన పిమ్మట 4 వ పర్యాయము శని గురు కుజులు ముగ్గురును హోరాధి పతులగుటచే 24 హోరలును పూర్తియై పరదినమున ఉదయమునకు రవి హోరయగును. అట్లు రవి హోరనుండి లెక్కింప ఆ మరునాడు సూర్యోదయమున చంద్రహోరయగును. ఇట్లు తత్పర దినోదయమునకు కుజహోర యగును. వరుసగా లెక్కింప మొదటి దినమున ఉదయమున శని హోరయగుచో క్రమముగ ప్రతి దినము నను సూర్యోదయమునకు రవి, చంద్ర, కుజ, బుధ, గురు, శుక్రుల హోరలగుచున్నవి. ఉదయకాలికహోరాధి పతియే వారాధిపతి యగునని ప్రాచీనులు ఏర్పరచినట్లు సిద్ధాంత ములందు వ్రాయబడినది.

శ్లో॥ మందా దధః క్రమేణ స్స్యుః చతుర్థా దివసాధి పాః
హోరేశాః సూర్య తనయాత్ అధోధః క్రమశ స్తథా.
(సూర్య సిద్ధాంతము, భూగోళాధ్యాయము)

పి. కృ. శా.

పంజరవాదము : ఈ వ్యాసమునందు జ్యామితీయ బిందువులు పెద్ద అక్షరములు (P, Q......) ల చేతను, వాని నిరూపకములు చిన్న అక్షరముల చేతను (x, y ...) పరికర్మలు రోమన్ అక్షరముల (A, B, C, ...) చేతను గుర్తింపబడును.

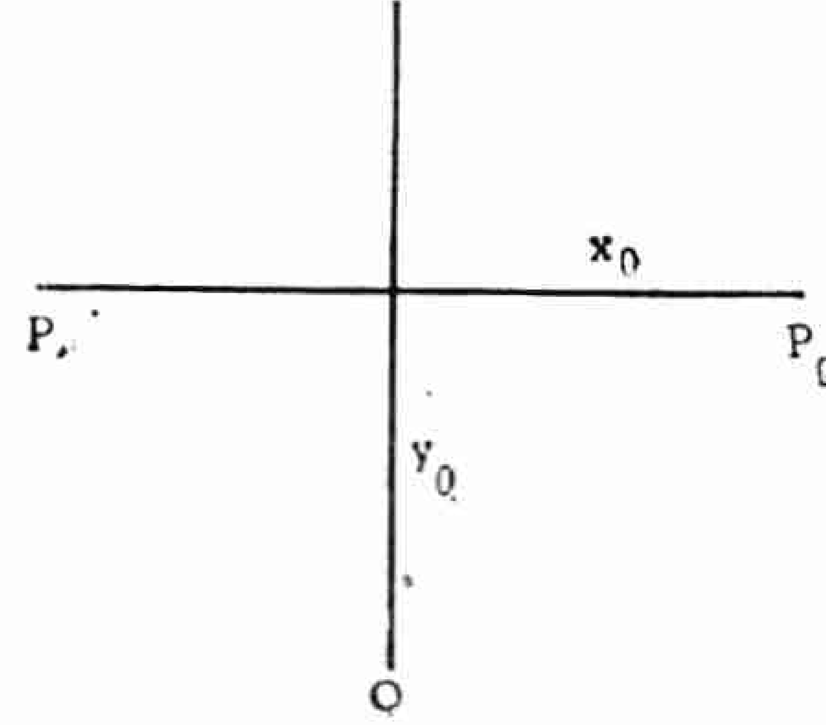
OX అనునది X అక్షము. బిందువు P_0 యొక్క నిరూపకములు x_0, y_0. పరికర్మ A చే P_0 బిందువు OX వెంబడి తిరిగి P_1 స్థానమును పొందును. P_1 యొక్క నిరూపకములు (x_1, y_1); పరికర్మ A చే క్రింది పరివర్తనము ఏర్పడును.



చిత్రము 269

$$A \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$$

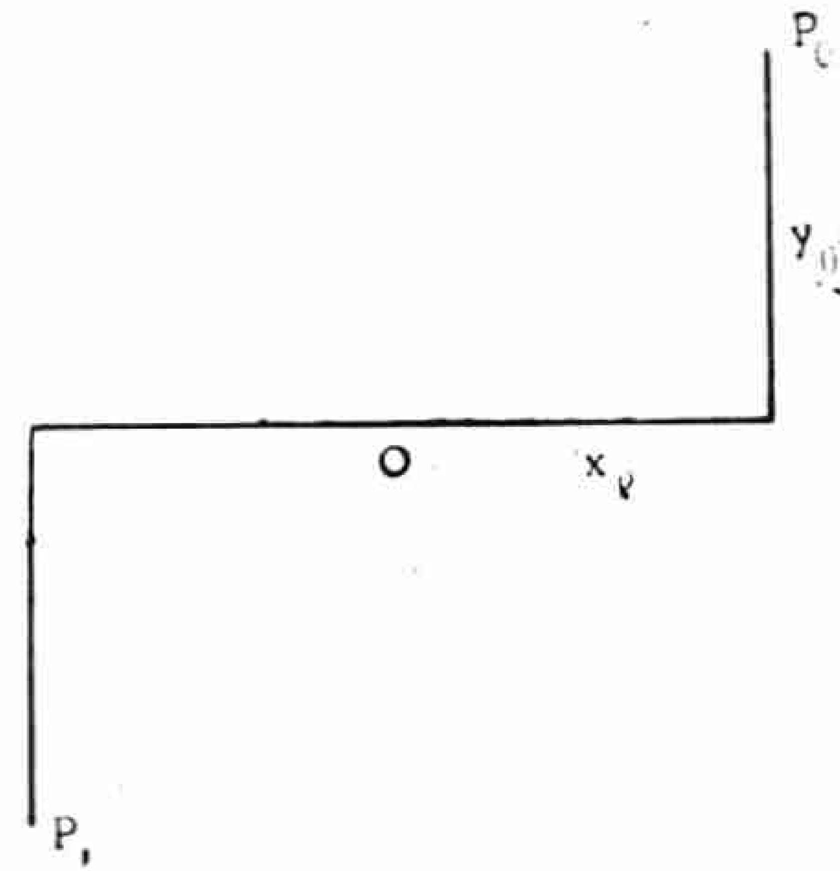
ఈ రెండు సమీకరణములు పరికర్మ A ను పూర్తిగా గుర్తించును. దీనిచే బిందువు x_0, y_0 యొక్క మార్పు గుర్తింపబడును. పరికర్మ B చే బిందువు OY అక్షముపై తిరుగును (చూ. చిత్రము 270).



$$B \begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases}$$

చిత్రము 270

పరికర్మ C చే మూలబిందువు O చుట్టు P_0 బిందువు 180° గుండ భ్రమణము చేయును (చూ. చిత్రము 271).



$$C \begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases}$$

చిత్రము 271

మరియొక పరికర్మ D తీసికొనుము. ఇందు OL పై P_0 బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము తీసికొనబడును (చూ. చిత్రము 272 పు. 371).

$$\angle LOX = \alpha ;$$

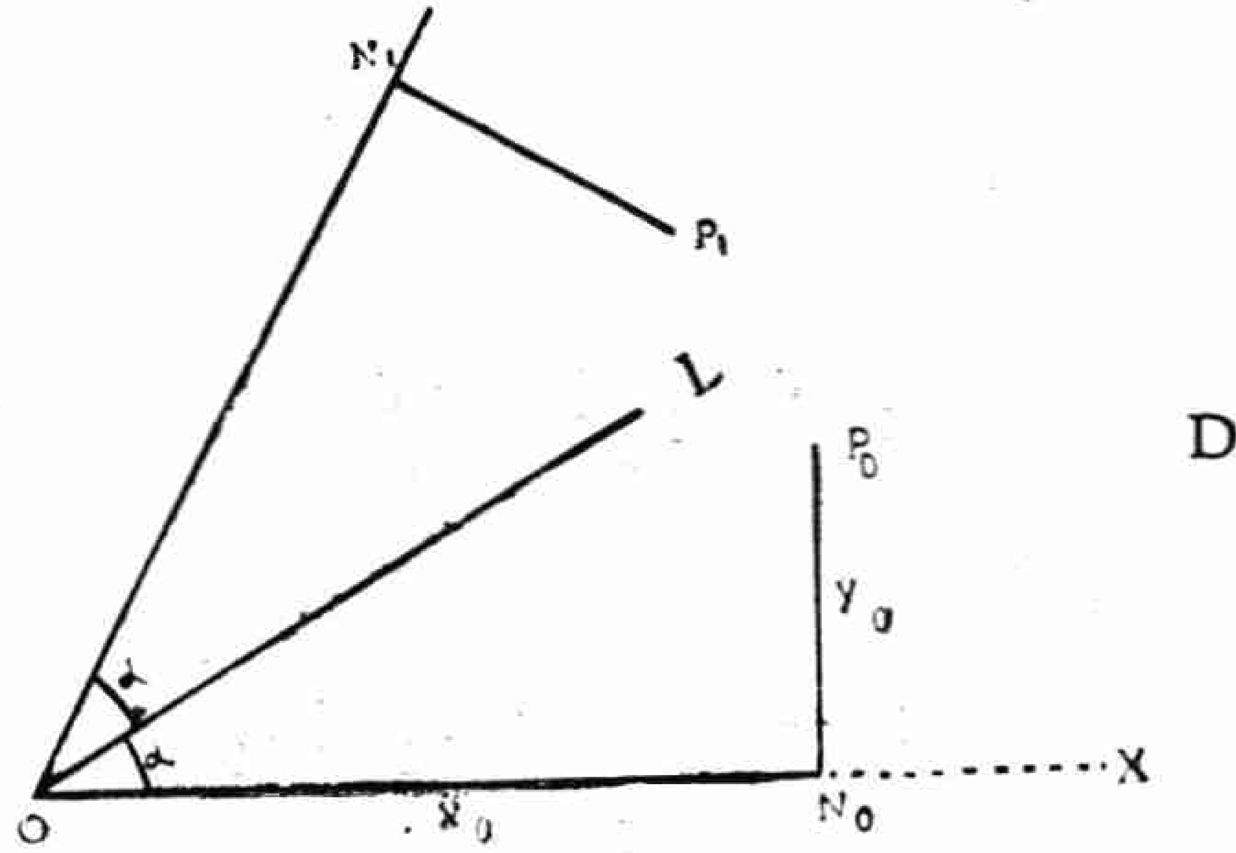
P_1 బిందువు P_0 యొక్క ప్రతిబింబ బిందువు ; OX కు లంబము P_0N_0 అయినచో, $ON_0 = x_0$; $N_0P_0 = y_0$ $\angle LON_1 = \alpha$; ON_1 ఋజురేఖకు P_1N_1 లంబము. $ON_1 = ON_0 = x_0$; $P_1N_1 = P_0N_0 = y_1$.

P_1 బిందువుయొక్క నిరూపకములు x_1, y_1 అయినచో, x_1, y_1, x_0, y_0 యొక్క సంబంధమును కనుగొనవచ్చును.

P_1 యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుటకు ON_1, N_1P_1 ఖండములను X, Y నిరూపకాక్షములపై విక్షేపించుము.

$$\angle N_1ON_0 = 2\alpha.$$

కాబట్టి D $\begin{cases} x_1 = x_0 \cos 2\alpha + y_0 \sin 2\alpha \\ y_1 = x_0 \sin 2\alpha - y_0 \cos 2\alpha \end{cases}$



చిత్రము 272

దీనికి ఒక సులభరూపముకలదు. పరికర్మను E చే గుర్తించిన,

E $\begin{cases} x_1 = y_0 \\ y_1 = x_0 \end{cases}$

ఈ పరికర్మచే x, y నిరూపకములు పరస్పరము పరివర్తనము చెందును. ఇచ్చట $\alpha = 45^\circ$. ఇపుడు P_0 బిందువు (2, 3) అయిన P_1 యొక్క నిరూపకములు (3, 2) అగును.

భ్రమణములు : కోణము θ గుండ OX అక్షము యొక్క భ్రమణమును పరికర్మ F చే గుర్తించుము (చూ. చిత్రములు 273, 274).

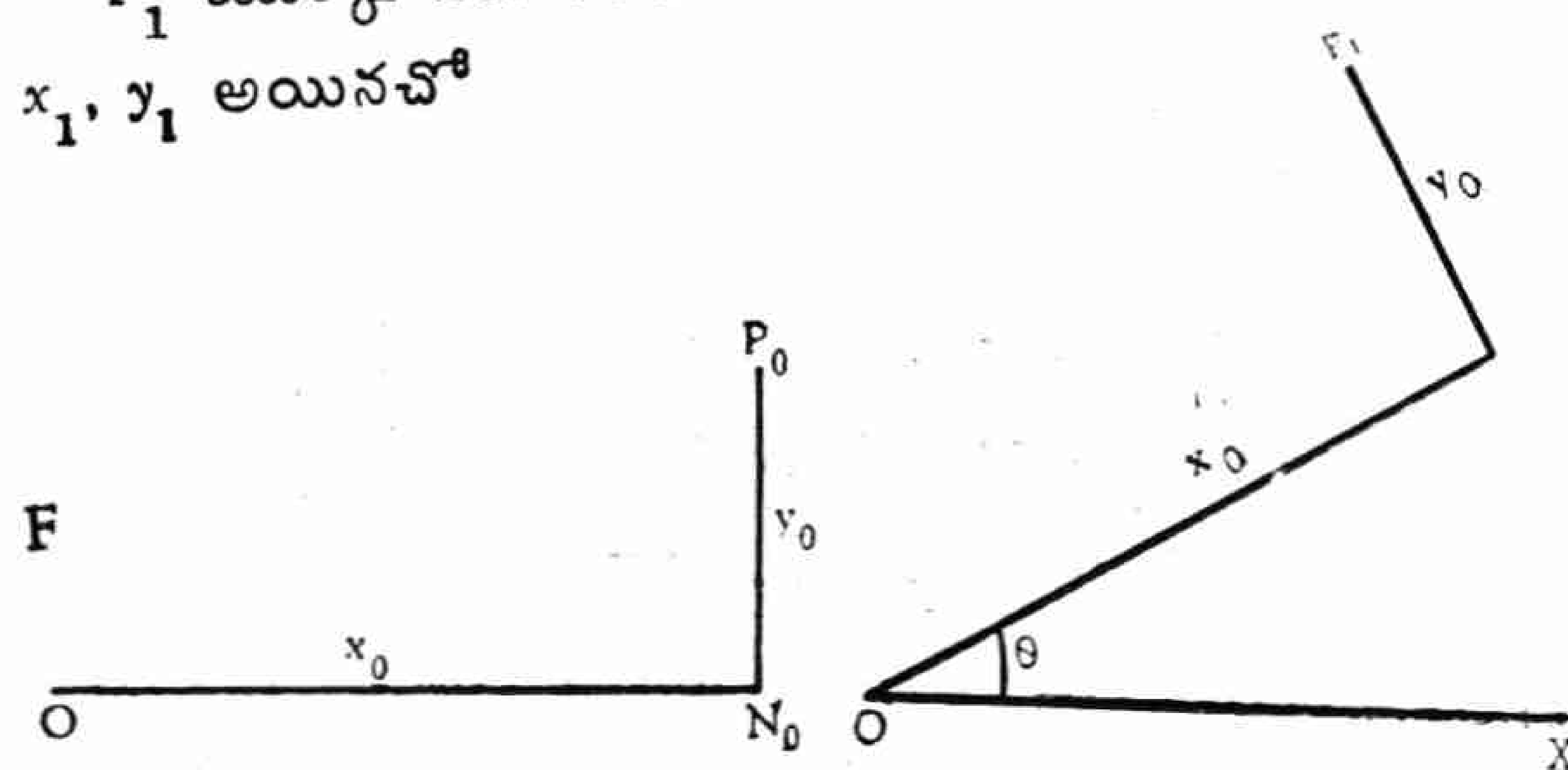
P_0 యొక్క నిరూపకములు x_0, y_0.

X అక్షము (ON_0) మూలబిందువు O చుట్టు θ కోణము గుండ భ్రమణము చేయనిమ్ము.

P_0 బిందువుయొక్క నూతనస్థానము P_1 ;

P_1 యొక్క నిరూపకములు

x_1, y_1 అయినచో

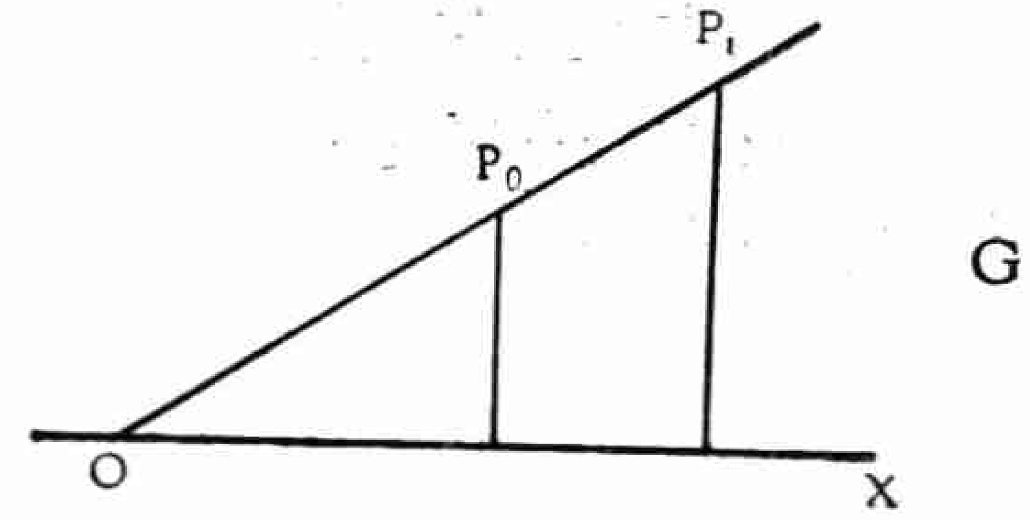


చిత్రము 273 చిత్రము 274

F $\begin{cases} x_1 = x_0 \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x_0 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$

పొడిగించుట : ఈ పరికర్మను G చే గుర్తించెదము. ఇందు బిందువు P_0 ఋజురేఖ OP_0 వెంబడి వెళ్లి P_1 స్థానమును పొందును.

$OP_1/OP_0 = k$ అయిన



చిత్రము 275

సరూప త్రిభుజముల సహాయమున లభించు పరివర్తనము

G $\begin{cases} x_1 = kx_0 \\ y_1 = ky_0 \end{cases}$

పంజర సంజ్ఞ : బిందువు P_0 స్థానచలనముచే P_1 స్థానము చేరిన, నూతన నిరూపకముల గుర్తించు సమీకరణములు ఇదివరలో గుర్తింపబడినవి. వానికి వ్యాపకరూపము క్రింద ఈయబడినది :

$$x_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0$$
$$y_1 = a_2 x_0 + b_2 y_0$$

స్థిరరాశులు, a_1, b_1, a_2, b_2 మారుటవలన పరికర్మలు A, B, C, D, E, F, G ఏర్పడును.

కాబట్టి గణిత వ్యాపారమంతయును a_1, b_1, a_2, b_2 స్థిరరాశులపై ఆధారపడియున్నది. ఒక జంతువుయొక్క రూపము, బలము మొదలగునవి దాని ఎముకల గూడు - పంజరముపై ఆధారపడియుండును అని మనకు తెలుసును.

గణిత పరికర్మల ధర్మము అట్లే పంజరము

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ పై ఆధారపడియుండును.

ఇదివరలో వాడిన పరికర్మలను పంజర రూపములో వ్రాయుదుము.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

కొన్ని సమయములందు గుణకములు a_1, b_1, a_2, b_2 లతో కూడ నిరూపకములు x, y మనకు తెలియవలయునని, క్రింది విధములో వ్రాయవచ్చును :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ఇది పంజరముయొక్క వ్యాపకరూపము. విడదీసి వ్రాసిన

$$x_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0$$
$$y_1 = a_2 x_0 + b_2 y_0$$

a_1, b_1, c_1, d_1 యొక్క ప్రత్యేక విలువలకు పై పరికర్మ, భ్రమణము, ప్రతిబింబము, పొడుగింపులను గుర్తించును. ఇంతేనా? లేక వేరు పరికర్మల ఇది గుర్తించునా? జ్యామితీయ రూపములలో అన్ని మార్పులను ఎదురు చూడవచ్చునా?

వివరించి చూచిన పంజర పరికర్మలో మూల బిందువు మారదు. కాని ఋజురేఖలు ఋజురేఖలుగా మారును. సామ్యచతుర్భుజములు సామ్యచతుర్భుజములుగా మారును. అదియునుగాక ఒక సామ్యచతుర్భుజజాలమును ఇచ్చిన, దానికి కారకమగు పంజరమును కనుగొనవచ్చును. అనగా సులభముగా a_1, b_1, a_2, b_2ల యొక్క విలువల సాధింపవచ్చును.

ప్రయోగములు: పంజరముతో భ్రమణము, ప్రతిబింబము, జ్యామితీయ చిత్రములలోని మార్పులు మొదలగు పరికర్మ లందు పరిశీలింపవచ్చును - అని ఇదివరలో కనుగొంటిమి. ఇంతటితోగాక ఇతర ఉపయోగములుకూడ కలవు.

జ్యామితీయ విరూపతల విమర్శించుటకు పంజరములు ఉపయోగించును. ఇందుకు ఉదాహరణము గృహనిర్మాణ శాస్త్రము. రబ్బరుపై గాని, ఉక్కుపై గాని భారము ఎక్కిన యెడల రూపములో మార్పు ఏర్పడును. దీనికి కారణము ఒత్తిడి. ఒత్తిడి ఎంత అల్పమైనను, తగినంత విరూపత ఉక్కు స్తంభములలోను, దూలములలోను ఏర్పడును. చిన్న చిన్న చతురస్ర రూపములోనుండు వస్తుభాగములు చిన్న సామ్యచతుర్భుజ రూపములుగా మారును. ఈ ఒత్తిడిని పంజరముతో గుర్తింపవచ్చును.

విద్యుచ్ఛక్తి, అయస్కాంత శక్తి ఒక వస్తువుపై ప్రయోగించినపుడు దానిపై ఒత్తిడి ఏర్పడును. అందుచే పంజరముల వాడుటకు అవకాశము కలదు.

వైమానిక గతిశాస్త్రములో, విమానపతుముల దాటి వీచు వాయువేగమును విమర్శించునపుడు పంజరములు ఉపయోగించును.

పొగయందు ఒక చిన్న చతురస్రమును కల్పించిన, అది ధూమ ప్రవాహములో మారుచుండును. ఆ మార్పు ప్రవాహములో ఏర్పడు పరిణామముల గుర్తించును. దీని వివరణకు పంజరములు ఆవశ్యకములు.

ద్రవపదార్థములు పారునపుడు భ్రమణరహిత గమనము ఏర్పడును. అపుడు పంజరములు కావలయును.

ప్రథమాంశ సమీకరణములు అన్ని గణిత శాఖలందును కనబడును. వాని పర్యాయ రూపములే పంజరములు. కాబట్టి అన్ని గణితశాఖలందును పంజరములకు ఉపయోగము కలదు.

అల్పరాశులకు సంబంధించిన సమస్యలన్నిటిలోను ప్రథమాంశ సమీకరణము లేర్పడును. ఉదా: $f(x, y) = k + a_1 x + b_1 y + px^2 + qxy + ry^2 + \dots$ x, yలు అల్పములయిన, x^2, xy, y^2 నిరసింపదగినరాశులు $f(0, 0) = k$.

కాబట్టి $f(x, y) - f(0, 0) = a_1 x + b_1 y$. ఎడమవైపున నుండి రాశి $0, 0$ నుండి x, yకి వెళ్లునపుడుకలుగు వ్యత్యాసమును గుర్తించును. కుడివైపుననుండు $a_1 x + b_1 y$ మూలమున పంజరము లభించినట్లు ఇదివరలో చూచితిమి. కాని ఇట్టి రాశి మరియొకటి కావలయును. మరియొక రాశి దొరకుటకు శ్రమయేమియులేదు. రెండు ఫలములు $f(x, y)$, $g(x, y)$ ఉపయోగపడు సమస్యలలో మార్పుల విమర్శించునపుడు, పంజరములు ఏర్పడునని తెలియుచున్నది.

కణవాదములో పంజరములు ఆవశ్యకములు. టెన్సార్ కలనము పంజరముల వ్యాపకరూపము. శుద్ధగణితము నందు అనేక భాగములలో పంజరములు ఉపయోగించును. శాంకవచ్ఛేదములు, విక్షేప జ్యామితి, పుంజములు, అంతరీకరణములు పంజరనాటకరంగ భూమి.

పంజర గుణకారము:

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

అయిన UVని పంజరరూపములో ఎట్లు ప్రదర్శింపవచ్చును? ఈ సమస్యయే పంజరముల గుణకారమును గుర్తించును. సమీకరణముల రూపములో

$$x_2 = a_1 x_1 + b_1 y_1; \quad x_3 = p_1 x_2 + q_1 y_2$$
$$y_2 = a_2 x_1 + b_2 y_1; \quad y_3 = p_2 x_2 + q_2 y_2$$

అయిన x_3, y_3లను x_1, y_1 మూలమున ఎట్లు వ్రాయవచ్చును?

x_3, y_3 సమీకరణములలో x_2, y_2లకు x_1, y_1 విలువల ప్రతిక్షేపించుము:

$$x_3 = p_1 (a_1 x_1 + b_1 y_1) + q_1 (a_2 x_1 + b_2 y_1)$$
$$y_3 = p_2 (a_1 x_1 + b_1 y_1) + q_2 (a_2 x_1 + b_2 y_1)$$

అనగా

$$x_3 = (p_1 a_1 + q_1 a_2) x_1 + (p_1 b_1 + q_1 b_2) y_1$$
$$y_3 = (p_2 a_1 + q_2 a_2) x_1 + (p_2 b_1 + q_2 b_2) y_1$$

పంజర రూపములో వ్రాసిన

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 a_1 + q_1 a_2 & p_1 b_1 + q_1 b_2 \\ p_2 a_1 + q_2 a_2 & p_2 b_1 + q_2 b_2 \end{pmatrix}$$

U, V రెండు పంజరముల గుణకార లబ్ధమును మరియొక పంజరము W గా ప్రదర్శింపవచ్చును. W ను ఏర్పరచు మార్గమును గమనింపవలయును:

U లో వంశము $\begin{vmatrix} a_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ చే V లోని వరుస p_1, q_1 గుణించి సంకలనరాశిని W యొక్క వంశములో మొదటి పదము; తర్వాత వరుస p_2, q_2 లచే వంశములో రెండవ పదము వ్రాయవలయును. అట్లే W లో రెండవ వంశమును U లో రెండవ వంశమును ఉపయోగించి సాధింపవలయును. అనగా

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & \cdots \\ p_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + b_1 p_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ఇట్లే ఇతర పదములు సాధింపవచ్చును. వ్యాపకముగా

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

అయిన

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ఉదాహరణమునకు పరికర్మలు A, B, C తీసికొందము.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

అయిన $AB = C$ అని పంజర గుణకార మూలముగా చూపవచ్చును.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ఐక్యత $= I$ (పంజరము): ఉదా: ఇదివరలో విమర్శించిన A, B, D, E పరికర్మల ప్రతిబింబముల గుర్తించును. రెండు ప్రతిబింబములు వరుసగా తీసికొనిన, మూలరూపము లభించును. కాబట్టి $A^2 = A \cdot A = I$ అట్లే తక్కిన వానికి.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \therefore A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ (ఐక్యత)}$$

ఒక త్రికోణమితీయ సమస్య: మొదట కోణము α గుండ భ్రమణము, తర్వాత కోణము β గుండ భ్రమణమైన మొత్తము భ్రమణము $\alpha + \beta$ కోణము గుండ ఏర్పడును.

పంజర రూపములో

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

ఇది $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ యొక్క సూత్రముల నిచ్చును. పంజరముల సంకలనము, మొట్టమొదట బీజగణిత మూల సూత్రములను గమనింతము. అవి:

(i) $a + b = b + a$; పరివర్తన న్యాయము.

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$; సంయోజన న్యాయము.

(iii) $a \cdot b = b \cdot a$; గుణకార పరివర్తన న్యాయము.

(iv) $(a \cdot b)\, c = a\,(b \cdot c)$; గుణకార సంయోజన న్యాయము.

(v) $a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; గుణకార విభాజక న్యాయము.

సాధారణ బీజగణితము నందును, అంకగణితము నందును ఈ న్యాయములు అన్వయించును. కాని పంజర గణితమునందు (iii) కు అవకాశములేదు.

బీజగణితములో $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

కాని పంజర గణితములో $(A + B)^2$ యొక్క విస్తరణలో $A^2 + 2AB + B^2$ అని వ్రాయకూడదు. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ అని వ్రాయవలయును. పంజరము $A + B$ ని సంకలనము రూపముగా ఎట్లు వ్రాయవచ్చును? న్యాయములు. i, ii, v అనుసరింపవలయును. తీవ్ర విమర్శన తర్వాత, ఈ సమస్యకు ఒకే జవాబు ఈయబడెను. వేరులేదు.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + p_1 & b_1 + q_1 \\ a_2 + p_2 & b_2 + q_2 \end{pmatrix}$$

వేరు విధమగు సంకలనమునకు న్యాయములు i, ii, v అన్వయింపవు. వేరొక ఉదాహరణము తీసికొందము.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+5 \\ 4+6 & 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

గుణకారములో పరివర్తన న్యాయము ఉపయోగింపక పోవుటచే

$$P\,(Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R;$$

$$(Q + R)\,P = Q \cdot P + R \cdot P$$

$k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ యొక్క విలువ ఎంత?

ఇపుడు $2\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2b_1 \\ 2a_2 & 2b_2 \end{pmatrix}$$

కాబట్టి $k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix}$ ఇచట k ఒక సాధారణ సంఖ్య కాబట్టి $kA = Ak$

భ్రమణముల పరీక్ష : భ్రమణము యొక్క పంజరరూపము.

$F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ దీనినుండి జీవలను, కోటి జీవలను విడదీయుదము.

అపుడు $F = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$$= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

పంజరము $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ఐక్యతను చూపు పంజరము I. కాని $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ యొక్క లక్షణమేమి ? దానిని X చే గుర్తించిన,

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ఈ పంజరమును గమనించిన, పంజరము $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ను -1 చే గుణించిన వచ్చునని తోచుచున్నది. కాబట్టి $X^2 = -I$. అందుచే $X = i = \sqrt{-1}$

ఇపుడు $F = I \cos\theta + i \sin\theta$

$= \cos\theta + i \sin\theta$ ఇది ఒక సంకీర్ణరాశి. అట్లే $a + ib$ ని పంజర రూపములో గుర్తింపవచ్చును. $a + ib$ పంజరము $I\,a + ib$ అని తీసికొని దానిని విస్తరించిన $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ లభించును.

ఇదివరలో 2 పదములు గల చతురస్ర పంజరముల విమర్శించితిమి. వ్యాపకరూపములో కూడ విమర్శించుట సులభము.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

దీర్ఘ చతురస్ర పంజరములుకూడ గలవు.

ఆచార్య

పరమేశ్వరాచార్య, ఆలత్తూర్ (పట శ్లే 8) : భారతదేశమున జనించిన ఖగోళశాస్త్ర విదులలో పరమేశ్వరుడు మిక్కిలి ప్రఖ్యాతి పొందినవాడు. దక్షిణ కేరళ మందలి నీలానదీ తీరస్థమగు ఆలత్తూర్ గ్రామ మీతని జన్మస్థలము. గ్రహముల, తారల నిశిత ప్రత్యవేక్షణలో 50 ఏండ్లు శ్రమించి, తన కాలములో ప్రచారములో నుండెడి 'పరహిత' ఖగోళ పద్ధతిని పునశ్శోధించి, ప్రత్యక్ష ప్రత్యవేక్షణ నాధారముగాగొని, అన్వర్ధనామము దృగ్గణితమును అతడే స్థాపించెను.

నేడు మనకు మిగిలియున్న ఆతని రచనలు : గోళదీపికా గ్రంథములు రెండు ; గ్రహణముల గురించిన గ్రంథములు మూడు (గ్రహణ న్యాయదీపిక, గ్రహణమండన, గ్రహణాష్టకము అని పేరులు కలవి) ; వాక్యకరణము, వ్యతీపాతాష్టకము. ఇంతేకాక అతడు ఆర్యభటీయము పై భటదీపికను, లఘు భాస్కరీయమునకు ఒక వ్యాఖ్యానమును, మహాభాస్కరీయముపై గోవిందస్వామిచే రచింపబడిన సిద్ధాంత దీపికపై ఒక వ్యాఖ్యానమును, ముంజులుని లఘు మానసముపై నొక వ్యాఖ్యానమును, భాస్కరాచార్య-II లీలావతిపై ఒక వ్యాఖ్యను రచించెను.

ప్రసిద్ధికెక్కిన ఈతని దృగ్గణితము క్రీ. శ. 1431 లో రచింపబడినది. కాని గ్రంథము నశించిపోయినది. గోళదీపిక రచనాకాలము 1433. ఆర్యభటీయ భాష్యము, తంత్ర సంగ్రహము రచించిన ఖగోళ గణితశాస్త్ర పారంగతుడు నీలకంఠ-సోమయాజి పరమేశ్వరుని పుత్రుడగు దామోదరునకు శిష్యుడు.

పరమేశ్వరుడు గణిత శాస్త్రమునకు స్వోపజ్ఞమగు విషయములను చేర్చలేదు. కాని భారతీయ ఖగోళశాస్త్ర త్రికోణమితి అనుశీలనయందు ఆతని వ్యాఖ్యానములు చాల ముఖ్యములు. ఆర్యభటీయ వ్యాఖ్యానమందీతడు జ్యానయన (జీవల జ్యాలను లెక్క కట్టుట) పద్ధతిని విశదపరచినాడు ; లీలావతీవ్యాఖ్యానములో చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క అర్ధ వ్యాసమును కనుగొనుటకు దాని భుజముల మానములో ఒక సమాసము* నిచ్చినాడు.

సరస్వతి

పాస్కల్, బ్లెయిజ్ (1623-1662) : ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రవేత్త ; దార్శనికుడు. 1623, జూన్ 19వ తేదీన పాస్కల్ జన్మించెను. ఇతని తండ్రి ఎటియన్నీ పాస్కల్ కూడ ప్రముఖ గణితశాస్త్రవేత్త. ఇంటి వద్దనే ఇతడు

$$* \ R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}}$$

విద్య నభ్యసించుచు, 16 ఏండ్ల ప్రాయమున మెర్ సెన్నీ గణిత సభలందు శాంకవములపై ఒక వ్యాసమును చదివి తన ప్రతిభను వెల్లడించెను. పై వ్యాసము డేకార్ట్ మొదలగు ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్తల మన్ననల నందినది. అప్పటికి అపరిష్కారములుగ ఉన్న సైక్లాయిడ్ ధర్మములు వంటి పెక్కు జటిల సమస్యలను పాస్కల్ సాధించెను.


పాస్కల్
చిత్రము 276

ఇతడు ద్రవముల నిశ్చలతపై ఒక గ్రంథమును రచించి ద్రవగతిశాస్త్ర మార్గదర్శకులలో ఒకడయ్యెను. 'నిశ్చలముగనున్న ద్రవములో ఏదైనా ఒక బిందువువద్ద కొంత పీడనమును కలిగించిన, అది ఆ ద్రవమునందలి అన్ని బిందువులకు అదే పరిమాణముతో వ్యాపించును' అను పాస్కల్ సూత్రము ప్రసిద్ధమైనది. ఇతడు, ఫర్మాతో కలిసి 'సంభావ్యతా వాదము (తియరీ ఆవ్ ప్రోబబిలిటీ)' ను కనుగొనెను. ప్రదేశముల ఉన్నతి పెరిగిన కొలది బెరామీటర్ లోని పాదరస మట్టము ఎత్తు తగ్గునని పాస్కల్ ఆవిష్కరించెను.

శాంకవములను గురించిన సిద్ధాంతములలో అతి ప్రసిద్ధమయినది పాస్కల్ సిద్ధాంతము. దీని ప్రకారము *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* అను 6 బిందువులు ఒక శాంకవముపై నున్నచో, *AB*, *DE* ఖండన బిందువు *L* ను, *BC*, *EF* ఖండన బిందువు *M* ను, *CD*, *FA* ఖండన బిందువు *N* ను ఒకే ఋజు రేఖపై నుండును. మొట్టమొదటి గణిత్ర యంత్రమును పాస్కల్ 1642 లో రూపొందించెను.

మత దర్శనముపై సమకాలిక వాదోపవాదములలో పాస్కల్ ప్రధాన పాత్రను వహించుచు, పోర్ట్ రాయల్ ఆశ్రమములో చాలకాలముండెను. 'పాంసే' అను ఇతని ప్రసిద్ధ గ్రంథము ఇతని మరణానంతరము 7 ఏండ్లకు ప్రచురింపబడెను. యువక ప్రాయములో అధిక పఠనము వలన కలిగిన అస్వస్థత ఇతని జీవిత పర్యంతము సదా బాధించుచుండెడిది.

1662, ఆగస్టు 19 వ తేదీన పారిస్ నగరములో పాస్కల్ కనుమూసెను (చూ. దర్శనములు - మతములు : పు. 530 ; పాస్కల్ త్రిభుజము). పా. ల. నా.

పాస్కల్ త్రిభుజము : పాస్కల్ త్రిభుజమును క్రింద చూపినట్లు అంకెల వరుసలో నిర్మింపవచ్చును. ఆ అంకెలు ${}_nC_r$ యొక్క విలువలు

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

చిత్రము 277 పాస్కల్ త్రిభుజము

ఈ అంకెల వరుసకు (సంఖ్యా వ్యూహమునకు) క్రింది ధర్మములు కలవు.

(1) ఒక్కొక్క సంఖ్యయును దానిమీద కుడి ఎడమల గల సంఖ్యల మొత్తమునకు సమానము.

(2) 1 వ వికర్ణము 1, 1, 1, 1 ... ...
2 వ వికర్ణము 1, 2, 3, 4, 5, 6
3 వ వికర్ణము 1, 3, 6, 10, 15

ఇందు క్రమముగా పూర్వోత్తర సంఖ్యల భేదము — అనగా 2, 3, 4, 5 ... ... అంకశ్రేఢి రూపమున ఉండును. ఇట్టి వరుసను 2 వ తరగతి అంకగణిత వరుస అని చెప్పుదుము. 4 వ వికర్ణము 1, 4, 10, 20 ... 3 వ తరగతి అంకగణిత వరుస. అనగా ఉత్తరోత్తర సంఖ్యల తేడా 2 వ తరగతి అంకగణిత వరుసగా ఉండును. అ. న.

పితాగొరస్ (క్రీ. పూ. 6 వ శతాబ్దము) **:** జ్యామితి పితామహుడగు తేలీజ్ శిష్యులలో ప్రసిద్ధుడు, గ్రీక్ గణిత శాస్త్రవేత్త, దార్శనికుడు అగు ఇతడు మైలీటస్ నగర సమీపము నందలి సామాస్ ద్వీపవాసి. ఇతని జీవితమునకు సంబంధించిన వేరు వివరములు అలభ్యములు.


పితాగొరస్
చిత్రము 278

తేలీజ్ వద్ద గణిత శాస్త్రమును అభ్యసించిన పిమ్మట, ఈజిప్టు, ఆసియా మైనర్, ఇండియా మొదలగు దేశములు సంచరించి తన గణితజ్ఞానమును పెంపొందించుకొనెను.

ఈజిప్టు నందలి బోధనా పద్ధతులకు సంతసించి, తన మాతృ దేశమగు గ్రీస్‌లో అట్టి స్థాపనములను సృజించదలచెను. అది సాధ్యము కాకపోవుటచే, దక్షిణ ఇటలీలోని క్రొటో నాలో స్థిరపడి అచ్చట 'పితా గొరియన్లు' అనబడు రహస్య భాతృత్వమును స్థాపించెను. ఒకసమయములో వీరి సంఖ్య 300 దాకా ఉండెను. వీరి చిహ్నము అయిదు శీర్షముల నక్షత్రము. అంకగణితము, జ్యామితి, ఖగోళ శాస్త్రము, సంగీతము, దర్శన, నీతి శాస్త్రములను అధ్యయనము చేయుట, బోధించుట వీరి ప్రధాన కార్య క్రమము. పితాగొరియన్లు రహస్యము నకు ప్రమాణముచేసి, తాము కనుగొనిన విషయము లన్నిటిని తమ ఆచార్యుని పేరనే ప్రకటించుట చేత ఎవ్వరు ఏ విషయము కనుగొనినది చెప్పుట అసాధ్యము. 'విశ్వమునకు కేంద్ర స్థానము సూర్యుడు' అని మొదట చెప్పినది వీరే. వృత్తరూప కక్ష్య సరైన పథము అని పితాగొరస్ వాదించి, గ్రహకక్ష్యలు వృత్తములు అయితీరవలెనని చెప్పెను. గోళము దోషములేని ఘన రూపము అగుటచే భూమి, నక్షత్రములు, గ్రహములు, విశ్వము, గోళాకారములని పితాగొరస్ వాదించెను.

ఇతడు ఉత్తమవిద్యలో జ్యామితిని ఒక భాగముగ మొదట ప్రవేశపెట్టిన దర్శనవేత్త. పితాగొరస్ చేతను, అతని అనుచరులచేతను ఆవిష్కరింపబడిన సిద్ధాంతములలో 1. 'త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తము రెండు లంబకోణములు' 2. లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణముమీది చతురస్ర వైశాల్యము మిగతా రెండు భుజములమీది చతురస్రముల వైశాల్య మొత్తమునకు సమానము' అనునవి. పితాగొరస్ పేరుతో ఉన్న ఈ రెండవ సిద్ధాంతమును ఎవ్వరు ముందు ప్రవేశపెట్టినది వివాదాస్పద విషయము. 'మేథమేటిక్స్' అను పదమును పితాగొరియన్‌లే ప్రవేశపెట్టిరి.

సంఖ్యావాదము తేలిజ్‌తో ప్రారంభమై పితాగొరియన్లచే అభివృద్ధిచేయబడినది. ప్రత్యేక సంఖ్యలను గుర్తించుటకు వారు చుక్కల సౌష్ఠవ వరుసలను వాడి ఆ చిత్రములనుండి అనేక పరంపరల ధర్మములను పొందిరి. 1 తో ప్రారంభించి వరుస సంఖ్యలను సంకలనముచేసిన 3, 6, 10 మొదలగు త్రిభుజ సంఖ్యలు ఏర్పడును; వరుస బేసి సంఖ్యల సంకలనముచే 4, 9, 16 మొదలగు చతురస్ర సంఖ్యలు ఏర్పడును; వరుస సరి సంఖ్యల సంకలనముచే 6, 12, 20 మొదలగు దీర్ఘ చతురపు సంఖ్యలు ఏర్పడునని వారు సూచించిరి.

త్రిభుజ సంఖ్యలు

చతురస్ర సంఖ్యలు

దీర్ఘ చతురస్ర సంఖ్యలు

పితాగొరియన్‌లలో గణిత, ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులేకాక జీవ శాస్త్రజ్ఞులు, శరీర నిర్మాణ శాస్త్రజ్ఞులు కూడా ఉండిరి. చాక్షుష నాడులను, మధ్య చెవినుండి సప్త పథ (ఫారింగ్స్) కు వ్యాపించియుండు యుస్టాకియన్ నాళమును వారు కనుగొనిరి.

పితాగొరస్, అతని అనుచరులు గణిత విజ్ఞానమును సంగీతములో కూడ ప్రవేశపెట్టిరి. చెవికి శ్రావ్యముగ ఉండు శబ్దమును సంగీత స్వరము అందురు. ప్రత్యేకమైన పొడవులుగల తీగలచే ఏర్పడు సమకాలిక స్వరములు తాళ యుక్తముగ ఉండునని పితాగొరస్ కనుగొనెను. 1:2 లేదా 2:3 లేదా 3:4 నిష్పత్తిలో ఒకే మందము గల తీగలను ఒకే బిగువుగ లాగినప్పుడు వాటిచే ఏర్పడు స్వరములు శ్రావ్యముగ ఉండునని అతడు కనుగొనెను.

ఒక్కొక్క దానికి ఒకటి చొప్పున అయిదు క్రమ ఘనరూపములకు అయిదు మూల పదార్థములచే విశ్వము

కూర్చబడినదని పితాగోరియన్‌లు విశ్వసించిరి. ఆ విధముగ ఘనమునుండి భూమి, పిరమిడ్‌నుండి అగ్ని, అష్టతలకము నుండి గాలి, వింశతి తలకమునుండి నీరు, ద్వాదశ తలకము నుండి విశ్వగోళము ఉద్భవించెనని వారు తలచిరి.

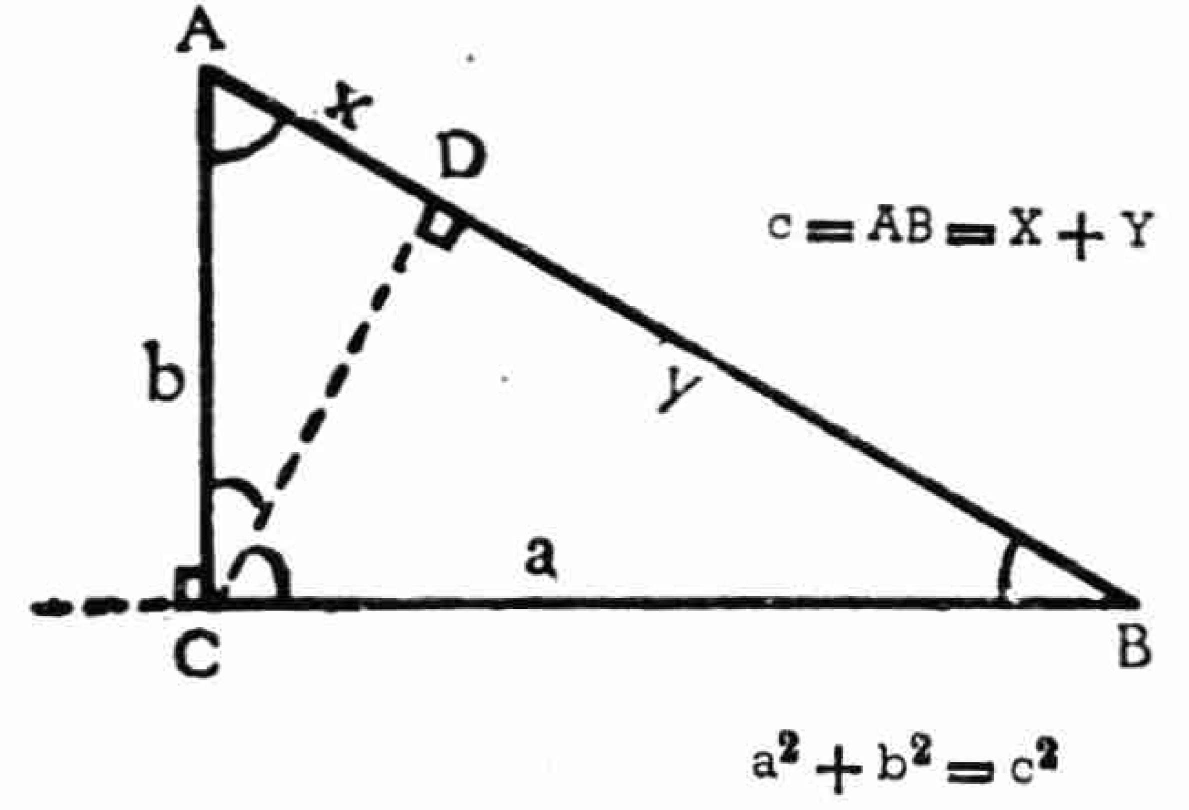
'మానవుని ఆత్మ అమరత్వము గలది; మానవునికి పునర్జన్మ కలదు; మానవునికి జంతువులకు బాంధవ్యము కలదు; మానవుని ఆత్మ మరో జన్మలో జంతు గర్భమున జన్మించవచ్చును. నిష్కళంకమైన జీవితమును గడపుట ద్వారా పునర్జన్మ లేకుండ చేసికొనవచ్చును. సంఘమున క్రమశిక్షణ కఠినముగ ఉండవలెను. ఆత్మ క్రమశిక్షణ, నిష్కళంకత, ఆత్మ నిగ్రహము, విధేయత్వమును మానవుడు అలవరచుకొనవలెను.' ఇది పితాగొరస్ దర్శన సిద్ధాంత సారాంశము.

ఇట్లు బహుముఖ ప్రజ్ఞావంతులైన పితాగోరియన్‌ల ప్రాబల్యము అధికముకాగా రాజకీయ ఒత్తిడులచే ఆ సంఘము విచ్ఛిన్నము కావింపబడినది. పా. ల. నా.

పితాగొరస్ సిద్ధాంతము: ఏ లంబకోణ త్రిభుజములో నైనను కర్ణము (r) మీది చతురస్ర వైశాల్యము మిగతా రెండు భుజముల (x, y) మీది చతురస్రముల వైశాల్య మొత్తమునకు సమానము: $r^2 = x^2 + y^2$.

పితాగొరస్ కాలము (క్రీ. పూ. 6 వ శతాబ్దము) నకు పూర్వమే పై సిద్ధాంతము బాబిలోనియన్‌లకు, భారతీయులకు, ఈజిప్షన్‌లకు తెలిసియుండెను. కాని, దానిని తార్కిక రీతిని మొట్టమొదట నిరూపించినది పితాగొరస్. యూక్లిడ్ సమతల జ్యామితిలో అతిప్రధానమగు ఈ సిద్ధాంతమునకు 100 కి పైగా ఉపపత్తులు ఉన్నవి.

పై సిద్ధాంతమును సరూపత్రిభుజముల ధర్మములను ఆధారముగ చేసికొని పితాగొరస్ నిరూపించెనని విశ్వసింపబడుచున్నది; అది: C వద్ద లంబకోణముగల ABC త్రిభుజములో CD అనునది C నుండి కర్ణమునకు గీచిన లంబరేఖ. చిత్రము 279 లో



చిత్రము 279

$\angle DAC + \angle ACD = 90°$

$\angle ACD + \angle DCB = 90°$

$\angle DCB + \angle DBC = 90°$

$\therefore \angle DAC = \angle DCB$; $\angle ACD = \angle DBC$ అగును. అందుచేత ACD, CBD, ABC త్రిభుజములు సరూపములు. ΔCBD, ΔABC లు సరూప త్రిభుజములగుటచే

$\frac{a}{y} = \frac{c}{a}$ $\therefore a^2 = cy$ అగును. ... ... (1)

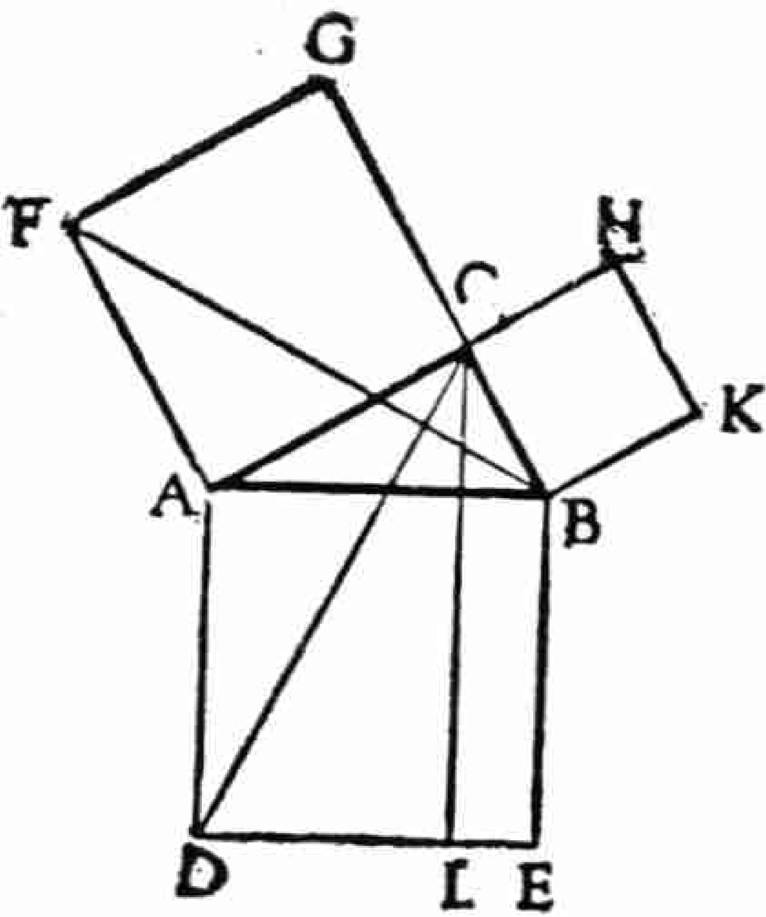
అట్లే ΔACD, ΔABC సరూపములు అగుటచే

$\frac{b}{x} = \frac{c}{b}$ $\therefore b^2 = cx$ అగును. ... ... (2)

(1), (2) ఫలితములనుండి

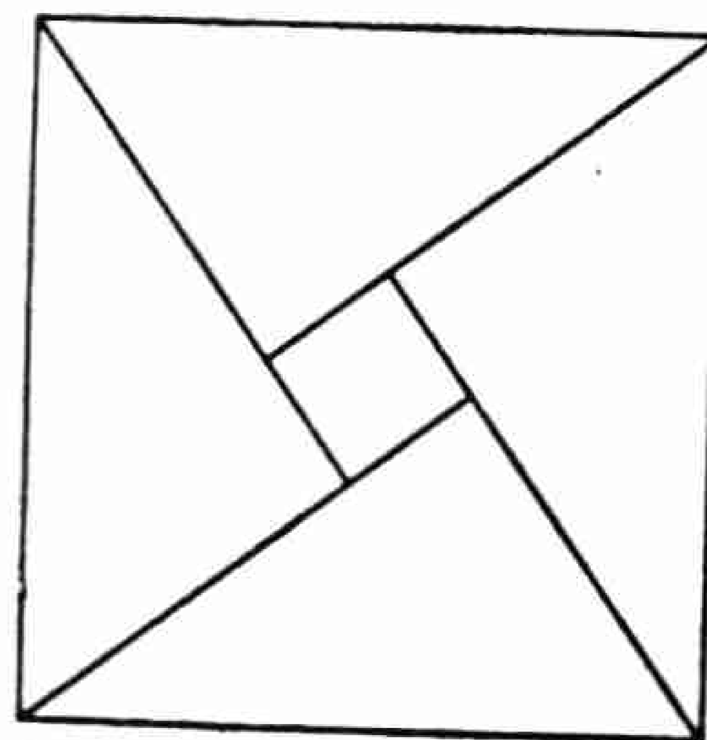
$a^2 + b^2 = cy + cx = c\,(y + x) = c\,(c) = c^2$ లభించును.

పై ఉపపత్తిని, 12 వ శతాబ్దములో భాస్కరాచార్య ఇచ్చియున్నాడు. దానినే 17 వ శతాబ్ద బ్రిటిష్ గణిత శాస్త్రవేత్త ఒకరు పునరావిష్కరించెను. ఉపపత్తులను ఇవ్వకుండ కొందరు ప్రసిద్ధగణితవేత్తలు పై సిద్ధాంత నిరూపణకై ఉపయోగించిన చిత్రములు మాత్రము దిగువ ఇవ్వబడినవి:



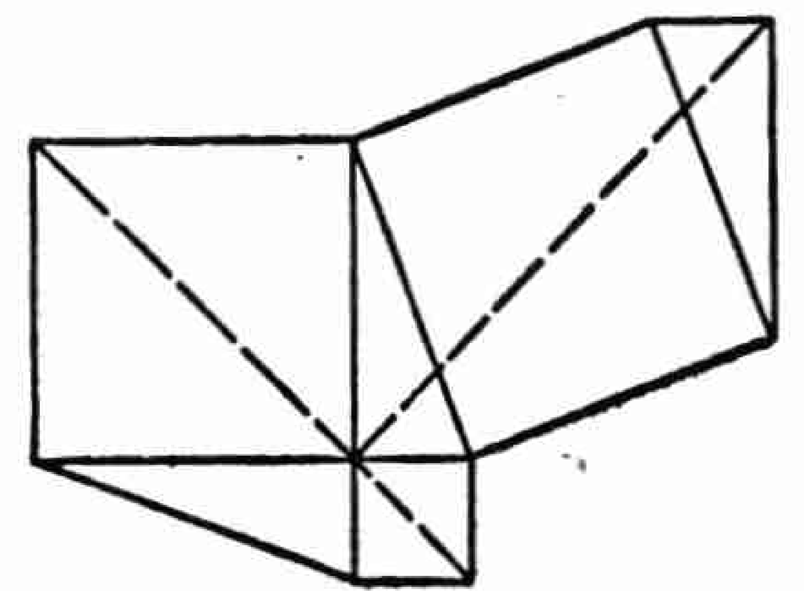
యూక్లిడ్ ఉపపత్తి

చిత్రము 280



భాస్కరాచార్య ఉపపత్తి

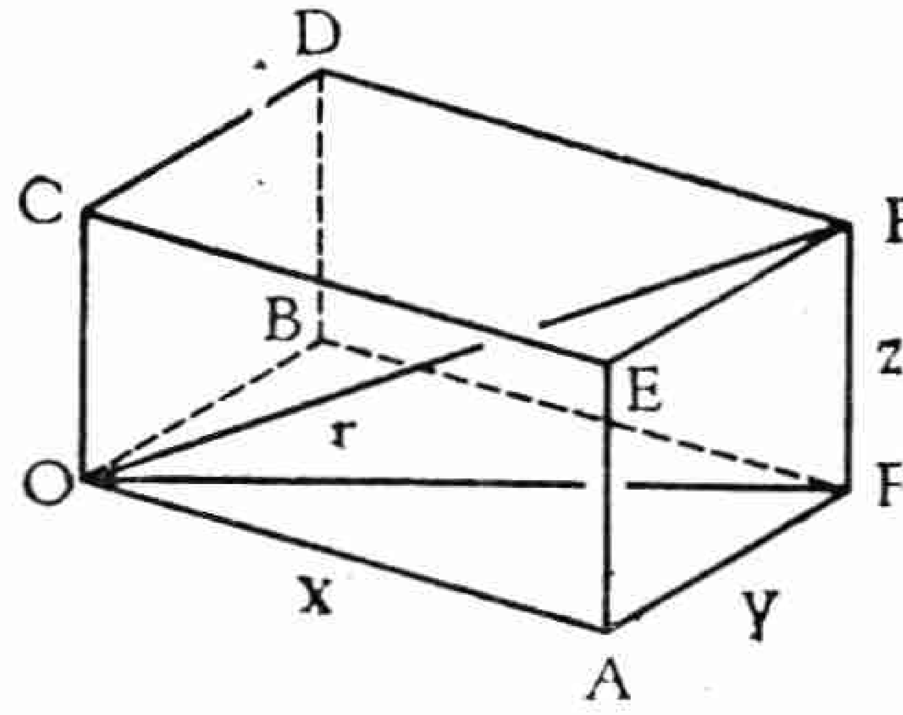
చిత్రము 281



లియనార్డో డావిన్చి ఉపపత్తి

చిత్రము 282

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో పితాగొరస్ సిద్ధాంతము: 'దీర్ఘఘనాకార పెట్టెయొక్క వికర్ణముపై చతురస్ర వైశాల్యము శీర్షమువద్ద కలియు మూడు ఆసన్న అంచుల పైని చతురస్రముల వైశాల్య మొత్తమునకు సమానము' $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.



$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
చిత్రము 283

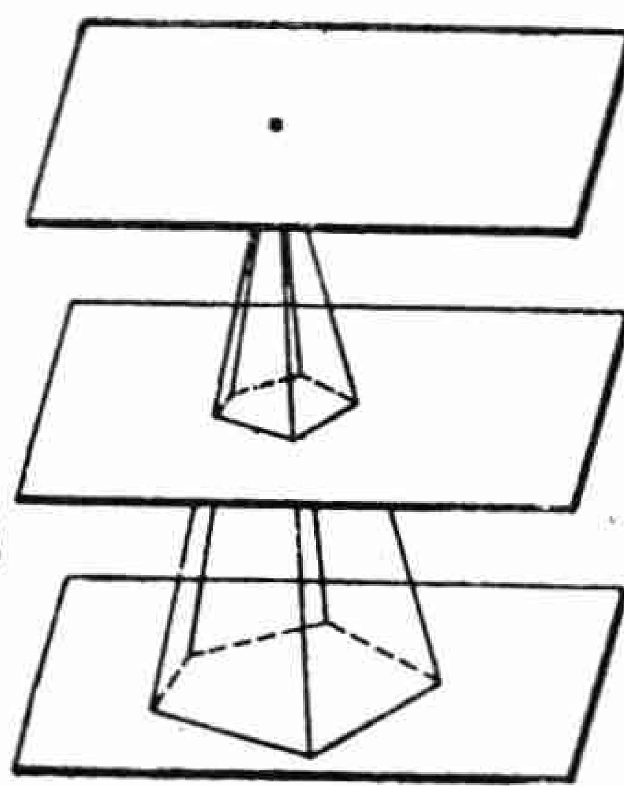
రెండు లేదా మూడు చతురస్రముల సంకలనమునకు సమానమగు చతురస్రములు పితాగొరస్‌కు తెలియును ఉదా: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$.

x, y, r అను మూడు పూర్ణసంఖ్యలు $x^2 + y^2 = r^2$ సంబంధములో ఉన్న ఎడల వాటిని పితాగొరస్ త్రికము (ట్రిపుల్) అందురు. అదేవిధముగ x, y, z, r అను నాలుగు పూర్ణసంఖ్యలు $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ సంబంధములో ఉన్న ఎడల వాటిని పితాగొరస్ చతుర్థకము (క్వాడ్రపుల్) అందురు.

$x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ అను త్రిక సంఖ్యలు a, b లకు ఏ విలువలనిచ్చినను $x^2 + y^2 = z^2$ అను సర్వసమీకరణమును తృప్తిచేయును. ఉదా: $a = 2$, $b = 1$ అనుకొనిన $a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$; $2ab = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ అగును. 3, 4, 5 లలో $3^2 + 4^2 = 5^2$.

అదేవిధముగ $x = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$, $y = 2ab + 2cd$, $z = 2bc - 2ad$, $r = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ అను చతుర్థకములో a, b, c, d లకు పూర్ణసంఖ్యలను ప్రతిక్షేపించిన పితాగొరస్ చతుర్థసంఖ్యలు లభ్యమగును. పా. ల. నా.

పిరమిడ్: పీఠము అనబడు ఒక ముఖము, ఒకే ఉమ్మడి శీర్షము గలిగి పార్శ్వ ముఖములు అనబడు త్రిభుజాకార ఇతర ముఖములు గల బహుతలకమును పిరమిడ్ అందురు. పార్శ్వముఖముల ఉమ్మడిశీర్షమును పిరమిడ్ శీర్షమని అందురు. పిరమిడ్ పీఠము త్రిభుజము అయిన దానిని త్రిభుజాకార పిరమిడ్ లేదా టెట్రాహెడ్రాన్ అని అందురు. పిరమిడ్ పీఠము చతురస్రము (లేదా ఏ క్రమబహుభుజి అయినప్పటికి) గను, పార్శ్వఅంచులు సమానముగను ఉన్నచో దానిని చతురస్రాకార (లేదా క్రమ) పిరమిడ్ అని అందురు. ఈజిప్టు ప్రసిద్ధ పిరమిడ్‌లు చతురస్రాకార పిరమిడ్‌లు.



క్రమ పిరమిడ్
చిత్రము 284

శీర్షమునుండి పీఠమునకు గల లంబదూరమును పిరమిడ్ ఉన్నతి అందురు. పీఠవైశాల్యము B, ఉన్నతి h అయిన ఆ పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము $V = \frac{1}{3} Bh$ అగును. పీఠమునకు సమాంతరతలములచే ఏర్పడు పిరమిడ్ మధ్యచ్ఛేదములు పీఠమునకు సరూపములుగను, వాటి వైశాల్యములు శీర్షమునుండి వాటి దూరముల వర్గములకు అనుపాతములోను ఉండును.

ఆ రెండు సమాంతర తలముల మధ్యభాగమును పిరమిడ్ ఖండము అందురు. దాని ఘనపరిమాణమును $V = \frac{1}{3} h' (B + \sqrt{Bb} + b)$ అను సూత్రసహాయమున కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చట h' అనునది పిరమిడ్ ఖండ ఉన్నతి (ఆ సమాంతర తలముల మధ్యదూరము); B, b లు దాని రెండు పీఠముల వైశాల్యములు. పా. ల. నా.

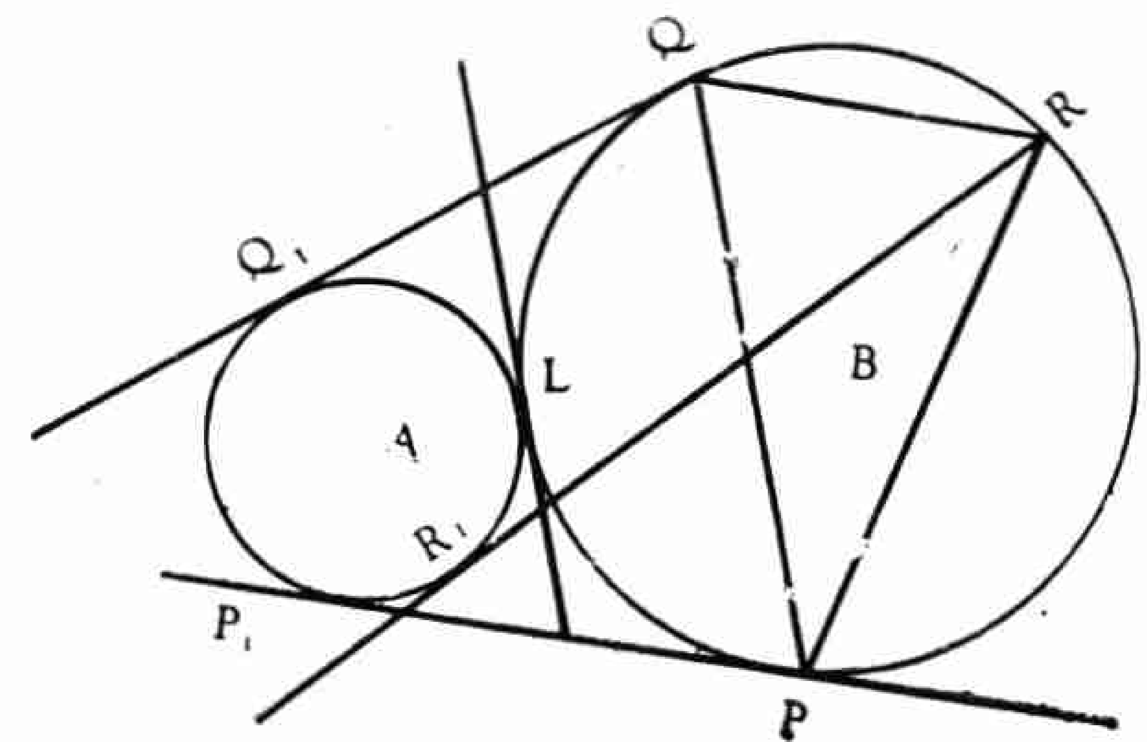
ఫూయర్‌బాక్ సిద్ధాంతము: దీనికి అనేక విధ ఉపపత్తులు కలవు. విలోపన విధానము ఒకటి. మరియొక విధానము ఏకాక్ష వృత్త లక్షణములపై ఆధారపడియుండును. దానిని గమనింతము:

(ఎ) ఒక బిందువు P నుండి రెండు ఏకాక్ష వృత్తములగు (A), (B) లకు PT_1, PT_2 స్పర్శరేఖలు గీసినచో

$$PT_1^2 - PT_2^2 = 2\,AB \cdot PM.$$

ఇచట AB వృత్త కేంద్రముల మధ్య దూరము, మూలాక్షమునకు బిందువు P నుండి లంబరేఖ PM. దీని ఉపపత్తి సులభము.

(బి) (A), (B), (C) లు ఏకాక్ష వృత్తములు. (C) పై P ఒక బిందువు. PM మూలాక్షమునకు లంబరేఖ. P నుండి PT_1, PT_2 వృత్తములు (A), (B) లకు స్పర్శరేఖలు.



చిత్రము 285

P నుండి (C) వృత్తమునకు స్పర్శరేఖయొక్క పొడవు శూన్యము.

కాబట్టి $PT_1^2 = 2\,AC \cdot PM$; $PT_2^2 = 2\,BC \cdot PM$

ఇపుడు $PT_1^2/PT_2^2 = AC/BC = K$ (ఒక స్థిరరాశి).

(సి) చిత్రము 285 (పు. 378) లో రెండు వృత్తములు L వద్ద స్పృశించును. $\triangle PQR$ మొదట వృత్తములో అంతర్లిఖితము. P, Q, R ల నుండి PP_1, QQ_1, RR_1లు రెండవ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు. లబ్ధములు $PP_1 \cdot QR$, $QQ_1 \cdot RP$, $RR_1 \cdot PQ$ లలో ఒకటి తక్కిన రెండు లబ్ధముల మొత్తమునకు సమానము.

భుజరేఖ PQ కు ఎదుటివైపున బిందువులు L, R ఉండనిమ్ము. రెండు వృత్తములు (A), (B) బిందువు L తో ఒక ఏకాక్షవృత్త బృందమగును.

L ఒక అవధి బిందువు. అనగా శూన్య వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తము.

$$\text{కాబట్టి } \frac{PP_1^2}{PL^2} = \frac{AB}{LB} = K^2$$

$$\text{అనగా } \frac{PP_1}{PL} = \sqrt{AB/LB} = \frac{RR_1}{RL} = \frac{QQ_1}{QL} = K$$

$PRQL$ ఒక చక్రీయ చతుర్భుజము.

కాబట్టి $QL \cdot PR + QR \cdot PL = PQ \cdot RL$

అనగా $QQ_1 \cdot PR + PP_1 \cdot QR = RR_1 \cdot PQ$

విపర్యయముగా: PQR, $P_1Q_1R_1$ రెండు వృత్తముల బిందువులు P, Q, R నుండి PP_1, QQ_1, RR_1 రెండవ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు. $PP_1 \cdot QR$, $RR_1 \cdot PQ$, $QQ_1 \cdot PR$ లబ్ధములలో ఒకటి మరి రెండు లబ్ధముల మొత్తమునకు సమానమైన, రెండు వృత్తములు స్పృశించును.

ఫ్యూయర్‌బాక్ సిద్ధాంతము: ఒక త్రిభుజముయొక్క నవబిందు వృత్తము అంతర్వృత్తములను, బహిర్వృత్తములను తాకును.

ఒక త్రిభుజము ABC లో $a > b > c$; భుజముల మధ్య బిందువులు D, E, F అయిన, వానినుండి అంతర్వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు క్రమముగా $\frac{b-c}{2}$, $\frac{a-c}{2}$, $\frac{a-b}{2}$;

$\triangle DEF$ యొక్క భుజములు $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$

$$\text{కాని } \frac{a}{2}\left[\frac{b-c}{2}\right] + \frac{c}{2}\left[\frac{a-b}{2}\right] = \frac{b}{2}\left[\frac{a-c}{2}\right]$$

అందుచే $D\,E\,F$ వృత్తము, అంతర్వృత్తమును తాకును. అనగా నవబిందు వృత్తము అంతర్వృత్తమును తాకును.

A శీర్షమునకు ఎదుట బహిర్వృత్తమునకు D, E, F బిందువులనుండి స్పర్శరేఖలు $\frac{b-c}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ పొడవు గలవై యుండును.

$$\frac{a}{2}\left[\frac{b-c}{2}\right] + \frac{c}{2}\left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{b}{2}\left[\frac{a+c}{2}\right]$$

కాబట్టి వృత్తము DEF అనగా నవబిందు వృత్తము త్రిభుజము ABC యొక్క బహిర్వృత్తమును స్పృశించును. ఉపపత్తి పూర్తి అయినది. ఆచార్య

పూర్ణాంకములు : సహజ ధనాత్మక సంఖ్యలగు 1, 2, 3 ... ... n అను మాత్రమే కాక 0 (శూన్యము) ను, ఋణాత్మక సంఖ్యలగు $-1, -2$ ... ... $-n$ అను కూడ పూర్ణాంకములు అని యందురు. ఇచ్చట మనము ధనాత్మక సంఖ్యలను వాటి ధనాత్మక భాజకములను, భాజ్యములను మాత్రము తీసికొనెదము.

పూర్ణాంక భాజక గుణిజములు : a, b అను రెండు పూర్ణాంకముల సంకలనము, భేదము, గుణకారము — వీటి లబ్ధములు కూడ పూర్ణాంకములగును. కాని ఒక పూర్ణాంకమును వేరొక పూర్ణాంకముచే భాగించగా లభించిన సంఖ్య ఎప్పుడును పూర్ణాంకమగునని చెప్పలేము. ఉదాహరణమునకు $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. లబ్ధము $1\frac{1}{2}$ లో భిన్నాంకమున్నది. కనుక అది పూర్ణాంకముకాదు. ఒక పూర్ణాంకమును వేరొక పూర్ణాంకముచే భాగించుట అన్నప్పుడు శూన్యముచే భాగించుట నిషిద్ధమనునది ముఖ్యముగ గమనింపదగ్గ విషయము. అందుచేత ఒక సంఖ్య వేరొక సంఖ్యచే భాగించబడుచున్నదన్నప్పుడు ఆ భాగించు సంఖ్య శూన్యము కాదని గుర్తించవలెను.

a అను పూర్ణాంకమును b అను వేరొక పూర్ణాంకముచే భాగించిగా ఏర్పడు లబ్ధి a/b కూడా పూర్ణాంకమయినచో b ని a యొక్క కారణాంకము లేదా భాజకము అనియు అందురు. దీనినే గణిత సంకేతమందు $b|a$ అని వ్రాయుదుము. దీనిని b అను సంఖ్య a అను సంఖ్యను విభజించును అని చదువవలయును. a అను సంఖ్య b యను సంఖ్య యొక్క గుణకము లేదా భాజ్యము.

a అను పూర్ణాంకము యొక్క రెండు భాజ్యముల సంకలన, భేద, గుణకార లబ్ధములుకూడ a యొక్క భాజ్యములై యుండును. ఉదాహరణమునకు 15, 25 అను రెండు సంఖ్యలు 5 యొక్క భాజ్యములు.

వాటి సంకలనము $25 + 15 = 40$ ...5 యొక్క భాజ్యము

వాటి భేదము $25 - 15 = 10$ ...5 యొక్క భాజ్యము

వాటి గుణకారము $25 \times 15 = 375$ ...5 యొక్క భాజ్యము

ఇప్పుడు b యను పూర్ణాంకముచే భాగింపబడని పూర్ణాంకము a ను తీసికొందము. $a = 17$, $b = 5$ అని యనుకొందము.

మనము $17 = (5 \times 3) + 2$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $0 < 2 < 5$, ఇచ్చట $5 \times 3 = 15$, సిద్ధించిన శేషము 2. ఈ శేషము శూన్యమునకు 5 కు మధ్య నుండును.

a, b చేత భాగింపబడు ప్రత్యేకాభియోగమునందు (ఉదా: $15 = 5 \times 3 + 0$) 5 యొక్క (b యొక్క) గరిష్ఠ భాజ్యమును 15 నుండి (a నుండి) తీసివేయగా సిద్ధించు శేషము '0' (శూన్యము).

పై ఫలితములను దృష్టిలో పెట్టుకొని, a, b లు రెండు పూర్ణాంకములై $a > b$ అయిన ఎడల, a, r లను మరి రెండు పూర్ణాంకములతో క్రింది సమీకరణమును వ్రాయగలము:

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < b$$

q_1, r_1 లను మరి రెండు పూర్ణాంకములతో

$$a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b_1$$

అను వేరొక సమీకరణమును వ్రాయగలమా? లేమా? అను సందేహము ఇచ్చట కలుగవచ్చును.

అట్లయినచో $bq + r = bq_1 + r_1$; $b(q - q_1) = (r_1 - r)$. అందుచేత $(r_1 - r)$ పూర్ణాంకము b యొక్క భాజ్యమని తెలియుచున్నది. కాని r_1, r రెండును b కన్న చిన్నవి. కనుక $(r_1 - r) = 0$ అగుటకు మాత్రమే ఇచ్చట అవకాశము కలదు. అందుచేత $r_1 = r$, $bq = bq_1$ లేదా $q_1 = q$ అగును. కాబట్టి a కు వేరే ప్రదర్శనముండదని రుజువగుచున్నది. a అను సంఖ్యను b అను సంఖ్యచే భాగించునప్పుడు సంఖ్య q ను భాగఫలము అనియు, r ను శేషము అనియు వ్యవహరింతురు.

పూర్ణాంకముల గ. సా. భా: 30, 105 అను రెండు పూర్ణాంకములను తీసికొందము. 30 కి 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 భాజకములు. 105 కి 1, 3, 5, 7, 15, 21, 105 భాజకములు. అందుచేత 1, 3, 5, 15 అను పూర్ణాంకములు 30 కి, 105 కి ఉమ్మడి భాజకములు. ఈ ధనాత్మక ఉమ్మడి భాజకములలో 15 గరిష్ఠమైనది. కాబట్టి 15 ను 30, 105 ల గరిష్ఠసాధారణ భాజకము (గ. సా. భా) అందురు.

$a, b \ldots \ldots l$ అను సంఖ్యలన్నిటిని భాగించు సంఖ్యను వాటి సాధారణ భాజకము అనియు, ఆ సంఖ్యల సాధారణ భాజకములలో గరిష్ఠమైనదానిని వాటి గ. సా. భా. అనియు అందురు. దీనిని $(a, b \ldots l)$ అని గుర్తించెదరు. ... (1)

ఒక పూర్ణాంక సమూహము యొక్క గ. సా. భా 1 అయినచో, ఆ సమూహపు సంఖ్యలను పరస్పర సాపేక్ష ప్రధానములు అని యందురు. ఒక సమూహపు పూర్ణాంకముల, ప్రతిజత పూర్ణాంకముల గ. సా. భా. 1 అయినచో వాటిని జతలవారి ప్రధానములని యందురు.

ఉదాహరణమునకు $(6, 10, 15) = (1)$ అందుచేత 6, 10, 15 లను పరస్పర సాపేక్ష ప్రధానములందురు. కాని $(6, 10) = 2$, $(10, 15) = 5$, $(6, 15) = 3$. కాబట్టి 6, 10, 15 లు జతలవారి ప్రధానములు కావు. కాని $(8, 13, 21) = 1$; $(8, 13) = 1$; $(13, 21) = 1$; $(8, 21) = 1$; అందుచేత 8, 13, 21 లు పరస్పర సాపేక్షముగాను, జతలవారీగాను ప్రధానములే.

అందుచేత ఒక పూర్ణాంక సమూహములోని సంఖ్యలు జతల వారి ప్రధానములగుచో అవి పరస్పరసాపేక్షముగ కూడ ప్రధానములగుననియు, పరస్పర సాపేక్షముగ ప్రధానములైనచో జతల వారి ప్రధానములు కాకపోవచ్చుననియు తెలియుచున్నది.

ఇక గ. సా. భా. యొక్క లక్షణములను, దానిని కనుగొనువిధమును చూచెదము:

105, 15 అను రెండు పూర్ణాంకములను తీసికొందము. 15 యొక్క ప్రతిభాజకము 105 ను కూడ భాగించును: అందుచేత 15, 105 ల ప్రతి సాధారణ భాజకము 15 యొక్క భాజకమైయుండును. 15, 105 ల సాధారణ భాజకములన్నియు 15 యొక్క భాజకములే. అందుచేత 15, 105 ల గ. సా. భా. 15 యొక్క గరిష్ఠ భాజకమునకు సమానమగును. విశేషముగ ఈ అభియోగమునందు 15 నే 15, 105 ల గ. సా. భా యని చెప్పవచ్చును $(15, 105) = 15$. అందుచేత a అను సంఖ్య b యను సంఖ్య యొక్క భాజ్యమయినచో, గ. సా. భా. $(a, b) = b$ అని తెలియుచున్నది.

మరల $117 = 15 \times 7 + 12$; 117, 15 ల ధనాత్మక సాధారణ భాజకములు 3, 1 కదా. అవి శేషము 12 ను కూడ భాగించును. మరల 15, 12 లకు సాధారణ భాజకములు 3, 1. అందుచేత 117, 15 ల సాధారణ భాజకములన్నియు 15, 12 ల సాధారణ భాజకములతో ఏకీభవించుననియు, విశేషముగా గ. సా. భా. $(117, 15)$, గ. సా. భా. $(15, 12)$ కు సమానమనియు తేలుచున్నది. ... (2)

సాధారణముగ $a = bq + c$ (a, b, c లు పూర్ణాంకములు) అయినయెడల, a, b ల సాధారణ భాజకములన్నియు, b, c ల సాధారణ భాజకములతో ఏకీభవించి, విశేషముగ గ. సా. భా. (a, b) గ. సా. భా (b, c) కి సమానమగును. ఉదాహరణమునకు పై భాగహారపద్ధతిని 105, 75 లకు గ. సా. భా. కనుగొందము.

$$105 = 75 \times 1 + 30 \qquad 0 < 30 < 75$$
$$75 = 30 \times 2 + 15 \qquad 0 < 15 < 30$$
$$30 = 15 \times 2 + 0 \qquad 0 = 0 < 15$$

అందుచేత 105, 75 ల గ. సా. భా. (1), (2) నిబంధనలచే 15 అని తెలియుచున్నది.

$$[(105, 75) = (75, 30) = (30, 15) = 15]$$

పై విధమున a, b లను రెండు పూర్ణాంకముల గ.సా.భా. కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతిని యూక్లిడియన్ అల్గోరిదమ్ అనియందురు.

$$a = bq_2 + r_2 \qquad 0 < r_2 < b$$
$$b = r_2q_3 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4 \qquad 0 < r_4 < r_3$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1} \qquad 0 = r_{n+1} < r_n$$

శేషము $r_{(n+1)}$ '0' అయినపుడే సమీకరణము అంతమొందును. (1), (2) నియమముల ప్రకారము $(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \cdots\cdots = (r_{n+1}, r_n) = r_n$. కాబట్టి a, b ల గ. సా. భా. r_n.

m, a, b లు పూర్ణాంకములయినచో

$$(am, bm) = m(a, b)$$

$$\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{(a, b)}{m} \qquad (m|a, m|b)$$

విశేషముగ $\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = \frac{(a, b)}{(a, b)} = 1$

ఇక రెండుకన్న హెచ్చు పూర్ణాంకముల గ. సా. భా. ను కనుగొను విధము చూపుదము. a, b, c లను మూడు సంఖ్యల గ. సా. భా. ను కనుగొందము. ఇప్పుడు a, b, c ల ప్రతిసాధారణ భాజకము a, b ల సాధారణ భాజకమనియు, a, b. ల సాధారణ భాజకములన్నియు వాటి గ. సా. భా. (a, b) యొక్క భాజకములే అనియు మనకు తెలియును. అందుచేత a, b, c ల ప్రతి సాధారణ భాజకము (a, b) కి, c కు భాజకమైయుండును. అనగా అది (a, b), c ల సాధారణ భాజకమగును.

అందుచేత a, b, c ల గ.సా.భా. $\{(a, b), c\}$ అగును.

ఉదాహరణమునకు 105, 70, 60 ల గ. సా. భా. కనుగొందము. మొదట గ. సా. భా. $(105, 70) = 15$ కనుగొనవలయును. తరువాత గ. సా. భా. $(15, 60) = 15$ కనుగొనవలయును.

ఇప్పుడు గ. సా. భా. $(105, 70, 60) = (15, 60) = 15$ అని తేలును. ఈ పద్ధతి ననుసరించి ఎన్ని సంఖ్యల గ.సా.భా. నైన కనుగొనవచ్చును.

కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము : రెండు పూర్ణాంకములు 15, 21 లను తీసికొందము. t_1 ఒక పూర్ణాంకమయినచో, 15 యొక్క ఏ భాజ్యమయినను $M = 15\,t_1$ అను రూపములో నుండును. t_2 కూడ పూర్ణాంకమై, $M = 21\,t_2$ అయిన M సంఖ్య 21 యొక్క భాజ్యము అగును. అప్పుడు $M = 15\,t_1 = 21\,t_2$ (15, 21 ల సాధారణ భాజ్యము M)

$$t_2 = \frac{15\,t_1}{21} = \frac{5\,t_1}{7}$$

5, 7 లకు సాధారణ కారణాంకమేదియు లేదు గనుకను, t_2 పూర్ణాంకము కావునను, 7 యొక్క భాజ్యమై t_1 ఉండవలెను.

$t_1 = 7\,t$ అనుకొనిన అపుడు $t_2 = 5\,t$ అగును.

అందుచేత $\left.\begin{aligned} M &= 21\,t_2 = 21 \times 5\,t \\ M &= 15\,t_1 = 15 \times 7\,t \end{aligned}\right\} = 105\,t$

అందుచేత 15, 21 ల ప్రతిసాధారణ భాజ్యము $105\,t$ అను రూపములో నుండును. అనగా అది 105 యొక్క భాజ్యమగును. t కి కనిష్ఠ విలువను ఒకదానిని ప్రతిక్షేపించినచో, 15, 21 ల కనిష్ఠ (ధనాత్మక) సామాన్య గుణిజము 105 అగును. దీనిని క. సా. గు. (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము) అందురు.

$$\text{గ. సా. భా. } (15, 21) = 3$$

$$\therefore \text{ క.సా.గు.} = 105 = \frac{15 \times 21}{3} = \frac{15, 21 \text{ ల లబ్ధము}}{15, 21 \text{ ల గ.సా.భా}}$$

సాధారణముగ a, b ఏ రెండు పూర్ణ సంఖ్యలయినను

$$\text{క. సా. గు. } (a, b) = \frac{ab}{(a, b)}$$

$$= \frac{a, b \text{ ల లబ్ధము}}{a, b \text{ ల గ. సా. భా.}}$$

పై ఫలితములనుండి గ్రహింపదగ్గ విషయములు :

(i) రెండు పూర్ణాంకముల సామాన్య గుణిజముల సమూహము వాటి క. సా. గు. గుణిజములతో ఏకీభవించును.

(ii) రెండు పూర్ణాంకముల క. సా. గు. వాటి లబ్ధమును వాటి గ. సా. భా. చే భాగించగా లభించు భాగఫలమునకు సమానము.

సాధారణముగ రెండుకన్న హెచ్చు పూర్ణాంకములగు $(a_1, a_2, a_3 \cdots a_{n-1}, a_n)$ క. సా. గు. క్రింది విధమున కనుగొనవచ్చును :

పై ఫలితముల నన్నిటిని దృష్టిలో పెట్టుకొని

(iii) క. సా. గు $= m(a_1, a_2, \cdots a_n)$ ను పరంపర క. సా. గు. లచే కనుగొనవచ్చును.

$$m_2 = (a_1, a_2);\ m_3(m_2, a_3) \cdots \cdots$$

$$\cdots m_n(m_{n-1}; a_n) = m \text{ (కావలసిన క. సా. గు.)}$$

(iv) ఎన్ని పూర్ణాంకముల సామాన్య గుణిజముల సమూహమయినను వాటి క. సా. గు. యొక్క గుణిజములతో ఏకీభవించును.

ప్రధానాంకములు: పూర్ణాంకము 1 కి ఒకే భాజకమున్నది. అది 1 యే. 1 కన్న పెద్దదగు a యను ఏ ఇతర పూర్ణాంకమునకైనను 1, a అను రెండు భాజకములుండును. ఒకటికన్న పెద్దదగు a అను పూర్ణాంకమునకు 1, a తప్ప వేరే భాజకములు లేనిచో దానిని ప్రధానాంకము లేదా ప్రధానము అని యందురు. ఒకటికన్న పెద్దదగు a అను పూర్ణాంకమునకు 1, a లు కాక వేరే భాజకము లున్నచో అది మిశ్రమాంకము. ఉదాహరణమునకు 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 మొదలగు (వందకు తక్కువైన) పూర్ణాంకములు ప్రధానాంకములు. వందకు తక్కువయిన మిగిలిన పూర్ణాంకములన్నియు మిశ్రమాంకములే. ప్రధానాంకము 7 తీసికొందము. దీనికి 1 గాక అదే (7) కనిష్ఠ భాజకము; సాధారణముగ

(i) ప్రతి ప్రధానాంకము Pకు ప్రధాన భాజకముండును. అది P యే. మరియు 1 గాక దానికదే కనిష్ఠ భాజకమగును.

మిశ్రమాంకము 63 ను తీసికొందము. 1, 3, 7, 9, 21, 63 దానియొక్క భాజకములు. 63 కు 1 గాక, 3 కనిష్ఠ భాజకము. ఇది ప్రధానాంకము. $3 < 7 < \sqrt{63}$

మరల మిశ్రమాంకము 16 (పూర్ణవర్గము) ను తీసికొందము. దీనికి 1, 2, 4, 8, 16 భాజకములు; 2 (1 గాక) కనిష్ఠ భాజకము. 2 ప్రధానాంకము. మరియు $2 < 8 = \sqrt{64}$.

(ii) ప్రతి మిశ్రమాంకము $n\ (n > 1)$ కు 1 గాక P అను ఒక ప్రధానాంకము కనిష్ఠ భాజకముగ నుండును. ఈ కనిష్ఠ భాజకము $\sqrt{n}$ కు తక్కువగా గాని, సమానముగా గాని యుండును ($P \leq \sqrt{n}$)

(iii) ప్రధానాంకముల సంఖ్య అనంతము. ఈ తత్త్వమును యూక్లిడ్ నిరూపించెను.

ఎరాటోస్తెనీజ్ జల్లెడ: ఇచ్చిన సంఖ్య N కు సమానముగా గాని, తక్కువగాగాని గల ప్రధానాంకములను కనుగొనుటకు ఎరాటోస్తెనీజ్ జల్లెడ అనబడు సులభ పద్ధతికలదు. దాని ప్రకారము ఇచ్చిన సంఖ్యలను మొదట వరుసగా వ్రాయవలయును.

$$1, 2, 3, 4 \ldots \ldots \ldots \ldots, N \qquad (A)$$

ఈ క్రమమునందు 1 కన్న పెద్దదగు మొదటి అంకె 2. 2, 1 చే కాక, 2 చే మాత్రమే భాగించబడును. అందుచేత 2 ప్రధానాంకము. ఇప్పుడు 2 ని విడిచిపెట్టి (A) నుండి క్రమముగ మిగిలిన 2 యొక్క గుణిజములన్నింటిని తొలగించుము. అనగా 4, 6, 8, 10……ఇవన్నియు తొలగించుము. తొలగింపబడకుండ ఉన్న అంకెలందు 2 తరువాత వచ్చు అంకె 3. 3 కూడ ప్రధానాంకము. ఇప్పుడు మరల 3 ను విడిచిపెట్టి (A) నుండి క్రమముగ 3 యొక్క గుణిజములన్నిటిని — అనగా 6, 9, 12, 15……తొలగించవలెను. మిగిలిన అంకెల క్రమమునందు 3 తరువాత వచ్చు అంకె 5; 5 కూడ ప్రధానాంకమే. అందుచేత 5 ను గాక 5 యొక్క గుణిజములన్నిటిని తొలగింపవలయును.

ఈ పద్ధతి ప్రకారము పూర్ణాంకము P కు సమానముగా గాని, తక్కువగాగాని కల ప్రధానాంకములు కాక, వాటి గుణిజములను మాత్రము సంఖ్యాక్రమమునుండి తొలగించితిమి. P^2 కు తక్కువగానున్న మిగిలిన పూర్ణాంకము లన్నియు ప్రధానాంకములగును. అందుచేత

(i) ప్రధానాంకము P యొక్క గుణిజములను తొలగించు పద్ధతిలో మిశ్రమాంకములు P^2 కంటె పెద్దవిగనే యుండును.

(ii) $\sqrt{N}$కు మించని ప్రధానాంకముల మిశ్రమ గుణిజములన్నిటిని పూర్తిగా తొలగించినప్పుడే $P > \sqrt{N}$ అయితే N కు సమానముగాగాని, తక్కువగాగాని గల ప్రధానాంకముల పట్టిక పూర్తియయినదని భావించవలయును.

ఉదాహరణము: 40 కి లోపల ప్రధానాంకములు దిగువ అంచెల వారీగా మిశ్రమాంకములను తొలగించి కనుగొనబడినవి.

(A_1) 1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~, 31, ~~32~~, 33, ~~34~~, 35, ~~36~~, 37, ~~38~~, 39, ~~40~~

(A_2) 1, 2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, 25, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, 35, 37, ~~39~~

(A_3) 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ~~25~~, 29, 31, ~~35~~, 37

(A_4) 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

పూర్ణాంకములను ఏకైక రీతి ప్రధానాంక, కారణాంకములుగ వ్రాయుట : P అనునది ఏదో ఒక ప్రధానాంక మయినచో

(i) ప్రతి పూర్ణాంకము P కు సాపేక్షముగ ప్రధానముగా నుండును. లేని ఎడల అది P చేత భాగింపబడును.

(ii) కొన్ని కారణాంకముల లబ్ధము P అను ప్రధానాంకముచే భాగించబడిన ఎడల, ఆ కారణాంకములలో ఏదో ఒకటి P చేత భాగించబడును.

ఇప్పుడు మిశ్రమాంకమగు 58800 ను తీసికొందము.

(a) $58800 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ (2,3,5,7 ప్రధానాంకములు)

(b) $29400 = 2^3 \cdot 3 \; 5^2 \cdot 7^2$ (2,3,5,7 ప్రధానాంకములు)

సాధారణముగ 1 కన్న పెద్దదగు ప్రతి పూర్ణాకమును ప్రధానాంక కారణాంకముల లబ్ధముగ విడదీయ వచ్చును.

ఎమ్. వి. సు.

పై (π) వగైరా విలువ : ఇందు ప్రసిద్ధకరణీయ, అబీజీయ సంఖ్యలగు పై (π), ఇ (e) లు చర్చించబడును.

పై (π) విలువ : వృత్తముయొక్క పరిధికిని, వ్యాసమునకు ఉన్న నిష్పత్తి ఒక స్థిరరాశి అని ప్రాచీనకాలములోనే పెక్కు కొలతలవలన కనిపెట్టియుండవలెను. ఈ స్థిర సంఖ్యను π అను గ్రీక్ అక్షరముచే గుర్తించుట సంప్రదాయము. π అను సంఖ్య p/q అను రూపమును (p, q లు పూర్ణాంకములు) ధరించు సంఖ్య కాదు. అది కరణీయ సంఖ్య. అది బీజగణిత సంఖ్య కానేకాదు. ఇవన్నియు మన కాలములోనే రుజువైన విషయములు. అందువలన ప్రాచీనకాలములో π కి కనిపెట్టిన విలువలు రమారమిగా ఉన్నవియే. వీటిలో అతి స్థూలమైనది 3 (చీనాదేశము, బైబిల్). దానికన్నను యదార్థమైనవి $3\frac{1}{8}$ (రోమ్ వారు), 3·1416 (ఆర్కిమీడీజ్, ఆర్యభట్టు), $\sqrt{10} = 3{\cdot}1623$ (బ్రహ్మగుప్త, మహావీర, శ్రీధర).

ఒక వృత్తములో ఒక క్రమషడ్భుజిని ప్రవేశపెట్టిన దాని భుజములు సరిగా వృత్తముయొక్క వ్యాసార్థము అంత పొడుగుండును. అందువలన షడ్భుజియొక్క పరిధి వృత్తపరిధిగా పరిగణించిన, పరిధి $= 6r$, $\therefore \pi = 3$ అగును. అయితే వృత్తపరిధి కంటె షడ్భుజి పరిధి తక్కువైనందు వలన $\pi > 3$ అని తెలియును. ఈలాగుననే షడ్భుజిలో వృత్తమును అమర్చిన $\pi < 3{\cdot}464$ అని తెలియుచున్నది. షడ్భుజికి బదులుగ, క్రమ ద్వాదశ భుజిని వృత్తము లోపలను బయటను అమర్చి వాటి పరిధులను గణించినచో వృత్తపరిధికి ఇంకను కచ్చితమైన విలువ దొరకును. 6 భుజములు గల క్రమ బహుభుజినుండి 12 భుజములు గల క్రమబహుభుజి యొక్క పొడవును కచ్చితముగ గణింపసాధ్యము. ఇట్లు 12, 24, 48, కడపట 96 భుజములు గల క్రమబహుభుజులు ఒక వృత్తమునకు బయటను లోపలను అమర్చి ఆర్కిమీడిజ్ $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ అని స్థాపించెను. భారతదేశమునందుకూడ ఇదే మార్గమును అవలంబించి ఆర్యభట్టు $\pi = 62832/20000 = 3{\cdot}1416$ అను విలువను కనిపెట్టెను. ఆర్యభటుడు I తాను గణించిన విలువ కూడ కచ్చితమైన విలువ కాదని చెప్పియున్నాడు. దీనిని గురించి కేరళ దేశపు సోమయాజి తన 'తంత్రసార సంగ్రహము' లో క్రిందివిధముగ వ్రాసియున్నాడు.

'ఆర్యభటుడు I, π కు సరియైన విలువను ఇవ్వలేదు ; కారణమేమన అది ఇచ్చుటకు సాధ్యము కాదు. ఏ మానముతో నైనను మనము వృత్తవ్యాసమును శేషము లేక కొలిచెదమో, అదేమానముతో ఆ వృత్తపరిధిని కొలువగా శేషము మిగులును. అదే విధముగ ఏ మానముతో పరిధిని శేషము లేక కొలిచెదమో, ఆ మానముతో వ్యాసమును కొలువగా శేషము మిగులును. కనుక ఒకే మానము రెండింటిని నిశ్శేషముగ కొలువనేరదు. ఎంతదూరము వెళ్లినను మనము శేషమును తగ్గించవచ్చును గాని రెండింటిని నిశ్శేషము చేయ సాధ్యము కాదు!'

మధ్యయుగమునను, ఆధునిక కాలమునందును π యొక్క విలువను వేరురీతిగ అనంతపదములనుపయోగించి వ్రాసిరి :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots$$

(వియేటా 17 వ శతాబ్దము)

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \;\ldots\;\ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \;\ldots\;\ldots}$$

(జాన్ వాలిస్ 1655)

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

(లైబ్నిట్జ్ 1673)

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \ldots\right)$$

(జాన్ మాచిన్ 18 వ శతాబ్దము)

అనంతసంకలన పరంపరలను ఉపయోగించి π విలువను వేలకొలది స్థానములకు గణించియున్నారు.

ఆ. న.

ఇ (e) సంఖ్య : ఈ సంఖ్యను మొట్టమొదట ఆయిలర్ ఉపయోగించెను. n అనంతమును సమీపించు నపుడు

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ అను సమాసము యొక్క అవధి విలువగా సంఖ్య 'e' ను నిర్వచింతురు.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ను ద్విపద సిద్ధాంతముచే విస్తరీకరించిన

$$1+\frac{n\cdot 1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}+\cdots$$

లభించును. కాని దీనియందలి చలరాశి n అనంతమును సమీపించునపుడు, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ మొదలగునవి ఒక్కొక్కటి అందాదుగా 1 కి సమానమని తీసికొనిన

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots$$

అగును.

e విలువ 2 కన్న ఎక్కువ అని స్పష్టముగ తెలియుచున్నది. అది 3కన్న తక్కువ అనికూడ తేలికగ రుజువు చేయవచ్చును. దీనివిలువ 2.71828...'e' కరణీయ సంఖ్య. (ఇర్రేషనల్ నంబర్) అనగా అది రెండు పూర్ణాంకముల నిష్పత్తిగా ఉండదు. ఇంకను ఇది బీజీయసంఖ్యకాదు, అనగా చయన గుణకములతో (ఇంటెగ్రల్ కోఎఫిసియెంట్స్) కూడి ఉన్న ఏ బీజసమీకరణమును అది తృప్తి పరచదు. 'e' అబీజీయ సంఖ్య అని ఫ్రెంచ్ గణితశాస్త్రవేత్త సి. హెర్మైట్ 1873 లో నిరూపించెను. ఈ నిరూపణ గణితశాస్త్ర చరిత్రలో ప్రధాన మైలురాయివంటిది. పైన వివరించిన పద్ధతిలో n అనంతమును సమీపించునపుడు $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ యొక్క అవధియు అటులనే $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ యొక్క అవధి e^x అనియు,

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}+\cdots$$

అనియు చూపవచ్చును. e^x ఫలము విశ్లేషణగణితములో చాల ముఖ్యమైనది. కలనశాస్త్రములో $y=e^x$ అను ఫలము విశేషధర్మమును వహించుచున్నది. అది ఏమన దాని వ్యుత్పన్నము dy/dx కూడ e^x అగును. x యొక్క ధనాత్మక, ఋణాత్మక విలువలకు e^x ఫలము యొక్క పట్టికలు తయారుచేయబడినవి.

గణిత శాస్త్రములో e తో కూడిన అతి ప్రధాన సిద్ధాంతములలో ఒకటి అగు ఆయిలర్ సిద్ధాంతము: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. ఇది పైన పేర్కొనిన e^x యొక్క విస్తరణలో x కు బదులు $i\theta$ను ప్రతిక్షేపించిన లభించును. విస్తరణలోని వాస్తవ భాగమును $\cos\theta$ యొక్క విస్తరణగాను, i యొక్క గుణకమును $\sin\theta$ యొక్క విస్తరణగాను తీసికొనవలయును.

ఆయిలర్ సిద్ధాంతము ఫలితముగా డిమోవియర్ సూత్రము $(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos\theta+i\sin m\theta$ లభించుచున్నది.

ప్రాథమిక జ్యామితి అధ్యయనములోనే 'π' తటస్థించుటచే e సంఖ్య కన్న π ఎక్కువ ప్రసిద్ధి నొందినది. 'e' ని నేపియర్ లాగరిదమ్‌ల 'బేస్' గా మాత్రమే భావింతురు. వాస్తవమునకు నేపియర్ తన లాగరిదమ్‌ల గణనలో ఏ బేస్‌ని ఉపయోగించలేదు.

లిండర్‌మాన్ π బీజీయ సంఖ్యకాదని నిరూపించుటకు 9 ఏండ్ల పూర్వమే, e బీజీయ సంఖ్యకాదని అని హెర్మైట్ నిరూపించెను. పా. ల. నా.

ప్రకేవల విలువ : ఒక వాస్తవ ధన సంఖ్యకు ప్రకేవల విలువ ఆ సంఖ్యవిలువయే. ఒక సంఖ్య a అయితే దాని ప్రకేవల విలువను $|a|$ సంకేతము గుర్తించును. కనుక $|3.25|=3.25$.

ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఋణాత్మకమైనచో దాని ప్రకేవల విలువను కనిపెట్టుటకు ఋణాత్మక సంకేతమును మాత్రము వదలిపెట్టి అదేసంఖ్యను ధనాత్మకముగ తీసికొందుము. ఉదా :

$$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}.$$

ఒక సంఖ్య సంకీర్ణ సంఖ్య అయినచో దాని రూపము $a+ib$ గ నుండును. ఇచ్చట a, b వాస్తవ సంఖ్యలు. ధనాత్మకము:గనో ఋణాత్మకముగనో ఉండ వచ్చును. $i=\sqrt{(-1)}$ దీని ప్రకేవల విలువ $\sqrt{(a^2+b^2)}$ అని నిర్వచనము. ఇచ్చట $\sqrt{\ }$ సంజ్ఞ ధనాత్మక వర్గమూలమును గుర్తించును. $a+ib$ సంఖ్యను, (a, b) నిరూపకములు గల బిందువుచే గుర్తించినచో ఈ సంఖ్యయొక్క ప్రకేవల విలువ, ఆ బిందువునకును నిరూపకకేంద్రమునకును గల దూరమును గుర్తించును. ఆ. న.

ప్రతిరూప వరణము : ఒక యంత్రాగారమునుండి లక్షలకొలది యంత్రనిర్మితవస్తువులు తయారై, అమ్మకమునకు బయటకు పంపబడును. వస్తువులుశుద్ధములు కానిచో వానిని బయట అమ్ముటకు వీలులేదు. అన్ని వస్తువులను పరీక్షించుట అసాధ్యమగుటని; అట్లు పరీక్షించుటలో కొన్ని సమయములందు వానిని పగులగొట్ట వలయును. అట్లు పరీక్షించుటలో ఎంత భాగము లేదా, పరిశతములో లోపము కలదు అని తెలిసికొని, 4% లేదా 5% చెడిపోయిన వస్తువు లుండినచో వ్యాపారములో చెడ్డపేరు రాదని వస్తువులను అమ్మకమునకు పంపవచ్చును.

ఇట్లు పరీక్షించుటకు, ప్రతిరూపములను ఉపయోగింతురు. ప్రతిరూపములలో ఎంత పరిశతము లోపము కలదో అంతయే మొత్తము లోకములో లోపము కలిగియుండునని తీసికొనుట శాస్త్రసమ్మతము.

సంభావ్యతావాదము లో అన్ని వస్తువులను పరీక్షించి, ఏ వస్తువు తీసికొనినను, అది లోపము కలదై యుండుటకు సంభావ్యత ఎంతయని కనుగొందుము. ప్రస్తుతవిధానము దానికి విలోమకర్మ అనగా ఒక ప్రతిరూపమునుండి లోకములో నుండు లోపాలోపములను నిశ్చయించుట.

ప్రతిరూపములు ఏరుట: ప్రతిరూపములను నిష్పక్ష పాతముతో ఏరవలయును. దానికి అనేక మార్గములు కలవు. కాని ప్రతిదానిలోను ఏదో ఒక లోపముండును. అన్నిటికంటె ఉత్తమవిధానము టిప్పెట్ గారి యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప సంఖ్యలను వాడుట. అతడు ఇష్టము వచ్చినట్లు అంకెలను చేర్చి నాలుగు స్థానముల సంఖ్యలను 10400 ప్రచురించెను. ఒక (జనక) లోకములో 2000 వస్తువులుండిన, వానిలో నుండి 15 వస్తువులు గల ప్రతిరూపము ఏరునపుడు మొదట అన్ని వస్తువులను వరుసక్రమమున పేర్చి 1 నుండి 2000 వరకు సంఖ్యల అమర్చవలయును. టిప్పెట్ సంఖ్యల పుస్తకములో ఏదో ఒక పుటను తీసి అందు మొదటి 15 సంఖ్యలను ఏరి, వానికి అనురూపమగు వస్తువులను తీసికొనవలయును.

జనక లోకములో వస్తువుల సంఖ్యలు తక్కువయయిన, (200 అనుకొందము), 0001 నుండి 0200 వరకు గల సంఖ్యల ఉపయోగించి టిప్పెట్ సంఖ్యలలో నుండి ప్రతిరూపములను ఏరుట వ్యర్థ కార్యము.

$200 \times 50 = 10000$ అయినందున, ఒక్కొక్క వస్తువునకు 50 సంఖ్యల అమర్చిన, మొదటి వస్తువునకు 1-50, రెండవ దానికి 51-100 కడపటి దానికి 9951-10000 సంఖ్యలు ఏర్పడును. ప్రతి వస్తువునకు ఈ సంఖ్యలను జతపరచవలయును. మన ప్రతిరూపములో 5 వస్తువులు కావలయునని, టిప్పెట్ పుస్తకములో ఒక పుటలో మొదటి 5 సంఖ్యలకు అనురూపముల చెందిన వస్తువులను తీసికొనిన మనకు తగిన ప్రతిరూపము లభించును. ఇట్టి సంఖ్యలను ఫిషర్, మహాలనోబిస్ కూడ తయారుచేసిరి.

అనంత సంఖ్యాకలోకము: ఒక బస్తా బియ్యమునుండి ఒక తగిన ప్రతిరూపము ఏరవలయుననిన, మనము అనంత సంఖ్యాకవస్తువులను గమనింపవలయును. ఇపుడేమి చేయవలయును? బస్తా బియ్యమును రెండు భాగములు చేసి ఒక భాగము తీసికొనవలయును. దీనిని బాగుగా కలిపి, అందులో సగము, ఇట్లు మనకు అనుకూలమగు చిన్న పొట్లము వచ్చువరకు పంచిపెట్టవలయును. అవిచ్ఛిన్న వస్తువులలో ఈ మార్గమును అవలంబించుట యుక్తము.

సాధారణ ప్రతిరూపములు: ఇందు ఒక్కొక్క సంభవము ప్రత్యేకము. మరియొక దానితో సంబంధముండదు. ఒక నాణెమును ఎగురవేయునపుడును, ఒక పాచికను దొర్లించునపుడును సాధారణ ప్రతి రూపముల ప్రసక్తి కలదు. కాని 8 మంది విద్యార్థులలోనుండి ఇద్దరిని ఏరవలయుననిన, సాధారణ ప్రతిరూపము లభింపదు. మొదటి విద్యార్థిని ఏరునపుడు సంభావ్యత $\frac{1}{8}$; తర్వాత 7 మంది విద్యార్థులు కలరు; వీరిలో ఒకరిని ఏరునపుడు సంభావ్యత $\frac{1}{7}$; రెండవ సంభవము, మొదటి సంభవముపై ఆధారపడియున్నది.

కొన్ని ముఖ్య విషయములు: n సంభవములు గల N ప్రతిరూపములను తీసికొందము. ఒక సంభవము యొక్క జయము p, అపజయము $q = 1 - p$ అయిన $0, 1, 2 \ldots n$ జయముగల ప్రతిరూపముల వారతలు (పౌనఃపున్యములు) క్రమముగా $N(p+q)^n$ యొక్క పదములు ఇచ్చును. అవి:

$$N\left\{q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}q^{n-2}p^2 + \cdots + p^n\right\}$$

వాని మధ్యమము $M = np$; క్రమచలనము $\sigma = \sqrt{npq}$. జయములసంఖ్యకు బదులు, వాని నిష్పత్తిని తీసికొనిన, ఒక్కొక్క ప్రతిరూపములో జయము $\frac{p}{n}$, అపజయము $\frac{q}{n}$ భాగము; జయముల నిష్పత్తి యొక్క క్రమ విచలనము $S = \sqrt{\frac{pq}{n}}$; క్రమ విచలనమునకు క్రమప్రమాదము అను పర్యాయ నామము కలదు.

ప్రయోగములు: ఒక ప్రతిరూపములో అభీష్టవారతలు (పౌనఃపున్యములు) అవేక్షణయందు లభించిన వారతలు ఏకమగునా? వ్యత్యాసముండిన, ఎంతయుండవచ్చును?

అభీష్టవారత (పౌనఃపున్యము)ల నుండి క్రమవిచలనము లేదా క్రమ ప్రమాదము కనుగొనవచ్చును. వ్యత్యాసము క్రమ ప్రమాదము యొక్క 3 రెట్లకు తక్కువయయిన, వ్యత్యాసమును నిరసింపవచ్చును. లేనిచో అభీష్టవారతలు సరికావు అని తలచుకొనవలయును. మరియొక ఉదాహరణము తీసికొందము. రెండు విజాతీయ లోకముల నుండి ప్రతి రూపములలో జయముల నిష్పత్తులు p_1, p_2, అవలోకముల సంఖ్య n_1, n_2. వాని జయములలో వ్యత్యాసము నిరసింపవచ్చునా? కూడదా?

రెండు ప్రతిరూపముల p (జయము యొక్క) భారవర్థిత నిష్పత్తి: $\frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2} = p_0$; వాని క్రమ ప్రమాదములు

$\sigma_1^2 = \frac{p_0 q_0}{n_1}$, $\sigma_2^2 = \frac{p_0 q_0}{n_2}$ వాని వ్యత్యాసముల క్రమ ప్రమాదము :

$$\sigma^2_{12} = p_0 q_0 \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right\}$$

అవలోకిత వ్యత్యాసము క్రమప్రమాదమునకు 3 రెట్లుకు తక్కువయయిన, వ్యత్యాసము నిరసింపవచ్చును. లేనిచో నిరసింపకూడదు.

ప్రతిరూప మధ్యమము యొక్క క్రమ ప్రమాదము : ఒక ప్రతిరూపములో n ప్రతులు ఉండనిమ్ము. ప్రతి దాని ప్రమాణము $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ అయిన వాని మధ్యమము $X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$. మన అభీష్ట లోకములోనుండి పలు విధ ప్రతిరూపములు తీయవచ్చును. $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ యొక్క విలువలు పరస్పర స్వతంత్రములు. వాని క్రమవిచలనము లన్నియును అవధిలో సమానములై లోకములో నుండి తీసిన అనంత ప్రతిరూపముయొక్క క్రమవిచలనము σ కు సమానములగును. $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ యొక్క క్రమవిచలన ముల మొత్తము $\sqrt{n \cdot \sigma}$ కాబట్టి ప్రతిరూపముల మధ్యమము యొక్క క్రమవిచలనము $= \frac{\sqrt{n \cdot \sigma}}{n} = \sigma / \sqrt{n}$ ఇది ఒక ముఖ్యమగు సూత్రము.

మరికొన్ని సూత్రముల క్రింద వివరింతము. ఉపపత్తులకు ఇతర ప్రౌఢగ్రంథములను చూడవచ్చును.

(1) σ_1, σ_2 రెండు ప్రతిరూపముల క్రమవిచలనము లయిన వాని అంతరముల యొక్క క్రమవిచలనము లేదా క్రమప్రమాదము $\sigma^2_{12} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$; n_1, n_2 ప్రతిరూపముల సంఖ్య.

(2) సమవాయితా గుణకనుయొక్క క్రమప్రమాదము :

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$$

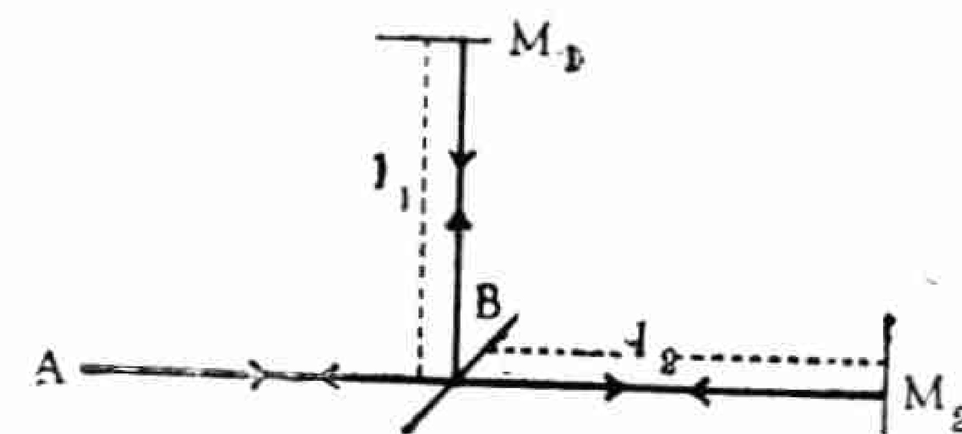
(3) క్రమ విచలనము యొక్క క్రమప్రమాదము :

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

ఆచార్య

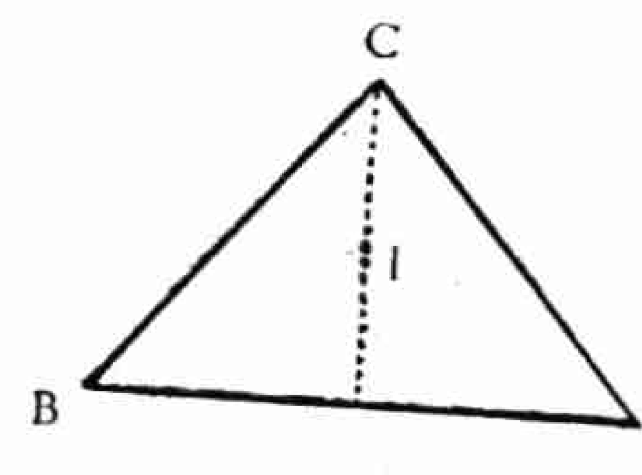
ప్రత్యేక సాపేక్షతావాదము : 19 వ శతాబ్దములో విజ్ఞానశాస్త్రజ్ఞులు ఈ విశ్వమంతయు 'ఈథర్' అను నొక సూక్ష్మ పదార్థముచే నిండియున్నదనియు, సూర్య చంద్ర గ్రహతారకాదులన్నియు నిరాటంకముగానందు సంచరించుచున్నవనియును, అది అదృశ్యపదార్థమనియు, ఆకాశమంతయు ఈ 'ఈథర్' చే నిండియున్నదనియును భావించెడివారు. ఆ కాలమున విద్యుదయస్కాంతాది సిద్ధాతము లీ 'ఈథర్' కు అనుగుణముగా ప్రతిపాదింప బడుచుండెడివి. ఈ 'ఈథర్' పరస్పర విరుద్ధ గుణములను కొన్నింటిని కలిగియున్నను తత్కాల శాస్త్రజ్ఞులు తమ శాస్త్ర చర్చలను 'ఈథర్' సహాయముననే నడిపించు చుండెడివారు. ఇట్టి 'ఈథర్' నందు ప్రయాణము చేయు చున్న మన భూమియొక్క వేగమును కనుగొనుటకు 1881 వ సంవత్సరములో మైకేల్‌సన్, మార్లే అను ఇద్దరు శాస్త్రజ్ఞులు పూనుకొనిరి. మిక్కిలి ముఖ్యమైన ఈ ప్రయోగపరిణామమే తరువాత ఐన్‌స్టయిన్ ప్రత్యేక సాపేక్షతావాదమును ప్రతిపాదించుటకు కారణమైనది. సంక్షేపముగా ఆ ప్రయోగము క్రింద వివరింపబడినది.

మైకేల్‌సన్ - మార్లే ప్రయోగము : ఒక కాంతి కిరణము A అను మూలస్థానము నుండి బయలుదేరి ఆంశిక పరావర్తనము వలన B అను నొక అర్ధ రజతీకృతమైన గాజు పలక వద్ద ద్విధా విభజింపబడి BM_1, BM_2 అను రెండు ఋజు రేఖలమార్గముల వెడలి M_1, M_2 అను స్థలముల యందుండు అద్దములందు ప్రతిబింబించి, అవే రేఖల ద్వారా వెనుకకు మఱలి B పలకపై బడును (చూ. చిత్రము 286).



చిత్రము 286

అచ్చట M_2 నుండి వచ్చిన కిరణములో కొంత భాగము B గుండా పోయి, M_1 నుండి వచ్చిన కిరణములో కొంత భాగము ప్రతిబింబించి యీ రెండు భాగములును అడ్డు బడును. భూభ్రమణము వలన ఈ పరిశోధన యంతయు BM_2 అను దిశలో వెళ్లుచున్నదనుకొనుము. ఆ వేగము v అనియు, కాంతి వేగము c అనియు అనుకొనిన ఎడల B నుండి M_2 కు పయనించు కాంతి కిరణము యొక్క వేగము పరిశోధన యంత్రమునకు సాపేక్షముగ $c - v$ అగును. అదే కిరణము తిరుగు ప్రయాణములో $c + v$ వేగమును కలిగియుండును. కావున అది B నుండి M_2 కు వెడలి తిరిగి వచ్చుటకు తీసికొను కాలము $\frac{l_2}{c+v} + \frac{l_2}{c-v} = \frac{2 l_2 c}{c^2 - v^2}$ అగును. ఇచ్చట $BM_1 = l_1$, $BM_2 = l_2$. భూభ్రమణము వలన B నుండి M_2 కు పయనించు కిరణము BCB_1 అను మార్గమున ప్రయాణము చేయును (చూ. చిత్రము 287).



చిత్రము 287

BC దూరము = CB_1 దూరము = $\frac{cl_1}{\sqrt{c^2-v^2}}$ కావున కాంతి కిరణము BCB_1 మార్గమున ప్రయాణము చేయుటకు తీసికొను కాలము $\frac{2l_1}{\sqrt{c^2-v^2}}$ అగును. l_1, l_2 సమానమై నప్పటికిని ఈ రెండు కాలములు సమానములు కావు. పరిశోధనయంత్రము నంతను ఇప్పుడు 90° గుండా త్రిప్పిన ఎడల, BM_1 అను రేఖ భూభ్రమణ దిశలో నుండును. గాన, నదే ప్రయోగమీ పరిస్థితులలో చేయబడినప్పుడు కిరణ ప్రయాణకాలముల భేదము ఇతఃపూర్వముకన్న భిన్నముగా నుండును. దీనివలన E వద్ద కలుగు కిరణ సంయోగ జనితములైన అడ్డపడు ఛాయా అంచులలో గల్గు చలనమును గుర్తించగలము. ఈ కాల తారతమ్యములకు గల భేదము $d = 2(l_1+l_2)\left(\frac{c}{c^2-v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)$ అగును.

కాని శాస్త్రజ్ఞుల కచ్చెఱువు గొల్పునట్లు ఈ పరిశోధన నెన్నిసార్లు, ఎన్నిరకములుగ నెంతటి సున్నితములైన పరికరములనుపయోగించి చేసినను అడ్డపడు ఛాయా అంచులలో మార్పేమియును గోచరింపలేదు. అనగా కాల తారతమ్యము లేదన్నమాట. దాని పర్యవసానము d సున్న యగుటయే, అనగా v సున్న కావలయును. దీనిని బట్టి 'ఈథర్' కును భూమికిని సాపేక్షవేగము లేదని తేలును. కాని రేయింబవళ్లు, ఋతువులు మొదలగు పరిణామము లన్నియును భూమి సూర్యుని చుట్టును తిరుగుట వలన గలుగునను విషయ మప్పటికే సిద్ధాంతీకరింపబడుటచే తన్నిరాకరణము వలన క్రీ. పూ. నుండి 16వ శతాబ్దము వరకు గల భూకేంద్ర విశ్వ సిద్ధాంతమునకు మరలిపోవుట తప్ప గత్యంతరము లేకపోయినది. ఈ ప్రయోగ పర్యవసానము శాస్త్రజ్ఞుల అంచనాలను, సిద్ధాంతములను తలక్రిందులు చేయునట్లే తోచినది.

అసందర్భముగా దోచు నీ ప్రయోగ పర్యవసాన మితర సిద్ధాంతములతో విరోధింపకుండునట్లుగా అనేక శాస్త్రజ్ఞులనేక క్రొత్త సిద్ధాంతములను ప్రతిపాదించిరి. ఆ సిద్ధాంతములలో ఫిట్జ్ గెరాల్డ్, లారెంజ్ అను నిద్దరు శాస్త్రజ్ఞులు విడివిడిగా ప్రతిపాదించిన సంకోచన సిద్ధాంతము ముఖ్యమైనది.

సంకోచన సిద్ధాంతము: మానవుడు తన వేగమును 'ఈథర్'లో కొలుచుకొన నేరనట్లు ప్రకృతియంతయు నొక క్రమబద్ధమైన కుట్ర పన్నినదనుటయే ఈ సిద్ధాంత సారాంశము. ఆ కుట్రయిది: 'చలన దిశలో కొలువబడు దూరములన్నియు సంకోచనము చెందును. ఆ సంకోచన విభాజకము $\sqrt{1-v^2/c^2}$, అనగా BM_2 దూరము l_2 కన్న తక్కువగును. ఈ తక్కువ సరిగా ప్రయాణకాల తారతమ్యమును తొలగించును. దీని ఫలితము వేరు వేరు కొలత బద్దలు పరస్పరము చలనమును కలిగియున్న ఎడల వేరు వేరు కొలతల నిచ్చుననియే. కాని యెందులకట్లు కొలతలు సంకోచనము పొందునో తత్కారణము మాత్ర మీ సిద్ధాంతమున మృగ్యము. కాని 1905లో ఐన్‌స్టయిన్ ప్రత్యేక సాపేక్షతాసిద్ధాంత ప్రతిపాదనము వలన దీనిని వివరించెను.

మైకేల్‌సన్ - మార్లే ప్రయోగములో వచ్చిన కాల తారతమ్యము, రెండు పరిస్థితులలో శూన్యమగును.

(i) భూభ్రమణ వేగము శూన్య మగుట;

(ii) BM_1, BM_2, M_1B, M_2B మొదలగు దిశలన్నింటను కాంతి వేగము సమానమగుట;

కాని ఈ రెండు పరిస్థితులను సాధారణులకు సహజముగా నూహింపరానివి. విప్లవాత్మకములగు నీ పరిస్థితులను నూతన సిద్ధాంతములకు ప్రాతిపదికలుగా ఐన్‌స్టయిన్ ఉపయోగించెను. ఇది తత్కాల విజ్ఞానశాస్త్ర వాతావరణమునకు పూర్తిగా భిన్నముగా నూహించగల యసాధరణ బుద్ధి సంపన్నునకుగాని సాధ్యపడదు. పై జెప్పిన రెండు పరిస్థితులలో ఏ ఒక్కదానిని స్వీకరించినను మైకేల్‌సన్ - మార్లే శోధనను సరిగా వివరింపవచ్చును. కాని యా రెండు పరిస్థితులను మార్చి ప్రాథమిక విజ్ఞాన సూత్రములుగా ఐన్‌స్టయిన్ ప్రతిపాదించెను. ఆ రెండును నివి:

ప్రత్యేక సాపేక్షతా సిద్ధాంత సూత్రములు: (1) రెండు బృందములు ఏకరూప వేగముతో ఋజు రేఖలో ప్రయాణము చేయుచున్నప్పుడు, వానిలో నొక బృందములో చేయు ఏ శోధనల వలననైనను, ఆ రెండింటికిని భేదమును కనుగొనుట అసాధ్యము.

(2) కాంతి వేగము చలన దిశపైగాని, వేగమును కొలుచు పరిశీలన యంత్రముయొక్క వేగముపైగాని ఆధారపడి యుండదు.

మొదటిసారిగా ఆ శాస్త్రజ్ఞుడు ఏకరూప చలనమునకు సంబంధించిన సూత్రములనే ఉపపాదించుట వలన ఆ సూత్రములకు 'ప్రత్యేక సాపేక్షతా సిద్ధాంత సూత్రము' లని పేరువచ్చెను.

లారెంజ్ రూపాంతర సమీకరణములు: S' అను నిరూపకాక్షములు S అను నిరూపకాక్షములకు సాపేక్షముగా v అను ఏకరూపవేగముతో x-అక్షదిశలో ప్రయాణము చేయుచున్న దనుకొందము. ఒక సంఘటనను (x, y, z, t)

అను నిరూపకములద్వారా (x, y, z అను స్థలమున t అను కాలములో జరిగినదానినిగా) S లో వర్ణించిన యెడల, అదే సంఘటనను S' బృందములో (x', y', z', t') అను నిరూపకములద్వారా వర్ణింతురనుకొందము. $t' = t = 0$ అయినప్పుడు రెండు బృందములలోని నిరూపకాక్షములును సర్వసమానములని యనుకొందము,

$t = 0$ కాలమున రెండు నిరూపకాక్షములకును ఒకే మూలస్థానమువద్ద ఒక కాంతికిరణము బయలుదేరిన దనుకొనుము. తదుపరి t (S లో) అను కాలమున నా కాంతి తరంగముండు బిందువులన్నియును

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad \cdots (1)$$

అను గోళముపైనుండును. S' అక్షములను తీసికొనిన ఆ బిందువులన్నియు

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad \cdots (2)$$

అను గోళముపై నుండును.

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$$

అను గెలిలియన్ రూపాంతరసమీకరణములను మనము స్వీకరించిన యెడల, (1), (2) సమీకరణములు $v = 0$ తప్ప మరియే విలువకును సరిపోవు. కావున సౌలభ్యము కొరకు

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= ly \\ z' &= mz \\ t' &= ax + by + cz + dt \end{aligned} \qquad \cdots (3)$$

అను రూపాంతర సమీకరణములను తీసికొని అనిశ్చిత సంఖ్యలను కనుగొందము. (2) వ సమీకరణములో x', y' z', t' లకు విలువలను (3) వ సమీకరణము నుండి ప్రతిక్షేపించి (1) వ సమీకరణముతో సరిపోల్చుట వలన

$$x' = \gamma(x - vt);\ y' = ly;\ z' = lz \qquad \cdots (4)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right);\ \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

అని వచ్చును. ($\pm$ గుర్తుల సందేహము, $v = 0$ అయినప్పుడు $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$ అగునని గుర్తుంచుకొన్న యెడల తీరిపోవును) పై సమీకరణములనుండి x, y, z, t లను కన్గొన్నచో

$$x = \gamma(x' + vt');\ y = y'/l,\ z = z'/l;$$

$$t = \gamma\left(t' + v\frac{x'}{c^2}\right) \qquad \cdots (5)$$

అని వచ్చును.

(4), (5) సమీకరణములు రెండును v కి గల సంకలన వ్యవకలన గుర్తులు మినహా తక్కిన రూపములో నొకేరీతిగా నుండవలయునన్న $l = 1$ అని వచ్చును. కావున నీ రూపాంతర సమీకరణములను, యిట్లు వ్రాయవచ్చును :

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_1)$$

$$y' = y \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_2)$$

$$z' = z \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_4)$$

లేదా

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_1')$$

$$y = y' \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_2')$$

$$z = z' \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_3')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (l_4')$$

v/c చాల చిన్నదైనప్పుడు ($v/c \longrightarrow 0$) పై సమీకరణములు గెలిలియన్ రూపాంతరసమీకరణములతో సమానములగును.

లారెంజ్ సమీకరణముల కొన్ని ఫలితములు: (1) S బృందములో x-అక్షముపై గల రెండు బిందువుల నిరూపకములు x_1, x_2 యును, అవే బిందువులు S' బృందములో x_1', x_2' నిరూపకములను (S' బృందములో ఏక కాలమున కొలువబడినవి) కలిగియున్న యెడల (l_1') సమీకరణము నుండి $x_1 - x_2 = \gamma(x_1' - x_2')$

అని వచ్చును. (l_1) సమీకరణము నిచ్చటయుపయోగింపరాదు; ఏలనన మనకు t' కాలమున, S' బృందమున గల యారెండు బిందువుల నిరూపకములును గావలెను కాని t కాలమున గాదు. లారెంజ్ సంకోచన సిద్ధాంత మిట్లు ప్రత్యేకసాపేక్షతాసిద్ధాంత మూలసూత్రముల సహజ పర్యవసానముగా పరిణమించినది.

పైరీతిగనే, S లో ఒకే స్థలమున (x వద్ద) జరుగు రెండు సంఘటనల కాలములు t_1, t_2 అయినయెడల S' లో వాని కాలములు t_1', t_2' అనునవి (l_4) సమీకరణము వలన నీయబడును. కావున

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1)$$

అను సమీకరణము సిద్ధించును. దీనిని బట్టి, కాలవ్యవధులు పయనించుచున్న ఘటీయంత్రమునందెక్కుడుగా కన్పట్టునని తెలుచున్నది. అనగా ప్రయాణముచేయు ఘటీయంత్రము మెల్లగా పోవుచున్నట్లు గోచరించు నన్నమాట. ఒక ఘటీయంత్రము కాంతివేగముతో పయనించుటకు సాధ్యమైనయెడల, దాని పరిసరముల గల పరిశీలకునకు కాలమేనిలిచిపోవునట్లు తోచుననన్నమాట! కాని ఏ భౌతిక పదార్థమును, కాంతివేగముతోగాని, తదధిక వేగముతో

గాని ప్రయాణము చేయలేదని లారెంజ్ సమీకరణములను బట్టియే చూడగలము (γ అప్పుడస్తిత్వహీనమగును).

(2) S' బృందము S బృందమునకు సాపేక్షముగ x - అక్షదిశలో v ఏకరూపవేగముతోను, S'' బృందము S' బృందమునకు సాపేక్షముగ x_1 - అక్షదిశలో v' ఏకరూప వేగముతోను ప్రయాణము చేయుచున్న యెడల, S'' బృందము S బృందమునకు సాపేక్షముగ $(v + v') \div \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)$ అను వేగముతో ప్రయాణముచేయునని, లారెంజ్ సమీకరణములనుండి, x, t ల అంతరీకరణ నిష్పత్తిని x', t' ల అంతరీకరణ నిష్పత్తిలో వ్రాసిన యెడల తెలియనగును :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\,(dx' + v\,dt')}{\gamma\,(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} =$$

$$\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right) \div \left(1 + \frac{v}{c^2}\,\frac{dx'}{dt'}\right)$$

కాని మనకు ప్రాచీనగతిశాస్త్రము S'' బృందము S బృందమునకు సాపేక్షముగ $v + v'$ వేగముతో ప్రయాణము చేయునని తెలుపును. సాధారముగా మనకు ప్రయోగములలో సంబంధించిన స్థూలపదార్థముల వేగము c కన్న చాల తక్కువగా నుండును గాన పైసమాసము రమారమి $v + v'$ అగును. కావున నీపర్యవసానము కాంతివేగసామ్యమున పయనించు ద్రవ్యరాశుల పట్ల మాత్రమే ప్రాముఖ్యమగును. ఎలక్ట్రానులవంటి సూక్ష్మాణువుల చలనములోనిది పరిశీల్యమగును.

ద్రవ్యరాశిలో మార్పు : S అను బృందమొక కణము (పార్టికల్) కు m_1 అను ద్రవ్యరాశిని, v_1 వేగమును ఆపాదించిన దనుకొందము. S' బృందము S సాపేక్షముగ v వేగముతో పయనించుచున్నదనియు, నది పై బిందు పదార్థముయొక్క వేగమును v_1' గాను, పదార్థరాశిని m_1' గాను పరిశీలించు ననుకొందము.

$$\beta_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}\,;\ \beta_1' = \sqrt{\left(1 - \frac{v_1'^2}{c^2}\right)}$$

$$\beta = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

అని వ్రాసికొన్న ఎడల

$$\beta_1 v_1 = \beta\,\beta_1'(v_1' - v) \qquad \dots (6)$$

అని సిద్ధించును.

$m_1\,m_2 \dots m_n$ పదార్థరాశులుగా గల బిందు పదార్థములనేకములున్నవని భావింతము. ప్రాచీన గతిశాస్త్రజ్ఞులు ప్రతిపదార్థమునకును m అను నొక స్థిరమైన ద్రవ్యరాశి యనుబంధించి యుండుననియు, కొన్ని పదార్థముల సమూహముయొక్క ద్రవ్యరాశి విడివిడిగా ద్రవ్యరాశుల యొక్క సంకలనమువలన వచ్చుననియు భావించెడివారు. అటులనే ఆ ద్రవ్యరాశుల గతిభారము (మొమెంటమ్) $M_1 \dots M_n$ అయిన ఎడల మొత్తము ద్రవ్యరాశియొక్క గతిభారము $M_1 + \dots + M_n$ అనిస్వీకరించెడివారు. సాపేక్షతాసిద్ధాంతమున గూడ నీ రెండు న్యాయములను ఉపపాద్యములుగా (ప్రతి బృందమునందును) స్వీకరించిన ఎడల పదార్థమున కన్ని బృందములలోను నొకే ద్రవ్యరాశి యనుబంధించి యుండవలెననుట కుదురదు. ఏలనన పై న్యాయముల ననుసరించి $\Sigma m_1'$, $\Sigma m_1' v_1'$ అను సమాసములును వాని ననుసరించి $\Sigma m_1' \beta (v_1' - u)$ అను సమాసమును మారకయుండును. అనగా విడివిడిగా బిందు పదార్థముల పదార్థరాశులు, వేగములు $m_1 \dots m_n$ మరియు $v_1 \dots v_n$ అయిన ఎడల మొత్తము బృంధముయొక్క పదార్థరాశి Σm_1, దాని గతిభారము $\Sigma m_1 v_1$ అగునని యర్థము. (6) వ సమీకరణమును బట్టి $\frac{\Sigma m_1' \beta_1 v_1}{\beta_1'}$ కూడ మారక యుండును.

కాని S బృందములో $\Sigma m_1 v_1$ అనునది బృందగతిభారము కావున, $\frac{\Sigma m_1' \beta_1 v_1}{\beta_1'}$ అను సమాసము $\Sigma m_1 v_1$తో సమమగుటకు $\frac{m\gamma'}{\beta\gamma'} = \frac{m\gamma}{\beta\gamma}$ అని తీసికొనిన ఎడల సరిపోవును. కాబట్టి m_1 సంఖ్య β_1 కు అను పాతముగా నుండునని తేలును. ఒక బృందములో పదార్థము చలింపక యున్నపుడు దాని ద్రవ్యరాశి m_0 అయినచో అది v వేగముతో ప్రయాణము చేయునపుడు దాని ద్రవ్యరాశి $m_0 / \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$ అగును. ఇట్లు వేగముతో ద్రవ్యరాశి హెచ్చు అగును. పదార్థవేగము కాంతి వేగమునకు చేరికయగుచున్న కొలదిని, దాని పదార్థరాశి అమితముగా పెరుగునట్లు గోచరించును. అనంత పదార్థరాశ్య సంభవమువలననే పదార్థరాశియు కాంతివేగముతో పయనించుచున్నట్లు చూడలేము.

శక్తి - పదార్థముల సంబంధము : ఒక బిందు పదార్థముయొక్క వేగము v, దానిపై పని చేయు బలము $F = \frac{d}{dt}(m\,v)$ అనియు, గతిభారము $P = m\,v$ అనియును సంకేతముల నేర్పరచుకొన్న ఎడల సులువుగా ఈ క్రింది సమీకరణమును సాధింపవచ్చును :

$$\sum_{x,y,z} F_x \dot{x} = \frac{m_0 c^2 \gamma \dot{\gamma}}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \quad \cdots (7)$$

$$\gamma = \frac{v}{c}\,; \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

పై సమీకరణ చయనము వలన

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} = -V + A$$

అని వచ్చును. ఇచ్చట V అనునది శక్మయును, A స్థిర రాశియు నగును. T అనునది గతిశక్తిని సూచించినచో, శక్తి నిర్వికృతిన్యాయమున $T+V$ స్థిరరాశియగును. కాన

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} + A' \quad (\text{స్థిరరాశి})$$

అని వచ్చును. కాంతివేగసాపేక్షమున v తక్కువైనప్పుడు $\left(\frac{v}{c} \simeq 0\right)$ $\frac{1}{2} m_0 v^2$ అను ప్రాచీన గతిశక్తికి T సమము కావలెనను నియమముచే A' నిర్ణీతమగును. కావున

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = m_0 c^2 + \tfrac{1}{2} m_0 v^2 + A'$$

అను సమీకరణమునుండి

$$T = c^2 (m - m_0)$$

అని సిద్ధించును. మొత్తము శక్తియొక సంకలన స్థిరరాశి మినహా నిర్ణీతమగుట వలన $m_0 c^2$ అను స్థిరరాశిని తీసికొనుట వలన స్వేచ్ఛా ద్రవ్య బిందువు విషయమై

$$E = T + m_0 c^2 = mc^2$$

అను సమీకరణము లభించును. దీనిని బట్టి m అను ప్రతి ద్రవ్యరాశితోడను, అత్యధికమైన mc^2 అను శక్తియను బంధింపబడినది. పదార్థమే శక్తి యొక్క మరియొక రూపము అను ఊహకు పై సమీకరణమే మొదటి సారిగా ఆధారమయ్యెను. అణుమధ్యమున నిమిడియున్న మహా శక్తిని బహిర్గతము చేయుటకీ సమీకరణము పునాది యయ్యెనని చెప్పవచ్చును.

మిన్‌కౌస్కీ చతుర్విరూపక జ్యామితి : లారెంజ్ సమీకరణముల నుండి, కాలావకాశముల పరిమితుల నొక్కొక్క బృంద మొక్కొక్క రీతిగా కొలుచుకొను గాన 'ప్రకేవల కాలావకాశములు' (అబ్‌సొల్యూట్ టైమ్ అండు స్పేస్) అని వాడుటకు వీలులేదు. కాలస్థల సంయోగమునే పరిశీలకు డొక బృందముగ జూచును. అనగా స్థలకాల నిరూపకములను సూచించినగాని ఒక భౌతిక పరిశోధన ఫలములకు సమగ్రత యేర్పడదు. S బృందములో ఒక సంఘటన యొక్క నిరూపకములు (x, y, z, t) అయిన యెడల అదే సంఘటన యొక్క నిరూపకములు S' బృందమున (x', y', z', t') అగును. సంఘటనల పరస్పర సంబంధము చేతనే భౌతిక న్యాయము లేర్పడును కాన వానిని బిందువులుగా స్వీకరించి (x, y, z, ict) అను నిరూపకములద్వారా మిన్‌కాస్కీ అను శాస్త్రజ్ఞుడు జ్యామితిని ఉపపాదించెను. లారెంజ్ రూపాంతర సమీకరణములు ఈ యవకాశమున, ఒక నిరూపక సమితి నుండి మరియొక నిరూపక సమితికి రూపాంతరమును సూచించును. పరస్పరము వివిధవేగములచే ప్రయాణించు పరిశీలకులచే నుపయోగింపబడు x, y, z, ict)ల విలువలు, చతుర్విరూపకావకాశములో, వివిధాక్షముల సహాయమున, ఒకే బిందువు యొక్క నిరూపకములను సూచించును కాన కొంతవరకీ చతుర్విరూపకావకాశమునకు 'అనపేక్ష్యత్వము' సిద్ధించును.

స్థానిక కాలము : ఒక పదార్థముతో చలించు బృందము నందలి కొలిచిన కాలమును ఆపదార్థముయొక్క స్థానిక కాలమని యందుము. S అను బృందములోని కాలము t అనియు, ఒక పదార్థము S సాపేక్షముగ ప్రయాణము చేయుచున్నదనియు భావించిన ఎడల, దాని స్థానిక కాలము τ

$$dt = \gamma\, d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

అను సమీకరణము వలన నీయబడును. v అనునది ఏకరూప వేగమును సూచింపకపోయినను స్వల్ప వ్యవధిలో (dt) అది ఏకరూపముగా నుండునని భావింపవచ్చును. పై సమీకరణమునుండి, $v^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/dt^2$ అను విలువను ప్రతిక్షేపించుటవలన

$$d\tau^2 = (1/c^2)\,(c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$$

అని వచ్చును. కుడిచేతి ప్రక్కనున్న సమాసము లారెంజ్ రూపాంతర సమీకరణములకు మారదని సులువుగా చూడ నగును.

దూరము : చతుర్విరూపకావకాశమున రెండు బిందువుల మధ్యదూరమును

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

అను సమీకరణము ద్వారా నిర్వచించిన ఎడల, కుడిచేతి ప్రక్కనున్న వర్గసమాసము నిరూపాక్ష స్వేచ్ఛమగునని పైననే చూచితిమి గాన, అన్ని బృందములును ఒకటే వర్గసమాసమును దూరముగా వాడునని తేలును.

ఈ జ్యామితియందలి సౌలభ్యము, పదార్థ సమూహాదుల చలనముల నిందు వక్రరేఖలయొక్కయు తలముల యొక్కయు జ్యామితి ద్వారా, కనుగొనుటయే.

౧, ఒక బిందు పదార్థము యొక్క చతుర్విస్తీర్ణావకాశస్థితిని, ω అను సదిశరాశి $\frac{d\gamma}{d\tau}$ ను సూచించినచో

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 \boldsymbol{\omega}) = F \quad \cdots (8)$$

అను సమీకరణము, చతుఃపరిమాణిక ఆకాశములో బలకృతిని నిర్వచించును. $m_0 \omega_4$ అను సంఖ్య

$$\frac{i m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = i m c = \frac{i E}{c}$$

అగును. ($E = mc^2$ అని ముందే చూపితిమి.) కావున (8)వ సమీకరణమును అదిశ సంకేతములో వ్రాసిన యెడల

$$F_1 = \frac{F_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,; \; F_2 = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,;$$

$$F_3 = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$F_4 = \frac{i}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z\right)$$ అని

వచ్చును. ఇచ్చట F_x, F_y, F_z అనునవి న్యూటోనియన్ బలమును తెల్పును. F_4 గల సమీకరణము శక్తియొక్క మార్పునకును, బలముచేయు పనికిని గల సంబంధమును సూచించును.

టి. వెం. రా.

ప్రయోగ రచన : సాంఖ్య శాస్త్రములో ఇది ఒక ముఖ్య భాగము. అల్ప ప్రతి రూపములు వాడునపుడు ప్రయోగములలో పొరపాట్లు లేకుండుటకుగాను ఫిషర్ మొదలగు సాంఖ్యశాస్త్రవేత్తలు ఈవిధానమును ప్రతిపాదించిరి. ఈ విధానము సంగ్రహముగా క్రింద వివరింపబడును.

టీ కర్మాగారములందు టీ యొక్క తరమును నిశ్చయించుటకు యువతులు రుచిచూచుట వాడుక. తర్వాతనే టీ తరమునకు తగిన వెల నిశ్చయింపబడును. మన విమర్శనకు తగినట్టి ఒక ఉదాహరణమును తీసికొందము. ఒక యువతీమణి ఒక కప్పులోనుండు టీ రుచి చూచిన వెంటనే టీలో పాలు కలిపిరా ? పాలలో టీ కలిపిరాయని కనుగొనవచ్చునని చెప్పిన, అది ఎంతవరకు సాధ్యమని ఇపుడు కనుగొందము. ఈ ప్రయోగమును సులభమార్గమున ఉపయోగించి, అందుగల లోపములను, ధర్మములను విమర్శించి, ముఖ్యమగు విషయములను మాత్రము తీసికొని, అనవసరములగు వానిని పరిత్యజించుటకు మార్గము కనుగొనవలయును.

ఈ ప్రయోగములో ఎనిమిది కప్పులలో నాలుగింటిలో మొదట పాలు తర్వాత టీ, మిగతా వానిలో విపరీతముగాను కలుపబడినది. ఏది, ఏది యని ఆ యువతీమణి కనుగొనవలయును. నాలుగు కప్పులలో మొదట పాలు, తర్వాత టీ, మిగిలిన నాలుగింట మొదట టీ తర్వాత పాలు కలుపబడినవనియు ఆమెకు తెలియును. ఈ ఎనిమిది కప్పులు ఆమె ముందట యాదృచ్ఛిక క్రమమున ఉంచబడును. తర్వాత 4 కప్పులను మన అభీష్టమును అనుసరించినట్లు ఆమె వేరుగా తీయవలయును.

8 కప్పులలో 4 కప్పులను $_8C_4 = 70$ విధములుగా తీయవచ్చును (చూ. ప్రస్తారములు-సంయోజనములు). కాని వానిన న్నిటిలోను ఒకసారి మాత్రము సరియగు కప్పులు ఉండును. కాబట్టి సంభావ్యత $= \frac{1}{70}$, అనగా పలుసారులు ఈ ప్రయోగమును చేసినపుడు వచ్చు ఫలితములలో సరియగు 4 కప్పులు మొత్తము ప్రయత్నములలో $\frac{1}{70}$ సారులు ఉండును.

8 కప్పులకు తక్కువగా వాడిన, మనకు గొప్ప సమస్య ఏర్పడును. 6 కప్పులలో చెరియొక మూడు వంతున తీసికొనిన 6 కప్పులలో 3 కప్పులు $_6C_3$ సారులు = (20) ఏరుకొనవచ్చును. సరియగు ఏరడము ఒకసారి ఉండుటవలన సంభావ్యత $= \frac{1}{20}$, అనగా 5%; మనము సార్థతాఫలము 5% అని తీసికొనిన, సాధారణ సంభావ్యత మూలముననే 20 సారులలో ఒకసారి సరియయినట్టి మూడు కప్పులు మనకు లభించును. ఇందు రుచిచూడవలసినది అనవసరము. 8 కప్పులతో 4 కప్పులు మనకు సరియగునట్లు ఏరుట 70 సారులలో ఒకసారి ఏర్పడును. సంభావ్యత $\frac{1}{70} = 1.4\%$; ఇది 5% సార్థతా ఫలముకంటె తక్కువ అయినందున, సాంఖ్యశాస్త్ర రీత్యా ఇది సార్థతను గుర్తించును. ఒక ప్రత్యేక అనుకూల సంభావ్యత మనకు సరిపోదు. మనము ఇట్టి ప్రయోగములందు నమ్మదగిన ఒక కార్యక్రమము తయారు చేయవలయును.

టీ రుచి చూచు యువతీమణి 3 కప్పులను చక్కగను, ఒక కప్పు పొరపాటుగను ఏరుటకు గల సంభావ్యత ఏమి ? మొదటి తరగతి 4 కప్పులలోనుండి 3 కప్పులు ఏరుట $_4C_3 = 4$ సారులు జరుగును. రెండవ తరగతి 4 కప్పులలో నుండి 1 కప్పు ఏరుట $_4C_1 = 4$ సారులు అగును. కాబట్టి ఈ విధముగ 16 సారులు కప్పులను ఏరుకొనవచ్చును. 70 వివిధ విన్యాసములలో 1 సారి 4 కప్పులన్నియు చక్కగను, 16 సారులు 3 కప్పులు చక్కగను, 1 కప్పు పొరపాటుగను ఏరవచ్చును. మొత్తము 17 సార్లు సంభావ్యత $\frac{17}{70} = 24\%$. ఇది సాంఖ్యశాస్త్రరీత్యా సార్థతను గుర్తింపదు.

సారాంశము : 8 టీ కప్పులలో 4 టీ కప్పులు ఒక జాతి, మిగత మరియొక జాతి. ఒక యువతీమణి రుచిచూచి, ఒక జాతికి చేరిన టీ కప్పులను పొరపాటు లేక వేరు

పరచిన, దీని సంభావ్యత $\frac{1}{70} = 1 \cdot 4\%$; సార్థకతాఫలము 5% అని మామూలుగా తీసికొనినందున, ఆ యువతీమణి యొక్క చవిచూచు శక్తి నమ్మతగినది అనగా సార్థతలో చేరినది. అల్లే 6 కప్పులలో నుండి పొరబాటు లేక 3 కప్పులను రుచిచూచి ఏరిన, లభించు సంభావ్యత $\frac{1}{20} = 5\%$. ఆమె చవిచూచి ఏరు శక్తిని గురించి నమ్ముటకు అవకాశము లేదు, అనగా అది సార్థతలో చేరినది కాదు.

మరల జాతికి 4 కప్పులుండు 8 కప్పులలో నుండి ఆమె 3 కప్పులు పొరబాటు లేకను, 1 కప్పులో మాత్రము పొరపాటు ఉండునట్లును 16 సారులు విడతీయవచ్చును. దీనితో పూర్వము గుర్తించినట్లు 1 సారి 4 కప్పులను పొరపాటు లేక 8 కప్పులనుండి విడదీయవచ్చును. కాబట్టి 70 సారులలో 17 సారులు మనకు అనుకూలత లభించును. అనగా సంభావ్యత $\frac{17}{70} = 24\%$ ఇందు యువతీమణి యొక్క రుచి చూచి ఏరు శక్తిని నమ్ముటకు వీలులేదు.

ఆ యువతీమణి ఒకసారి 4 కప్పులను రుచిచూచి 8 కప్పులనుండి పొరపాటు లేక విడదీసిన, ఆమె శక్తిని నమ్మవచ్చునా? మనకు నమ్మకము ఏర్పడుటకు ఆమెను పలు సారులు పరీక్షింపవలయును. లేదా ప్రయోగములో మనము ఒక క్రమమును పాటింపవలయును.

మొదటి విధము: 8 కప్పులలో 4 కప్పులు ఒక జాతిలో నుండవలయునని నిశ్చయించినప్పుడు, మనమే విధమున మన నిశ్చయమును అమలులో పెట్టవలయును? ఏ కప్పు మొదటి జాతిలో నుండవలయునను విషయమును ఒక నాణెమును ఎగురవేసి నిర్ణయింపవచ్చును.

రెండవ విధము: 8 కప్పులలో 5 ఒక జాతికి చేరినట్లును, 3 రెండవ జాతికి చేరినట్లును తీసికొని ప్రయోగము ఆరంభింప వచ్చును. 8 కప్పులలోనుండి 5 కప్పులు $_8C_5 = 56$ సారులు ఏరవచ్చును. కాబట్టి సంభావ్యత $\frac{1}{56} = 1 \cdot 9\%$. ఇందుచే వ్యక్తియొక్క చవిచూచు సామర్థ్యత విశదమయినది. ప్రయోగ నిర్మాణములో చాల జాగ్రత్తగ నుండవలయును. కప్పులు ఒకే విధమున నుండవలయును. కొన్ని కప్పులలో పచ్చిపాలు, కొన్నిటిలో కాచిన పాలు, కొన్నిటిలో డబ్బా పాలు వాడకూడదు. తేయాకు ఒకే విధముగ నుండవలయును. చక్కెర సమానముగా కలుపవలయును. ఇట్టి జాగ్రత్త తీసికొనని పక్షమున ప్రయోగముయొక్క ఫలితము నమ్మదగినదికాదు.

డార్విన్ ప్రయోగము: పూర్వము సాంఖ్యశాస్త్రము శైశవావస్థలో నుండెను. కాని అపుడు డార్విన్ ప్రయోగములో అనుసరించిన విధానము చాల ప్రశస్తమైనది. అతని ప్రయోగము చెట్లను గురించి: స్వపరాగ సిక్తము లైనచెట్లు బాగుగ పెరుగునా? లేదా పరపరాగసిక్తము లైన చెట్లు బాగుగా పెరుగునా? అని సమస్య.

ఒక దేశమునుండి 10 మందిని యాదృచ్ఛికముగ ఏరి, వారి ఎత్తుల మధ్యమములో 10 మంది వేరొక దేశీయుల ఎత్తుల మధ్యమముతో సరిపోల్చి, ఏ దేశములో జనులు పొడుగాటి వారలో నిర్ణయింపవచ్చునా? కూడదు. ఇందు ఎక్కువ సంఖ్య జనులను తీసికొనవలయునని అందరు ఒప్పుకొందురు. లేనిచో పొరబాటు కలుగును,

కాని ప్రయోగములో వాడు వ్యక్తుల సంఖ్య అల్పము. ఈ విధానమంతయు అల్ప ప్రతిరూప విధానముతో చేరినది. ఫలితము యొక్క శుద్ధత ప్రయోగ శుద్ధతపై ఆధారపడియున్నది.

పరపరాగ సిక్తములు, స్వయంపరాగ సిక్తములు అగు చెట్లను జతలు జతలుగా తీసికొందము. ఆ జతలు ఒకసారి మొలకలెత్తవలయును, ఒక తొట్టెలో నుండవలయును. మాతృకలు ఒక జాతి విత్తనములలోనుండి పుట్టవలయును. ఈ విధముగ ఆరంభించిన, ప్రయోగ శుద్ధతలో పొరబాటు ఉండదు. చెట్లయొక్క వృద్ధి ఎరువు, భూమి, గాలి మొదలగు వానిపై ఆధారపడక, పుట్టుకపై ఆధారపడి యుండును.

ప్రయోగములో వాడునట్టి జీవరాశులన్నియు ఏకరూపముగా నుండవలయును. అందుచే ప్రతి అవేక్షణము నమ్మదగినదై యుండును. పలుసారులు ప్రయోగములు సాగించి ఫలితములలో అవిరుద్ధతను సాధింపవలయును. కాబట్టి ఒక సాధకుడు ఎక్కువ సంఖ్యల పాదులను వాడవలయుననిన, భూమి చిన్నదైనచో, వీలులేక పోవచ్చును. జంతువుల విషయములో ఇదే నిర్బంధము కలుగును.

ఎక్కువ సంఖ్య పాదులను వాడుటచే భూమిలో వ్యత్యాసము లేర్పడవచ్చునని, పాదుల సంఖ్య మితముగా నుంచవలయును. ఉదాహరణముకు పాదులకు రెండు విధముల ఉపచారములు వాడిన, పాదులను ప్రక్కప్రక్కన సమముగా వరుసలో ఏర్పాటు చేయవలయును. ప్రతి జత పాదులకు ఒకే విధమైన ఉపచారము చేసిన, మొలచు చెట్లు ప్రయోగములో అవిరుద్ధ ఫలితముల నిచ్చును.

డార్విన్ స్వపరాగసిక్తములకును, పరపరాగసిక్తములకును వ్యత్యాసము కలదాయని కనుగొనుటకు శాస్త్ర సమ్మత మార్గములో 15 జతల మొక్కల నాటి, పెంచి వాని ఎత్తులను చాల జాగ్రత్తగా కొలిచెను,

ఒక జత పరపరాగసిక్తము, స్వపరాగసిక్తములగు మొక్కల ఎత్తుల అంతరములు క్రింద ఈయబడినవి. కొలత పరక $\left(\frac{1}{8}\right)$ అంగుళములలోనివి.

40	23	56
− 67	28	24
8	41	75
16	14	60
6	29	− 48

మన నిశిత పరీక్షకు కావలసినవి వీని సంకలనరాశి, వర్గ సంకలన రాశి మాత్రమే. అవినాభావ సిద్ధాంత విమర్శకు ఇవి చాలును. (ఈ సిద్ధాంతము వ్యత్యాసము లేదని ఆరంభించి విమర్శించుట)

సంకలనరాశి 314; 15 మొక్కలు (క్షుపములు) కలవు. అంతర మధ్యమము $20\frac{14}{15}$; ఇది పరపరాగసిక్త క్షుపముల వైపు వాలియున్నది. వర్గముల సంకలనము 26518. దీనినుండి సంకలన రాశి, అంతర మధ్యమముల లబ్ధమును తీసివేయగా, మధ్యమముల నుండి, విచలనముల వర్గ సంకలనము లభించును. $26518 - 6573 = 19945$. ఈ రాశి 15 జతల మొక్కల అంతరములో వ్యత్యాసము గుర్తించును.

బీజ గణిత రీత్యా $\Sigma(x - \bar{x})^2 = \Sigma x^2 - \bar{x}\,\Sigma(x)$

ఇందు Σ సంకలన సంకేతము; $\bar{x}$ = మధ్యమమూల్యము.

x = అవేక్షిత అంతరములు.

విచలనము: క్షుపముల సంఖ్య 15, $15 - 1 = 14$ పై అంతరముల యొక్క స్వేచ్ఛతా అంశములను గుర్తించును. విచలనములవర్గ సంకలనము $[\Sigma(x - \bar{x}^2]$ ను 14 (స్వేచ్ఛత యొక్క అంశము) చే భాగించిన, విచలనము లభించును. ఈ రాశి 15 జతల అంతర మధ్యమములో మార్పును (విచలనమును) గుర్తించును.

విచలనమును 15 చే భాగించిన 94.970 లభించును. దీని వర్గమూలమును క్రమ ప్రమాదము అని చెప్పుదురు. క్రమ ప్రమాదము = 9.746. అంతర మధ్యమము (20.933) ను క్రమ ప్రమాదముతో భాగించిన 2.148 లభించును. దీనిని t అని చెప్పుదురు.

t పరీక్ష: విద్యార్థి అను మారు పేరుతో ఒక గణితవేత్త 1908 లో మన సమస్య యొక్క గణిత విభజనమును ప్రచురించెను. పరతంత్ర అవేక్షణ సంఖ్యలపై ఈ విధానము ఆధారపడియున్నది. అవేక్షణ సంఖ్య — స్వేచ్ఛత యొక్క అంశము (14) ను గుర్తించును. t పథకముల నుండి స్వేచ్ఛత యొక్క అంశ 14 అయిన, 2.145 రాశికంటె అతీతములైనవి యాదృచ్ఛిక ప్రయత్నములో తుల్యముగా 5% అని తెలియుచున్నది.

t యొక్క అవేక్షిత మూల్యము 2.148, పై 5% గుర్తుకు తుల్యమైనందున ప్రయోగ ఫలితము సార్థకమయినది అని తెలియుచున్నది. అనగా పరపరాగసిక్తక్షుపముల ఎత్తునకు, స్వపరాగసిక్తక్షుపముల ఎత్తునకును వ్యత్యాసము సార్థకత కలదై యుండవచ్చును. నిశ్చయముగా చెప్పలేము.

t పథకములు ప్రచురింపబడినవి. స్వేచ్ఛతా తరములకు అన్నింటికిని తగిన విలువలు ఈయబడినవి. ఈ పథకములు, అల్పప్రతిరూపముల పరిశోధనలో చాల ఉపయోగకరము. దీనికి కారణము అంతరములకు ఇందు ప్రాబల్యము కలదు.

దత్తాంశముల స్వేచ్ఛా స్వీకరణము: డార్విన్ ప్రయోగములో క్షుపములన్నియును 4 పాదులలో నాటబడినవి. వాని సంఖ్యలు వరుసగా 3,3,5,4. అంతరముల తీసికొనినపుడు పాదుల ప్రకారము తీసికొని, పై ఫలితము సాధింపబడెను. ఆ పదునైదు క్షుపములను ఎత్తు ప్రకారము (గాల్టన్) పర్వరచి అంతరముల తీసికొని, గణించిన $t = 5.171$ లభించును. ఇది 10000 ప్రయత్నములలో 1, 2 సార్లు మాత్రము లభించును. ఇది ముందుగా ఆకాంక్షించబడిన విలువ కంటె చాల వ్యత్యాసముగలదిగా నుండును. అనుభవములో అవిరుద్ధత లభించుట చాల కష్టసాధ్యము. దత్తాంశ స్వీకరణములో జాగ్రత్త పాటింపవలయును. గాల్టన్ దత్తాంశముల సవరించినందున $t = 5.171$ అని లభించినది. ఇందు సార్థత నిశ్చయము. పూర్వము అంత నిశ్చయముగా చెప్పలేము.

ప్రయోగముల యోగ్యత: డార్విన్ విజ్ఞాని ప్రయోగములో సార్థతను కనుగొనుటకు ఒక విధానమును అవలంబించితిమి. ఇది యోగ్యమగు విధానమాయను ప్రశ్నను ఇపుడు మనము విమర్శింపవలయును. ఈ ప్రయోగములో కలుగ వీలున్న ప్రమాదములు కొన్ని కలవు. సాధ్యమైనంతవరకు వానిని నివారింపవచ్చును. అవి ఏవన:

(ఏ) విత్తనములలో వ్యత్యాసము; (బి) భూమిలో సత్తువ; (సి) వెలుతురు; (డి) నీటి పాచన మొదలగునవి. కాబట్టి పాదులను బాగుగ త్రవ్వి సరిచేయవలయును. నీటి పాచనము, వెలుతురు సమానముగా నుండవలయును. మొక్కలకు పాదుల తీర్మానించుటలో ఒక నాణెమును ఎగురవేయుట యుక్తము. పక్షపాతము వీలయినంతవరకు తగ్గింపవలయును.

t — పరీక్షయొక్క విస్తరణ: సాధారణముగా సరళ విభజనలోనుండు లోకమునుండి తీసిన ప్రతి రూపములకు మాత్రమే t - పరీక్షను ఉపయోగించుట అలవాటుగా నుండినది. ఎట్టి లోకమునుండియైనను, ఏరిన రెండు ప్రతి

రూపములకు నిశ్శంకతో ఈ పరీక్షను వాడవచ్చునాయను సమస్య యుక్తమైనది.

ఇదివరలో విమర్శన మూలమున యాదృచ్ఛత ప్రధాన మని వెల్లడింపబడినది. అందు సరళ విభజన విషయమే ప్రశంశకు రాలేదు. కాబట్టి అన్ని విధముల లోకములలో నుండి తీసిన ప్రతి రూపములకు ఈ పరీక్ష వాడవచ్చును అని తోచుచున్నది. తత్సంబంధ గణిత విధానము చాల శ్రమ దాయకము కాబట్టి ఇచ్చట విమర్శింపబడలేదు.

ఇట్టి సమయములో రెండు కొలతల అంతరములో $\frac{1}{2}$ రూపము ప్రతివర్గములోనుండి తగ్గించిన మన కార్యము సులభముగా సాధింపవచ్చును.

వ్యవసాయ ప్రయోగము; ఐదు విధములగు ధాన్యము లను ఒక పొలములో వేరువేరుగా విత్తినచో, లభించు ఫలితములలో ఏది ఉత్తమమని విమర్శించుట. పంట అనగా అర్థమేమని మొదట నిశ్చయించుకొనవలయును. పంటను కొలుచుటలో క్రింది విధానములను అవలంబింప వచ్చును:

(ఏ) పంటయొక్క మొత్తము రాశి, లేదా,

(బి) ఒక జల్లెడలో జల్లించిన ధాన్యము.

(సి) పంట, గడ్డి - రెండింటియొక్క వెల;

(డి) మరి ఏదైన ఇష్టము వచ్చిన మార్గము.

ఇందు ఎట్లు చూచినచో ఎక్కువ పంటయను విషయమును ముందు నిశ్చయించుకొనవలయును.

భూమిచేతనైననుసరే, లేదా శీతోష్ణస్థితివలననైననసరే, రెండును చేరినను సరే, ధాన్యములలో ఏది ఎక్కువ పంట ఇవ్వగలదు అను ప్రశ్న ఇచట ముఖ్యము.

ప్రయోగమునకు ఉపయోగించు పొలమును 8 చతుర భాగములు చేసి, ప్రతి భాగమును మరల 5 పాదులు వరుసగా జేయవలయును. మొత్తము 40 పాదులు - ఒకటి నొకటి ఆనుకొని యుండును. అన్ని పాదులకు ఒకే విధమగు దోహదము, కోతకాలమున, గనిమె (మడి చుట్టున ఉండు చిన్నకట్ట)ల ఆనుకొని ఒక అడుగు వెడల్పు విడిచి, మధ్యలో సమాన ప్రదేశములనుండు పైరును తీసికొని లభించు ధాన్యమును కొలువవచ్చును, లేదా తూచవచ్చును. గడ్డలు మొదలగునవి నాటినపుడు గనిమెల దగ్గరనుండు ఒకటి రెండు వరుసల తీసికొనకూడదు.

ప్రతిభాగమునందును, పాదులలో ఐదు విధములగు ధాన్యముల విత్తునపుడు, యాదృచ్ఛిక విధానమును అవ లంబింపవలయును. ఒక పాదులో ప్రతి జాతి ధాన్యమును విత్తుటకు సమాన అవకాశము క్రింది మార్గమును అనుస రించిన ఏర్పడును.

చీటీలలో 1 మొదలు 100 వరకు వ్రాయుము. ఇష్టము వచ్చిన చీటిని తీయుము. దాని పై సంఖ్య 48 అయిన, 48 ని 5చే భాగించిన శేషము 3. కాబట్టి 3వ విధమగు ధాన్యమును ఒక పాదులో విత్తుము. భాగించిన శేషము లేనపుడు 5 శేషమని తీసికొనుము. ఈ విధమున ప్రతి వరుసలోని పాదులలో విత్తుటకు తీసికొనవలసిన ధాన్యముల వరుస శీఘ్రముగా నిశ్చయించుము. ఇందు ప్రతి జాతి ధాన్యమునకు 20 సంఖ్యలు ఏర్పడును.

6 విధములగు ధాన్యము లుండినపుడు 96 సంఖ్యలు తీసికొనుము, ఈ సంఖ్యలను టిప్పెట్ పథకములో వరుసగ తీసికొనుట వాడుక.

విచలన విశ్లేషణము: ప్రయోగ సంబంధ గణితమునకు విచలన విశ్లేషణమని పేరు. ప్రయోగ సంబంధ గణితము అంతయును ఒక పథకములో అమర్చబడును.

పథక నిర్మాణములో స్వేచ్ఛతాంశముల యొక్క సంఖ్య నీయవలయును. 40 పాదులున్నందున, స్వేచ్ఛతాంశలు $40 - 1 = 39$. దీనిలో 3 భాగము లుండును.

(ఏ) ధాన్య జాతులు, (బి) భూ భాగములు, (సి) భూ భాగములందు విత్తిన వివిధ జాతులయొక్క పరస్పర వ్యత్యాసములు, లేదా ప్రమాదములు.

యాదృచ్ఛిక భూభాగములలో జరిపిన ప్రయోగ నిర్మాణములో స్వేచ్ఛతాంశ విభజన:

జాతులు	$5 - 1 = 4$
భూ భాగములు	$8 - 1 = 7$
ప్రమాదములు	28
మొత్తము స్వేచ్ఛతాంశములు	39

ధాన్యజాతులు 5, కాబట్టి తత్సంబంధ స్వేచ్ఛతాంశలు 4, భూ భాగములు 8, స్వేచ్ఛతాంశలు $8 - 1 = 7$, మిగత 28 స్వేచ్ఛతాంశలు పాదుల సత్తువలో వ్యత్యాసమును గుర్తించును.

చలన విశ్లేషణమునకు పంటల రాశి మానములు ముఖ్యము. పూర్తి మధ్యమ మూల్యములనుండి విలువల విచలనముల వర్గముల సంకలన రాశిని, ప్రయోగ రచనా నిర్మాణ ప్రకారము స్వేచ్ఛతాంశముల అనుసరించి 3 భాగములుగా విభజింపవలయును.

మన దత్తాంశములో 40 విధములుగు పంటలు కలవు, ప్రతి భూ భాగమునుండి 5, ప్రతి ధాన్య జాతిలో 8 విధ ముల పంటలు. వీనినంతయు ఒక పథకములో అమర్చ వచ్చును.

సంకలనరాశుల, మధ్యమమూలముల కనుగొనుటకు పథకము :

						మొత్తము	మధ్యమము
	—	—	—	—	—	X	x
	—	—	—	—	—	Y	y
	—	—	—	—	—	Z	z
	—	—	—	—	—	W	w
	—	—	—	—	—	U	u
	—	—	—	—	—	V	v
	—	—	—	—	—	S	s
	—	—	—	—	—	T	t
మొత్తము	A	B	C	D	E	M	
మధ్యమము	a	b	c	d	e		m

వంశముల సంకలనరాశి 5 విధ ధాన్యముల పంట ; వానిని A, B, C, D, E లతోను, వాని మధ్యమములు చిన్న అక్షరములు a, b, c, d, e లతోను గుర్తించితిమి. X, Y, Z, W, U, V, S, T అక్షరములు ప్రతి 8 భూ భాగములలో లభించిన పంట మొత్తము ; x, y, z, w, u, v, s. t లు క్రమముగా వాని మధ్యమమూల్యములు.

పథకములో అన్ని రాశుల మొత్తము M. వాని మధ్యమ మూల్యము m. చలన విశ్లేషణములో మధ్యమ మూల్యముల నుండి విచలనముల వర్గసంకలనము ముఖ్యము. పంటల గుర్తించు 40 సంఖ్యల వర్గసంకలనములోనుండి Mm తీసివేసిన, ఈ రాశివచ్చును. దీనిని ఇదివరలో వివరించినట్లు 3 భాగములుగా చేయవలయును.

(సంఖ్యల వర్గసంకలనము $-Mm$) యొక్క స్వేచ్ఛ తాంశము 39. చక్కగ పరిశీలించిన, ఈ వ్యవకలన రాశి ప్రతిపంట y కిని, సామాన్యమధ్యమమూల్యము m కును గల అంతరముల వర్గసంకలనమును గుర్తించును. కాబట్టి ఇది పలుకారణములచేత పాదులలోనుండు వ్యత్యాసముల మొత్తమును గుర్తించునని విశదమగుచున్నది.

(ఏ) స్వేచ్ఛతాంశము 4 ను గుర్తించురాశి :

$$Aa+Bb+Cc+Dd+Ee-Mm$$

(బి) స్వేచ్ఛతాంశము 7 ను గుర్తించురాశి :

$$Xx+Yy+Zz+Tt-Mm$$

(సి) స్వేచ్ఛతాంశము 28 కి సంబంధించిన రాశి కనుగొనుటకు మొత్తములోనుండి పై రెండురాశులను తీసివేయుము.

జాతులకు సంబంధించిన చలనమును (ఏ) గుర్తించును. భూభాగమునకు (చేనుల) సంబంధించిన చలనమును (బి) గుర్తించును. వివిధ భూభాగములలో పెరిగిన వివిధ పంటలలో ఏర్పడు వ్యత్యాసమును (సి) గుర్తించును.

ఈ మూడు విధముల వర్గరాశులను తగిన స్వేచ్ఛతాంతర సంఖ్యలచే భాగించిన, వర్గముల మధ్యమ మూల్యములు లభించును. అవినాభావవాదము ప్రకారము జాతుల వర్గమధ్యమ మూల్యము వ్యత్యాసముల (సి) లేదా ప్రమాదముల వర్గ మధ్యమూల్యము ఒక పాదులోగల ప్రమాదము వలన ఏర్పడు చలనమును గుర్తించు ప్రత్యేక విలువ యగును. వివిధ జాతుల పంటలు ప్రతిపాదునకును, సమానమైన 4 స్వేచ్ఛాంతరమునుండి లభించు వర్గమధ్యమమును, 28 స్వేచ్ఛాంతరమునుండి లభించు వర్గమధ్యమమును సమానములగును. ఒక ప్రత్యేక ప్రయత్నములో వ్యత్యాసము ఏదైన కలిగిన అది యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప ప్రమాదమగును.

మన మదింపుల సాపేక్షశుద్ధత, ప్రతి మదింపుయొక్క స్వేచ్ఛతాతర సంఖ్యపై ఆధారపడియున్నది.

స్వేచ్ఛతాతర సంఖ్యలు తెలిసిన, మన మదింపుల నిష్పత్తి సార్థతా పరీక్ష యొక్క విలువను ఇచ్చును.

నిష్పత్తి కనుగొనుటకు బదులు వర్గమధ్యమముల లాగరిదమ్‌ల అంతరము తీసికొనుట సులభము.

ఈ నూతన సార్థతా పరీక్షకు Z పరీక్ష యనిపేరు. వర్గమధ్యమముల లాగరిదమ్‌ల అంతరములో సగము తీసికొందము. ఈ విధానమున కంతయును చలన విశ్లేషణము అని చెప్పుదురు.

శుద్ధత : మనకు లోబడని ప్రమాదముల చలనము 28 స్వేచ్ఛతాతర సంబంధ రాశి గుర్తించును. దీని వర్గ మధ్యమము ఒక ప్రత్యేక పాదులో ఏర్పడిన ప్రమాదమును సరిపోల్చుటకు తగినది. ఈ వర్గముయొక్క వర్గమూలము క్రమ ప్రమాదమును గుర్తించును. దీనిని అన్ని పాదుల పంటల వ్యత్యాసముతో సరిపోల్చి, పాదులలో దేనిలోని పంట సార్థత కలది, దేనిలోనిది లేనిదని కనుగొనవచ్చును,

పాదు లెక్కువ చేయుట : పాదు లెక్కువ చేయుట వలన ప్రయోగ వైశాల్యము ఎక్కువ యగును. ప్రయోగ ప్రమాదములు తగ్గును. వైశాల్యములో మార్పులేక, పాదు లెక్కువ అయిన పాదుల వైశాల్యము తగ్గును. అప్పుడు పంట భూమిలోను, భూసారమునందును ఒక పాదునకు మరియొక పాదునకును వ్యత్యాసముండదు. గనిమెల ప్రక్కన ఒక అడుగు వెడల్పు ప్రయోగమునకు విడిచివేయవలసి యుండుటవలన, చిన్న పాదుల తీసికొనిన, ప్రయోగ వైశాల్యము చాల తక్కువ యగును. కాబట్టి,

ఇష్టము వచ్చినట్లు పాదుల సంఖ్య ఎక్కువ చేయుటకు వీలులేదు.

మరికొన్ని ఇతర విషయములు ఈ సందర్భములో గమనింపవలయును :

(ఏ) కోతయందును, కొలతయందును శుద్ధత.

(బి) వైశాల్యము కొలుచుటలో శుద్ధత.

(సి) జాగరూకతతో ప్రయోగమునకు భూమిని తీసికొనుట.

(డి) అన్ని పాదులకు సమాన ఉపచారము.

(ఇ) పైరునకు నష్టము లేకుండ చేయుట.

(ఎఫ్) పంటను జాగ్రత్త పరచుట.

ఇవి యన్నియు మన ప్రయోగములో శుద్ధతను సాధించుటకు అనుకూలము లగును.

చేనులు, పాదులు : ఇవి చదురముగా నుండవలయును. చేనులలో పాదులన్నియు ప్రక్క ప్రక్కన ఉండుట మంచిది. ప్రతిపాదు చేనుకు తగిన ప్రతిరూపముగా నుండుటయే ప్రశస్తము. ఆచార్య

ప్రస్తారములు, సంయోగములు : ఇచ్చిన వస్తువులలో కొన్నిగాని, మొత్తమన్నియుగాని తీసికొని, సాధ్యమైనన్ని విధములలో వాటిని క్రమముగా ఒక వరుసలో అమర్చగా ఏర్పడిన ప్రతి ఒక్క విధము ఒక ప్రస్తారము అనబడును.

ఇచ్చిన వస్తువులలో కొన్నిగాని, మొత్తమన్నియుగాని అన్ని విధములలో తీసికొనగా ఏర్పడిన ప్రతి తీసికొనుటను ఒక సంయోగమందురు. సంయోగమందు ఏర్పుట మాత్రమున్నది. ప్రస్తారములో ఏర్పుటయే కాక ఏర్చిన వస్తువులను క్రమముగ అమర్చుట అను మరియొక పరికర్మ మున్నది.

ఉదాహరణమునకు నాలుగు వస్తువులున్నవను కొందము. వీనిని a, b, c, d అను అక్షరములచే సూచించెదము. ఈ నాలుగక్షరములను రెండేసి చొప్పున ఏర్చి ఒక వరుసలో క్రమముగా అమర్చగా దిగువ వ్రాసిన 12 ప్రస్తారములు ఏర్పడును.

ab, ac, ad, bc, bd, cd,

ba, ca, da, cb. db, dc ;

ఈ పన్నెండింటిలోను పై 6 ప్రస్తారములలో ప్రతి రెండు అక్షరముల ప్రస్తార క్రమము మార్చగా దిగువ 6 ప్రస్తారములు వచ్చినవి.

మరల ఈ నాల్గు అక్షరములను రెండేసి చొప్పున ఏర్చి తీసికొనగా క్రింద వ్రాసిన 6 సంయోగములు ఏర్పడును.

ab, ac, ad, bc, bd, cd ;

ఇచ్చట ప్రతి గణములో రెండక్షరములున్నట్లు తీసికొంటిమి. కాని వాని వరుసక్రమము పాటించలేదని గ్రహింపవలయును. అనగా ab వేరు ba వేరు అని గణించలేదు. కనుకనే వీని ప్రస్తారములు 12. అయితే వీని సంయోగములు 6.

మనమికమీద చర్చించబోవు సిద్ధాంతములన్నియు ఈ దిగువను ఉదహరించిన ముఖ్య సూత్రముపై నాధారపడి యుండును.

ఒక పనిని m విధములుగా చేయగల్గియుండి, దానిని ఏ ఒక్క విధముగానైన పూర్తి చేసిన పిమ్మట, ఇంకొక పనిని n విధములుగా చేయగలిగియుండిన ఈ రెండు పనులను ఒకటి వెనుక ఒకటి $m \cdot n$ విధములలో చేయగల్గుదుము.

అట్లే, ఒక పనిని m విధములుగా చేయగలిగియుండి, ఆ పనిని ఈ m విధములలో ఏ ఒక్క విధముగానైన పూర్తి చేసిన పిమ్మట, ఇంకొక పనిని n విధములుగా చేయగలిగియుండి, ఈ రెండు పనులను, చేయగలిగిన అన్ని విధములలోను ఏ ఒక్క విధముగానైన పూర్తి చేసిన పిమ్మట, మూడవ పనిని p విధముగా చేయగలిగియుంటే, మొత్తమన్ని పనులను ఒకటి వెనుక ఒకటిగా $m \cdot n \cdot p$ విధములలో చేయగలుగుదుము. ఇటులనే 4 లేదా 5 లేదా n పనులకు సూత్రమున్నది.

ఉదా : నలుగురు వ్యక్తులు మూడు విధములైన మూడు కుర్చీలలో ఎన్ని విధములుగా కూర్చుండ వచ్చును ? నలుగురు వ్యక్తులను a, b, c, d అక్షరములచే సూచించెదము. మొదటి కుర్చీని నలుగురిలో ఏ ఒక్క వ్యక్తి అయినా ఆక్రమించవచ్చును. అనగా, మొదటి కుర్చీని నాలుగు విధములుగా నింపగలము. మొదటి కుర్చీని ఏ ఒక్క వ్యక్తి అయినా ఆక్రమించిన పిమ్మట రెండవ కుర్చీని తక్కిన ముగ్గురిలో ఏ ఒక్కరైనా ఆక్రమించవచ్చును. కావున, మొదటి రెండు కుర్చీలను $4 \times 3 = 12$ విధములలో నింపగలము. అట్లే మొదటి రెండు కుర్చీలు నింపగల ప్రతి ఒక్కవిధమునకు అనుగుణముగా, మూడవ కుర్చీని రెండు విధములుగా నింపగలము. కాబట్టి, నలుగురు వ్యక్తులనూ, మూడు కుర్చీలలో $4 \times 3 \times 2 = 24$ విధములలో ఆసీనులను చేయగలము.

పైని దొరికిన సంఖ్య (24), a, b, c, d అను నాలుగు వస్తువులను, మూడేసి చొప్పున ఏర్చి అన్ని విధములుగను క్రమవరుసగా అమర్చు ప్రస్తారముల సంఖ్య. కుర్చీలన్నియు ఒకే విధముగనున్న ఈ సంఖ్య 4గే అగును. ఏలన, నలుగురిలో ఏ ముగ్గురినైన ఏర్చి వారిని కుర్చీలలో కూర్చొనపెట్టవలెను కదా ? అన్ని కుర్చీలు ఒకే విధమైనవి కనుక,

ఏ కుర్చీలో ఎవరు కూర్చున్నను ఒకటే. కనుక ఇది సంయోగ ప్రశ్న.

ప్రస్తారములు : n వస్తువులలో r వస్తువులను ఏర్చి వాటిని క్రమవరుసలో అమర్చగా ఏర్పడిన ప్రస్తారముల సంఖ్యను ${}_nP_r$ అందురు.

పై గమనింపులో చెప్పిన సూచన ప్రకారము ${}_nP_r$ విలువ r ఖాళీగళ్లను, n వస్తువులచే అన్ని విధముల నింప గలుగు సంఖ్య కావున, ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots\dots$ r కారణాంకముల వరకు

$= n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots(n-r+1)$. ఈ సూత్రములో n, r లు ధనాత్మక పూర్ణాంకములు, మరియు $r \leq n$;

పై సూత్రముబట్టి ${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\dots$, n కారణాంకముల వరకు $= n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

= మొదటి n ధనాత్మక పూర్ణాంకముల లబ్ధఫలము. ఈ లబ్ధఫలమును $n!$ అను గుర్తుచే సూచించెదరు. దీనిని ఫాక్టోరియల్ n అని చదువవలెను. మరియు

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

ఈ సూత్రములో r కు బదులు, n ప్రతిక్షేపించగా ${}_nP_n = \frac{n!}{0!}$ అగును; కాని ${}_nP_n = n!$ అని మీద చూపితిమి. అందుచే $0!$ అనునది ఒకటి 1 అంకెకు సమానమని భావించవలెను.

మరియొక సూత్రము : వివిధములగు వస్తువులు $a, b, c\dots$ లను r వంతున ప్రస్తారము చేసిన కొన్నిటిలో a కనబడదు; కొన్నిటిలో మొదటను, కొన్నిటిలో రెండవ స్థానములోను,... ...కొన్నిటిలో r వ స్థానములోను కనబడును. a లేని ప్రస్తారములు ${}_{n-1}P_r$. మొదటనుండు ప్రస్తారముల సంఖ్య $= {}_{n-1}P_{r-1}$. రెండవ స్థానముననుండు ప్రస్తారముల సంఖ్య ${}_{n-1}P_{r-1}$. ఇటులనే అన్ని స్థానములకును. కనుక

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r\,{}_{n-1}P_{r-1}$$

ఉదాహరణ: a, b, c, d, e, f అను అక్షరములను b, c లు ఎల్లప్పుడు కలిసియుండునటుల ఎన్నివిధములుగా అమర్చగలము ?

b, c లు ఎల్లప్పుడు కలిసియుండవలెను కావున, ఆ రెండింటిని ఒక అక్షరము (bc) క్రింద భావించెదము. ఇట్లేర్పడిన 5 అక్షరములు, అనగా $a, (bc), d, e, f$ అక్షరములు $5! = 120$ విధములుగా అమర్చగలము. ఈ ప్రతి ఒక ప్రస్తారములోను b, c లు bc అను క్రమములో నుండును. అట్లే b, c లు cb అను క్రమములో నుండునట్లు మరల 120 విధములుగా అమర్చగలము. కావున మొత్తము విధములు $= 2 \times 120 = 240$.

మండల క్రమచయములు : ఇప్పుడు భిన్నములైన n వస్తువులనన్నింటినీ తీసికొని ఒక వృత్తము చుట్టూ యెన్ని విధములుగా అమర్చవచ్చునను విషయము పరీక్షింతము. వీనిని మండల క్రమచయము లందురు. ప్రదక్షిణముగా అమర్చిన వరుసక్రమములను, అప్రదక్షిణముగా అమర్చిన వానిని వేర్వేరుగా భావించినఎడల n వస్తువుల యొక్క మండల క్రమచయముల సంఖ్య $(n-1)!$ అగును. అట్లు వేర్వేరుగా భావించనియెడల అవి $\frac{1}{2}(n-1)!$ అగును.

సంయోగములు : వివిధములగు n వస్తువులలో r వస్తువులను ఏర్చుకొను సంయోగముల సంఖ్యను ${}_nC_r$ అందురు.

ఈ విధముగా ఏర్చిన ప్రతి సంయోగములోని r వస్తువులను, $r!$ విధములలో క్రమవరుసగా లేదా పద్ధతిగా అమర్చవచ్చును. కావున ${}_nC_r$ సంయోగముల నుండి $r! \times {}_nC_r$ ప్రస్తారములు కలుగును. అయితే n వస్తువులను ఒక్కొక్క సారి r వస్తువుల చొప్పున ఏర్చి అమర్చగా ఏర్పడు ప్రస్తారముల సంఖ్య ${}_nP_r$.

$$\therefore {}_nP_r = r! \times {}_nC_r;$$

$$\therefore {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ఈ సూత్రములో n, r లు ధనాత్మక పూర్ణాంకములు, మరియు $r \leq n$.

అనుపూరక సంయోగములు : n వస్తువులలో ఒక్కొక్క సారి r చొప్పున ఏర్చుకొనగా ఏర్పడు సంయోగముల సంఖ్య, ఆ n వస్తువులను ఒక్కొక్కసారి $(n-r)$ చొప్పున ఏర్చుకొనగా ఏర్పడు సంయోగముల సంఖ్యకు సమానము. ఏలనన r వస్తువులు చొప్పున ఏర్చుకొన్న ప్రతి గణమునకు అనురూపముగా $(n-r)$ వస్తువులు గల గణము మిగిలిపోవును. ఈ విధముగా ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ అను ఫలితము వచ్చును. ఇట్టి సంయోగములను అనుపూరక సంయోగము లందురు.

${}_nC_r$ యొక్క అధికతమ విలువ : n స్థిరముగ నుంచి, r ఒకటి నుండి హెచ్చువిలువలు తీసుకొనునపుడు ${}_nC_r$ క్రమముగా కొంతవరకు హెచ్చి ${}_nC_{n-r} = {}_nC_r$ అను సూత్రము వలన, అటుపిమ్మట, తగ్గును. కావున ${}_nC_r$ కి అధికతమ విలువ ఒకటి గలదు. n సరి సంఖ్య అయినపుడు

$r = \frac{n}{2}$ విలువకు ${}_nC_r$ అధికతమ విలువ పొందును. n బేసి సంఖ్య అయినపుడు $r = \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ విలువలకు ${}_nC_r$ అధికతమ సమాన విలువలు పొందును.

న్యూటన్ ద్విపద సిద్ధాంతము ప్రకారము:

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \dots + x^n$$

కనుక పై పరిశీలన ప్రకారము గుణకములలో అధికమైనది మధ్యలోనుండును.

మరికొన్ని సూత్రములు: (i) $(n+1)$ వివిధ వస్తువుల నుండి r సంయోగములను పర్చిన వానిలో కొన్నిటియందు మాత్రము ఒక నిర్దిష్ట వస్తువు కనబడును. తక్కిన వానిలో అది కనబడదు. కాబట్టి ${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$ అను సూత్రమేర్పడును.

$(m+n)$ వివిధ వస్తువులను m వస్తువులు n వస్తువులు గలుగునట్లు రెండు గణముల క్రింద $\frac{(m+n)!}{m!+n!}$ విధములలో విభజింప గలము. $m = n$ అయిన, విభజింపగలిగిన విధములు $\frac{(2m)!}{m!\,m!\,2!}$ ఏలనన, మొదటి విభాగములోని ఏ ఒక పద్ధతిలోనైన రెండు గణములను, క్రొత్త విభాగము రాకుండా పరస్పరము మార్చగలము.

(ii) r క్రమవరుస సంఖ్యల లబ్ధఫలము $r!$ చే భాగింపబడును.

r వరుస సంఖ్యలలో అధికతమ సంఖ్య n అనుకొనిన, వాని లబ్ధఫలము $= n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$ కాని $\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{r!} = {}_nC_r$ అని మనకు తెలియును. ${}_nC_r$ పూర్ణాంకము కావున $n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$ లబ్ధఫలము $r!$ చే భాగింపబడును.

ఇంతవరకు భిన్నములగు వస్తువుల ప్రస్తారములు, సంయోగములు గూర్చి చర్చించితిమి. ఇప్పుడు, సదృశమైన అనగా, కంటికి ఒకేరీతిగా కన్పడు వస్తువులను గూర్చి కొన్ని సూత్రములను వివరింతము.

(i) n వస్తువులలో p వస్తువులు ఒకరకపు సదృశ వస్తువులు. q వస్తువులు మరియొరకము, r వస్తువులు వేరొక రకములో చేరినవి. మిగిలిన వన్నియు భిన్నములైనవి. అపుడు వాని నన్నింటినీ అమర్చగా నేర్పడు ప్రస్తారముల సంఖ్య $\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$.

(ii) n విధమైన వస్తువులను, r స్థలములలో, ప్రతి వస్తువు ఒక్కసారిగాని, రెండుసార్లుగాని...... r సార్లుగాని ఉపయోగించు ప్రస్తారముల సంఖ్య n^r అగును.

(iii) $(p+q+r\dots)$ వస్తువులలో, p వస్తువులు సదృశమైన ఒక రకమువి, q వస్తువులు సదృశమైన ఇంకొక రకమువి, r వస్తువులు సదృశమైన వేరొకరకమువి, ఈప్రకారము సదృశమైనవి వివిధ రకములుగా నుండిన, వానిలో కొన్నిగాని, అన్నియుగాని ఏర్పు సంయోగముల సంఖ్య $(p+1)(q+1)(r+1)\dots\dots -1$

ఉదాహరణ: "బాలరసాలసాలము" అను సమాసము లోని అక్షరముల నన్నిటిని తీసికొని ఎన్ని ప్రస్తారముల నేర్పాటు చేయగలము?

దత్తసమాసములో మొత్తము 8 అక్షరములున్నవి. వీనిలో 3 'ల' అను అక్షరములు, 2 'సా' అనునవి మిగిలినవి భిన్నమైనవి గలవు.

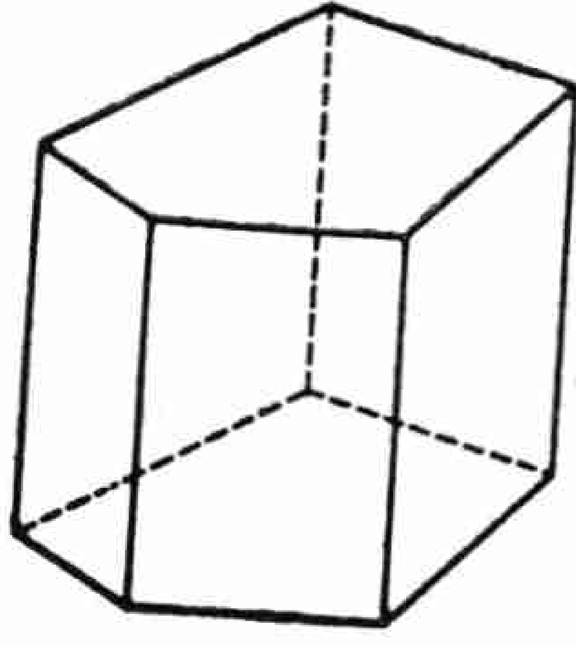
అభీష్ట సంఖ్య x అనుకొందము. ఏ ఒక్క ప్రస్తారములోనైనా 'ల' అను మూడక్షరములకు $ల_1$, $ల_2$, $ల_3$ అను భిన్నమైన 3 అక్షరములు తీసికొన్నయెడల ఈ ఒక్క ప్రస్తారమునుండి 3! భిన్నమైన ప్రస్తారముల నేర్పాటు చేయవచ్చును. ఈ విధముగా x ప్రస్తారములలోను, యీ మార్పుచేసినయెడల మొత్తము $x \cdot 3!$ ప్రస్తారము లేర్పడును. ఇదే ప్రకారముగా, ఇప్పుడు 'సా' అను రెండక్షరములకు బదులు $సా_1$, $సా_2$ అని భిన్నముగా తీసికొనగా మొత్తము $x \cdot 3!\,2!$ ప్రస్తారము లేర్పడును. మరియు, ఇప్పుడన్ని అక్షరములు భిన్నములయినవి గాన, వీని యొక్క మొత్తము ప్రస్తారముల సంఖ్య 8!. అందుచే $x \times 3! \times 2! = 8!$

$$\therefore x = \frac{8!}{3!\,2!}$$

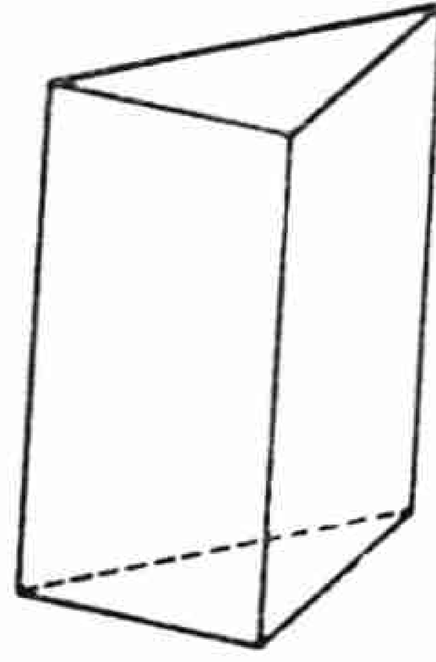
క. సు. రా.

ప్రిజమ్ (పట్టకము): సమానాంతర తలములలో సర్వసమాన బహుభుజులైన రెండు ముఖములు, తక్కిన ముఖములు సమానాంతర చతుర్భుజములుగను ఉండు బహు తలకమును ప్రిజమ్ (పట్టకము) అందురు. సమానాంతర తలములందలి సర్వసమాన ముఖములను ప్రిజమ్ యొక్క పీఠములని, సమానాంతరచతుర్భుజములుగ ఉండు తక్కిన ముఖములను పార్శ్వముఖములని అందురు. పీఠములో లేనట్టి అంచులను పార్శ్వ అంచులు అందురు. రెండు పీఠముల (సమానాంతర తలముల) మధ్య లంబ దూరమును, ఆ ప్రిజమ్ యొక్క ఉన్నతి అందురు. పార్శ్వ అంచులు పీఠములకు లంబముగ ఉన్నచో దానిని లంబ ప్రిజమ్ (చూ. చిత్రము 288 a పు. 399) అని, అట్లులేనిచో తిర్యక్ ప్రిజమ్ (చూ. చిత్రము 288 b పు. 399) అని అందురు.

పీఠములు త్రిభుజములు అయిన దానిని త్రిభుజ ప్రిజమ్ అని, పీఠములు పంచభుజి అయిన దానిని పంచభుజి



లంబ ప్రిజమ్
చిత్రము 288 a



తిర్యక్ ప్రిజమ్
చిత్రము 288 b

ప్రిజమ్ అని, పీఠములు సమాంతర చతుర్భుజములు అయిన దానిని సమాంతర ఘనము (పారలెలోపైప్డ్) అని అందురు.

ప్రిజమ్ యొక్క పీఠ వైశాల్యము B, ఉన్నతి h అయిన దాని ఘనపరిమాణము $V = B \cdot h$ అగును. లంబ ప్రిజమ్ యొక్క పీఠము చుట్టుకొలత P అయిన, ప్రిజము పార్శ్వముఖముల మొత్తము వైశాల్యము $P \cdot h$ అగును. ప్రిజమ్ యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము $A =$ పార్శ్వ ముఖముల వైశాల్యము + రెండు పీఠముల వైశాల్యము అనగా $A = Ph + 2B$ అగును. పా. ల. నా.

ప్లూటో: చూ. యముడు.

ఫర్మా (1601-1665): న్యూటన్ వినా 17వ శతాబ్దపు ప్రశస్తతమ గణితజ్ఞుడుగా ఫర్మా పేరుగనినాడు. డేకార్ట్ జోలిలేకుండ ఈతడు కూడ విశ్లేషణాత్మక జ్యామితి శాస్త్రమును స్వతంత్రముగ ఆవిష్కరించినాడు; పాస్కల్‌తోపాటు సంభావ్యతా శాస్త్ర సృష్టికర్తగా ప్రశంసించబడినాడు. వక్ర రేఖలకు స్పర్శ రేఖలను వ్రాయుటకు, గరిష్ఠ కనిష్ఠ మూల్యములను కనుగొనుటకు న్యూటన్‌కు ముప్పది ఏండ్ల పూర్వమే ఇతడు కలన గణితము నుపయోగించెను. కాని ఇతని అభిమాన గణిత శాఖ సంఖ్యా సిద్ధాంతము, ఇందీతని నిర్వాహము ప్రధానమయినది. ఇంతయైనను ఈతనికి గణితము క్రీడాసాధనమే, జీవనోపాధికాదు. ఈతని వినీతత్వము తన జీవిత కాలమందు తన పరిశోధనలను ప్రచురింపకుండ చేసెను. ఈతని పరిశోధనలలో అతిప్రగల్భములైనవి చిన్న చిన్న కాగితపు ముక్కలమీదనో, లేదా, అతడు చదివిన పుస్తకముల అంచులలోనో వ్రాయబడి, ఆతడు చనిపోయిన తరువాత వెలుగు చూచినవి.

సంఖ్యా సిద్ధాంతమునందీతని నిర్వాహములు:

$2 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$. $2^{16} + 1 = 65537$ అను సంఖ్యలను తీసికొందము. ఇవియన్నియు $2^{2^n} + 1$ రూపముననున్నవి. ఇవన్నియు ప్రధాన సంఖ్యలు. ఇట్టి పూర్ణాంకములన్నియు ప్రధాన సంఖ్యలై యుండవలయునని ఫర్మా ఊహించెను. కాని ఈ యూహ సరియైనది కాదు. ఏలన $2^{32} + 1$, $2^{64} + 1$ ప్రధాన సంఖ్యలు కావని తరువాత తెలిసినది. ఈ సమస్యపై తీవ్ర పరిశోధనలు గణితజ్ఞులు జరిపించియున్నారు. ఈ అంకెలే మరల గాస్ చర్చించిన ప్రసిద్ధ జ్యామితి ప్రశ్నయందు తారసిల్లును. అది యేదనగా $2^{2^n} + 1 = p$ అను సమీకరణమందు p ప్రధాన సంఖ్యయగుచో p భుజములుగల క్రమ బహుభుజిని కేవలము రూళ్ళకర్ర, కంపాంసులతో రచించవచ్చును.

ఫర్మా సిద్ధాంతమని పేరుగల సిద్ధాంతము, n పూర్ణాంకము p ప్రధాన సంఖ్యయు అయినచో $n^p - n$, p చే భాగహార్యమగునని ప్రతిపాదించును. దీనికి మొట్టమొదట లైబ్నిట్జ్ చే ఉపపత్తి కల్పింపబడినది. అతని ఇంకొక సిద్ధాంతము ప్రకారము $(4n + 1)$ రూపములోనున్న ప్రతి ప్రధాన సంఖ్యయు ఒకే ఒక మార్గమున రెండు సంఖ్యల వర్గముల సంకలిత ఫలముగా వ్యక్త పరుప బడవచ్చును.

ఉదా: $29 = 2^2 + 5^2$;

$x^2 + y^2 = z^2$ అను సమీకరణమునకు x, y, z పూర్ణాంకములగు అనేక సాధనలు పొంద బడినవి. $x^3 + y^3 = z^3$, $x^4 + y^4 = z^4$ అను సమీకరణమునకును, వ్యాపకముగ $x^n + y^n = z^n$ సమీకరణమునకును n పూర్ణాంకమై 2 కన్న ఎక్కువై, x, y, zలు పూర్ణాంకములైనచో సాధనలు లేవని ఫర్మా వచించెను. ఒక పుస్తక పత్ర ప్రాంతమున దీనికొక అత్యాశ్చర్యకరమైన నిరూపణము తాను కని పెట్టెననియు పత్ర ప్రాంతమున చోటు చాలక నిరూపణ లిఖించ వీలు కలుగలేదనియు అతడు వ్రాసియుంచెను. పర్యవసానము యథార్థమయినదేయైనను తరువాతి గణితజ్ఞులకు దాని నిరూపణ మిక్కిలి కష్టముగా పరిణమించినది. పై జెప్పిన సిద్ధాంతమును ఫర్మా యొక్క చరమ సిద్ధాంతమందురు. ఈ సిద్ధాంతమునకు ఉపపత్తులు కల్పించు యత్నములో అంకగణితమందు బీజీయ సంఖ్యావాదము అను ప్రధాన గణిత విజ్ఞానశాఖ ప్రాదుర్భవించెను. ఈ సందర్భమున పూర్ణ సంఖ్యా భావము, ప్రధాన సంఖ్యా భావము మామూలు పూర్ణాంకములు తమ విశిష్ట పక్షములగునట్లు విస్తరీకరింపబడినవి. ఆ. న.

ఫలములు: నిర్వచనము: x అనునది ఒక చలరాశి. x తెలిసినపుడు మరియొక చలరాశి y యొక్క

విలువయును తెలియుననుకొనెదము. అపుడు y చలరాశి, x యొక్క ఫలమనెదము. దీనినే $y = f(x)$ అని సంకేతములో వ్రాసెదము. x కు మనము ఇచ్చు విలువలన్నియు ఒక సమితి X అగును. ఈ విలువలకు తగినట్లు y తీసికొను విలువలు మరియొక సమితి Y అగును. కనుక $y = f(x)$ అను సంబంధమును, X, Y సమితులలోని వస్తువులను జోడీకరించుట అనియు చెప్పవచ్చును.

(x, y) జోడిలో, y దత్తముగను, x దానినుండి కనిపెట్టిన విలువగను వీక్షించినచో, పై సంబంధమునే $x = f^{-1}(y)$ అని వ్రాసెదము. $y = f(x)$ ను, y చలరాశి x యొక్క f ఫలము అని చదివెదము. అటులనే $x = f^{-1}(y)$ అను సంబంధమును, x చలరాశి y యొక్క విలోమ ఫలము f^{-1} అని చదివెదము. ఉదాహరణమునకు $y = 2x - 1 = f(x)$ అయితే $x = (y+1)/2 = f^{-1}(y)$ విలోమ ఫలము.

$y = x^2$, అను ఫలము విషయమునందు, $x = +\sqrt{y}$, $x = -\sqrt{y}$ అను రెండు ఫలములును ; $y = \cos x$ విషయమందు $x = \pm \cos^{-1} y \pm n\pi$ అను అనంత ఫలములును విలోమ ఫలములుగా ఉన్నవి.

ఫలభావమును, ఫలముల గుణములను విమర్శించు ఫలవాదము గణితములో కేంద్రస్థానము పొందియున్నది. కనుక ఈ భావము కాలక్రమముగా పెరిగి విశాలీకరించబడుచున్నది. మొట్టమొదట పైన వివరించినట్లు స్పష్ట సంవృత సమాసముల చేతనే ఫలములు నిర్వచింపబడెను. తరువాత x, y చలరాశులకు ఒక సంబంధమిచ్చినచో (ఉదా : $x^3 + y^3 = 3xy$) దానినుండి x చలరాశి y యొక్క ఫలముగను, y చలరాశి x యొక్క విలోమ ఫలముగను నిర్వచనమగుచున్నదను భావము కలిగినది. x, y లు రెండును సంఖ్యలుగా నుండనక్కరలేదు. ఎటువంటి వస్తువులైనను ఉండవచ్చును. x ఇచ్చినట్లైతే y కు ఒకే విలువ ఉన్నదనుటయే ముఖ్యము (చూ. సమీక్ష పు. 11).

భౌతిక శాస్త్ర పరిశోధనలలో క్రింద వివరించినటువంటి ఫలములు కన్పడుచున్నవి.

$0 < x < 1$ అగునపుడు $y = 0$;

$1 \leq x < 2$ అగునపుడు $y = x$

$2 < x < 3$ అగునపుడు $y = 0$

$3 < x < 4$ అగునపుడు $y = x - 2$

$4 < x < 5$ అగునపుడు $y = 0$

$5 < x < 6$ అగునపుడు $y = x - 4$

ఇటువంటి ఫలములు ఒకే ఫోరియర్ పరంపరల ద్వారా నిర్వచించవచ్చును. దీనిని ఒక ఫలమని పిలువవలెనా లేదా పెక్కు ఫలముల ఖండములని పిలువవలెనా అను ప్రశ్న సంభవించెను. ఆధునిక పద్ధతి ప్రకారము ఇది ఒక ఫలమే. ఇది ఒక చిత్రలేఖనముయొక్క ఆవర్తనవలన కలుగును.

అనంత సంఖ్యగల పరికరములచేత ఒక ఫలము నిర్వచనముండవచ్చును. వీటిలో అనంత సంకలన పరంపరలు, అనంత గుణకార లబ్ధములు, చయనీకరణ విధానములు, వీటినన్నిటిని వాడుదురు. ఇవికాక కొన్ని వినియుక్త గణిత ఫలములు అంతరీకరణ సమీకరణముల ద్వారానో, చయనీకరణ సమీకరణముల ద్వారానో నిర్వచింపబడుచున్నవి.

ఫలముల అవిచ్ఛిన్నత : ఒక ఫలము $y = f(x)$, ఒక బిందువు $x = a$ యందు అవిచ్ఛిన్నముగా ఉన్నదనగా, దాని రేఖాచిత్రము ఆ బిందువునందు ఎడతెగకుండ ఉన్నదని అర్థము. దీనికి నిబంధన : $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$. ఇచ్చట $f(a+0)$ అనగా x విలువ a విలువను కుడిప్రక్కన నుండి సమీపించునపుడు దొరకు అవధి అని అర్థము. అనగా $f(a+0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. అటులనే $f(a-0)$ అనగా x విలువ a విలువను ఎడమ ప్రక్కన నుండి సమీపించునపుడు దొరకు అవధి అని అర్థము. $f(a-0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(a-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. కనుక $f(x)$ $x = a$ బిందువునుండి విచ్ఛిన్నమై యున్నదనగా అది క్రింది విధములుగా సంభవించవచ్చును.

(i) $x = a$ యందు $f(x)$ విలువయగు $f(a)$ సరిగ నిర్వచించబడలేదు.

(ii) $f(a+0)$ లేదా $f(a-0)$ అను అవధులు లేవు.

(iii) $f(a+0)$, $f(a-0)$, $f(a)$ మూడును ఉన్నవి కాని, అవి సమముకాదు.

మొదటి పరిస్థితికి దృష్టాంతము

$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = f(x)$. ఇచ్చట $f(a) = \frac{0}{0}$ కనుక ఇది నిర్ణీతము కాలేదు. అయితే $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$. ఈ విభాగ పరికర్మము x చలరాశి a విలువ తీసికొనని సమయమునందు సాధ్యము. కనుక ఇచ్చట $f(a+0) = 2a$; $f(a-0) = 2a$. కనుక మనము $f(x)$ యొక్క నిర్వచనము.

$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = f(x)$; $(x \neq a)$ అనియును $f(a) = 2a$ అనియును చేసిన యెడల, $f(x)$ అపుడు $x = a$ యందు అవిచ్ఛిన్నముగా నుండును.

మరియొక ఫలము తీసికొనెదము :

$x < 2$ అగునపుడు $f(x) = x + 4$

$x > 2$ అగునపుడు $f(x) = x + 5$

ఇచ్చట $f(2-0) = 6$, $f(2+0) = 7$. కనుక $f(2)$ కు ఏ విలువ ఇచ్చినను $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$ కానేరదు. కనుక ఈ ఫలము $x = 2$లో విచ్ఛిన్నమైనది.

$f(x) = \sin 1/x$, $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. ఇచ్చట $x \longrightarrow 0$ (ఏవైపు నుండినను) అగునపుడు $f(x)$కు అవధిలేదు. కనుక ఇచ్చట $f(+0)$ కును $f(-0)$కును స్పష్టమైన విలువలు లేవు. కనుక ఈ ఫలమునకు $x = 0$లో విచ్ఛిన్నత ఉన్నది.

$f(x) = x \sin 1/x$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, ఇచ్చట $|\sin 1/x| < 1$ (x యొక్క వాస్తవ విలువలకు). కనుక $(x \sin 1/x) \longrightarrow 0$, ($x$ చలరాశి శూన్యమును సమీపించునపుడు) అనగా $f(+0) = 0, f(-0) = 0$. కనుక $f(0)$కు 0 విలువ ఇచ్చినచో, ఇది $x = 0$ లో అవిచ్ఛిన్నముగ నుండును. $x = 0$ యందు $f(x)$ కు శూన్యముకాక ఇతర విలువ లిచ్చినచో, ఈ ఫలము విచ్ఛిన్నత కలిగియుండును.

ఒక అంతరములో అవిచ్ఛిన్నత : ఒక ఫలము $f(x)$, ఒక అంతరము $a < x < b$ లోని ఒక్కొక బిందువునందును అవిచ్ఛిన్నమైతే, ఆ ఫలము ఆ అంతరములో అవిచ్ఛన్నమనెదము.

ఒక ఫలము $f(x)$ ఒక సంవృత అంతరము $a \leq x \leq b$ లో అవిచ్ఛిన్నమైతే దానికి క్రింద వివరించిన గుణములున్నవి :

(i) $f(x)$ యొక్క విలువలన్నియు పరిమిత విలువలుగా నుండును. అనగా $f(x)$ ఈ అంతరములో నెచ్చటను అనంతముగా నుండనేరదు.

(ii) $f(x_1) = a_1$, $f(x_2) = a_2$ అను రెండు విలువలను $f(x)$ ఈ అంతరములో పొందినచో, a_1. a_2ల మధ్యనున్న విలువలన్నిటిని $f(x)$ పొందును. అట్లు పొందుటకు కావలసిన x విలువను a_1, a_2ల మధ్యనే యుండును.

(iii) $\varepsilon > 0$ అను దత్త సంఖ్య ఎంత చిన్నదైనను, (a, b) అంతరమును ఉపఅంతరములు (a, a_1) $(a_1, a_2) \cdots (a_{n-1}, b)$ గా విభజించవచ్చును. ఈ ఉపఅంతరములు ఎటువంటివంటే ఒక్కొక్క ఉపఅంతరమునందును $f(x)$ యొక్క విలువల వ్యత్యాసము ε కంటే తక్కువగనే ఉండును.

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx$ చయనము సాధ్యము. దీని విలువ $(b-a) f(x_1)$. ఇచ్చట $a \leq x_1 \leq b$.

బహురాశిఫలములు : పైనవివరించిన భావములను పెక్కు చలరాశులపై ఆధారపడిన ఫలములకును విస్తరింపవచ్చును. ఉదా : $u = f(x, y, z \ldots\ldots)$ తీసికొనెదము. ఇచ్చట $x, y, z \ldots\ldots$ స్వతంత్రచలరాశులు. u అనునది వాటిమీద ఆధారపడిన ఒక చలరాశిఫలము. $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1 \ldots\ldots$ విలువలు తీసికొనునపుడు u యొక్క విలువ u_1 అనుకొందము. అనగా

$$u_1 = f(x_1, y_1, z_1, \ldots \ldots)$$

u ఫలము $x, y, z \ldots\ldots$ చలరాశులలో $x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots$ విలువలకు అవిచ్ఛిన్న ఫలమనగా దాని అర్థము $x, y, z \ldots\ldots$ చలరాశులు ఏ విధముగా $x_1, y_1, z_1, \ldots \ldots$ను సమీపించినను, $u(x, y, z \ldots\ldots)$ అనునది $u_1 = f(x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots)$ విలువను సమీపించుచున్నదనుటయే. ఇట్లుండుటకు, ఒక్కొక్క ప్రత్యేకచలరాశిఫలముగ u ను భావించినను, అది ఆ చలరాశిలో అవిచ్ఛిన్న ఫలమై యుండవలెను. కాని, ఇది మాత్రము చాలదు. పెక్కు చలరాశులు ఏక కాలములో మారి ఏ విధముగ $x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots$ను సమీపించినను u అనునది u_1 విలువనే సమీపించవలెను.

ఫలముల అంతరీకరణము : $x = a$ బిందువునందు అవిచ్ఛిన్నమైన ఫలము $f(x)$ ను తీసికొనుము. దీనికి $f(a)$ విలువ ఉన్నది. $\varepsilon \longrightarrow 0$ అగునపుడు

$f(a \pm \varepsilon) - f(a) \longrightarrow 0$ అగుచున్నది. కనుక $\dfrac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$కును $\dfrac{f(a) - f(a-\varepsilon)}{\varepsilon}$ కును, $\varepsilon \longrightarrow 0$ అగునపుడు అవధులు ఉండవచ్చును. ఈ అవధులుండి, అవి రెండును సమమైతే, $f(x)$ కు $x = a$ బిందువునందు ఒక వ్యుత్పన్నమున్నదనెదము. ఈ ఉమ్మడి అవధియే ఆ వ్యుత్పన్నము $f'(a)$ యొక్క విలువ. దీని జ్యామితీయ అర్థము ఏమనిన ఇది $y = f(x)$ యొక్క రేఖాపటము (గ్రాఫ్) నకు $\{a, f(a)\}$ బిందువునందున్న స్పర్శరేఖ యొక్క నిమ్నత (స్లోప్); మరియొక అర్థమేమనిన x చలరాశి పెరుగు రేటుకును y చలరాశి పెరుగు రేటుకును ఉన్న నిష్పత్తియే ఇది.

ఆ. న.

ఫలములు - వ్యుత్పన్నరహిత :

'ఫలములు' అను శీర్షిక క్రింద ఫలముల నిర్వచనమును, ఫలములయొక్క అవిచ్ఛిన్నతా భావమును, అవిచ్ఛిన్న ఫలముల గుణములను చూడవచ్చును. ఒకఫలము $f(x)$, $x = a$ బిందువునందు అవిచ్ఛిన్నమైనచో, అచ్చట దాని వ్యుత్పన్నము $f'(a)$ ఇట్లు నిర్ణయించబడినది :

$$f'(a) = \lim \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim \frac{f(a) - f(a-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ఇచ్చట ε అను ఒక ధనాత్మక సంఖ్య శూన్యమును సమీపించు నపుడు అవధిని తీసికొనవలెను. పై అవధులుండి సమమైతే, ఆ ఫలమునకు $x = a$ బిందువునందు వ్యుత్పన్నమున్నదనెదము. అవధులు లేకపోయిననూ, లేదా ఉండి సమానముగా ఉండకున్నను, ఆ బిందువునందు వ్యుత్పన్నము లేదనెదము.

ఉదాహరణమునకు $f(0) = 0$; $x > 0$ అగునపుడు $f(x) = x$; $x < 0$ అగునపుడు $f(x) = -x$ అను ఫలమును తీసికొనుము. ఇచ్చట $a = 0$, $\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon}$ యొక్క అవధి $= 1$. $\frac{f(0) - f(-\varepsilon)}{\varepsilon}$ యొక్క అవధి $= -1$. కనుక ఈ ఫలమునకు వ్యుత్పన్నము $x = 0$ బిందువునందు లేదు. అయితే ఫలమునకు $x = 0$ బిందువులో విచ్ఛిన్నత లేదు.

మరియొక దృష్టాంతము: x శూన్యము కానపుడు $f(x) = x \sin(1/x)$, అయితే $x = 0$ అగునపుడు $f(0) = 0$ అనునది ఒక ఫలమును అన్ని విలువలకు నిర్వచించును. ఈ ఫలము $x = 0$ బిందువునందును ఇతర బిందువులందును అవిచ్ఛిన్న ఫలమని సులభముగా చూడవచ్చును. ఇతర బిందువులలో దీనికి వ్యుత్పన్నము ఉన్నది. దీని విలువ $\sin(1/x) - \frac{1}{x}\cos(1/x)$. అయితే $x = 0$ నందు దీనికి వ్యుత్పన్నమున్నదా? అని చూచెదము.

$$\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \sin(1/\varepsilon); \quad \frac{f(0) - f(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -\sin(1/\varepsilon)$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ అగునపుడు $\sin(1/\varepsilon)$ ఏ అవధిని సమీపించదు. -1 నుండి $+1$ వరకు ఊగులాడును. కనుక ఈ ఫలమునకు $x = 0$ యందు వ్యుత్పన్నము లేదనియే చెప్పవలెను.

కడపటి దృష్టాంతముగా: $x \neq 0$ అయితే $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ అను ఫలమును తీసికొనెదము. ఈ ఫలమునకు $x = 0$ యందు

$$\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \varepsilon \sin(1/\varepsilon);$$

$$\frac{f(0) - f(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -\varepsilon \sin(1/\varepsilon)$$

ఇచ్చట $\varepsilon \longrightarrow 0$ అగునపుడు రెండు అవధులును శూన్యమగుచున్నవి. కనుక ఈ ఫలమునకు $x = 0$ యందు వ్యుత్పన్నమున్నది. దాని విలువ శూన్యము, అనియే చెప్పవలెను.

పై ఉదాహరణములలో ఒక అంతరములో, అన్ని వాస్తవిక విలువలకును అవిచ్ఛిన్నముగా ఉండు ఫలము, ఒక బిందువునందు మాత్రము వ్యుత్పన్నరహితమై ఉన్నది. ఇట్లు ప్రత్యేక బిందువులందు ఒక అవిచ్ఛిన్నఫలము వ్యుత్పన్నరహితముగా నుండవచ్చును. అయితే ఒక అంతరములో అన్ని వాస్తవికవిలువలకును అవిచ్ఛిన్నమైనట్టు వంటి ఫలము, దాని అన్ని బిందువులందును వ్యుత్పన్నరహితముగా ఉండ సాధ్యమా అను ప్రశ్న తేలుచున్నది. అటువంటి ఫలము $f(x)$ ఒకటి ఉన్నచో దాని రేఖాచిత్రము (గ్రాఫ్) ఒక ఎడతెగని రేఖ. కాని ఎచ్చటను దానికి స్పర్శరేఖ లేదు! ఒక బిందువు అటువంటి వక్రముపై జరిగితే, అది ఎచ్చట ఉన్నను దాని గమన దిక్కును కనిపెట్టుట సాధ్యము కాదు! అయితే అది ఎడతెగకకుండ జరుగును. అటువంటి వక్రము, గమనమూ, మన సామాన్య అనుభవజ్ఞానమునకు గోచరము కానివైయున్నవి అయితే వియర్‌స్ట్రాస్ అను గణితజ్ఞుడు అటువంటి ఫలమును సృజించియున్నాడు.

$f(x) = \sum\limits^{\infty} a^n \sin b^n \pi x$, $0 < a < 1$, $b = 4m + 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ అనునది అటువంటి వ్యుత్పన్నరహిత అవిచ్ఛిన్న ఫలము.

ఎచ్చటైనను వ్యుత్పన్నరహిత అవిచ్ఛిన్న ఫలము మరియొకటి క్రింద వివరింపబడినది.

$\psi(x) = x \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$

$\psi(x) = 1 - x \quad (\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$

$\psi(x + 1) = \psi(x)$

అనుగుణములు గల ఒక ఫలమును తీసికొనుము. దీనినుండి

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \psi(2^{n!} x)$$

అను ఫలమును పరంపర సంకలన ఫలముగా తీసికొనుము. $f(x)$ ఎచ్చటైనను అవిచ్ఛిన్నముగా నుండును కాని దానికి ఎచ్చటను వ్యుత్పన్నము లేదు.

క్నాప్ అను గణితజ్ఞుడు ఇట్టి ఫలములను సృజించు విధమును చూపియున్నాడు.

$(0, 1)$ అంతరములోని ఒక్కొక్క కరణీయ విలువయందును వ్యుత్పన్నము కలిగి, అయితే ఒక్కొక్క అకరణీయ విలువయందును వ్యుత్పన్న రహితమైన ఒక ఫలమును సృజించవచ్చును.

ఈ దృష్టాంతములన్నియు మన సహజ జ్ఞానమునకు అతీతమైనటువంటి స్థలములలో గణితము ప్రవేశించుచున్నదనుటను చూపుచున్నవి కదా! సి. టి. రా.

ఫిబోనాచ్చి వరుస: ఈ వరుస యొక్క మొదటి రెండు పదములు 0, 1. తరువాత వచ్చు ఒక్కొక్క పదమును, దానికి ముందరనుండు రెండు పదముల సంకలన ఫలము. కనుక మూడవ పదము $F_3 = 0 + 1 = 1$, నాల్గవ

పదము $F_4 = 1 + 1 = 2$, అయిదవ పదము $2 + 1 = 3$. కనుక ఈ వరుస యొక్క పదములు 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...... అగును.

దీని యందు ఏ మూడు వరుసగానున్న పదములు తీసికొనినను, మధ్య పద వర్గమునకును, మిగిలిన రెండు పదముల గుణకారలబ్ధమునకును ఉన్న వ్యత్యాసము ± 1. ఉదా: $2 \times 5 - 3^2 = 1$; $3 \times 8 - 5^2 = 1$; $13 \times 5 - 8^2 = 1$; $F_{n-1} \times F_{n+1} - F_n^2 = \pm 1$.

పై వరుస నుండి ఏ పదమునైన లవముగను దాని తరువాత వచ్చు పదమును హారముగను తీసికొనినచో ఒక భిన్నముల వరుస లభించును. ఇది

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots\ldots$$

ఈ భిన్నములకు ప్రకృతిలోను, కళలోను ప్రయోగము లున్నవి.

ఒక మొలక పెరుగునపుడు దాని దంటు (స్టెమ్) నుండి ఆకులు ఒకటిపైనొకటి జన్మించును. అయితే అవి సరిగా ఒకటి పైనొకటి ఉదగ్రముగానుండవు. పైకి వెళ్ళునపుడు, దంటు చుట్టు ఒక భ్రమణము ఉండును. ఒక్కొక్క ఆకు నుండి దాని తరువాత ఆకుకు వెళ్ళునపుడు ఈ భ్రమణ కోణమునకును పూర్ణ భ్రమణమగు 360° కును ఉన్న నిష్పత్తి పైన వివరించిన ఫిబోనాచ్చి భిన్నములలో నొకటిగనే యుండును. ఆకులను క్రిందనుంచి 1, 2, 3 అని ఎంచినచో,ఒక ఆకుకు సరిగ ఉదగ్రముగనుండు ఆకులసంఖ్య ఫిబోనాచ్చి వరుసలోనుండు సంఖ్యగనుండును.

బంగారపు విభజన (గోల్డెన్ సెక్షన్): ఒక దత్త నిడుపుగల ఋజు రేఖ AB ను రెండు భాగములు AP, PB గా విభజించవలెను. ఇవి ఎట్లుండవలెనంటే చిన్న భాగము AP కును పెద్ద భాగము PB కును ఉన్న నిష్పత్తియును, పెద్దభాగము PB కును దత్త నిడుపు AB కును ఉన్న నిష్పత్తియును సమముగనుండవలెను. అనగా $AP/PB = PB/AB$. మనము $AB = l$ అని తీసికొనినచో, $AP = x$ తృప్తిచేయవలసిన సమీకరణము $x/(l-x) = (l-x)/l$, అనగా $(l-x)^2 = lx$ లేదా $x^2 - 3xl + l^2 = 0$. మనకు కావనసిన x/l విలువ $(3-\sqrt{5})/2$, కనుక

$$\frac{x}{l-x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{\cdot}61803\ldots\ldots$$

ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య. దీనికి సన్నిహిత ఉపసరణతలు (కన్వర్జెంట్స్) పైన వ్రాసిన ఫిబోనాచ్చిభిన్నములు. ఏలన

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots$$

అను శృంఖలిత భిన్నమునకు సమము. దీని యొక్క ఉపసరణతలే ఫిబోనాచ్చి భిన్నములు.

గ్రీకులు ఇటువంటి కత్తిరింపునకు "బంగారపు విభజన" అని పేరు పెట్టిరి. వారి దృష్టిలో ఇది చాలా సుందరమైన విభజన. ఒక అతి సౌందర్యమైన దీర్ఘ చదురస్రము కావలెనంటే, వెడల్పునకును నిడుపునకును ఉన్న నిష్పత్తి ఈ విలువ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$గ నుండవలెనని వారి అభిప్రాయము. దీనిలో సత్యమున్నదని మనశ్శాస్త్రజ్ఞులు ఒప్పుకొనెదరు.

వెడల్పునకును పొడవునకును ఇట్టి నిష్పత్తిగల ఒక దీర్ఘ చతురస్రమును ఒక వెడల్పు భుజముపై చతరస్రముగను, మిగిలినది దీర్ఘచతురస్రముగను విభజించిన ఎడల, ఈ మిగిలిన దీర్ఘచతురస్రము ఇదే గుణముగలదిగా నుండును. అనగా దానిలో కూడ వెడల్పునకును పొడవునకును ఉన్న నిష్పతి $(\sqrt{5}-1)/2$ అగును. దీనిని ఒక చతురస్రముగను మిగిలినది దీర్ఘచతురస్రముగను విభజించినచో, ఇపుడును మిగిలిన దీర్ఘచతరస్రములోకూడ $(\sqrt{5}-1)/2$ నిష్పత్తి కన్పడును. ఇట్లు సంభవించు చతురస్రవరసలలో ఒక లాగరిత్మిక్ స్పైరల్ లిఖింపవచ్చును. ఈ వక్రము సూర్యకాంతి పుష్పములోని విత్తనముల ఏర్పాటులోను, నత్తగుల్లల ఆకారములోను (చూ. చిత్రము పు. 63) చూడవచ్చును.

ఇటలీ దేశపు ఫిబోనాచ్చి 13 వ శతాబ్దములో ఈ వరసను చర్చించుటకు చాలా కాలమునకు మునుపే భారత దేశములో ఇది తెలిసియుండినది. సంస్కృత శ్లోకములలో ఒక అక్షరము యొక్క ఉచ్చారణ కాలమానమునకు "మాత్ర" అని పేరు. ఒక హ్రస్వాక్షరము యొక్క ఉచ్చారణ కాలము 1 మాత్ర. ఒక దీర్ఘాక్షరమును ఉచ్చరించుటకు కావలసిన కాలము 2 మాత్రలు. ఇపుడు ఒక శ్లోకములోని ఒక పాదము యొక్క మాత్రలు 1 అయినచో, ఇది ఒకే విధముగా ఏర్పరచ వచ్చును. ఒక పాదములోని మొత్తము మాత్రలు 2 అయితే, ఇది రెండు విధములుగా రచించవచ్చును. ఎటులన AA, లేదా B. ఇచ్చట A అనునది ఒక మాత్రగల అక్షరము, B అనునది 2 మాత్రలుగల అక్షరము. మూడు మాత్రలు నిడుపుగల శ్లోక పాదము రచనలో మూడు విధములున్నవి; AAA, AB, BA. ఇటులనే 4 మాత్రల నిడుపుగల శ్లోకపాద రచనలో 5 విధములున్నవి; AAAA, BB, BAA, ABA, AAB. ఇటులనే 5 మాత్రల నిడుపుగల శ్లోక పాదము 8 విధములుగను, 6 మాత్రల నిడుపున్నచో 13 విధములు

గను, శ్లోక పాదము రచించవచ్చును. ఇట్లు దొరకు రచన విధములు, అనగా 1, 2, 3, 5, 8, 13......అన్నియు ఫిబోనాచ్చి వరుసకు చేరినవని చూపించవచ్చును. ఉదా: 5 మాత్రల నిడుపుగల 8 ఏర్పాటులు AAAAA, BAAA, ABAA, AABA, AAAB, BBA, BAB, ABB.

16 మాత్రల నిడుపుగల శ్లోకపాదములలో 1597 రచనలున్నవి. 32 మాత్రలకు రచనలు 35,24,578.

n మాత్రలుగల పాదము యొక్క రచనలు

$$1+(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

అ. న.

ఫోరియర్, జె. బి. జోసఫ్ (1768 - 1830): ఇతడు గణిత ఫలములను త్రికోణమితీయ పరంపరలతో వివరించుట యందు మార్గదర్శకుడు; ప్రముఖ ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రవేత్త; భౌతిక శాస్త్రవేత్త; రాయల్ సొసైటీ ఫెలో. ఫ్రాన్స్‌నందలి ఆక్సెరీలో 1768, మార్చి 21 వ తేదీన దర్జీవాని పుత్రునిగా ఫోరియర్ జనన మొందెను. ఎనిమిది ఏండ్ల ప్రాయమున అనాథబాలుడయ్యెను. మిలిటరీ స్కూలులో ప్రవేశమును పొంది, అచ్చట విద్యార్థి దశలోనే గణితశాస్త్ర ప్రజ్ఞను చూపెను.

1795 నుండి పారిస్ నగరమునందలి 'ఎకోల్ నార్మేల్' లో కొంతకాలము, 'ఎకోల్ పాలీ టెక్నిక్' లో కొంత కాలము గణితశాస్త్ర ప్రొఫెసర్ గా అతడు బోధన చేసెను. 1798 లో నెపోలియన్ తో ఈజిప్టు వెళ్లుచు పై పదవి నుండి విరమించుకొనెను. దిగువ ఈజిప్టునకు గవర్నర్ గ ఇతనిని నెపోలియన్ నియమించెను. కైరో నగరములో నెపోలియన్ వ్యవస్థాపితము చేసిన ఈజిప్షన్ సంస్థ యందు ఫోరియర్ విశేష కృషిని సల్పెను.

1801 లో ఫ్రాన్స్‌కు తిరిగివచ్చి, గ్రెనోబుల్ కేంద్రముగ ప్రధాన పరిపాలన అధికారి అయ్యెను. ఇచ్చట ఉండగనే ఉష్ణవాహకము (కండక్షన్ ఆవ్ హీట్) పై అవిరత పరిశోధనలు చేసెను. 1815 లో తిరిగి నెపోలియన్ తో చేరి, ద్వితీయ పునరుత్థానము తరువాత 1816 లో పారిస్ నగరమున ఫోరియర్ స్థిరపడెను. 1817 లో 'అకాడెమీ ఆవ్ సైన్సెస్' లో సభ్యత్వమును పొంది, 1822 లో దానికి ఒక కార్యదర్శి అయ్యెను.

ఫోరియర్ మేధాప్రజ్ఞను అతడు వ్రాసిన ఉష్ణవాహక గణిత సిద్ధాంతము వెల్లడి చేయుచున్నది. 19 వ శతాబ్దములో ప్రచురింపబడిన ఉద్గ్రంథములలో ఇది ఒకటి. ఈ గ్రంథములో తన పేరుతో నేడు వ్యవహరింపబడు పరంపరల (చూ. ఫోరియర్ పరంపర) సిద్ధాంతమును వృద్ధి చేసి, ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణములందలి సీమ విలువ సమస్యల సాధనయందు దానిని ఉపయోగించెను. తన ఈ ఆవిష్కరణను 1807 లో ఫోరియర్ ప్రకటించెను. ఈ గ్రంథమునకు 'అకాడెమీ ఆవ్ సైన్సెస్' 1812 లో బహుమానము నొసంగినది. ఫోరియర్ పరంపర పరిశోధనలే ఆధునిక వాస్తవిక చలరాశి ఫలశాస్త్రమునకు పునాది అయ్యెను. ఈ విషయముపై నేటికిని తీవ్ర పరిశోధనలు జరుగుచున్నవి. వీటిలో లెబేగ్ చయనీకరణ సిద్ధాంతములు వాడబడుచున్నవి.

1830, మే 16 న ఫోరియర్ పారిస్‌నగరమున మరణించెను. (చూ. ఫోరియర్ పరంపర). పొ. ల. నా.

ఫోరియర్ పరంపర: ఒక త్రికోణమితీయ పరంపర.

$$f(x) = a_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx) \quad \ldots (I)$$

ఫోరియర్ పరంపర యనబడును. గుణకములు లభించు మార్గము:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin x\,dx$$

దీనిని $f(x)$ యొక్క ఫోరియర్ పరంపర అని చెప్పుదురు. దీని చరిత్ర, గత శతాబ్దములో వాస్తవిక చలరాశి ఫలవాదము యొక్క విమర్శనతో సంబంధించి యున్నది.

1822 లో ఫోరియర్ ప్రతి ఇష్టఫలమును $(-\pi, +\pi)$ అంతరములో ఈ విధమగు పరంపరగా మార్చవచ్చునని మొట్టమొదట చెప్పెను. కాబట్టి ఈ పరంపరకు అతని పేరు పెట్టబడినది.

18 వ శతాబ్దమధ్యలో కంపించు త్రాళ్ల చలన విషయ విమర్శకుగాను, ఒక దత్త ఫలము $f(x)$ ను పరంపర రూపమున వ్రాయుటకు ఆవశ్యకత కలిగెను. ఈ సంబంధమున అంతరీకరణ సమీకరణము $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ సాధింపవలసియుండెను. ప్రప్రథమమున దీనిని సాధించుటకుగాను డిలాంబర్ట్, ఆయ్లర్, బెర్నూలి ప్రయత్నపడిరి. మొదటి ఇద్దరు దీనికి సాధనము ప్రసిద్ధమగు $y = \phi_1(x+at) + \phi_2(x-at)$ రూపములో ఇచ్చిరి.

కాని, బెర్నూలి $y = \sum_r (A_r \sin rx \cos art)$ రూపములో ఇచ్చెను. దీనికి వ్యాపకత్వము ఎక్కువయని బెర్నూలి వాదించెను. అట్లయిన, ప్రతిఫలమును ఈ విధముగ ఒక అనంత పరంపరగా వ్రాయుటకు వీలు కావలయుననియు, జీవల యొక్క ఫలములు, ఆవర్తన ఫలములు బేసిఫలములు అగుటచే ప్రతిఫలమును ఇట్లు వ్యాకోచము చేయుటకు వీలులేదని ఆయ్‌లర్ వాదించెను.

ఆ సమయములో లాగ్రాంజ్ కంపించు త్రాడు అనంత సంఖ్య కణముల సమూహామని తలంచి $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ యొక్క సాధనము ఫోరియర్ పరంపర రూపములో నుండవచ్చునని చూపించెను.

కాని ఫోరియర్ దీనినంతను క్రోడీకరించి శాస్త్ర సమ్మతముగ ఒక గ్రంథమును ప్రచురించెను. కాని నిశిత ఉపపత్తులు 1839 లో డిరిష్లేచే ప్రతిపాదింపబడి ఫోరియర్ పరంపర వాదము విజ్ఞాన శాఖలో ఒక ముఖ్య భాగమయ్యెను.

గుణకముల విలువలు: $(-\pi, \pi)$ అంతరములో త్రికోణ మితీయ పరంపర

$$\tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

ఏకరూప ఉపసరణతకలదై $f(x)$ చే గుర్తింపబడనిమ్ము.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx \begin{cases} = 0, & (m \neq n) \\ = 1, & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \begin{cases} = 0, & (m \neq n) \\ = 1, & (m = 1) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi$$ ఫలితములను ఉపయోగించి,

$f(x) = \tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$ ను $\cos nx$ చే లేదా $\sin x$ చే గుణించి, ప్రతి పదమును చయనీకరణము చేసిన

$$\pi c_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx;$$

$$\pi d_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$$ లభించును.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$ పరంపర ఉపసరణత కలదైనను, ఫోరియర్ పరంపర కాదని లెబెగ్ నిరూపించెను.

ఫోరియర్ సిద్ధాంతము: డిరిష్లె ప్రతిపాదన యందలి నియమము (i) $-\pi < t < \pi$ విలువలకు, $f(t)$ ఇష్టప్రకారముగాను, t యొక్క ఇతరవిలువలకు $f(t + 2\pi) = f(t)$ చేతను నిర్వచింపబడనిమ్ము.

(ii) $\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt$ యొక్క విలువ కలదు. ఆ ఫలము ప్రకేవల ఉపసరణతను పొందియుండనిమ్ము.

(iii) n యొక్క అన్ని విలువలకు a_n, b_n యొక్క విలువలు క్రింది సమీకరణములు ఇచ్చును.

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt;$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

(iv) (a, b) అంతరములో x ఒక బిందువైనపుడు (a, b) మధ్య $f(t)$ యొక్క విలువ పరిమిత చలనీమ కలదై యుండిన,

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ఉపసరణతకలది. దాని విలువ $\tfrac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$. $t = x$ వద్ద $f(t)$ అవిచ్ఛిన్నతగలదై యుండిన దీని విలువ $f(x)$. ఈ పరంపరను $f(t)$ ఫలమునకు సంబంధించిన పరంపరయని చెప్పవచ్చును. అవధులు $-\pi$, $+\pi$ కంటె వేరైనప్పుడు కూడ, ఫోరియర్ పరంపరలను కనుగొనవచ్చును.

$a \leq x \leq b$ అయినపుడు

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du + \frac{2}{b-a} \sum_1^{\infty} \int_c^b f(u) \cos \frac{2n\pi}{b-a} \times (u - x)\, du.$$

19 వ శతాబ్దిలో ఒక ఫలము $f(x)$ ఫోరియర్ పరంపరగా విస్తరించుటకు ఆవశ్యకమగు నట్టియు, పర్యాప్తమగు నట్టియు నియమముల విషయమై ఎక్కువ పరిశోధన జరిగెను. అందు ఒక ముఖ్య విషయమును రీమాన్ కనుగొనెను. అది ఏదన, చలరాశి యొక్క ఇష్ట విలువయందు ఫోరియర్ పరంపర ఉపసరణత కలిగి యుండవలయుననిన, ఆ విలువకు పరిసరములో ఆ ఫలము యొక్క నడతపై ఆధారపడియున్నదని ఆతడు చూపెను. దీనికిగాను $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ యొక్క విలువలు $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు శూన్యము అగును అని

చూపుటయే. ఇచ్చట $f(x)$ సీమిత చయనీయఫలము $f(x)$ ఉపసరణతను చెందుటకు రీమాన్ యొక్క ఆవశ్యక మగునట్టియు పర్యాప్తమగునట్టియు నియమముల గురించిన సమస్య ఇదివరలో సాధింపబడలేదు. ఈ సంబంధమగు పరిశోధన వలన రీమాన్, ప్రఖ్యాతి చెందిన రీమాన్ - చయన సిద్ధాంతమును కనుగొనెను.

ఫోరియర్ పరంపర అద్వితీయమా? అనగా గుణకము లన్నియు శూన్యము కాని ఒక ఫోరియర్ పరంపర ఒక దత్త అంతరాళములో అన్నిచోట్లను శూన్యమైన విలువ కలదిగా నుండునా? ఈ సమస్య మూలముగ కాంటార్ సమితి వాదమును క్రాంత పరిమిత సంఖ్యల గురించియు నూతన విషయములను ప్రతిపాదించెను.

ఏకరూప ఉపసరణత గల ప్రతి పరంపరను పదము వెంబడి పదమును చయనీకరణము చేయవచ్చునని ప్రతిపాదింపబడినను, ఒక ఫోరియర్ పరంపరకు ఉపసరణ లక్షణము లేకుండినను, దానిని పదము వెంబడి పదము ప్రకారము చయనీకరణము చేయవచ్చును, అని మరియొక ముఖ్యవిషయము కనిపెట్టబడినది.

$f(x)$ ఫలమునకు రీమాన్ చయనీకరణము చేయుటకు వీలయినచో దానికి లెబేగ్ చయనీకరణము కలదు. లెబేగ్ చయనీకరణముండిన, రీమాన్ చయనీకరణము ఆ ఫలమునకు లేకుండవచ్చును. రీమాన్ చయనీకరమునకు బదులు లెబేగ్ చయనీకరణమును వాడుటవలన ఫోరియర్ పరంపర వాదము మరింత పురోగమనమును పొందెను.

జీవ లేదా కో. జీవపరంపరలు : $(0, l)$ అంతరములో $f(x)$ నిర్వచింపబడనిమ్ము. దాని చయనము పరిమితినిరపేక్ష ఉపసరణత కలదిగా నుండనిమ్ము. అంతరములో అది పరిమిత చలసీమకలదై యుండనిమ్ము. మరియు అంతరము $(0, -l)$ లో $f(-x) = f(x)$ అని నిర్వచింపబడనిమ్ము.

అపుడు $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 +$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$$

ఇందు $l a_n = \int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt =$

$$2\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt$$

అటులనే, $l b_n = \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt = 0$

$-l \leq x \leq l$ అంతరములో

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{a_0}{2} + \Sigma a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

దీనికి కోటిజీవ (కోసైన్ సీరీస్) పరంపరయని పేరు.

కాని $(0, -l)$ అంతరములో $f(x)$ యొక్క నిర్వచనము $f(-x) = -f(-x)$ అయిన అంతరము $-l \leq x \leq l$ లో

$$\frac{1}{2}f(x+0)-f(x-0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

దీనిని జీవ పరంపర (సైన్ సీరీస్) యని చెప్పుదురు.

$0 \leq x \leq l$ లో జీవ పరంపర యొక్క సంకలనరాశి కో. జీ. పరంపర యొక్క సంకలనరాశికి సమానము.

కాబట్టి $-l \leq x \leq 0$ లో అవి రెండును వ్యతిరేక సంజ్ఞలు కలవై యుండును

ఉదా : (i) $f(x) = x$, (x యొక్క ఫోరియర్ పరంపర)

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right\}$$

$0 \leq x \leq \pi$. దీనిలో $x = 0$ అయిన

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \ldots$$

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ అయినచో

$$\frac{1}{2}(\pi - x)\sin x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{1.3}\cos 2x + \frac{1}{2.4}\cos 3x \ldots \ldots$$

(చూ. ఫోరియర్) డి. ఆర్. కె. స.

బక్షాలి లిఖితపత్రము : ఈ ప్రసిద్ధ శిథిల భూర్జపత్ర లిఖితము 1881లో పెషావర్ వద్ద బక్షాలి అను గ్రామములో దొరికినది. 1912లో భారత ప్రభుత్వము దానిని ఛాయాపటగృహీతపత్రప్రతికములతోను, ఇంగ్లీషు లిపిలో పొందుపరుపబడిన దాని అక్షరానువాదముతోను జి. ఆర్. కేయీ అనువాని ఉపోద్ఘాతముతోను ప్రచురించిరి. 1929లో డాక్టర్. బి. బి. దత్త ఈ లిఖిత ప్రతియందు కన్పట్టు గణిత విషయములను గురించి ఒక వ్యాసము ప్రచురించెను. ఈ ప్రతికి ముఖపత్రములు పష్టమైనది. అందుచేత ఇది ప్రస్తుతము అది దొరకిన గ్రామనామము చేతనే బక్షాలి పత్రమని వ్యవహరింపబడుచున్నది.

దీని రచనాకాల మింకను వివాద విషయమే. రుడోల్ఫ్ హెర్నల్ దీని కాలము (క్రీ. శ.) 3వ లేదా 4 వ శతాబ్దమనియు, జి. ఆర్. కేయీ చాల తరువాతిదియనియు అభిప్రాయపడిరి. డాక్టర్. దత్త ఇది క్రీస్తుశక ప్రథమ శతాబ్దమునాటిదని అభిప్రాయ పడెను.

ఈ పత్రమందు మొదట సూత్రము, తరువాత ఉదాహరణము, అటు తరువాత న్యాసము లేదా స్థాపన, లేదా న్యాస స్థాపన (అనగా అంకెలతో వివరణము), ఆ తరువాత కరణము (వివరములలో కూడిన విధానము), అటు పిమ్మట ప్రత్యయము — ఈ పరిపాటిగానీయ బడినవి. ఈ పత్రము అంకగణిత, బీజగణిత, క్షేత్రగణిత (జ్యామితి) విషయములను చర్చించును. కాని అందు అధిక భాగము అంకగణితమునకే వినియుక్తమైనది. భిన్నాంకములు, వర్గ మూలములు, అంకశ్రేఢి, గుణోత్తరశ్రేఢి, ఆయవ్యయములు, లాభ నష్టములు, స్వర్ణగణితము, వృద్ధి, త్రైరాశికము, సంకీర్ణ పరంపరల సంకలనము, సరళద్వివర్ణ వర్గ సమీకరణములు, రెండవ తరగతి అనిశ్చిత సమీకరణములు, క్షేత్రమాపనము, ప్రకీర్ణ సమస్యలు అందు వివరింపబడినవి.

ఈ పత్రము వర్గము కాని సంఖ్యకు శిష్ట, లేదా, ఆసన్న మూలమును కనుగొనుటకు ఒక సమాసము ఇచ్చినది. అది

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left[\dfrac{r}{2a}\right]^2}{2\left[a + \dfrac{r}{2a}\right]}$$

దీని సంగ్రహ సులభతర రూపము $A = a + \frac{r}{2a}$. ఇది ఆర్యభటునిచే, బ్రహ్మగుప్తునిచే ఈయబడినది, భారతీయ గణితమందు ప్రాయికముగ వాడబడుచున్నది.

సరళ మార్గమునననుసరించని పరంపరలను గురించిన సమస్యలనేకము లిందుగలవు.

ఉదా : $T_1 + 2T_1 + 3T_2 + 4T_3$

$$T_1 + 2T_1 + 3(T_1 + T_2) + 4(T_1 + T_2 + T_3) + \ldots \ldots$$

$$\left[x + \frac{3}{2}x\right] + \left[2T_1 + \frac{5}{2}x\right] + \left[3T_1 + \frac{7}{2}x\right] + \ldots \ldots$$

$$\left[x \pm \frac{3}{2}x\right] + \left[2T_1 \pm \frac{5}{2}x\right] + \left\{3(T_1 + T_2) \pm \frac{7}{2}x\right\} + \left\{4(T_1 + T_2 + T_3) \pm \frac{9}{2}x\right\} + \ldots \ldots$$

గుణోత్తర - అంకశ్రేఢి దృష్టాంతములుకూడ అందు కలవు.

ఉదా : $a + (ar + ad) + \{ar^2 + d(a + ar)\} + \{ar^3 + d(a + ar + ar^2)\} + \ldots \ldots$

పరంపరల - ప్రధానముగా సంకలన శ్రేఢుల - అంశములు కనుగొనుటకు ప్రశ్నలు కూడ ఈ పత్రములో కలవు. వాటిలో ఒకదాని యందు ఆవృత్తి భిన్నాంక రూపమున, మరొకదానియందు కరణ సంఖ్య రూపమున నున్నది. మహావీరుడు, నారాయణ పండితుడు తమ గ్రంథములలో ప్రదర్శించిన భిన్నాంకీయ ఋణాత్మకావృత్తులు గల పరంపరలు బక్షాలీ పత్రానుకరణములే కావచ్చును. గుణోత్తర శ్రేఢులు (జామిట్రిక్ ప్రోగ్రెషన్) సరళములై క్రింది రూపమునను న్నవి.

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \ldots$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots \ldots$$

ఇతర భారతీయ గణిత రచనలయందు కానరాని విషయములు అనగా సాంకేతిక నిరూపణ మొదలగునవి ఇందు కనబడును. ఉదా : వేరు వేరు అంకగణిత పరికర్మలను సూచించుటకు 'యూ' సంకలన చిహ్నముగను, 'భా' భాగ హార చిహ్నముగను, 'గు' గుణకార చిహ్నముగను వాడబడినవి. వ్యవకలనమునకు వజ్ర చిహ్నము గ్రహించబడెను. వర్గమూలమునకు మూ(మూల) సూచింపబడినది ; ఇందుకు ఇతర భారతీయ గణిత గ్రంథకర్తలు క(కరణ)ను వాడిరి. పరంపరకు 'శ్రేఢి' కి బదులు 'వర్గము' అను మాట వాడబడెను. సదృశీకరణము, లేదా, హారసామ్యకరణము అను పదములు ఇతర గ్రంథములలో వాడబడిన కలాస వర్ణనమునకు బదులుగ ఉపయోగింపబడినవి. వృద్ధి గణనకై వాడుకలోనున్న సూత్రమునకు ఇతర గ్రంథములలోలేని 'హుండికా సమానయన సూత్రము' అను మాట వాడబడినది, ఇట్లే పరంపరకు 'పాళి', వాయిదాకు 'ధాంతము', అసలునకు 'ప్రకృతి' నూతనముగ ప్రయోగింపబడినవి.

ఈ పరిభాషా పదముల భిన్నత్వమును, భారత దేశపు పశ్చిమోత్తర ప్రాంతమున జరిగిన యీ పత్రము యొక్క ఆవిష్కరణను ఆధారములుగాగొని పాశ్చాత్య పండితులు కొంతమంది ఈ పత్రమందలి విషయములపై వైదేశిక గణిత జ్ఞాన ప్రభావము కలదని ఊహించిరి కాని డాక్టర్ దత్త యీ సూచనను కంఠోక్తిగ నిరాకరించెను(చూ. నారాయణ పండితుడు : పు. 342; మహావీరుడు). సరస్వతి

బరువు : భూమిపైనున్న అన్ని వస్తువులకు బరువున్నది. ఈ బరువునకు కారణము భూమి యొక్క ఆకర్షణమే. ఆ వస్తువు ద్రవ్యరాశి m అనియు భూమియొక్క ద్రవ్యరాశి M అనియు ఉన్నచో, న్యూటన్ గురుత్వా

కర్షణ సూత్ర ప్రకారము, వాటి మధ్యనున్న ఆకర్షణ బలము (అనగా ఆ వస్తువు బరువు) $w = \frac{\gamma m M}{r^2}$ ఇచ్చట γ ఒక స్థిరరాశి; r అనునది భూకేంద్రమునకును, వస్తువునకును ఉన్న దూరము. కనుక భూమియొక్క ఉత్తర దక్షిణ ధృవబిందువులందు ఒక వస్తువుయొక్క బరువు భూమధ్యరేఖపై నుంచిన అదే వస్తువు బరువుకన్న ఎక్కువ. ఏలన r ధృవబిందువులందున్నప్పుడు సుమారు 41·84 కి. మీ. (26 మైళ్లు) తగ్గుచున్నది.

పై ఉదాహరణమునుండి, ఒక వస్తువు బరువు ఆ వస్తువుయొక్క సొంత గుణము కాదు. ఆ వస్తువునకును భూమికిని ఉన్న సంబంధము. చంద్రునియొక్క ద్రవ్యరాశి భూద్రవ్యరాశికన్న చాలా తక్కువ. కనుక చంద్రమండలమందు ఒక్కొక వస్తువు భూమిపై నున్నంత బరువు ఉండదు. చంద్రుడు, భూమి, గ్రహములు, నక్షత్రములు అన్నిటికంటె అతి దూరముగా ఒక వస్తువును తీసికొనిపోయినచో దానికి బరువే ఉండదు. అయితే ఒక వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి ఆ వస్తువుయొక్క ఆత్మ (సొంత) గుణము. కనుక అది ఎచ్చటను మారదు. ద్రవ్యరాశికిని, బరువునకును గుర్తించవలసిన ముఖ్య వ్యత్యాసమిది.

భూమధ్యరేఖపై ఒక పౌండు బరువుగల వస్తువుయొక్క ద్రవ్యరాశికి ఒక స్లగ్ అని ఇంజినీరింగ్ శాస్త్రములో వాడెదరు.

బరువును, ద్రవ్యరాశియును వేరు భావములైనను, నిర్దిష్ట స్థలమునందు అవి అనురూపములుగ నుండును. ఏలన m_1, m_2 రెండు ద్రవ్యరాశులును, w_1, w_2 వాటి బరువులైనచో

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\gamma m_1 M}{r^2} \div \frac{\gamma m_2 M}{r^2} = \frac{m_1}{m_2}$$

ఒకే స్థలము కావున r విలువ ఒకటే.

కనుక త్రాసు నుపయోగించి రెండు వస్తువుల ద్రవ్యరాశుల నిష్పత్తిని కనుగొనవచ్చును. ఆ. స.

బలము (ఫోర్స్): యాంత్రికశాస్త్ర ముఖ్య భావములలో ఇది ఒక్కటి. ఒక వస్తువుయొక్క విశ్రాంతి స్థితిలోగాని, ఏకరూప చలనములోగాని మార్పును కలుగ చేయునది బలము. ఒక స్థిరమైన వస్తువును జరుపుటకు మనము మన చేతులతో ఆ వస్తువుపై బలమును ప్రయోగించెదము. ఇట్లు మనము ప్రయోగించు బలమునకు ఒక దిక్కు, కొంత పరిమాణము, ఒక ప్రయోగ స్థలము ఉన్నవి. ఒక వస్తువును పైకి లేపునప్పుడు దాని బరువునకు సమానమైన బలమునో, లేదా అధిక బలమునో ప్రయోగించెదము. ఒక వస్తువుకు త్రాడును కట్టి ఈడ్చునప్పుడు త్రాడు కట్టిన స్థలములో ఆ వస్తువుమీద బలమును ప్రయోగించెదము. ఈ బలముయొక్క దిక్కు త్రాడు దిక్కే అగును.

పరస్పర స్పర్శముగల రెండు వస్తువులు ఒక దానిపై మరియొకటి ఆ స్పర్శ స్థానమందు బలమును ప్రయోగించును. న్యూటన్ మూడవ గతి నియమము పరస్పర ప్రయుక్త బలములను గురించి క్రింది విధముగ చెప్పుచున్నది. 'A అను ఒక వస్తువు, B అను మరొక వస్తువు మీద కొంత బలమును ప్రయోగించినట్లైన B వస్తువు A మీద అదే పరిమాణముగల బలమును ఎదురు దిక్కులో ప్రయోగించును' అనగా 'ఏ క్రియకైనను సమానమును, విరుద్ధ దిక్కును గల ప్రతిక్రియ ఉండును.' సాధారణముగ వస్తువులు ఒక దానిపై ఒకటి ప్రయోగించు బలములు స్పర్శము వలన కలుగునవియే.

బలముయొక్క ఆఘాతము: న్యూటన్ రెండవ గతి నియమము ప్రకారము 'బలము' అను భావము ఒక వస్తువుయొక్క గతిభారమందలి మార్పుయొక్క రేటు అగును. ఒక బలము Fను t కాలము ఏదైనా ఒక కణముపై ప్రయోగించినచో, ఆ కణములో కలిగిన గతిభారములో మార్పునకు ఆఘాతము అని పేరు.

కొన్ని సమయములలో అపార పరిమాణముగల బలమును అత్యల్పకాలము ఒక వస్తువుపై ప్రయోగించబడును. అపుడు ఆ వస్తువులో కలిగిన గతిభారపు మార్పే ఆఘాత పరిమాణమును గుర్తించును. ఫుట్బాల్‌ను తన్నినపుడు దానిలో కలిగిన గతిభారపు మార్పు తన్నునపుడు ఏర్పడు ఆఘాతమును గుర్తించును.

బల యూనిట్: ఒక యూనిట్ ద్రవ్యరాశిలో ఒక యూనిట్ త్వరణమును కలిగించు బలమును బలయూనిట్ అందురు. సెంటీమీటర్-గ్రామ్-సెకను (మెట్రిక్) విధానములో ఒక డైన్ బలయూనిట్‌గా తీసికొనబడినది. ఒక గ్రాము ద్రవ్యరాశిపై 1 సెకను కాలము పనిచేసి దాని వేగమును సెకనుకు 1 సెంటీమీటరు చొ॥న వృద్ధిచేయు బలమును ఒక డైన్ అందురు.

అడుగు-పౌండు-సెకను (బ్రిటిష్) విధానములో ఒక పౌండల్ బలయూనిట్‌గా తీసికొనబడినది. ఒక పౌండు ద్రవ్యరాశిపై 1 సెకను కాలము పనిచేసి దాని వేగమును సెకనుకు 1 అడుగు చొ॥న వృద్ధిచేయు బలమును పౌండల్ అందురు. ఒక పౌండు భారము 32 పౌండల్‌లకు సమానము.

బలములను తీగ త్రాసు (స్ప్రింగ్ బాలన్స్)తో కొలువవచ్చును. పా. ల. నా.

బహుతలకములు : బహుభుజముఖములచే సీమితమైన ఘనవస్తువును బహుతలకమందుము. ఒక ఆయతనమును ఆవరించుటకు అట్టి తలములు నాలుగైనను కావలెను. బహుతలకమునకు నాలుగే ముఖములు ఉన్నచో అవన్నియు త్రిభుజములుగనే యుండును. అట్టిచో దానిని చతుస్తలకమందుము. దీనిని త్రిభుజాధారముపై నమర్చిన పిరమిడ్‌గా కూడ పరిగణించవచ్చును. బహుతలకపు సీమా ముఖములు అంచులను పేరు గల ఋజురేఖలలో పరస్పరము కలిసికొనును. అంచుల చివరలను **మూలల**ని గాని శీర్షములనిగాని యందురు. ఒక బహుతలకమునకు V శీర్షములు, E అంచులు, F ముఖములును ఉన్నచో ఈ V, E, F ల మధ్య విశేషమైన సంబంధమొకటి కలదు. లంగరు వలయమునకున్నట్లు రంధ్ర మొకటి దాని యందు లేకున్నచో ఆ బహుతలకము ఏ ఆకృతిని స్వీకరించినను ఆ సంబంధము అన్వయించును (చూ. టొపాలజీ - పు. 292). ఆ సంబంధమిది :

$$V - E + F = 2 \qquad \ldots (1)$$

బహుతలకపు ముఖములన్నియు క్రమ విశిష్టములగు బహుభుజము (అనగా సమాన భుజములు, సమాన కోణములుగల బహుభుజము) లగుచో ఆ బహుతలకమును క్రమయుక్త బహుతలకమందురు.

మొదట ఒక తలములోని క్రమబహుభుజములను గమనించెదము. సరళతమ బహుభుజము సమభుజ త్రిభుజము, దాని తరువాత నాలుగు భుజములు కలది చతురస్రము. 5, 6, 7...n భుజములు గల క్రమ బహుభుజములు గలవు (ఇచ్చట n ఏ పూర్ణాంక మూల్యమునైన స్వీకరించవచ్చును). అందువలన క్రమ బహుతలకము యొక్క ముఖము లన్నియు క్రమ త్రిభుజములైనను, చతురస్రములైనను, క్రమ పంచభుజులైనను, ఇట్లు ఏ క్రమ విశిష్ట బహుభుజమైనను కావచ్చును. ఒక తలమునందు క్రమ విశిష్ట బహుభుజ అనంత సంఖ్యా సమూహము. కాని, ఆకాశమునందు క్రమబహుతలకముల మొత్తపు సంఖ్య అయిదే అనునది యొక విచిత్ర విషయము. ఈ విషయమును గ్రీకులు కనిపెట్టిరి. ఇది యూక్లిడ్ 12 వ పుస్తకములో చర్చించబడినది.

ఇప్పుడు మనము క్రమ బహుతలకములు అయిదే ఎందుకుండవలెనో విచారింతము.

పంచక్రమ బహుతలకములు : ఒక బహుతలకము n ముఖములు గల క్రమ బహుభుజములచే సీమితమైయున్నదనుకొందము. ఈ ఘనవస్తువు ప్రతిమూలయందును m బహుభుజములు కలిసికొని యున్నవనుకొందము. అట్టి మూలలు V ఉన్నవని కూడ తలంతుము. ఈ వస్తువుకు V మూలలున్నవి. ఒక్కొక్క మూలయందును m ముఖములు కలుసుకొనుచున్నవి. కనుక ఆ బహుతలకము యొక్క ముఖముల మొత్తపు సంఖ్య mV అనవచ్చును. కాని ఇట్లు లెక్కపెట్టుటలో ఒక్కొక్క ముఖమునకు ఎన్ని మూలలున్నవో అన్నిసారులు (అనగా n సారులు) ఆ ముఖము మరల మరల లెక్కపెట్టితిమి. అందుచే $mV = nF$. తలకమునకు E అంచులు గలవు. ప్రతి అంచున 2 ముఖములు కలిసికొనును. అందువలన ముఖముల సంఖ్య 2 E అనవచ్చును. కాని ఇట్లు లెక్కపెట్టుటలో ఒక ముఖమున కెన్ని భుజములున్నవో అన్నిసారులు (అనగా n సారులు) ప్రతి ముఖమును లెక్కపెట్టితిమి. అందుచే $2E = nF$. ఇప్పుడు

$$mV = 2E = nF \qquad \ldots (2)$$

(1) (2) సంబంధములనుపయోగించి

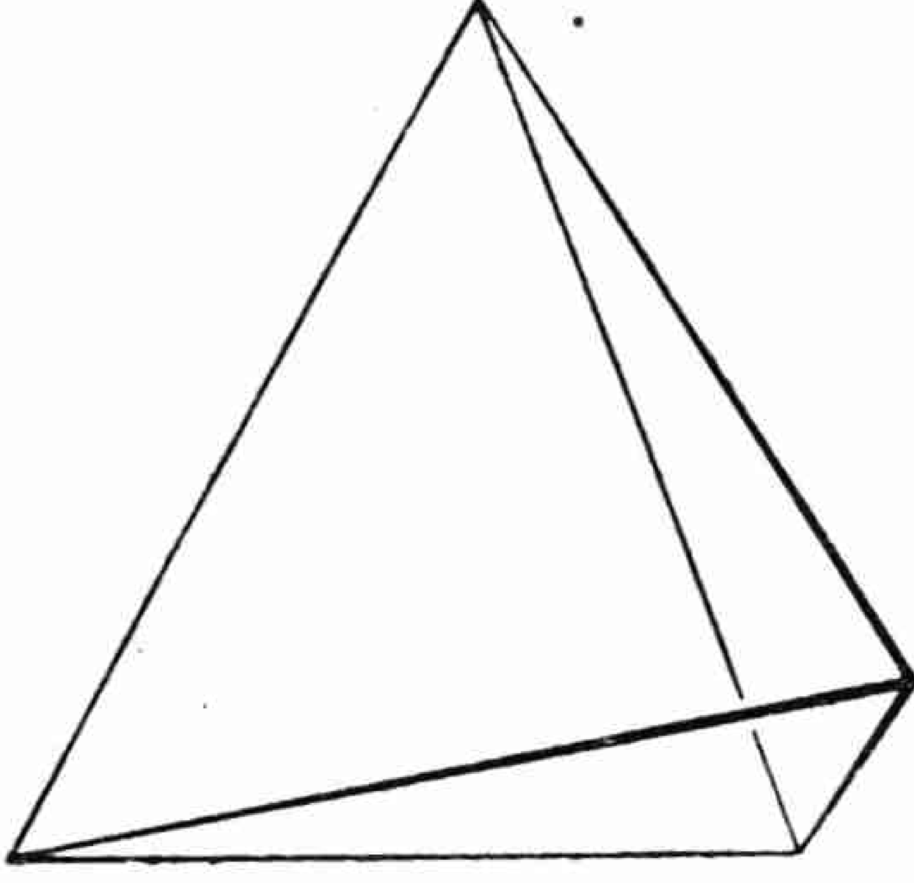
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E} \qquad \ldots (3)$$

అను నూతన సంబంధ మొకటి లభ్యమగును. ఇప్పుడు (3)వ సంబంధమును సార్థకముచేయు ధనాత్మక పూర్ణాంకములను m, n, E లకు కనుగొనవలయును. ఈ సంబంధమును తృప్తిపరచు అయిదే విధములున్నవని సులభముగా చూడవచ్చును. ఈ క్రింది పట్టిక ఈ అయిదు విధముల ప్రకారము m, n, V, E, F ల మూల్యముల కనపరచుచున్నది.

m	n	V	E	F	బహుతలక నామము
3	3	4	6	4	చతుస్తలకము.
3	4	8	12	6	ఘనము (షష్ఠ తలకము)
4	3	6	12	8	అష్ట తలకము.
3	5	20	30	12	ద్వాదశ తలకము.
5	3	12	30	20	వింశతి తలకము.

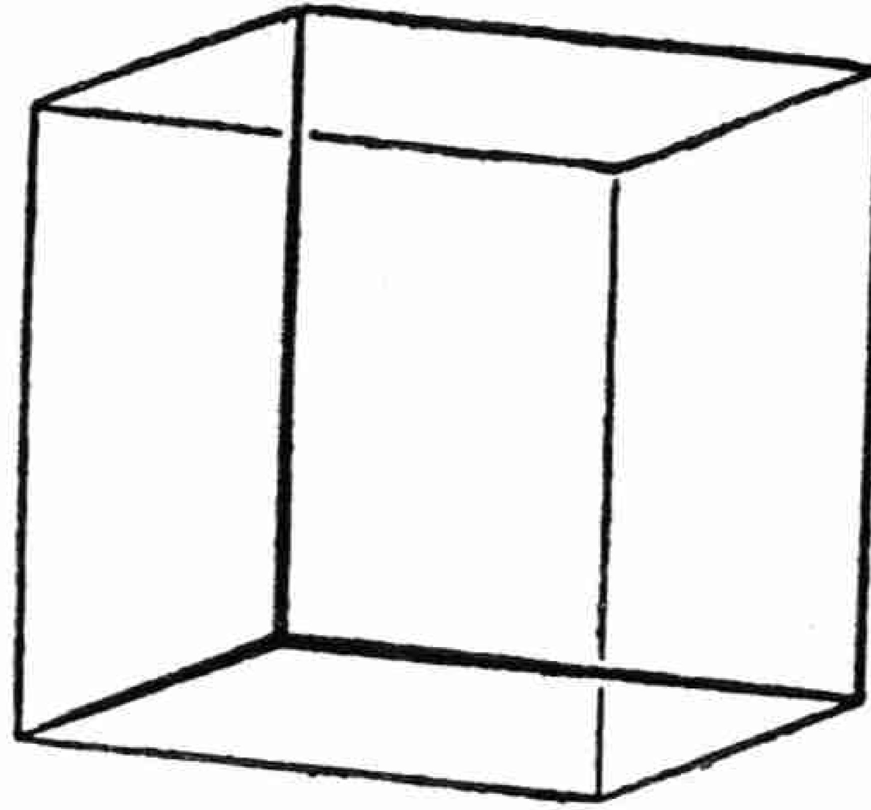
పై పట్టికను పరిశీలించితిమేని త్రిభుజాకృతి ముఖములుగల మూడు రూపములును, చతురస్ర ముఖములు గల ఒక రూపము (ఘనము)ను, పంచభుజ ముఖములు గల ఒక రూపమును ఉన్నవి. క్రమ షష్ట భుజముఖములు గల బహుతలకము అసంభవము ; ఏలన మూడు ముఖము

లైనను, ఒక మూలయందు కలిసికొని యుండవలెను. ఒక మూలయందు కలిసికొను బహుభుజుల కోణముల



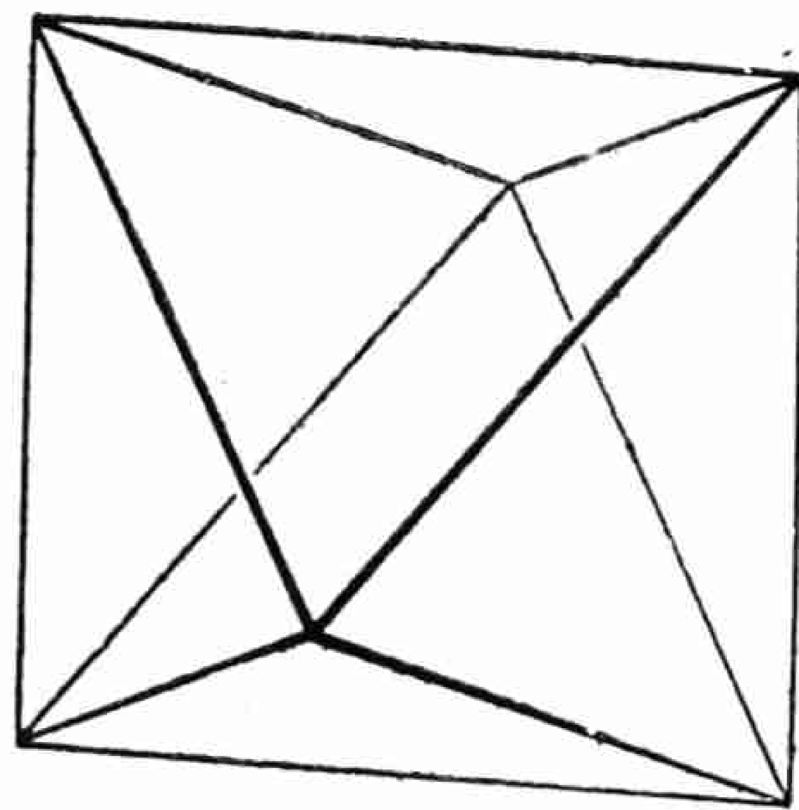
చతుస్తలకము చిత్రము 289

మొత్తము 2 లంబకోణములకు తక్కువగా నుండవలయును. ఇటుల లేనిచో మూల యేదియు సంభవించదు. ఒక మూలను కలిసికొను 3 షష్ఠభుజముల కోణముల మొత్తము $6 \times 60^{\circ} = 360^{\circ}$ అగును. ఈ కారణము చేతనే 4 చతురస్రములు ఒక మూల కలిసికొనలేవు. అంతేకాదు, 5 త్రిభుజీయ ముఖములకన్న ఎక్కువ సంఖ్య ఒక మూలయందు కలిసికొనజాలవు.



ఘనము లేదా షష్ఠతలకము
చిత్రము 290

బహుతలకములలో ద్వైతభావము: ఈ ఐదు ఘనరూపముల మధ్య ఒక విశేషమైన ద్వైత సంబంధమున్నది. ఒక క్రమ బహుతలకపు ముఖముల కేంద్ర బిందువుల సమూహాము ఇంకొక క్రమ బహు తలకము యొక్క శీర్షము లగును. ఉదాహరణమున ఘనము యొక్క ఆరు ముఖముల కేంద్రములను అష్టతలకము యొక్క శీర్షము లగును; అష్టతలకపు ఎనిమిది ముఖముల కేంద్రములను ఒక ఘనము యొక్క ఎనిమిది శీర్షములగును. అనగా అష్టతలకమునకును, ఘనమునకును అన్యోన్య ద్వైత సంబంధము కలదు.

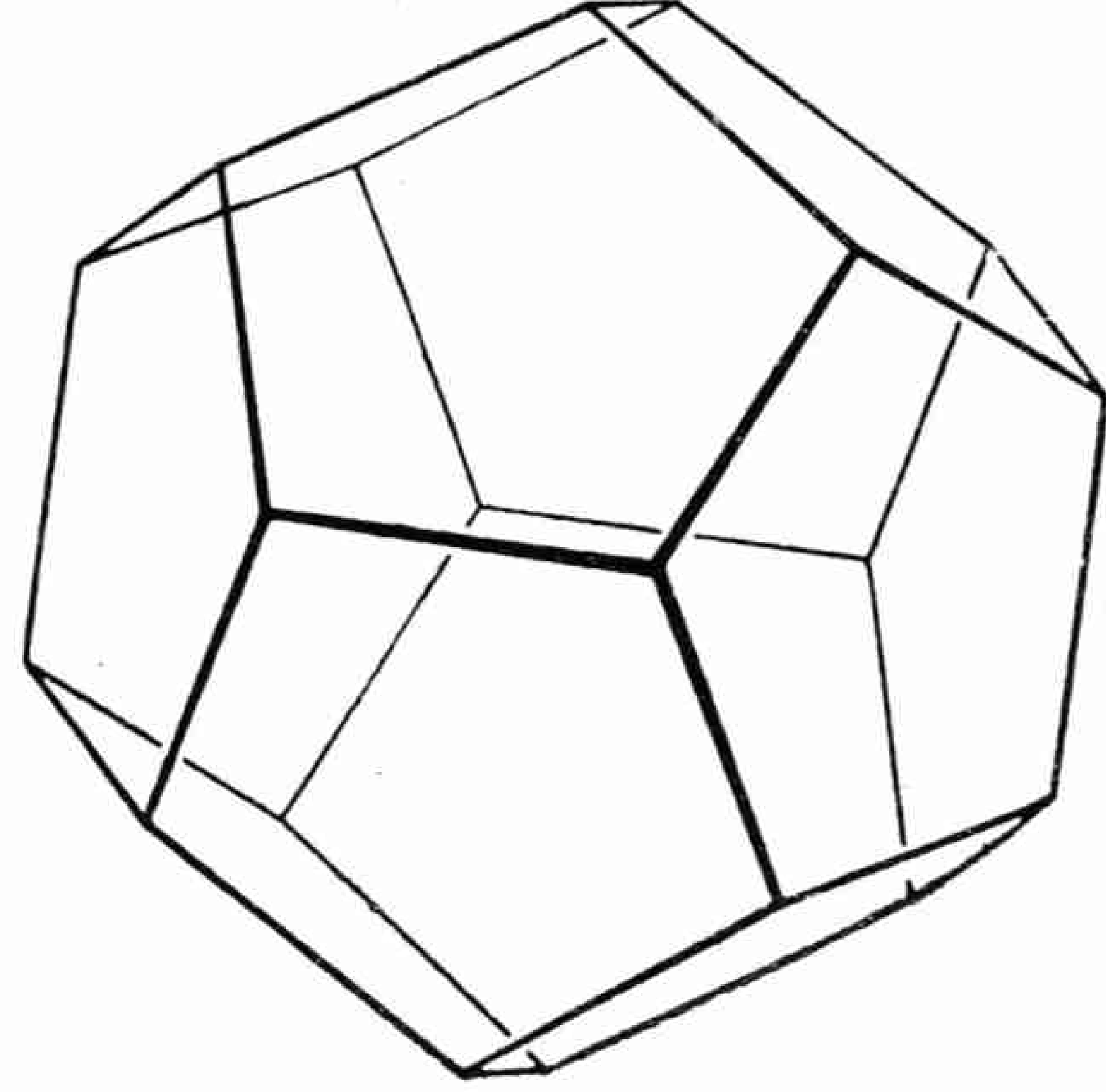


అష్టతలకము చిత్రము 291

ఘనము యొక్క శీర్ష సంఖ్య = అష్టతలకపు ముఖసంఖ్య = 8

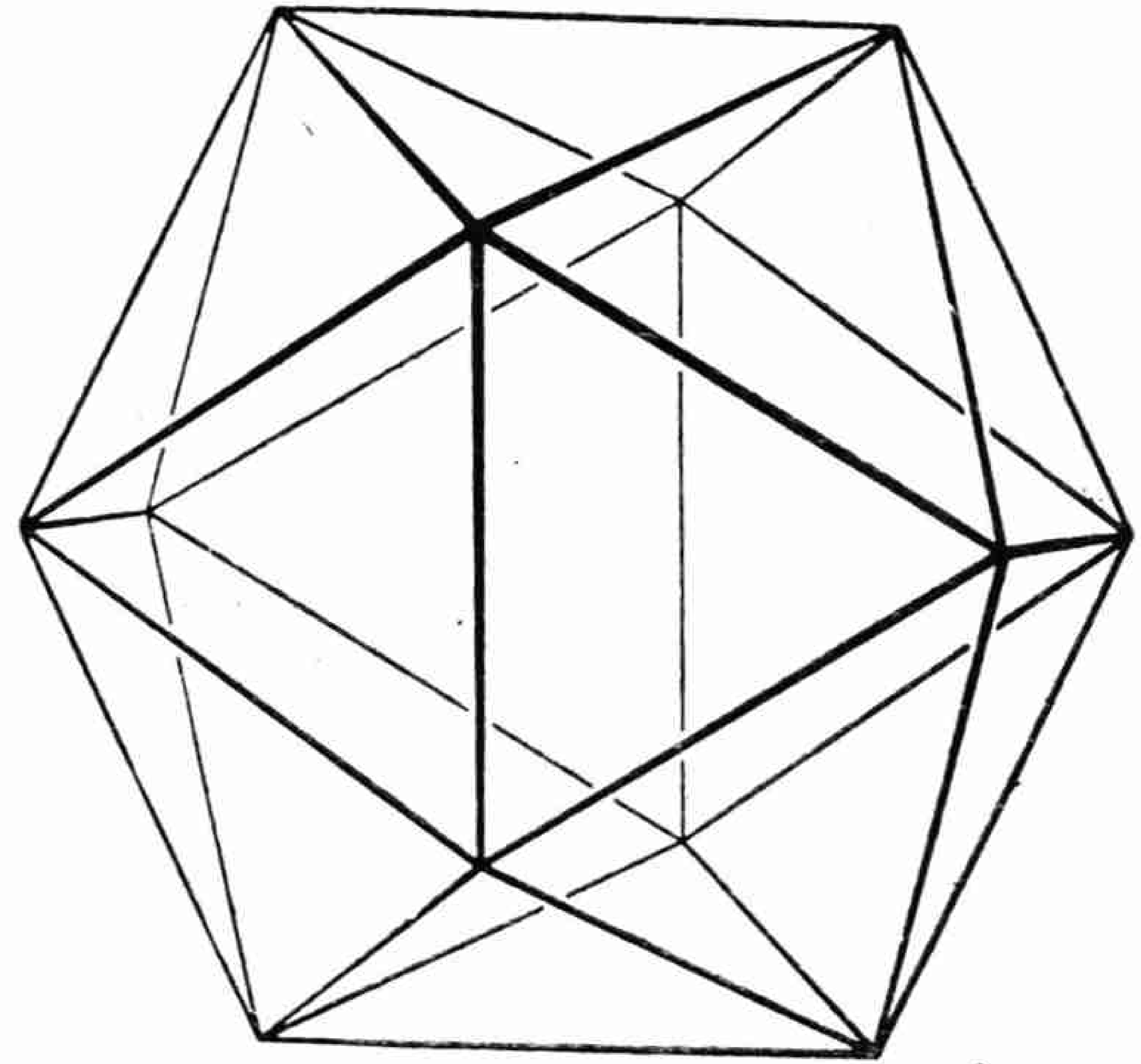
ఘనముఖ సంఖ్య = అష్టతలకపు శీర్ష సంఖ్య = 6

ఘనము యొక్క అంచుల సంఖ్య = అష్టతలకపు అంచుల సంఖ్య = 12.



ద్వాదశతలకము చిత్రము 292

ఇట్లే 12 ముఖములు, 20 శీర్షములు గల ద్వాదశతలకమునకును, 12 శీర్షములు, 20 ముఖములు గల వింశతి



వింశతితలకము చిత్రము 293

తలకమునకును ఇట్టి ద్వైత సంబంధమున్నది. ఈ రెండిటికిని 30 అంచులున్నవి.

నాలుగు ముఖములు గల చతుస్తలకమునకు అదియే ద్వైత రూపము.

బహుతలకపు కూర్పులు: ఒక క్రమ బహుతలకపు శీర్షములన్నియు ఒక గోళతలమునందే ఉండును. ఈ శీర్షములవద్ద ఈ గోళమునకు రచించబడిన స్పర్శతలములు

దీని ద్వైత రూపతలకమును నిర్మించును. గోళ కేంద్రమే బహుతలక కేంద్రము.

ఒక క్రమ బహుతలకముయొక్క కేంద్రము O ను ఆ బహుతలకముయొక్క ఒక శీర్షము A ను చేర్చు రేఖ OA. ఆ తలకమును చుట్టు తిప్పితిమి అనుకొందము. ఈ శీర్షము దీనికి ఎదురున ఉన్న శీర్షము (అటుల శీర్షమున్నచో) స్థిరములుగనే యుండును. (భ్రమణ కోణ మును తగునట్లు తీసికొంటిమేని, తక్కిన శీర్షములన్నియు వాటి స్థానములను పరస్పరము వినిమయించు కొనును. బహుతలకము యావత్తును మునుపటి స్థలములోనే యుండును.

దృష్టాంతమునకు O కేంద్ర బిందువుగాగల ABCD అను చతుస్తలకమును తీసికొని, OA చుట్టు 120° కోణము గుండా త్రిప్పితిమనుకొందము. A స్థిరముగ నుండును. B శీర్షము C ఉన్న స్థలమునకును C శీర్షము A ఉన్న స్థలమునకును, A శీర్షము B ఉన్న స్థలమునకును పోవును. ఈ భ్రమణమునకు A_1 అను సంజ్ఞను ఇత్తము. మరల OA చుట్టు 120° కోణముగుండా భ్రమణము చేసినచో (మొత్తపు భ్రమణ కోణము $= 240^{\circ}$) తుదకు C కి, A ను A కి, B ను B కి, C ను నడపును, ఈ రెండవ భ్రమణమును A_2 అందుము. A_2 అను భ్రమణము A_1 భ్రమణమును రెండుమార్లు అభ్యసించుటవలన లభ్యమైనది. కనుక $A_2 = A_1^2$ అని వ్రాయవచ్చును. OA చుట్టు మూడవ భ్రమణమును మరల 120° కోణముగుండా జరిపించితిమేని (మొత్తపు భ్రమణము 360° గుండా జరిగినది అన్నమాట), ఆ చతుస్తలకముయొక్క ప్రతి శీర్షమును తన స్థానమునే చేరును. కనుక $A_1^3 = I$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట I అను దానికి సర్వసమ పరివర్తనమని పేరు. ఇట్లే B_1 ను $B_2 = B_1^2$ అను భ్రమణములు B శీర్షికగుండా పోవు OB రేఖ చుట్టుకూడ క్రమముగా 120°, 240° కోణముల గుండ జరిపించినచో చతుస్తలకముయొక్క స్థలము మారదు. ఇచ్చట కూడ $B_1^3 = I$; ఇటులనే OC చుట్టును C_1, C_1^2 అను భ్రమణములున్నవి. $C_1^3 = I$ అగును. ఇవియు చతుస్తలకము యొక్క స్థలమును మార్చవు. పైన జెప్పిన 8 భ్రమణములు కాక, ఆ చతుస్తలకము తన స్థలమునకు తిరిగి వచ్చునటువంటి భ్రమణము లింకను గలవు. (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) అను ఎదురెదురుగానున్న అంచుల జంటలు చతుస్తలకమునందు గలవు. ఎదురుగానున్న జంట అంచుల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖ చుట్టు ఆ చతుస్తలక మును 180° గుండ త్రిప్పినచో చతుస్తలకము యొక్క స్థలము మారదు. మాటకు మొదటి జంట AB, CD ని తీసికొందము.

A, B శీర్షములు వాటి స్థానముల మార్చుకొనును దీనితోబాటు C, D శీర్షములుకూడ పరస్పరము మార్చు కొనును. ఈ భ్రమణమును M_1 అందుము. ఇట్లే (AC, BD), (AD, BC) లకు అనుగుణముగ M_2, M_3 భ్రమణములు; ఇప్పుడు $M_1^2 = M_2^2 = M_3^2 = I$ అనునది స్పష్టము. ఈ 12 భ్రమణములు

($A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, M_1, M_2, M_3$, లు I తోబాటు (I చతుస్తలకముయొక్క ఏ శీర్షమును జరపదు) ఆ చతుస్తలకమును స్వస్థితికి గొంపోవు వ్యాపారములు. ఇవి ఒక కూర్పుకు చెందినవి. ఈ భ్రమణములలో నేరెండిటి నైన ఒకదాని తరువాత నింకొకటి ప్రయోగింప కలిగిన శీర్ష పరివర్తనము ఈ కూర్పుకు చెందిన 12 భ్రమణములలో ఒక దానికి సమానమై యుండును. ఇట్లు A_1 తరువాత B_2 ప్రయోగించినచో ABCD శీర్షములు మొదట ACDB స్థితిలోనికిని తరువాత DCBA స్థితిలోనికిని పరివర్తించును. అందుచే నిది M_3 కు సమానము. ఈ చతుస్తలక భ్రమణ కూర్పుయొక్క రచన ABCD అను నాలుగు అక్షరముల సమపరివర్తన యొక్క కూర్పు రచనకు సమానము. (చూ. కూర్పులు - పు. 185,)

ఘనము, అష్టతలకము పరస్పరము ద్వైత రూపములు గనుక, ఈ రెండును ఒకే భ్రమణ కూర్పు కలవి. అందుచే వీటిలో నేయొకదానిని మాత్రము పరామర్శించినజాలును. ఘనమును గ్రహించినచో 4 భ్రమణాక్షములు (అనగా ఎదురుగానున్న శీర్షముల కలుపు నాల్గు రేఖలు) గలవు. వీటిలో ఏ ఒక అక్షము చుట్టు 120° లేదా 240° కోణము ద్వారా భ్రమణము, ఘనమును మొత్తముగా మునుపటి స్థితికి గొంపోవును. ఇటుల 8 భ్రమణములున్నవి. ఎదురుగా నున్న ముఖముల మధ్య బిందువుల కలుపు ఋజు రేఖల చుట్టు 90° లేదా 180° లేదా 270° ల భ్రమణము మరల ఘనమును స్వీయ స్థితికి దార్చును. ఇట్టి రేఖలు 3 ఉన్నవి గనుక 9 భ్రమణము లిట్టివి గలవు. ఎదురుగా నున్న అం చుల మధ్య బిందువుల కలుపురేఖలు ఆరున్నవి. ఈ రేఖ లలో ఎద్దానికి సాపేక్షముగ 180° భ్రమణము మరల ఘనమును తొంటి స్థితికి చేర్చును. ఇది మరల 6 భ్రమణ ముల నిచ్చును. చివరకు సర్వసమ పరివర్తనము (అనగా ఒకొక్క శీర్షమును స్వస్థానమునుండు) 0° భ్రమణము చేర్చి 24 భ్రమణముల కూర్పు మనకు లభ్యమగుచున్నది. క్రమ అష్టతలకమునకును, భ్రమణ కూర్పు ఇదియే. చతు స్తలకపు కూర్పు ఈ కూర్పులోని ఉపకూర్పు. ఇట్లే ద్వాదశ

తలకపు కూర్పుగాని, వింశతి తలకపు కూర్పుగాని 60 భ్రమణములు కలది. దీనియందున్న అంశములు :

(1) 6 భ్రమణాక్షములు ; భ్రమణ కోణములు 72° లేదా 144° లేదా 216° లేదా 288°.

(2) 10 భ్రమణాక్షములు ; భ్రమణ కోణములు 120° లేదా 240°.

(3) 5 భ్రమణాక్షములు ; భ్రమణ కోణము 180°.

(4) సర్వసమ పరివర్తన I.

ఈ వింశతి తలక సంబంధమైన కూర్పుయొక్క ఒక విచిత్రమైన వినియోగము ఏదియన :

అయిదవ తరగతి వ్యాపక సమీకరణము కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారము, వర్గమూలము ($\sqrt{\ }$) అటులనే $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ మొదలగు పరికర్మలను సమీకరణ గుణకములపై కావించుటవలన సాధించుటకు వీలుగాదని రుజువు చేయుట (చూ. గాల్వా క్షేత్రములు - పు. 238).

చతుర్వ్యాప్తి ఆకాశములో క్రమ బహుతలకములు : నాలుగుగాని, అంతకన్న ఎక్కువగాని వ్యాప్తిగల ఆకాశముయొక్క అనుభవము మనకు లేకపోయినను, అట్టి ఆకాశములలో తటస్థించు బహుతలకముల స్వభావములను గణితశాస్త్ర రీతిని చర్చించవచ్చును. చతుఃపరిమాణిక ఆకాశమందు ఆరే క్రమ ఘనరూపములున్నవని రుజువు చేయబడినది. ఇట్టి రూపముల సీమా త్రిపరిమాణిక క్రమ బహుతలకములుగా నుండును. ఇవి చతుస్తలకములో, ఘనములో, ద్వాదశీ తలకములో కావచ్చును.

ఐదు లేదా ఎక్కువ సంఖ్య పరిమాణములుగల ఆకాశములలో త్రిపరిమాణిక క్షేత్రమునకు చెందిన చతుస్తలకము, ఘనము, అష్టతలకము - వీటికి మాత్రము అను రూపమగు 3 క్రమ విశిష్ట బహుతలకములు గలవు.

నక్షత్ర బహుభుజులు : క్రమ బహుభుజియొక్క నిర్వచనమును మనము విశాలీకరించినచో, వాటిని ఉపయోగించి మరికొన్ని బహుతలకములను పొందవచ్చును. సాధారణ క్రమ బహుభుజిని వ్రాయుటకు మనము ఒక వృత్తమును తీసికొని దాని పరిధిని n సమ భాగములుగా విభజించెదము. ఈ విభజన బిందువులు వరుసగా $A_1, A_2, \cdots A_n$ అనెదము. సాధారణ క్రమ బహుభుజి కావలెనంటే $A_1 A_2$ ను ఒక భుజముగాను, $A_2 A_3$ ని రెండవ భుజముగాను ఇట్లే తీసికొనెదము. ఇట్లు n భుజములుండును. కడపటి భుజము $A_n A_1$.

ఇట్లు కాక $A_1 A_3$ ను ఒక భుజముగను, $A_3 A_5$ ను రెండవ భుజముగను, ఇటులనే తీసికొని (అనగా ఒక్కొక శీర్షము మధ్యలో విడిచి) వృత్తముచుట్టు రెండుసార్లో మూడుసార్లో చుట్టినపిదప A_1 ను చేరితిమంటే ఇది విశాలీకృత బహుభుజ మగుచున్నది. ఉదా : $n = 5$ తీసికొనినచో, $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_2$, $A_2 A_4$, $A_4 A_1$ భుజములుగా గల బహుభుజి ఒక నక్షత్రభుజము అనబడును. దీనిలోని భుజములన్నియు సమము, కోణములన్నియు సమము. కనుక ఇదియు ఒక క్రమ పంచ భుజి. అయితే A_1 శీర్షము నుండి ప్రారంభించి, మరల A_1 చేరునపుడు, వృత్తమును రెండుసార్లు చుట్టెదము. కనుక దీనిని (5/2) భుజము అనెదము. దీనిలోని ఒక్కొక భుజమును బహుభుజి కేంద్రమందు ఎదురుచూచు కోణము $360° \times (2/5)$. అటులనే ఒక వృత్తమును 7 సమ భాగములుగా విభజించు బిందువులు $A_1, A_2 \cdots A_7$ అయితే, $A_1 A_3$, $A_3 A_5$, $A_5 A_7$, $A_7 A_2$, $A_2 A_4$, $A_4 A_6$, $A_6 A_1$ భుజములుగా గల నక్షత్ర సప్తభుజము ఇచ్చటను ఈ బహుభుజమున ఒకసారి చుట్టునపుడు మనము వృత్త పరిధిని రెండుమార్లు చుట్టెదము. కనుక దీనిని (7/2) బహు భుజమనెదము.

భుజములను $A_1 A_4$, $A_4 A_7$, $A_7 A_3$, $A_3 A_6$, $A_6 A_2$, $A_2 A_5$, $A_5 A_1$ అని (అనగా మధ్యలో రెండు బిందువులను వదలి) తీసికొనినచో మరియొక నక్షత్ర బహుభుజి దొరకును. దీనికి (7/3) బహుభుజిని పేరు ; ఏలన దీనికి 7 భుజములు, భుజములన్నిటిని ఒకతూరి ప్రయాణము చేయునపుడు వృత్తమును 3 సార్లు చుట్టెదము. దీనియందు ఒక్కొక భుజమును బహుభుజి కేంద్రబిందువునందు ఎదురుచూడు కోణము ($360° \times 3/7$).

పైని వివరించిన నామకరణ ప్రకారము సాధారణ క్రమ n భుజిని $(n/1)$ లేక (n) భుజ మనవలెను. ఏలన దీనికి n భుజములు. అన్ని భుజములను ఒకమారు ప్రయాణించుట వలన వృత్తమును ఒకసారి మాత్రము ప్రదక్షిణము చేసెదము. కేంద్రమునందు ఒక్కొక్క భుజమును ఎదురుచూచు కోణము $360° \times (1/n)$.

ఇటులనే (m/n) నక్షత్ర బహుభుజిని నిర్వచించవచ్చును. ఇచ్చట గమనించవలసిన విషయము (7, 6) బహుభుజిని (7, 1) బహుభుజము, {అనగా (7) బహుభుజిని} ఒకటే, అటులనే (7, 5) ను (7, 2) ను ఒకే రూపము కలవి. ఒకదానిని సవ్యముగను మరియొకదానిని అపసవ్యముగను చుట్టెదము. మరియొక విషయ మేమనిన, m, n సంఖ్యలకు ఉమ్మడి భాజకములున్నపుడు (m/n) బహుభుజిని రెండు వేర్వేరు నక్షత్ర భుజములై భగ్నమగుచున్నది.

నక్షత్ర బహుతలకములు : సాధారణ బహుభుజులకు బదులు నక్షత్ర బహు భుజుల నుపయోగించి బహు

తలకములను నిర్మించ సాధ్యమా? అటులైతే, అట్టి బహుతలకము లెన్ని ఉన్నవి? అను ప్రశ్న బయలుదేరుచున్నది.

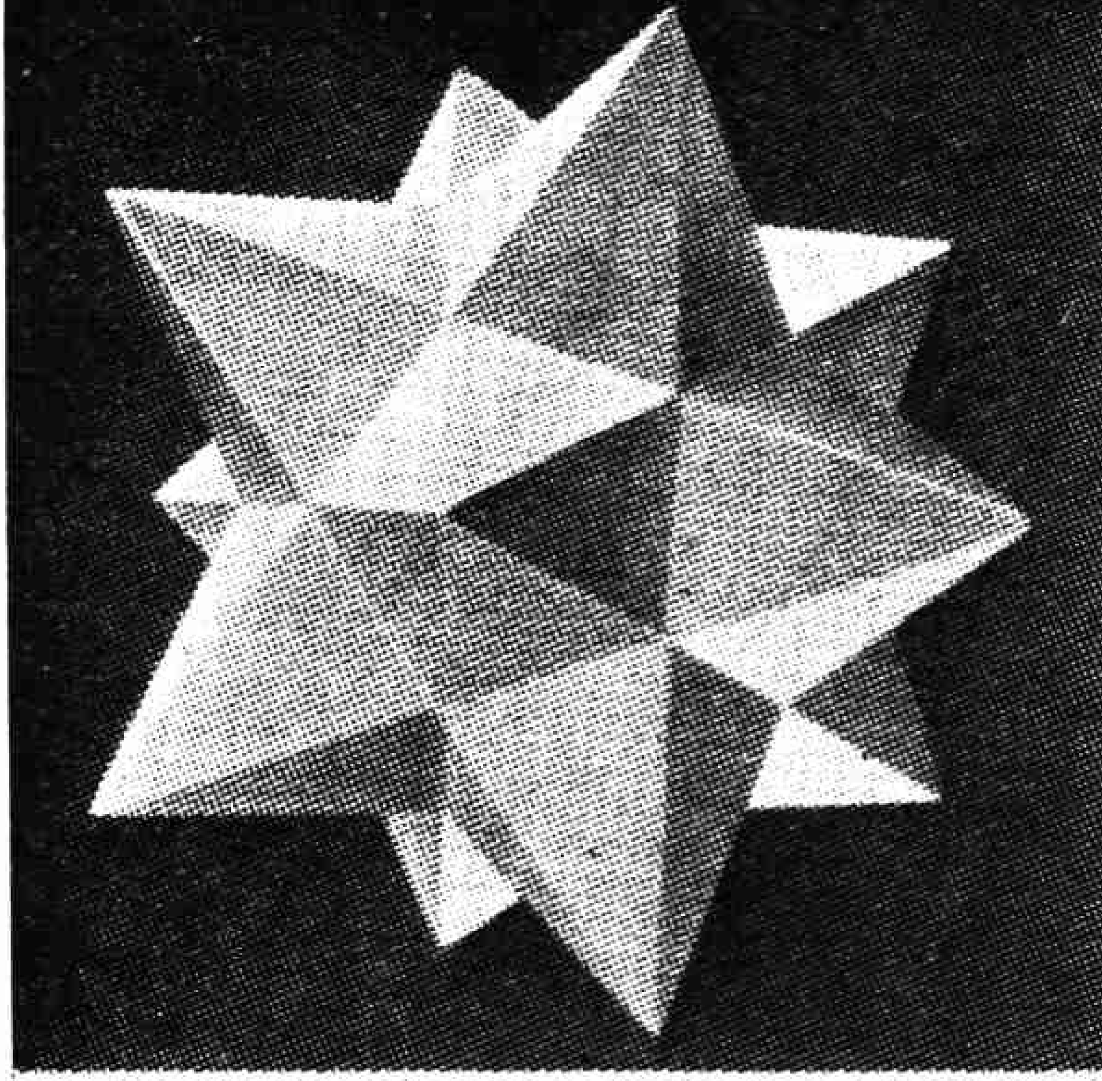
ఇట్లు బహుతలకములను నిర్మించుట సాధ్యమనియు, ఇట్టివి నాలుగే ఉన్నవనియు గణితజ్ఞులు చూపియున్నారు.

బహుభుజులనుపయోగించి బహుతలకములను నిర్మించునపుడు, రెండు బహుభుజులు ఖండించు భుజరేఖ ఒక అంచు అగును. బహుతలక శీర్షమొకటి A తీసికొనిన ఇచ్చట ఏవో కొన్ని r బహుభుజులు సంధించును. అపుడు ఈ శీర్షము A యందు r అంచులు సంధించును. ఈ అంచుల కన్నిటికిని A ఒక కొన. ఈ అంచులన్నియు ఒకే నిడుపు కలిగినవి. ఈ r అంచుల మధ్య బిందువులను చేర్చినచో ఒక సంవృత బహుభుజి దొరకును. ఇదియు ఒకే తలములో నుండ నక్కరలేదు. అయితే దాని భుజములన్నియు సమమై, కోణములన్నియు సమమైనచో, నక్షత్ర బహుతలకమును క్రమ నక్షత్ర తలకమనెదము.

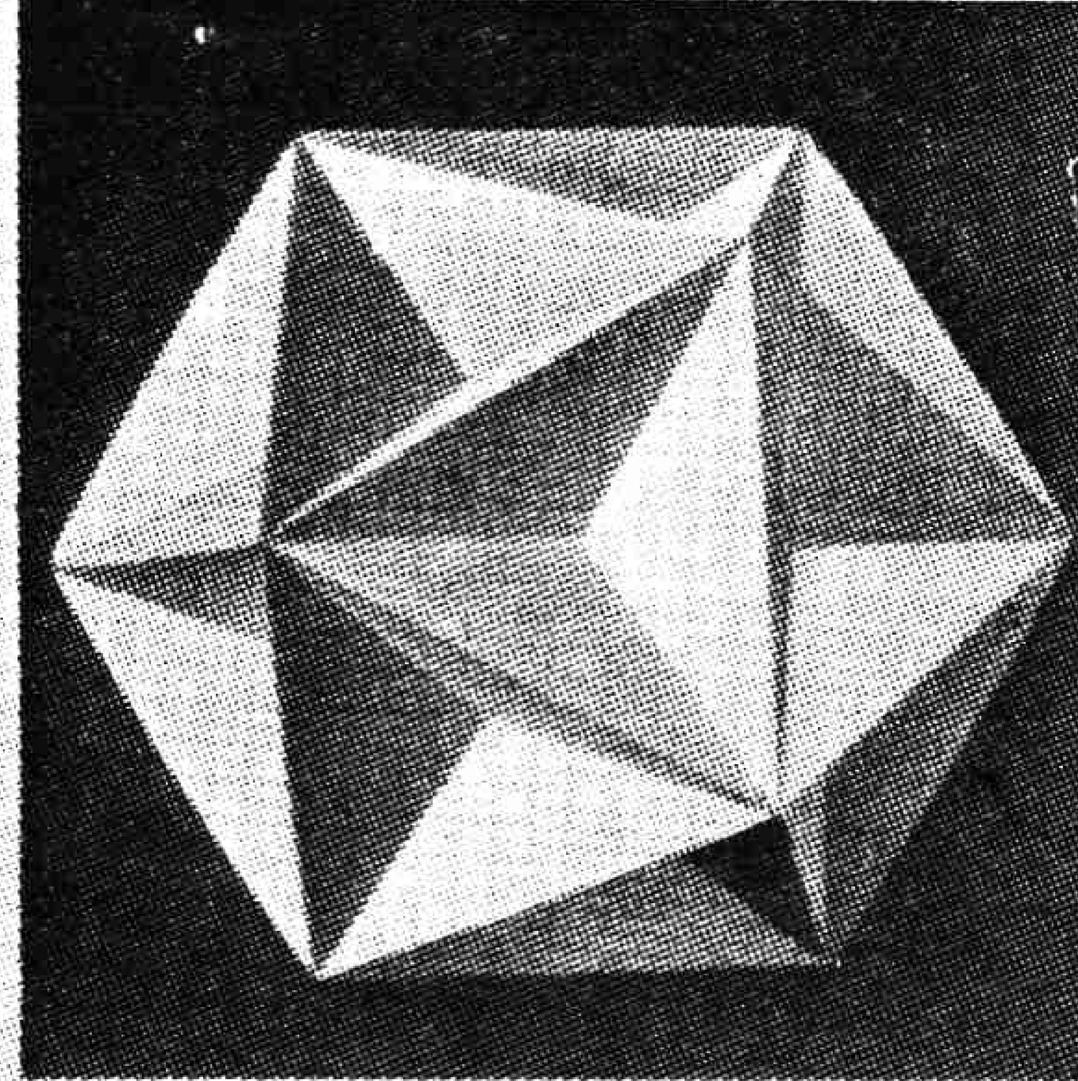
అట్టి నక్షత్ర బహుతలకమును రెండు సంఖ్యలు (p, q) వలన వర్ణించెదము. p సంఖ్య ఎటువంటి బహుభుజునుపయోగించెదమో తెలుపును. q సంఖ్య, బహుతలకముల ఒక్కొక్క శీర్షమున సంధించు అంచుల మధ్య బిందువు ఎటువంటి బహుభుజిపై నున్నదో వర్ణించును.

క్రింది పటములలో సాధ్యమైనటువంటి 4 నక్షత్ర బహుతలకముల చిత్రమును చూడవచ్చును. అవి (5/2, 5), (5, 5/2), (5/2, 3), (3, 5/2). మొదటిది, మూడవది (5/2) నక్షత్ర బహుభుజులచే నిర్మింపబడినది. అయితే మొదటి దానిలో ఒక శీర్షమున సంధించు అంచుల మధ్య బిందువులు ఒకసాధారణ (5) పైనున్నవి. మూడవ దానిలో ఈ అంచుల మధ్య బిందువులు ఒక క్రమ త్రిభుజముపై నున్నవి.

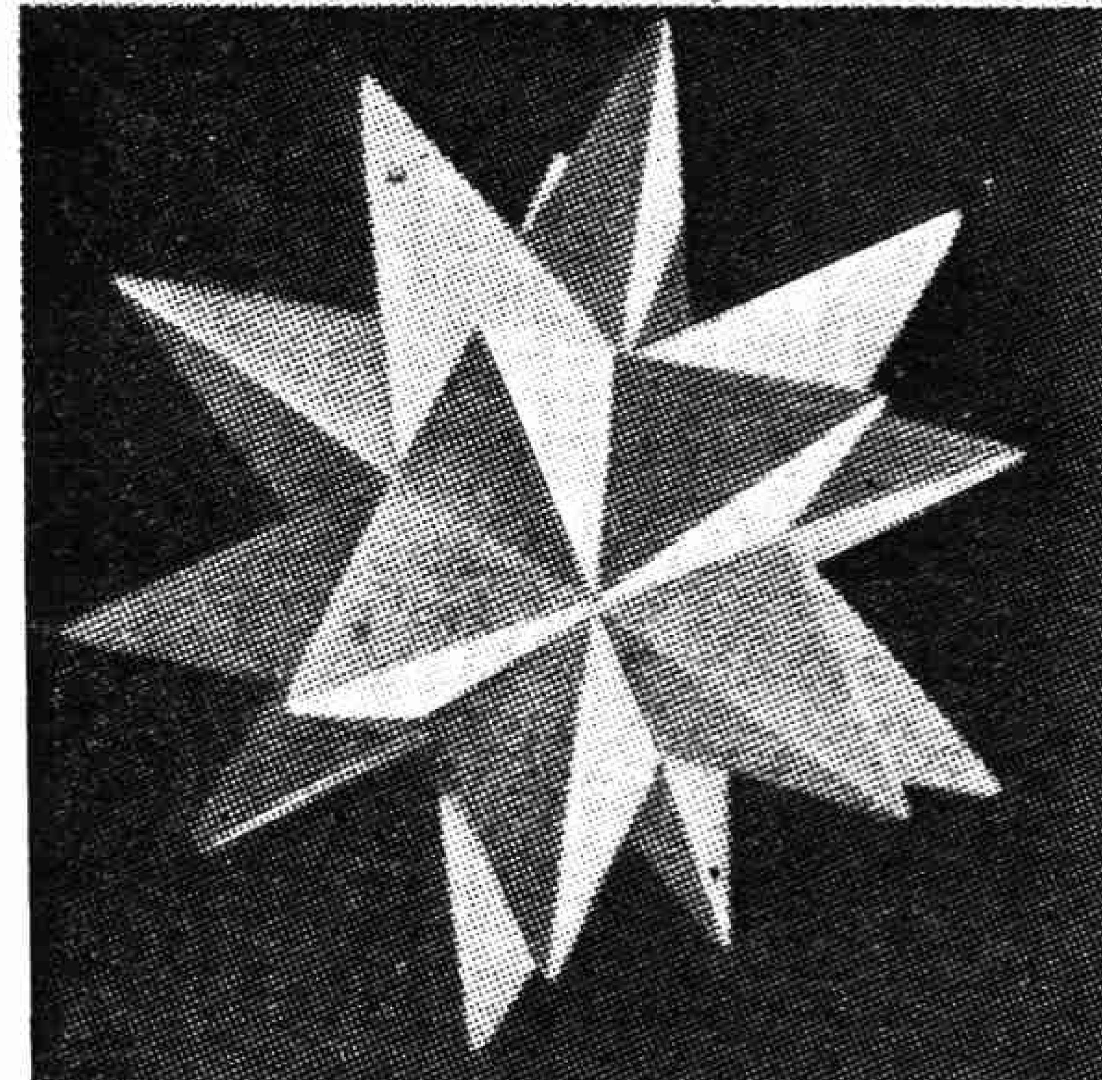
రెండవ చిత్రము యొక్క ముఖములు సాధారణ క్రమపంచభుజములు, అనగా (5). అయితే ఒక శీర్షమునందు సంధించు అంచుల మధ్య బిందువులు ఒక నక్షత్ర బహుతలకము (5/2) ను నిర్మించును. అటులనే నాల్గవ చిత్రముననున్న బహుతలకము త్రిభుజములచేత నిర్మించబడినది.

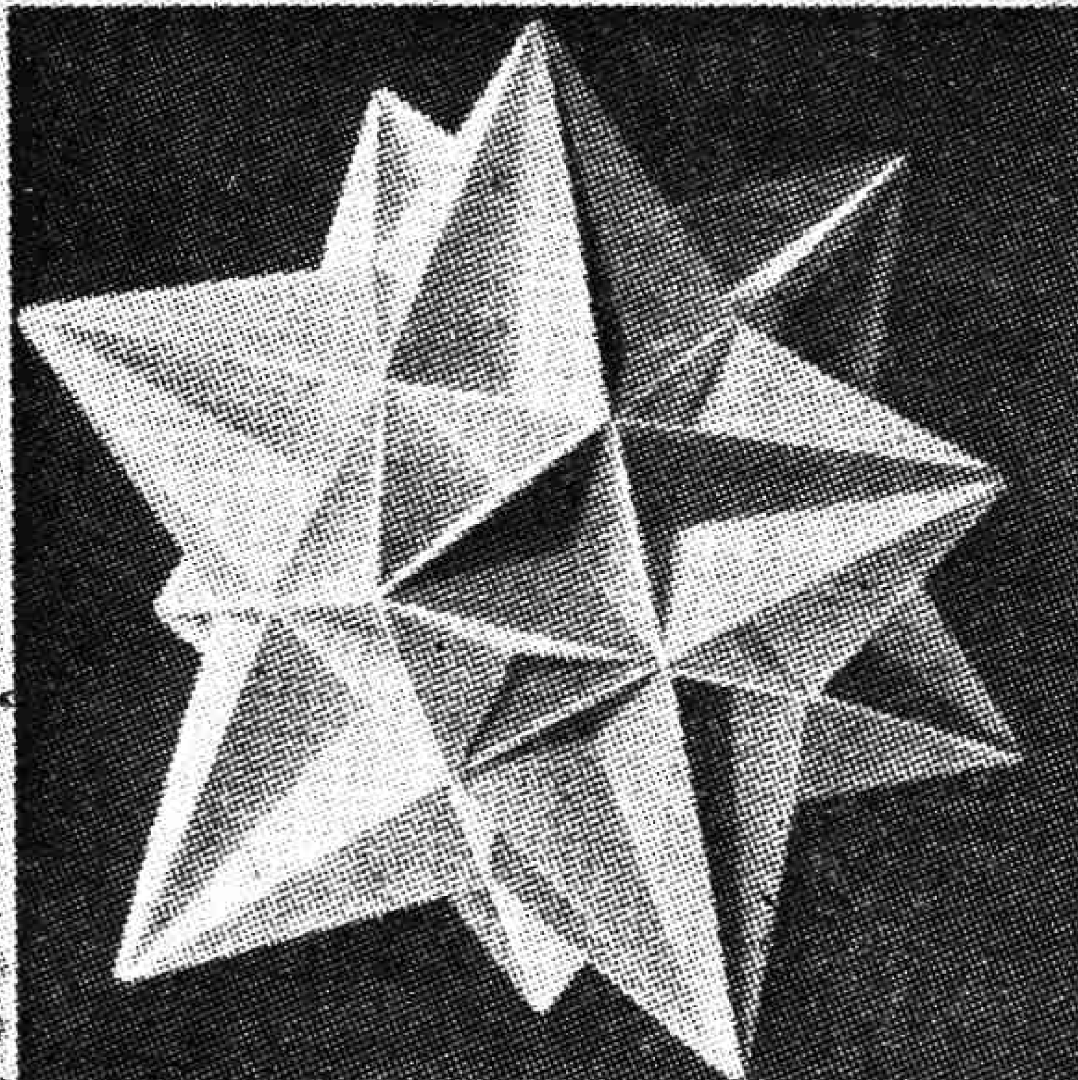


$\left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$



$\left\{5, \frac{5}{2}\right\}$





చిత్రము 294 నక్షత్ర బహుతలకములు

నక్షత్ర బహుతలకములలో ద్వైతభావము : పై చిత్రములో $(\frac{5}{2}, 5)$ ను $(5, \frac{5}{2})$ ను ద్వైత బహుతలకములు. (p, q) బహుతలకమును (q, p) తలకమును ద్వైతభావము కలవి. దీనికి అర్థమేమనగా (p, q) కు ఎన్ని శీర్షములు ఉన్నవియో అదే సంఖ్య తలములు (q, p) కి ఉన్నవి. $(p\ q)$ కు ఎన్ని ముఖములు లేదా తలములున్నవియో అదే సంఖ్య శీర్షములు (q, p) కు ఉన్నవి. రెండింటికిని అంచులు సమము.

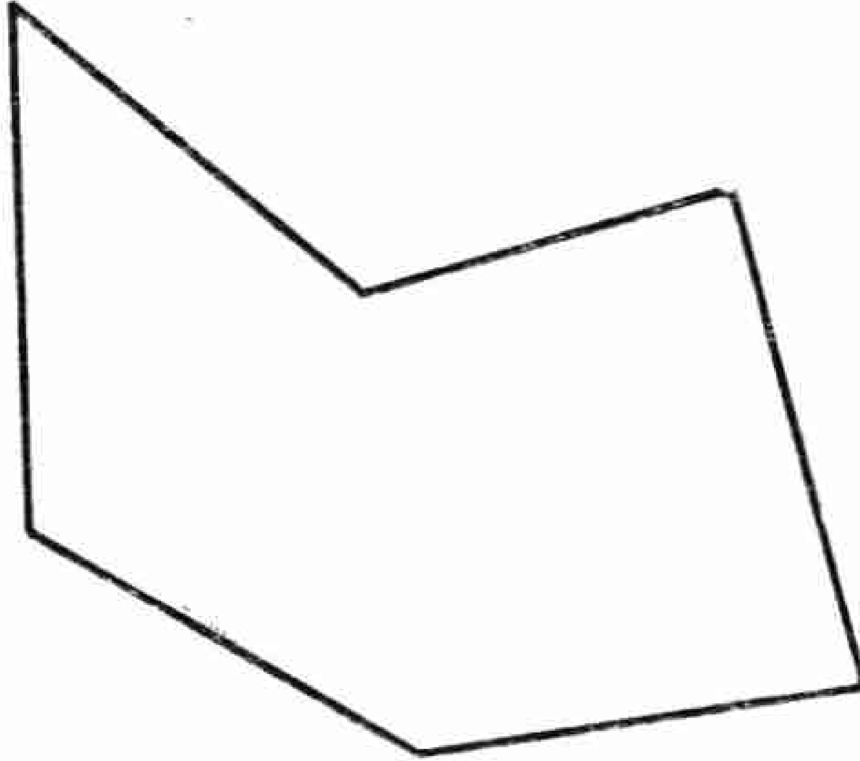
బహుతలకము	శీర్షములు	అంచులు	తలములు
{5/2, 5}	12	30	12
{5, 5/2}	12	30	12
{5/2, 3}	12	30	20
{3, 5/2}	20	30	12

నక్షత్ర బహుతలకముల శీర్షములు, అంచులు, తలముల వివరణ పై పట్టికలో ఇవ్వబడియున్నవి. ఆ. న.

బహుభుజి (పాలిగన్): తలములోని కొంత భాగమును హద్దుగా ఏర్పరచు మూయబడిన ఖండన రేఖను బహుభుజి అందురు. బహుభుజులను కోణములను బట్టి, భుజముల సంఖ్యనుబట్టి వర్గీకరింతురు.

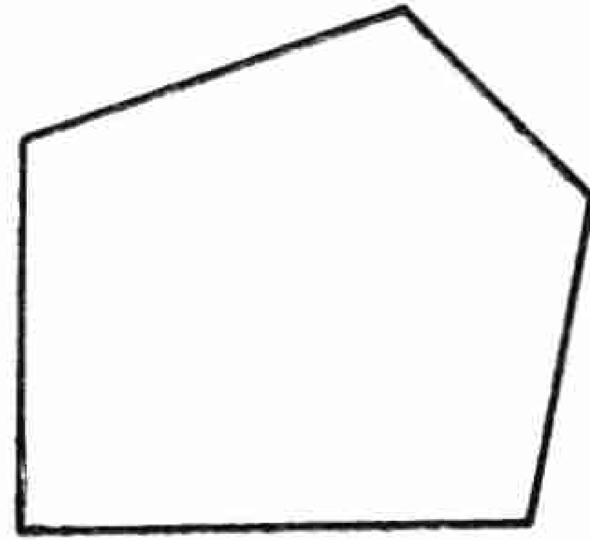
బహుభుజులు వాటి కోణముల స్వభావమునుబట్టి రెండు వర్గములు; అవి:

(1) బహుభుజి యొక్క కనీసము ఏదో ఒక అంతర కోణము ఋజుకోణము కన్న పెద్దది (> 180) అయినచో ఆ బహుభుజిని నతోదర బహుభుజి అందురు. (చూ. చిత్రము 295).



నతోదర బహుభుజి చిత్రము 295

(2) బహుభుజిలోని ప్రతి అంతరకోణము ఋజుకోణము కన్న చిన్నది అయినచో దానిని ఉన్నతోదర బహుభుజి అందురు. (చూ. చిత్రము 296).



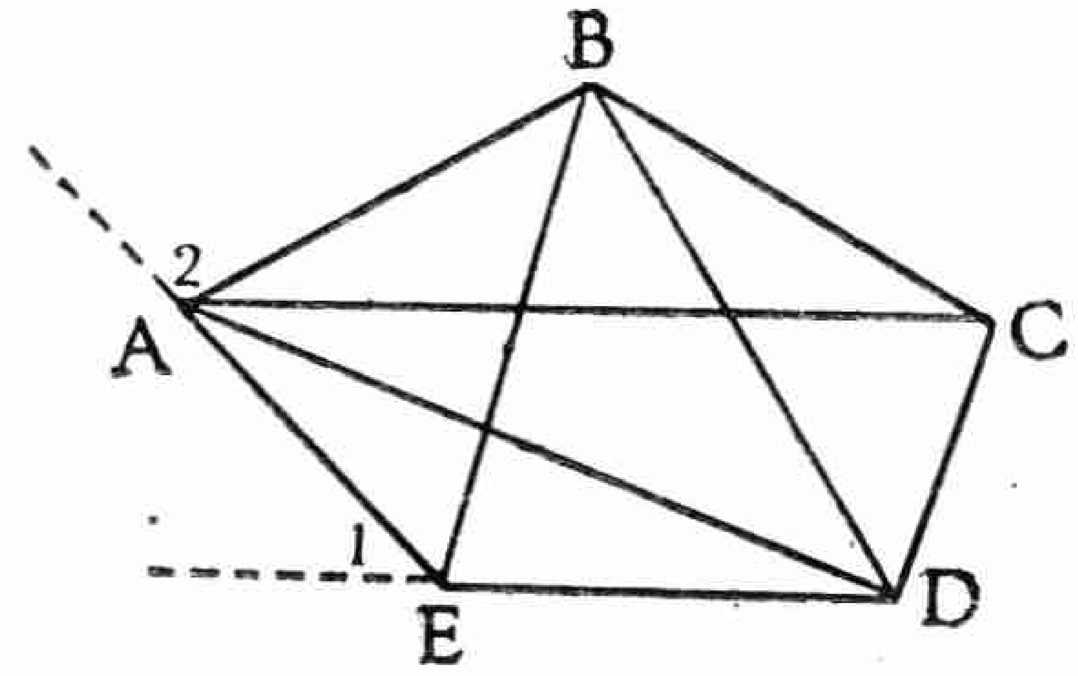
ఉన్నతోదర బహుభుజి చిత్రము 296

బహుభుజి యొక్క భుజముల సంఖ్యనుబట్టి క్రింది విధముగ వాటికి పేరు పెట్టుదురు. ఉదా: పంచభుజి (5 భుజములు గలది), దశభుజి (10 భుజములు కలది). అటులనే n భుజి.

బహుభుజిలోని కోణములన్నీ సమానములైన దానిని సమాన కోణ బహుభుజి అందురు. బహుభుజిలోని భుజములన్నీ సమానములైనచో దానిని సమభుజ బహుభుజి అందురు. అన్ని కోణములు, అన్ని భుజములు సమానములుగాగల బహుభుజిని క్రమ బహుభుజి (రెగ్యులర్ పాలిగన్) అందురు. ప్రక్కన ఉండని ఏ రెండు శీర్షములనైన కలుపు రేఖను బహుభుజి యొక్క వికర్ణము అందురు. ఉదా: చిత్రము 297లో AC, AD, BD, BE లు వికర్ణములు. AE వికర్ణము కాదు.

బహుభుజిలోని వరుస రెండు భుజములచే ఏర్పడు కోణమును దాని అంతర కోణము అందురు. ఉదా: $\angle BAE$, $\angle AED$ లు అంతర కోణములు.

బహుభుజి యొక్క ఒక భుజముచేతను మరొక భుజము యొక్క పొడిగింపు రేఖచేతను ఏర్పడు కోణమును దాని



చిత్రము 297

బాహ్య కోణము అందురు. చిత్రము 297 లో $\angle 1$, $\angle 2$ లు బాహ్యకోణములు.

బహుభుజి సిద్ధాంతములు: n భుజములుకల ఉన్నతోదర బహుభుజి అంతరకోణముల మొత్తము $(2n - 4)$ లంబ కోణములు $= (n - 2)\, 180°$. భుజముల సంఖ్య ఏదైనప్పటికి దాని బాహ్యకోణముల మొత్తము $360°$. పొ. ల. నా.

బాబిలోనియన్ గణితము: టైగ్రిస్, యూఫ్రిటీస్ నదీ జలములచే అప్లావితమైన దేశమునకు బాబిలోనియా అని పేరు. క్రీ. పూ. 3000 ఏండ్లనాడు ఇచ్చట నివసించిన సుమేరియన్‌లు సంఖ్యలను వ్రాయుటకు షష్టిక పద్ధతిని, మట్టి పలకలపై గంటమును నొక్కి లిపిని వ్రాయుటను కనుగొనిరి. ఈ లిపికి బాణాగ్ర లిపియని పేరు. ఈ లేఖన పద్ధతిని తరువాత వచ్చిన అక్కేడియన్‌లు సంగ్రహించిరి. షష్టిక పద్ధతిలో ఒక సంకేతమునకు దాని స్థానమును బట్టి మూల్యముండెడిది. భారతీయ పద్ధతిలో 3 అను సంకేతమునకు ఒకట్ల స్థానములో మూల్యము 3, తరువాత ఎడమనున్న స్థానములో మూల్యము 30, ఆ తరువాత (అనగా మొదట నుంచి మూడవ) ఎడమనున్న స్థానములో దాని మూల్యము 300 ఉన్నట్లే మూల్యము పదింతలు ఎక్కువగుటకు బదులు షష్టిక పద్ధతిలో ప్రతిస్థాన వినిమయమునకు అంకె మూల్యము 60 ఇంతలు ఎక్కువగును (చూ. సమీక్ష పు. 6) మనము నేడు వాడుకచేయుచున్న దానికి సదృశమగు

బాబిలోనియన్ గణితము - కాలిక సంక్షేపము

సాధారణ చరిత్ర	నాగరికత చరిత్ర	శాస్త్ర చరిత్ర
క్రీ. పూ. 3000 సుమేరియన్ నగర రాష్ట్రములు.	బాణాగ్ర లిపి; ఉన్నత శ్రేణికి చెందిన సంస్కృతి.	షష్టిక పద్ధతి.
క్రీ. పూ. 2800 — 1800 సెమిటీ కరణము.	... ...	సంఖ్యల గుణకార, భాగహార వ్యాపారములు నిర్వహించుటకు కోష్టక నిర్మాణము.
ప్రథమ బాబిలోనియన్ వంశము; క్రీ. పూ. 1700 హమ్మురాబీ.	న్యాయ ప్రవక్తకత్వము.	బీజ, జ్యామితి వికాసము, శుక్రుని గురించిన ప్రత్యవేక్షణలు.
క్రీ. పూ. 1500-1250 బాబిలన్.	జ్యోతిశ్శాస్త్రీయ శకున పరంపర.	ప్రాథమిక ఖగోళశాస్త్రీయ గణనలు; స్థిర నక్షత్ర సర్పిలాకారోదయము.
క్రీ. పూ. 747 నాబోనస్సార్ - బాబిలోనియన్ చక్రవర్తి. క్రీ. పూ. 729 అసీరియన్‌లు	ఖగోళ విద్యారంభ యుగము.	బాబిలోనియన్‌లో గ్రహణముల గురించిన ప్రత్యవేక్షణలు.
క్రీ. పూ. 722 రెండవ సార్గాన్ క్రీ. పూ. 700 సెనాకేరిబ్ క్రీ. పూ. 650 అసుర్బానిపాల్.	అసీరియన్ రాజసౌధములు రాజాస్థాన జ్యోతిష విద్వాంసులు. గ్రంథాలయ నిర్మాణము.	ఖగోళ శాస్త్రీయ సంగ్రహములు.
క్రీ. పూ. 612 నినవే ధ్వంసము, అసీరియన్ సామ్రాజ్యాంతము; కాల్డియన్ సామ్రాజ్యము. క్రీ. పూ. 580 నెబూకాడ్నెజర్.	కళల, విజ్ఞాన శాస్త్రముల వికాసనములో నూతన యుగావిర్భావము.	చంద్రుడు, గ్రహములు; వీటిని గురించిన ప్రత్యవేక్షణలు.
క్రీ. పూ. 540 సైరస్; పర్షియా సామ్రాజ్య స్థాపకుడు. క్రీ. పూ. 500 డెరయస్	పంచాంగ నిర్మాణ యుగము.	గ్రహగతుల, రాశిసంక్రమణ కాలముల ప్రత్యవేక్షణముల యథార్థతా వృద్ధి.
క్రీ. పూ. 333 అలెగ్జాండర్ ది గ్రేట్. క్రీ. పూ. 311 సెల్యూసిడ్ యుగ ప్రారంభము.	గ్రీక్‌ల ప్రాభవము.	ఖగోళశాస్త్ర విజ్ఞానము; చాంద్ర గ్రహ కోష్టకముల వికాసము; బీజగణిత పునరుద్ధారణము; గణన కోష్టకముల అత్యంత వికాసము.

ఒక విధమగు డెసిమల్ పద్ధతిని కూడ వారు ఉపయోగించెడివారు. ఇందు దశాంశ బిందువునకు కుడివైపున ఉన్న 3 నకు 3/10 అని అర్థము. తరువాతి కుడి స్థానమందున్న 3, 3/100 ను తెలియజేయును. కాని 60 ని వారు అంకె లేఖన మూల మానముగా గ్రహించిరి. కనుక దశమాంశ బిందువునకు సాక్షాత్తుగా కుడివైపున ఉన్న 3 నకు 3/60 అని అర్థము, తరువాతి స్థానములో దాని మూల్యము $3/60^2$ ను తెలియజేయును. ఇటులనే దీని నడక. అంకె లేదని నిరూపించుటకు వారలొకప్పుడు ఆ స్థానమును శూన్యముగ విడచిపెట్టుచుండిరి. తరువాత నీ శూన్యత్వమును గుర్తించుట కొక సంకేతమును కూడ ఉపయోగించుచుండిరి. కాని ఈ ఆచారము క్రమబద్ధము కాలేదు. ఒకట్ల స్థానమును సూచించుటకు వారు ఒక బిందువువంటి సంకేతమును ఎల్లపుడును వాడలేదు. భారతీయులకు 1 మొదలు 9 వరకును వేరు వేరు సంకేతములుండి, పదిని 10 అని లిఖించునట్లు, వారుకూడ 1 మొదలు 59 వరకు సంకేతములను రోమన్ పద్ధతిని పోలిన కొన్ని పదులను, కొన్ని ఏకాంకములను లిఖించి, తరువాత 1, 0 సంకేతముల 60 ని సూచించుటకు వాడుచుండిరి. ఇట్లు 23, 45, 13 వీటి అర్థమేమన $23 \times 60^2 + 45 \times 60 + 13 \times 1$ లేదా ఏకాంకముల స్థానమును బట్టి (దీనిని వీరలు సూచించువారు కారు) పై 23, 45, 13 అంకెలు $23 + 45/60 + 13/60^2$ లేదా $23/60 + 45/60^2 + 13/60^3$ మూల్యములను తెలియజేయవచ్చును. కనుక వారి వ్రాతలో ఈ సందేహమున్నది. సమయోచితముగ అర్థముచేసికొనవలెను.

ఈ అంకలేఖనపద్ధతి నవలంబించుటచే వారు ఈజిప్షన్లను తక్కిన దేశస్థులను అంకగణితములో మించిరి. వారు $xy + x + y = 183$, $x + y = 27$ వంటి ద్వివర్ణ సమీకరణముల కూడ సాధించగలిగిరి.

$11x^2 + 7x = 375$ వంటి రెండవ తరగతి సమీకరణముల కూడ వారు సాధించుట నేర్చిరి. ఈ దృష్టాంతములన్నియు వారు మట్టి పలకలపై లిఖించిన విషయములనుండి ఉద్ధరించబడినవి. త్రిభుజ కర్ణము పైన లిఖించిన చతురస్రపు వైశాల్యము దాని తక్కిన రెండు భుజముల పై లిఖించిన చతురస్రముల మొత్తపు వైశాల్యమునకు సమానము అను పితాగొరాస్ సిద్ధాంతము వారికి తెలిసినట్లు మట్టి పలకలలో వారు చర్చించిన కొన్ని సమస్యలు సూచించును. $a^2 + b^2 = c^2$ అను సమీకరణమందు a, b, c లకు వారిచ్చిన 15 మూల్యత్రయము లొక పలకయందు కనిపించుచున్నవి. ఈ మూల్యములలో $18541^2 = 12709^2 - 13500^2$ అను పెద్ద సంఖ్యలు కూడ ఉన్నది.

$$a = p^2 - q^2,\ b = 2pq,\ c = p^2 + q^2$$

అను సాంకేతికముల ఉపయోగించి, పై దృష్టాంతముల వారు కనుగొని ఉండవచ్చును. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots \dots$ అను శ్రేఢి యొక్క మొత్తమును వారు కనుగొనగలిగిరి.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \dots n^2 = \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}n\right)(1 + 2 + 3 + \dots n)$$

అను సంబంధము కూడ వారికి తెలియును. జ్యామితి యందు త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును, ట్రెపిజియమ్ వైశాల్యమును వారు లెక్కకట్టగల్గిరి. కాని వృత్త పరిధికి $6r$ అని వారుపయోగించిన మూల్యము చాల స్థూలమైనది. పట్టకము, స్తూపము వీటి ఘన పరిమాణముల లెక్కగట్టుట వారికి తెలియును. కాని శంకు ఖండము, శంకు, వీటి ఘన పరిమాణమును నిర్ణయించుటకు వారు ఉపయోగించిన సిద్ధాంతములు తప్పు. గ్రీకుల విడచి, తక్కిన పూర్వీకుల గ్రంథములలో సమస్యలు వాటి సమాధానములతో బాటు లిఖించబడియున్నవి. కాని, వారా సమాధానముల సాధించిన ప్రక్రియలు వివరింపబడలేదు. వ్యుత్పాదనముగాని, ఉపపత్తిగాని మృగ్యములు. అ. న.

బిందు సమితులు : గణితమునకు ప్రధానము బిందువు. గతి శాస్త్ర, ఉష్ణతావాద పరిశోధనల వలన బిందువు యొక్క ప్రాముఖ్యము చాల గొప్పదయినది. 16, 17 వ శతాబ్దములలో సముద్రయానము క్షేమముగా జరుగుటకు గతి శాస్త్రమభివృద్ధి పొందెను. ఆవిరి యంత్రముల పరిశోధన ఉష్ణతావాద పరిశోధనగా మారెను. ఇందులకు డేకార్ట్ నిరూపక జ్యామితి చేయూత ఒసగెను. సమతలములో ఒక బిందువును రెండు నిరూపకములతో గుర్తించుట, ఘన తలములో మూడు నిరూపకములతో గుర్తించుట మొదలగు మార్గములు వాడుకలోనికి వచ్చెను. ఇట్లు బిందువు యొక్క ప్రాముఖ్యము ఎక్కువ అయ్యెను. నవీన గణితములో బిందు సమితి వాదమునకు బహు విధ ప్రయోగములు కలవు. ఒక చల బిందువు యొక్క గతి విధానమును విమర్శించుటకును, ఇతర గణిత వ్యాపారములను పరిశీలించుటకును బిందు సమితివాదము ఉపయోగించును.

నిర్వచనము : సమితియనగా గణితము నందు నియమిత లక్షణములు గల ఒక వస్తు సమూహము. అట్టి వస్తు సమూహము లనేకముల మన జీవితములో అనుభవములో మనము చూచుచుందుము. ఒక బడియందు చదువు బాలికలు ఒక పురములోని జనులు, ఒక తోటలోని ఫల వృక్షములు, ఒక యంత్రాగారము నుండి వెలువడు సైకిళ్లు మొదలగునవి వీనికి ఉదాహరణములు. గణితములో ఒక ఋజు రేఖలో నుండు బిందువులు కూడ సమితియే.

లక్షణములు : ఒక పట్టణములోని పౌర సమితిని S అని తీసికొని, వారిలోని స్త్రీలను S' అని తీసికొందము. S' లోని ప్రతి వ్యక్తి S లో నుండును. అనగా సమితి S సమితి S' ను ఆవరించియుండును. సంజ్ఞారూపమున $S' \subset S$ లేదా S' సమితి S చే ఆవరింపబడియుండును. అనగా $S \supset S'$ ... (సంజ్ఞారూపము) $\subset$ సంజ్ఞ ఆవరించుటను - $\supset$ సంజ్ఞ ఆవరింపబడుటను గుర్తించును. బాలికలను S'' చే గుర్తించిన $S'' \subset S' \subset S$.

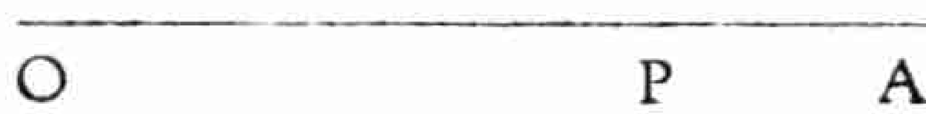
మద్రాసులో అక్షరాస్యుల సమితిని S అనియును, నిరక్షరాస్యులసమితిని S' అనియు, జనసంఖ్యను U అనియు గుర్తించిన, $S + S' = U$. ఇచ్చట U లోకము (పాపులేషన్) ను గుర్తించును. ఇది బిందుసమితి యొక్క సంకలన సూత్రము. ఇపుడు S, S' పరస్పర పూరకములు.

గుణకార సూత్రము : ఒక గ్రామములో గ్రుడ్డివారల సంఖ్యను S చేతను, చెవిటివారల సంఖ్యను S' చేతను గుర్తించిన $S . S'$ సంజ్ఞ గ్రుడ్డివారిలో చెవిటివారిని గుర్తించును వారి సంఖ్య P అయిన $P = S . S'$. గ్రుడ్డివారిలో చెవిటివారలు లేనిచో $S . S' = 0$. ఇది యొక నూతన బీజగణితము.

సంకలనీయ సమితి వర్గములు - ముఖ్య నియమములు :

1. లోక సమితి U వర్గములో చేరియుండవలయును.
2. $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots$ సమితులు వర్గములోచేరియుండిన, సంకలన సమితి $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \ldots$ వర్గములో చేరియుండవలయును.
3. S వర్గమునకు చేరియుండిన పూరక సమితి S' కూడ వర్గములో చేరియుండవలయును. $S + S' = U$.

రేఖీయ బిందు సమితి : ఇది సులభ గ్రాహ్యము ఇది మాత్రము ఇచ్చట విమర్శింపబడును. OA ఒక ఋజురేఖ :



$OA = 1$; OA లో నుండు ఒక బిందువు P; ఇచ్చట $OP = x$ అని తీసికొనిన, x యొక్క వాస్తవికపు విలువలు ఒక బిందు సమితిని గుర్తించును. బిందువులు అసంఖ్యాకములు.

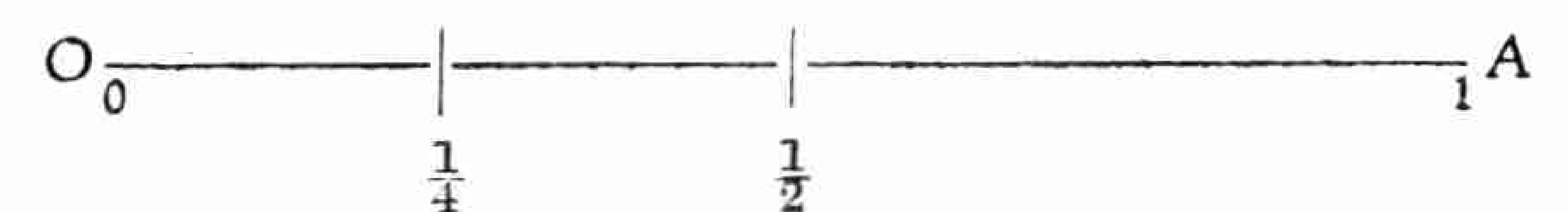
మరియొక ఉదాహరణము : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots \frac{1}{10}$ తీసికొందము. ఇది యొక పరిమిత బిందు సమితి. పరిమిత బిందు సమితుల ఉపయోగము చాల పరిమితమయినది. అపరిమిత బిందు సమితులు అన్ని క్షేత్రములందు ఉపయోగించును. వానిగురించి కొంత విచారణచేయుదము.

అపరిమిత లేక అనంత బిందు సమితులు : 1, 2, 3, ... పూర్ణ సంఖ్యలు ; వీనిని ఒక ఋజురేఖపై డేకార్ట్ విధానమును అనుసరించి గుర్తించిన, ఒక అనంత బిందుసమితి లభించును. ఈ అనంతమును గణనీయ అనంతము అని చెప్పుదురు. ఇతర బిందువులు పూర్ణ సంఖ్యలు తప్ప తక్కిన సంఖ్యల గుర్తించును. అవి అగణనీయములు.

పూర్వము తీసికొనిన $OA = 1$ ఋజురేఖను తీసికొందము. అందు $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n} \ldots$ సంఖ్యలను గుర్తించు బిందువులు గణనీయ అనంత బిందుసమితి. తక్కిన బిందువులు అగణనీయ అనంత బిందు సమితిని గుర్తించును.

ఈ సమితి సీమితము ; సంఖ్యలన్నియు 0, 1 కి మధ్య ఇమిడియున్నవి. కనిష్ఠ సీమ 0, గరిష్ఠ సీమ 1 ; 0 కంటె చిన్న సంఖ్యలన్నియును కనిష్ఠ సీమలగును, కాని వానిలో పెద్దది '0'. దానినే కనిష్ఠ సీమగ తీసికొనవలయును. 1 కంటె పెద్ద సంఖ్య లన్నియును గరిష్ఠ సీమలగును. కాని వానిలో చిన్నది 1 ; దానిని గరిష్ఠ సీమగ తీసికొనవలయును.

అవధి బిందువు : ప్రతి అనంత సమితికి ఒక అవధి బిందువు ఉండవలయును. x అవధి బిందువు అయినపుడు ε ఎంత చిన్నదైనను, $x - \varepsilon$, $x + \varepsilon$ మధ్య, సమితియొక్క బిందువు ఒక్కటి అయినను ఉండును. ఉదాహరణము :



$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots \ldots$ బిందు సమితిని తీసికొందము. అది OA రేఖపై నుండు బిందువులను గుర్తించును. OA ను రెండు సమభాగములుగ $0 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - 1$ చేయుము. బిందువు సమితిలో అనంత బిందువులు $0 - \frac{1}{2}$ లో ఉండును. $\frac{1}{2} - 1$ ఖండములో $\frac{1}{2}$, 1 మాత్రము కలవు. ఇట్లే ఎడమ వైపు ఖండమును ద్విఖండనము చేయుచు పోయిన అనంత బిందువు $0 - \frac{1}{4}, 0 - \frac{1}{8}, 0 - \frac{1}{16}, \ldots \ldots \ldots 0 - \frac{1}{2^n}$ ఖండములో నుండునట్లు తేలును. n అనంతమగునపుడు $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ అగునట్లు చేయవచ్చును. ఈ బిందుసమితిలో అనేక బిందువులు $0 - \varepsilon$ లో నుండును. కాబట్టి '0' అవధి బిందువు.

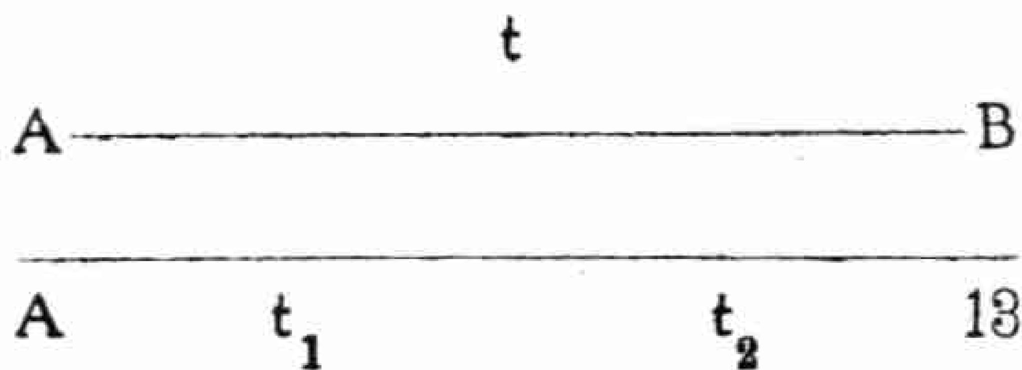
విచ్ఛిన్నబిందు సమితులు : మొట్టమొదట ఉష్ణతా ప్రవాహము, గతివాదము ఉష్ణతాగతిశాస్త్రము మొదలగు వినియుక్త గణితభాగము నుండి బిందుసమితి వాదము పుట్టినను, తర్వాత అది శుద్ధగణితముగా పరిగణింపబడెను.

ఒక అవిచ్ఛిన్న అనంత బిందు సమితి $\frac{1}{4}$ నుండి $\frac{1}{3}$ వరకు ఉండు వాస్తవిక సంఖ్యల గుర్తించిన, ఆ బిందు సమితి యొక్క మానము $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ చే గుర్తింపబడును. ఇపుడు 0 నుండి 1 లోపల నుండు కరణీయ సంఖ్యల గుర్తించు బిందు సమితి S_1 యొక్క మానమును ఎట్లు గుర్తింప వచ్చును ?

ఈ సమస్యకు సమాధానము జర్మనీ గణితజ్ఞుడు హాంకెల్ సూచించెను. అతని సూచనను తర్వాత హార్నాక్, స్టోల్జ్, కాంటార్‌లు అనుసరించిరి. తర్వాత బోరెల్, తర్వాత అతని శిష్యుడు లెబేగ్ ఈ సమస్యకు పూర్తి సమాధానము 1902 లో ప్రతిపాదించిరి.

1901 లో ప్లాంక్ కృష్ణ వస్తువునుండి శక్తి ఖండములుగా ప్రసరించునని చూపెను. అందుచే విచ్ఛిన్న బిందు సమితి వాదము ప్రయోగ గణితమందును, భౌతికశాస్త్రమందును చాల ఉపయోగకరమయ్యెను. లెబేగ్ చూపిన మార్గమును అనుసరించి బిందు సమితుల మానమును కొలుచుటకు అనేక విధ అమూర్త వాదములు ప్రతిపాదింపబడి, విచ్ఛిన్నత, అవిచ్ఛిన్నత, అవధి, చయనీయత, అంతరీకరణీయత మొదలగు తత్త్వములు బిందు సమితి వాదమును అనుసరించునట్లు మార్చబడినవి.

లెబేగ్ మానము : AB, ఒక పుల్ల ; దానిని రెండు



ముక్కలుగ చేసిన, అవి రెండును చేరి AB కొలతకు సమానమగును. అట్లే AB ఒక అంతరాళము t ; దాని మానము $L(t)$; t ని రెండు భాగములు t_1, t_2 లుగ చేసిన అంతరాళములు t_1, t_2 ఒకటి వెంబడి మరియొకటి యుండిన, $L(t) = L(t_1) + L(t_2)$ అని విశదమగుచున్నది. అంతరాళము t ని n భాగములుగ చేసి వానిని $t_1, t_2, \ldots \ldots t_n$ అని గుర్తించి, అవి పరస్పర ఆచ్ఛాదనము చేయక, ఒకటి వెంబడి మరి ఒకటి యుండిన, $L(t) = L(t_1) + L(t_2) + \ldots + L(t_n)$. n అనంతమగునపుడు ఈ న్యాయము వర్తించునా ? వర్తించునని ఒక ఉపపత్తి కలదు. అది ఇచ్చట వివరింపబడదు. కొలత $L(t)$ అంతరాళము t యొక్క సంకలన ఫలము. అనగా అంతరాళము t లో నుండు బిందువుల సంకలన కొలతను $L(t)$ గుర్తించుచున్నది. అట్లే ఒక బిందు సమితి S లో నుండు బిందువుల సాంద్రతను $L(S)$ గుర్తించునా ?

S లో ఒక బిందువు $(\frac{1}{2})$ ఉండిన, బిందువు యొక్క కొలత 0 కాబట్టి $L(S) = 0$.

S లో $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ బిందువులుండిన, $L(S)$ యొక్క ప్రమాణము $0 + 0 = 0$. అట్లే $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ మొదలగు పరిమిత n బిందువులు బిందుసమితి S లో నుండిన $L(S) = 0$; n అనంతమగునపుడు విమర్శన లేక $L(S) = 0$ అని చెప్పకూడదు. ఒక చిన్నపుల్ల పొడుగు δ ; దానిని 2, 4, 8, 16, ... సమభాగములుగా చేయవచ్చును. వాని పొడుగులు క్రమముగా $\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{8}, \frac{\delta}{16}, \ldots \frac{\delta}{2^n}$ అగును. బిందువు $\frac{1}{2}$ ను $\frac{\delta}{2}$ లోను, బిందువు $\frac{1}{3}$ ను అంతరాళము $\frac{\delta}{4}$ లోను, ... క్రమముగా అమర్చుము.

S బిందువులు $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n} \ldots \ldots$

వరుసగా పేర్చబడినపుడు కొలత $\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8} + \ldots + \frac{\delta}{2^n} + \ldots \ldots = \delta$ చే కొలువవచ్చును. δ అతి స్వల్ప ప్రమాణము గలది. దానిని ఎంత చిన్నదిగానైన చేయవచ్చును. కాబట్టి S బిందువుల మానము $L(S) = 0$.

పరిమిత లేదా గణనీయ అపరిమిత (అనంత) బిందు సమితి యొక్క మానము : ఒక బిందు సమితి S అగణ్య అనంత మయిన, దాని బిందువుల అంతః పూరణ యొక్క మానము $L(S)$ ను ఎట్లు కనుగొనవచ్చును ?

అంతరాళములుగా నుండు అగణ్య అనంత బిందుసమితి యొక్క మానమేమి ? దీని ఉదాహరణము కరణీయ సంఖ్యలు నిరూపములుగా గల $(0, 1)$ లో నుండు బిందువుల మానము. $(0, 1)$ అంతరాళములో నుండు బిందువుల నిరూపకములు వాస్తవిక సంఖ్యలు ; అందు కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. కాబట్టి, అంతరాళము $(0, 1)$ లో నుండు బిందువుల రెండు భాగములుగా చేయవచ్చును. మొదటి భాగము అకరణీయ సంఖ్యలు నిరూపకములుగా గల బిందు సమితి S, రెండవ భాగము కరణీయ సంఖ్యలు నిరూపకములుగా గల పూరక బిందు సమితి S_1.

ఇచ్చట బిందు సమితి S_1 లో అగణ్య అనంత బిందువులును, బిందు సమితి S లో గణనీయ అనంత బిందువులును కలవు. అంతరాళము $(0, 1)$ లో నుండు బిందువుల మానము 1; గణనీయ బిందు సమితికి S యొక్క మానము 0. కాబట్టి అగణ్య బిందు సమితి S_1 యొక్క మానము 1; ఇందు కరణీయ సంఖ్యలు నిరూపకములుగా గల బిందువులుండును.

అగణ్య అనంతము c యొక్క ఘాత మాపకము; గణనీయ అనంతము a యొక్క ఘాత మాపకము కంటె ఎక్కువ అయినందున, అగణ్య అనంత బిందు సమితి S_1 యొక్క మానము ఎల్లపుడును గణనీయ అనంత బిందు సమితి S యొక్క మానము కంటె ఎక్కువగా నుండవలయునని తోచుచున్నది కదా?

బిందు సమితి S యొక్క మానము 0; కాబట్టి బిందు సమితి S_1 యొక్క మానము 1 అని విశదమయినది. ఎల్లపుడును ఇట్లుండుటకు అవకాశము లేదు. కాంటార్ అగణ్య బిందు సమితి S_1 యొక్క మానము 0 అగునట్లు ఒక బిందు సమితి S_1 నిర్మించియున్నాడు.

గణనీయ బిందు సమితి మానము ఎల్లపుడును 0; కాని అగణ్య బిందు సమితి మానము 1 లేదా 0 ఉండవచ్చును. ఒక అగణ్య విచ్ఛిన్న బిందు సమితి S తీసికొని, దాని లోనుండి అనంత అంతఃసమితులు $S_1, S_2, S_3, \ldots \ldots$ తీసికొనుము. అవి పరస్పర ఆచ్ఛాదితములుగా నుండకూడదు. $S, S_1, S_2, S_3, \ldots \ldots$ సంకలనీయ సమితులయిన, $L(S) = L(S_1) + L(S_2) + L(S_3) + \ldots \ldots \ldots$ ఇది మామూలు సంకలన ధర్మము.

ఈ సూత్రము అన్ని విచ్ఛిన్న అగణ్య అనంత బిందు సమితులకు అన్వయింపదు. సంకలనీయ బిందు సమితులకు మాత్రమే అన్వయించును.

పరిమిత లేదా గణనీయ అపరిమిత అంతరాళముల (S) మానము: ఈ అంతరాళముల పరస్పర ఆచ్ఛాదితములు కాకుండ ఒకటి తర్వాత మరి ఒకటిని పేర్చుము. ఒకవేళ అచ్ఛాదితములైన, అట్టి భాగములను వదలి వేయుము. ఈ అంతరాళముల $I_1, I_2, I_3 \ldots\ldots$ చే గుర్తించిన, అవి యన్నియు ఎడము లేక వరుసగా ఒక ఋజురేఖ పై దట్టముగా పేర్చినట్లుండును. ఈ సమితి మానము $L(S)$ అని తీసికొనినచో, అది $I_1, I_2, I_3 \ldots \ldots$ మానముల సంకలనరాశికి సమానము. అనగా, $L(S) = L(I_1) + L(I_2) + L(I_3) + \ldots \ldots \ldots$ ఈ సమితిని ఎట్లు విభజించినను, వాని మానముల సంకలనము $L(S)$ కు సమానము.

ఈ సమితి ఫలము $L(S)$ కు సమితి S యొక్క లెబేగ్ మానము అని పేరు.

అగణ్య అపరిమిత అంతరాళముల పరంపర: దీనికి తగిన ఉదాహరణము ఇదివరలో విమర్శించిన S_1 బిందు సమితి. దాని బిందువుల యొక్క నిరూపకము $0-1$ మధ్యనుండు కరణీయ సంఖ్యలు. ఇట్టి సమితులెన్నియో కలవు.

మనము $0-1$ లో ఇమిడియుండు సాధారణ బిందు సమితి S తీసికొందము. S లో పూరింపబడిన బిందువుల మానము యొక్క గరిష్ఠ అవధి 1.

సమితి S, అనంతపరంపర $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ గుర్తింపనిమ్ము; సమితి S ను పలువిధములుగా అమర్చవచ్చును. అవి:

(i) అంతరాళము $0-\frac{1}{2}$;

(ii) $(\frac{1}{2}-\epsilon_1, \frac{1}{2}+\epsilon_1), 0-\frac{1}{4}$;

(iii) $(\frac{1}{2}-\epsilon_1, \frac{1}{2}+\epsilon_1)(\frac{1}{4}-\epsilon_2, \frac{1}{4}+\epsilon_2), (0, \frac{1}{8}) \ldots$

ఇచ్చట ϵ నిరసింపదగిన అత్యల్ప సంఖ్య.

ఈ విధముగా S లోని అన్ని బిందువులను అమర్చవచ్చును. ఇట్లు లభించు సమితిని I అని తీసికొనినచో I లో ఒక అంతరాళ పరంపర ఏర్పడును. కాని ముఖ్య నియమము ఏమన S లోని ప్రతి బిందువును I లో ఏదో ఒక అంతరాళములో నుండవలయును. దీనికి అవకాశము కలదు. సమితిని పలు విధములుగా అమర్చవచ్చును. ప్రతి అమర్పుకు ఒక మానము $L(I)$ కలదు.

సమితి S లో అనంత బిందువులు కలవు. కాబట్టి I లో అనంత అంతరాళములు కలవు. ప్రతి అంతరాళమునకు ఒక $L(I)$ మానము ఉండును. కాబట్టి అనంత $L(I)$ లు కలవు.

బిందు సమితి S అంతరాళము $0-1$ లో నుండుటవలన, $L(I)$ అనునది 0 నుండి 1 లో సీమితమై యుండవలయును. ప్రతి సీమిత ఫలమునకు ఒక గరిష్ఠ అధమ సీమ, ఒక కనిష్ఠ ఉత్తమ సీమ ఉండవలయును గదా! $L(I)$ యొక్క గరిష్ఠ అధమ సీమ l అని తీసికొనినచో $L(S)$ యొక్క విలువ l అనుకొనవచ్చును. సమితి S యొక్క బాహ్యమానము $L(S)$ అగును. ప్రతి సమితి S నకు ఒక పూరక సమితి $S*$ కలదు. అవి, అంతరాళము $0-1$ లో, పరస్పర పూరకములు.

పూర్వరీతిగానే $S*$ యొక్క బాహ్యమానము $L(S*)$ కనుగొనవచ్చును.

S యొక్క అంతరమానము $\underline{L}(S) = 1 - L(S*)$ సాధారణముగా $L(S), \underline{L}(S)$ సమానములుగా నుండవు. $L(S) = \underline{L}(S)$ అయినపుడు సమితి S మాపనీయము అని చెప్పుదురు.

S సంకలనీయ సమితి అయినపుడు $L(S) = \underline{L}(S)$. ఇదే విధమున సమితి S_1 లోని బిందువుల నిరూపకములు 1 కి తక్కువయగు ధనకరణీయ సంఖ్యలయిన, $L(S) = \underline{L}(S) = 1$ అని చూపవచ్చును.

ఆచార్య

బీజపల్లవము: భాస్కరాచార్య II, క్రీ. శ. 1150 సంవత్సరమునందు సిద్ధాంత శిరోమణి అను ఖగోళశాస్త్ర గ్రంథమును వ్రాసెను. దీనియందు మొదటి అధ్యాయ

మునకు లీలావతి అని తన కూతురు పేరు పెట్టెను ఇది చర్చించు విషయము అంకగణితము. మరొక అధ్యాయము చర్చించిన విషయము బీజగణితము. అంక, బీజగణిత జ్ఞానము ఖగోళ శాస్త్రమునకు అత్యావశ్యము. కనుకనే వీటిని గురించి మొదట అతడు చర్చించెను.

భాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంతశిరోమణి వ్రాసిన తరువాత సుమారు 500 సంవత్సరములకు వ్రాయబడిన గ్రంథము "బీజపల్లవము." దీనిని వ్రాసిన కాలము క్రీ. శ. 1650. గ్రంథకర్త శ్రీ కృష్ణదైవజ్ఞు అను కాశీ వాసస్థుడు; బల్లాల దైవజ్ఞుని సుతుడు. ఇది భాస్కరాచార్యుల బీజగణితమునకు వ్యాఖ్యానము. దీని భాష సంస్కృతము. 500 సంవత్సరములలో భాస్కరాచార్యుల శిష్య పరంపరలు నశించిపోయి, బీజగణిత జ్ఞానము మరుగైపోయెను. అయితే వసంత ఋతువందు మరల వృక్షములు అంకురించునట్లు బీజగణిత వృక్షమును అంకురించుటకై చేసిన ప్రయత్నము, కనుక దీనికి 'బీజపల్లవ' మని పేరు పెట్టెను.

ఈ గ్రంథము తంజావూరు సరస్వతి మహల్ గ్రంథాలయములో దొరకినది. దీనిని మదరాసు ప్రభుత్వము వారు పరిశీలన చేయుటకు ఏర్పాటుచేసి, తంజావూర్ సరస్వతీ మహల్ సీరీస్ 78 అని 1958 లో ప్రచురించిరి. టి. వి. రాధాకృష్ణశాస్త్రిచే సవరించబడి ప్రచురమైనది. దీనియందు 13 అధ్యాయములున్నవి. మొదటి నాలుగు అధ్యాయములలో సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహారములు, వర్గీకరణ, వర్గమూలములు ఎట్లు అకరణీయ, కరణీయ, సంఖ్యలకును, శూన్యమునకును, చలరాశులకును ప్రయోగించుట గురించి చర్చ జరుగుచున్నది.

అయిదవ అధ్యాయము పేరు "కుట్టక వివరణం." దీనియందు $y=(ax+b)/c$ అను సమీకరణ సాధనము చర్చించబడినది. ఇచ్చట a, b, c దత్త పూర్ణాంకములు. x, y కనిపెట్టవలసిన పూర్ణాంకములు. దీనిని $y = \frac{ax \pm 1}{c}$ అను రూపమునకు తీసికొని వచ్చు విధమును, a, c ఇచ్చినచో, b తో ఎట్లు x, y మారుననియు చర్చించబడినది. (చూ. కుట్టకములు పు. 183)

తరువాత "వర్గ ప్రకృతిః" అను అధ్యాయములో $y^2 = ax^2 + b$ అను సమీకరణము యొక్క సాధనము పరీక్షించబడినది. దీని సాధనమునకు "చక్రవాళం" అను ప్రత్యేక పద్ధతి వర్ణింపబడియున్నది. ఇది 7 వ అధ్యాయములో నున్నది.

పిదప వచ్చు అధ్యాయములు మొదటి తరగతి, రెండవ తరగతి సమీకరణములను, అనేక చలరాశులుగల సమీకరణములను చర్చించియున్నవి.

ఆ. న.

బీజ ఫలములు, వాటి చయనకలనములు : x, y అను రెండు వాస్తవిక చలరాశులను తీసికొనుము. x తన విలువలను X అను సమితి నుండి, y తన విలువలను Y అను సమితి నుండి తీసికొను ననుకొనుము. X లోని x యొక్క ప్రతి విలువకు అనురూపముగా Y లో y కి ఒకే ఒక విలువ ఉన్నయెడల, y చలరాశి x యొక్క ఫలము అని చెప్పుదురు.

ఉదాహరణమునకు (1) x యొక్క ఘాతములు $y = x^n$, x యొక్క బహుపదములు అనగా $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots \dots + a_n x^n$ ఇవి రెండు x యొక్క ఫలములకు ఉదాహరణములు; ఇచ్చట $a_0, a_1, \dots \dots a_n$ స్థిర రాశులు ఈ రెండు ఉదాహరణములందును X వాస్తవిక సంఖ్యల సమితి. $P(x)$, $Q(x)$, x యొక్క రెండు బహుపదములైనచో వాని భాగఫలమును అనగా $P(x)/Q(x)$ ను x యొక్క అకరణీయ ఫలమని చెప్పుదురు. ఇచ్చట $P(x)$, $Q(x)$ బహుపదములలోని గుణకములు పూర్ణాంకములు లేక అకరణీయ సంఖ్యలు అనుకొందము. $P(x)/Q(x)$ అను x యొక్క అకరణీయ ఫలమును మరి ఒక విధముగా నిర్వచించవచ్చును. $1, x$ ఇవి రెండు తీసికొని సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము వీటిమీద పరిమిత సంఖ్య తడవ ఉపయోగించినచో మనకు దొరుకునది $P(x)/Q(x)$ వంటి అకరణీయ ఫలములు మాత్రమే. $y = P(x)/Q(x)$ అను అకరణీయ ఫలము $Ay + B = 0$ అను మొదటి తరగతి సమీకరణము యొక్క సాధనము కదా? ఇచ్చట $A = Q(x)$, $B = -P(x)$ అను బహుపదములు. ఇటులనే

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots \dots A_n = 0$$

అను n వ తరగతి సమీకరణములో, $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ అకరణీయ గుణకములుగా గల x అను చలరాశిలో బహుపదములైనచో, దీని సాధనములు $y_1, y_2, \dots y_n$ అన్నియు x - యొక్క n - వ తరగతి బీజీయ ఫలములనబడును. ఉదా: $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{(x-1)}$ అనునది ఒక బీజీయ ఫలము. ఇది తృప్తిచేయు సమీకరణము $\{y - \sqrt{(x-1)}\}^3 = x$ నుండి కనుగొనవచ్చును. అనగా $\{y^3 + 3y(x-1) - x\}^2 = (3y^2 + x - 1)(x-1)$ అగును. ఇది 6 వ తరగతి బీజీయ ఫలము. అటులనే $y = \frac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt[3]{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt[3]{(1-x)}}$ అనునది ఒక బీజీయ ఫలము. అయితే ఇట్లు అన్ని బీజీయ

ఫలములను స్పష్టముగా x యొక్క వ్యక్తఫలముగా వ్రాయుట సాధ్యము కాదు.

బీజీయ ఫలములు కాని x యొక్క ఫలములను x యొక్క అతీత ఫలములు అందురు. త్రికోణమితిలోని, జీవ (sin), కోటి జీవ, (cosine) ఫలములను ఈ అతీత ఫలములకు ఉదాహరణములు. వాస్తవిక చలరాశి x కు బదులుగా, సంకీర్ణ చలరాశి $z = x + iy$ ని అనగా (x, y) వాస్తవిక చలరాశుల $i = \sqrt{-1}$ ను తీసికొనిన, పై విధముననే ఈ సంకీర్ణ చలరాశి యొక్క ఫలములను అకరణీయ, బీజీయ, అతీతఫలములను నిర్వచింపవచ్చును.

y చలరాశి x యొక్క బీజీయ ఫలమైనచో $\int y\,dx$ అను చయన కలనములను సాధించు పద్ధతులను కొన్నిటిని పేర్కొందము.

అకరణీయ ఫలముల చయనము: $P(x)/Q(x)$ రూపము (ఇచ్చట $P(x)$, $Q(x)$ బహు పదములు) లో నున్న ఫలము యొక్క చయనఫలమును, అనగా $\int P(x)/Q(x)\,dx$ కనిపెట్టుటకు, $Q(x)$ యొక్క భాజకములను కనిపెట్టి $P(x)/Q(x) =$

$R(x) + \Sigma\, p/(x-d) + \Sigma\,(qx+r)/(ax^2+bx+c)$ అను రూపములో వ్రాయవలెను. ఇచ్చట $R(x)$ ఒక బహు పదము. చయనీకరణ పద్ధతి ప్రకారము దీని చయనమును కనిపెట్టవచ్చును. అపుడు మనకు లభ్యమగునవి లాగరిదమ్ ఫలములును, త్రికోణమితి విలోమఫలమగు $\tan^{-1} x$ వంటి ఫలములే దొరకును.

బీజీయ ఫలము: ఇటులనే $R(x)$ అనునది x లో మొదటి తరగతి లేక రెండవ తరగతి బహుపదమైనచో $\sqrt{R}$, $1/\sqrt{R}$, $f(x, \sqrt{R})$ ల చయనమందు ఘాత ఫలములు, లాగరిదమ్ ఫలములు, త్రికోణమితీయ ఫలములుగల సమాసముగా లభించును. ఇవన్నియు ఒకే జాతికి చేరినవి. ఈ జాతిలో e^x, దాని విలోమ ఫలమగు లాగరిదమ్, e^{ix} యొక్క వాస్తవ సంకీర్ణ అంశములు ($\cos x$, $\sin x$), వీటి విలోమ ఫలములు ఉన్నవి. e^x, $\cos x$, $\sin x$ ఇవన్నియు ఆవర్తన ఫలములు. x చలరాశి $2i\pi$, లేదా 2π హెచ్చగునపుడు ఈ ఫలముల విలువలు మారవు.

$R(x)$ మూడవ తరగతి లేదా నాలగవ తరగతి బహుపదమగునపుడు $\int f\{x, \sqrt{R(x)}\}\,dx$ పైన వివరించిన ఫలములలో నొకటి కాదు, అది ఒక క్రొత్త ఫలమని 18 వ శతాబ్ద గణితవేత్తలు గుర్తించిరి. లెజాండర్ అను ఫ్రెంచి గణితవేత్త మూడు చయనములను ప్రవేశపెట్టి తద్వారా $\int f(x, \sqrt{R})\,dx$ ను కనుగొనవచ్చునని నిరూపించెను.

అవి :

$$F(k, \phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta\phi}\,;\; E(k, \phi) = \int \Delta\phi\, d\phi,$$

$$\Pi(n, k, \phi) = \int \frac{d\phi}{(1 + n\sin^2\phi)\,\Delta\phi}$$ ఇచ్చట $\Delta\phi$ అనగా $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$, k ఒక స్థిర సంఖ్య. ఆబెల్ అను గణిత మేధ $F(k, \phi)$ యొక్క విలోమ ఫలములను ప్రవేశ పెట్టెను. అనగా $u = F(k, \phi)$ అయితే $\phi = am\,(u)$

అనియు $\sin\phi = \sin am\, u = sn\, u$

$$\cos\phi = \cos am\, u = cn\, u$$

$$\sqrt{(1 - k^2\sin^2\phi)} = \Delta\, am\, u = dn\, u$$

అను ప్రసిద్ధమైన జాకోబియన్ విలోమ ఫలములను (ఎల్లిప్టిక్ ఫంక్షన్స్) చర్చించును. ఇవి రెండు విధములైన ఆవర్తనములు గలవి. అనగా $sn\,(u + w_1) = sn\,(u)$; $sn\,(u + w_2) = sn\, u$.

ఇటులనే $R(x)$ అను బహుపదము 5 లేదా ఆరవ తరగతులు, లేక మరి ఎక్కువ తరగతి బహుపదమైతే $\int f(x, \sqrt{R})\,dx = u$ యొక్క విలోమ ఫలములు అతి విలోమ ఫలములు (హైపర్ ఎలిప్టిక్ ఫంక్షన్స్) అగును.

ఎమ్. వి. సు.

బీటా ఫలము : m, n అను రెండు ధన సంఖ్యలు అయినచో

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad \cdots \quad (1)$$

దీనిని ఆయ్‌లర్ మొదటి చయనము అని చెప్పుదురు.

(1) లో x కు బదులు $(1-x)$ వ్రాసినచో

$$\beta(m, n) = \beta(n, m) \text{ లభించును.} \quad \cdots \quad (2)$$

ఖండచయనముచే

$$\beta(m, n+1) = \frac{n}{m}\beta(m+1, n) \quad \cdots \quad (3)$$

$$= \frac{1}{m+n}\beta(m, n) \quad \cdots \quad (4)$$

అని చూపవచ్చును. n ధన పూర్ణాంకమయినచో

$$\beta(m, n) = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots n}{m(m+1) \ldots \ldots (m+n)} \quad \cdots \quad (5)$$

$x = \sin^2\theta$ అని ప్రతిక్షేపించినచో

$$\beta(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\theta \cdot \cos^{2m-1}\theta\, d\theta \quad (6)$$

అని లభించును.

బీటా, గామా ఫలములకు గల సంబంధము :

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}dx\times\int_0^\infty e^{-y}y^{m-1}dy$$

$$=4\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2m-1}dx\times\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2m-1}dy$$

ఇందు x కు బదులు x^2 అనియు, y కి బదులు y^2 అనియు ప్రతిక్షేపింపబడినది.

R యొక్క అవధి $=\infty$, అగునపుడు ఇది

$$=4\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}x^{2m-1}y^{2n-1}\,dx\,dy \quad \dots (7)$$

అగుచున్నది.

చయనరాశి చయనరంగమునందంతయు అవిచ్ఛిన్నమయినది. కాబట్టి దీనిని చయన ద్వయముగా తీసికొనవచ్చును. సూక్ష్మ విచారణలో పాల్గొనక, స్థూల విధానమున $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ అని (7) లో ప్రతిక్షేపించినచో

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n)=4\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r^{2(m+n)-1}dr$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$$=2\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$$=\Gamma(m+n).\,\beta(m,n)$$

$$\therefore\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \dots (8)$$

మరియు x, y, z రాశులు ధనాత్మకములై

$x+y+z+\dots\dots\dots\le 1$ అయినచో

$$\int\int\int\dots\int x^{m-1}y^{n-1}z^{l-1}\dots\dots dx\,dy\,dz=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(l)}{\Gamma(m+n+l)} \quad \dots (9)$$

ఎమ్. వి. సు.

బుధుడు : గ్రహములలో చాల చిన్నదగు గ్రహము బుధుడు. దీనికి రవికి గల అంతరము సుమారు 28 డిగ్రీలు. దీనిని ప్రాతఃకాలములో సూర్యోదయమునకు ముందు, లేదా సాయంకాలము సూర్యాస్తమానమునకు వెనుక చూడవచ్చును. దీని గతి అధికమై యుండుటచే గ్రీకులు 'దేవదూత' అని బుధునికి పేరిడిరి. జాతక శాస్త్రములో మానవుని నిపుణతకును, బుద్ధి కుశలతకును, విద్యకును బుధుడు కారకుడని భారతీయుల విశ్వాసము.

బుధుని దృశ్యవ్యాసమును మైక్రోమీటర్ సహాయమున కనుగొనవచ్చును. కాని దీని విలువలు దూరమునుబట్టి కొద్దిగ (5″ నుండి 13″ వరకు) మారుచుండును. ఉపగ్రహములు లేనందున బుధుని ద్రవ్యరాశిని నిర్ణయించుట కష్టము. ఈరోసు అను లఘుగ్రహములో బుధుని వలన కలుగు సంక్షోభములనుండి బుధుని ద్రవ్యరాశి భూద్రవ్యరాశిలో పదునెనిమిదవ భాగమని కనుగొని యున్నారు. బుధగ్రహము చంద్రునివలె కళలను చూపును. ఇది సూర్యకాంతి పరావర్తనముచే ప్రకాశించును ; భూమి ఒక వైపున కాంతిమంతముగను, మరి ఒక పార్శ్వవలెమున కాంతిరహితముగను ఉండును. సౌర ప్రేక్షకునికి కాంతివంతమైన పార్శ్వమే కనిపించు చుండుటచే పూర్ణచంద్రుని వలె కనబడుచుండును (చూ. చిత్రము 298 పు. 423).

కాని, బుధగ్రహకక్ష్యకు బాహ్యముగనుండు భూగోళ ప్రేక్షకునికి ప్రకాశవంతమైన పార్శ్వములో కొంత భాగమే కనుపించుచుండును. కొన్ని వేళలలో ఏమియు కనిపించదు.

బుధుని తలములో స్పష్ట చిహ్నములు లేనందున దీని పరిభ్రమణ కాలమును నేటివరకు నిశ్చయముగ కనుగొన వీలుకానున్నది. షియాపరెల్లి ఆ కాలము సుమారు 88 దినములని కనుగొనెను.

బుధుని పరావర్తన శక్తి చాల తక్కువ (సుమారు 0.07). ఇందువలన బుధునిలో వాతావరణము మిక్కిలి తక్కువయై యుండవలెనని తెలియుచున్నది. సూర్యుని నుండి వెలువడు వెలుతురును, బుధునిచే పరావర్తనము చేయబడిన సూర్యుని వెలుతురును వర్ణమాలా దర్శకముతో పరిశీలించునపుడు వానిలో నెట్టి భేదములును కానరావు. మరియు నీటి యావిరి, ప్రాణ వాయువుల జాడ కనిపించదు. పై కారణములవలన బుధలోకములో వాతావరణమే లేదని రూఢియగుచున్నది.

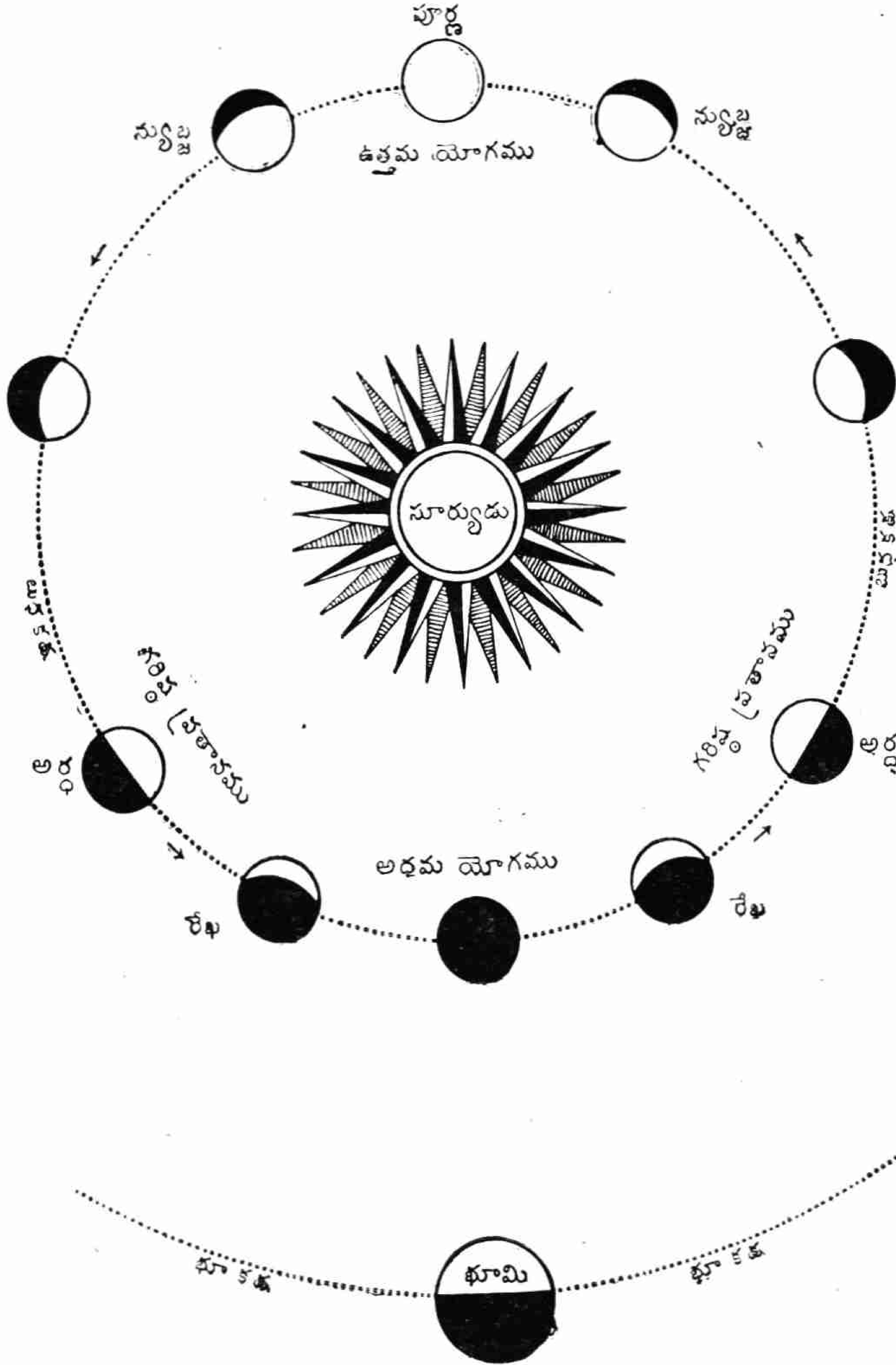
బుధుడు సూర్యునికి అతిసమీపములో నుండుటచే సూర్యుని గురుత్వాకర్షణ శక్తికి లోబడి సూర్యునిబట్టి తన్ను తానే చుట్టుకొనుటకు వీలుకాదు. అందుచే సౌర ప్రేక్షకునికి ఒక పార్శ్వమే కనుపించుచుండును. అందు సూర్యుడు (మనకు కనుపించిన కంటె) 7 రెట్లు పెద్దగ కనుపించును. మరియు తాపక్రమము భూతాపక్రమమునకు 7 రెట్లుండును. అది సరాసరి 300°C. బుధుని ఒక పార్శ్వము నిత్యదినముగను, మరియొక పార్శ్వము నిత్యరాత్రిగను నుండును

కొన్ని వేళలలో బుధుడు రవి బింబమును దాటునపుడు నల్లని బిందువువలె కనుపించును. ఈ సంఘటనమును తరణము అని పిలుతురు. బుధ తరణము సుమారు మే నెల

7 వ తేదీనాడు, నవంబరు నెల 9 వ తేదీనాడు కలుగుచుండును. తరణములు తరచుగ మేనెలలోకన్న నవంబరు నెలలోనే సంభవించుచుండును. ఈ శతాబ్దములో నవంబరు 7, 1930 కాక ముందు రానున్న తరణదినములు - మే 9, 1970; నవంబరు 9, 1973; నవంబరు 12, 1986; నవంబరు 14, 1999.

బుధుని పరిహేళిని పరిశీలించినచో, ఆ బిందువు శతాబ్దమునకు 57 సెకనులు తూర్పు దిశవైపు నెమ్మదిగ సాగుచుండునట్లు తెలియవచ్చును. ఇతర గ్రహముల వలన కలుగు సంక్షోభములకు సవరణలు చేసిన పిమ్మట మిగిలిన 43 సెకనుల గమనమునకు హేతువును శాస్త్రజ్ఞులు పరిశీలింపనారంభించిరి. కొందరు ఈ యధిక గమనము బుధుని కక్ష్యలోపల నుండు అవిదిత ద్రవ్యరాశుల సంక్షోభముల వలన కలిగియుండుననిరి. న్యూటన్ ఆకర్షణ సిద్ధాంతమును సవరింప వలయునని కొందరు సూచించ తొడగిరి. కాని బుధకక్ష్యలో అట్టి ద్రవ్యరాశులు ఉన్నవని రుజువుచేయబడలేదు. రెండవ సంశయము ఐన్‌స్టయిన్ సాపేక్షతావాదము వలన నివారణమయ్యెను. ఈ వాదమునుండి న్యూటన్ సిద్ధాంతము స్థూలమనియు, ప్రతి భ్రమణములోను గ్రహము యొక్క నీచోచ్చరేఖ గ్రహపరిభ్రమణ దిశవైపు ముందుకు సాగుచుండుననియు తెలియవచ్చెను.

చంద్రునివలె బుధ బింబమునకు వృద్ధిక్షయములు కలవు. అధమ యోగమునందు అమావాస్యవలె బింబదర్శనము కాదు. తర్వాత బుధరేఖ కనబడి వృద్ధిని పొందుచుండును. ఉత్తమయోగములో బుధపూర్ణబింబము కనబడదు. బుధుడు రవితో ఉదయించి, అస్తమించుటచే దాని పూర్ణ బింబము చంద్రునివలె కనబడదు. అదియే వ్యత్యాసము.



చిత్రము 298 బుధుని కళలు

అధమ యోగమునందును, ఉత్తమ యోగమునందును బుధుడు అస్తంగతుడని చెప్పుదురు. శుక్రునికి కూడ అట్లే. ఈ రెండు గ్రహములు రవి భూములకు మధ్యనుండును. వానిని అంతర గ్రహములనియు, భూకక్ష్యకు బాహ్యములైన కుజాది గ్రహములను బాహ్యగ్రహములనియు చెప్పుదురు (చూ. చిత్రము 298).

కుజాది బాహ్యగ్రహములును అధమ యోగములో అస్తంగతములగును. కాని ఉత్తమ యోగమునందు అవి పూర్ణిమ చంద్రునివలె పూర్ణ బింబములతో కనబడును.

కె. ఎస్. వి. స.

బూలియన్ బీజగణితము (బూల్ యొక్క బీజగణితము): సంకలన నియమము ప్రకారము రెండు రెండు చొప్పున కలుపుటకు వీలిచ్చునవియును, గుణన నియమమును వేరొక నియమము ననుసరించి రెండు రెండు చొప్పున గుణకారము గావించుటకు వీలిచ్చునవియును అగు సంకేతముల సమూహమునకు బీజగణితమని పేరు. మనము బడులలో నేర్చుకొను బీజగణితమందు సంకేతములు సంఖ్యలకు బదులుగా ఉపయోగించెదము. సంకలన, గుణకార నియమములు:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad a+b &&= b+a\\
&\text{(ii)} \quad a+(b+c) &&= (a+b)+c\\
&\text{(iii)} \quad a\times b &&= b\times a\\
&\text{(iv)} \quad a\times(b\times c) &&= (a\times b)\times c\\
&\text{(v)} \quad a\times(b+c) &&= (a\times b)+(a\times c)
\end{aligned}$$

విశాలీకృత బీజగణితమందు సంకేతములు సంఖ్యలుగా నుండనక్కరలేదు. అవి ఏవైన కావచ్చును. అవి ఏవని మనకు తెలియనక్కరలేదు కూడను. $+$, $\times$, వ్యాపారముల జ్ఞానముకూడ మన కావశ్యకము కాదు. పై నిరూపించిన నియమములు వేరు నియమములచే తొలగించబడ వచ్చును.

బూలియన్ బీజగణితము : ఇది యొక విశిష్టమైన బీజగణితము. ఆంగ్ల గణితజ్ఞుడు జార్జ్ బూల్ చే 1850 లో సృష్టము. ఇందు పై చెప్పిన నియమములన్నియు ఉండగా మరికొన్ని ఈ క్రింది నియమములు వాటికి చేర్చబడినవి.

$$\text{(vi)}\ a+a=a,\quad \text{(vii)}\ a\times a=a$$
$$\text{(viii)}\ a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

సంఖ్యలకు ప్రవేశములేకుండుట ఈ బీజగణితముయొక్క విశిష్ట లక్షణము. అనగా, 1, 2, 3, 4 అను అంకెల కిందు ప్రసక్తిలేదు. ఒక ఏకాంకము 1 నుండి 2, $1+1$ గాను, 3, $1+1+1$ గాను ఉద్భవించును. కాని, ఈ బీజగణితమందు $1+1=1$, $1+1+1=1$. అందువలన 2, 3 అను అంకె లెప్పుడును సంభవములు కావు.

దీని ఇంకొక వైలక్షణ్యమేమన సంకలన ప్రక్రియకు, గుణన ప్రక్రియకునుగల ద్వైతము. a, b వంటి సంఖ్యలు, $+$, $\times$, వంటి సంకేతములు గల ఒక సూత్రములో $+$ కు బదులు $\times$, $\times$ కు బదులు $+$ పరస్పర వినిమయము చెందినను, ఆ సూత్రము సత్యముగనే నిలచును. ఈ సౌష్ఠవము (i) మొదలు (viii) వరకున్న సూల నియమముల పరిశీలించిన విశదము కాగలదు.

$+$ ను $\times$ గాను, $\times$ ను $+$ గాను మార్చినట్లైన, (i), (iii) నియమములు, వాటి స్థానముల మార్చికొనును. అట్లే (ii), (iv) కూడను, అట్లే (v), (viii) లు. కొనకు నియమములు (vi), (vii) కూడ నట్లే ప్రవర్తించును. దీనినే బూలియన్ బీజగణితమందు ద్వైతన్యాయ మందుము. మామూలు బీజగణితమందిట్టి ద్వైతము లేదు.

దృష్టాంతములు : క్రొత్తగా చేర్చిన (vi), (vii), (viii) నియమములు అతి కఠినములని, నియమములు (i) మొ. (v) తో నివి నప్పవనియు, వైరుధ్యమునకు దారి తీయ వచ్చుననియు ఒకవేళ మన మనుకొనవచ్చును. అట్టి దేదియు జరుగదని ఈ క్రింది దృష్టాంతముచే చూపవచ్చును. I చే సూచింపబడు భిన్న వస్తువుల గణ మొకటి ఆలోచనలోకి తీసికుందము. ఈ గణమందు గల ఒకటి లేదా పెక్కు, లేదా అన్ని వస్తువుల సముదాయములను a, b, c, d అను చిహ్నములతో సూచింతము. ఆ గణమందు n వస్తువు లున్నచో అందు 2^n ఉప సమూహములుండును. ఈ లెక్కలో వస్తువులన్నిటిని చేర్చుకొనిన ఉపగణమొకటి, వస్తువులేని 0 ఉపగణమొకటి ఉన్నవి. ఈ రెండు అంతిమ ఉప గణములనుకూడ లెక్కలోనికి తీసికొని రావలెను. ఇప్పుడు $(a+b)$ అనునది సముదాయము a లో నున్న వస్తువుల నన్నిటిని, సముదాయము b లో నున్న వస్తువుల నన్నిటిని గల మరియొక క్రొత్త సమూహము అని నిర్వచించవచ్చును. అనగా $a+b$ సముదాయము a లో గాని b లో గాని ఇదివరకున్న వస్తువుల నన్నిటిని తనలో నిమిడ్చికొనియున్నది. ఒకే వస్తువు a, b రెంటిలో నున్న పక్షమున అది $a+b$ సముదాయములో కూడ నుండును. కాని ఈ వస్తువు ఒకసారియే ఈ సంకలిత ఉప గణములో గోచరించును. ఈ నిర్వచన దృష్టిలో $a+a=a$ అను (vi) వ నియమము సత్యమే యగును. అనగా a గణములో నున్నవి, లేదా a గణములోనున్నవి కలసి a గణమగును.

ఇక $a\times b$ అను పరికర్మముయొక్క అర్థమును గ్రహింతము. ఇదియు ఒక సముదాయమే. $a\times b$ అనగా a లో నున్న వస్తువులలో, b లో కూడ నున్న వస్తువుల గణమని వర్ణింతము. ఒక వస్తువు a సముదాములోనే యుండి, b లో లేకపోయినచో లేదా b లో నుండి a లో లేకపోయినచో అది $a\times b$ లో ఉండదు. ఈ నిర్వచన దృష్టిలో ఉంచుకొనగా, నియమము (vii) అనగా $a\times a=a$ సత్యమగుచున్నది.

a గణములోనున్న వస్తువులు, మరల a గణములో నున్న వస్తువులు గల సమూహము a గణమునే నిర్మించును. పై నిర్వచనము ననుసరించి $a+I=I+a=I$ (a ఏదియైన కావచ్చును) ఏలన a సముదాయములో నున్న వస్తువులు లేదా సంపూర్ణ సమూహము I లో నున్న వస్తువులు అన్నియు I గణమే అగుచున్నది. ఇటులనే $a\times 0=0\times a=0$; ఏలన ఏ సముదాయమునకును, 0 సముదాయకమునకును ఉమ్మడియై ఉండెడు వస్తువులు శూన్యగణమగును. అందువలన I, 0 అను విశిష్టాంశముల గురించి మరి రెండు నియమములు మనకు లభ్యమైనవి. అనగా a ఏ సమూహమైనను

$$\text{(ix)}\quad a+I=I+a=I$$
$$\text{(x)}\quad a\times 0=0\times a=0$$

0, 1 అంశములను పరస్పర ద్వంద్వములని తలంచిన యెడల

(ix), (x) కలిసి ద్వైతసూత్రము ననువదించు మరియొక జంట తయారగును.

అనుపూరణము : a, b, c, d అను బీజ గణితాంశము లను ఒక దత్తగణము I నకు చెందిన ఉపగణములను నిర్వచన దృష్టిలో, మనకు గణితశాస్త్రమందింకొక పరికర్మ అవసరమగుచున్నది. I గణమునకు చెందిన యొక ఉప గణము a ను ఇచ్చినచో, a లో లేని, I కు చెందిన వస్తువుల నన్నింటిని ఇముడ్చుకొనిన ఇంకొక అద్వితీయ సంబద్ధ మును అగు ఉపగణము a' ఉండును. దీనికి a యొక్క పూరకమని పేరు. ఇప్పుడు a అను ఏక గణము, దాని పూరకము a' ఈ క్రింది సంబంధముల తృప్తిపరచును.

(xi) $a + a' = I$; (xii) $a \times a' = 0$ ఇపుడు

(xiii) $(a+b)' = a' \times b'$; (xiv) $(a \times b)' = a' + b'$

అని సులభముగా రుజువుచేయవచ్చును. అనుపూరణ ప్రక్రియను కూడికలను గుణకారముగను, గుణకారమును కూడికలుగను మార్చునని తలంచినచో పై సూత్రములు పరస్పర ద్వంద్వములు. పై కనపరచిన పర్యవసానముల నుండి (xiii) $a + (a \times b) = a$ అని రుజువుచేయవచ్చును.

తర్కశాస్త్రపు బీజగణితము : బూలియన్ బీజగణితము నకు తర్కశాస్త్రీయ బీజగణితమని ఇంకొక పేరు. ఏలన, తర్కశాస్త్రీయ న్యాయ ప్రయోగములు బూలియన్ బీజ గణిత పద్ధతి ననుసరించుచున్నవి. దీనికై క్రింద పేర్కొనిన ప్రసిద్ధ న్యాయ ప్రయోగమును పరిశీలింతము.

మానవులందరు మర్త్యులు.

సోక్రటీజ్ ఒక మానవుడు.

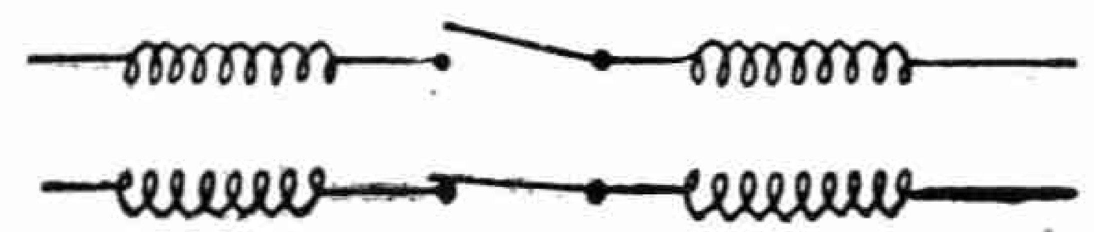
కనుక సోక్రటీజ్ మర్త్యుడు.

మర్త్యసమూహమును M అను సంకేతముచేతను, మానవ సమూహమును m అను సంకేతముచేతను తెల్పుదము. తరువాత ఒక్క సోక్రటీజ్‌నే మాత్రము ఇముడ్చుకొనిన గణమును S చే సూచింతము. ఇప్పుడు 'మానవులందరు మర్త్యులు' అను వాక్యము m సమూహము M లో ఇమిడి యున్నదని మనకు తెలియజెప్పుచున్నది. అందువలన m, M ఈ రెండింటికి ఉమ్మడిగా ఉన్న అంశము m అగును. అనగా $M \times m = m \times M = m$. ఇటులనే సోక్రటీజ్ మానవుడు అను వాక్యము S, m లో ఇమిడి యున్నదని సూచించును. అందువలన $m \times S = S \times m = S$. ఈ రెండు వాక్యములనుండి సోక్రటీజ్ మర్త్యుడు అని మనము రుజువుచేయవలసియున్నది. ఇది చాల సరళ ప్రక్రియ. ఇది బూలియన్ బీజగణితమునుండి పర్యవసించును.

$M \times m \times S$ అను గుణకారఫలము నాలోచింతము. దీనిని $(M \times m) \times S$ అని గాని, లేదా $M \times (m \times S)$ అని గాని గణిత నియమముల ప్రకారము కుండలీకరించవచ్చును. ఈ రెండు విధములును (iv) వ నియమ ప్రకారము సమాన ములు. మొదటిరీతి కుండలీకరణము $m \times S$ అను ఫలమును మన కందజేయును, ఏలన, $M \times m = m$. $\therefore (M \times m) S = m \times S$. అయితే $m \times S = S$. కనుక మొదటి కుండలీ కరణ విలువ S. ద్వితీయ కుండలీకరణవిధానము $M \times S$ అను ఫలము నిచ్చును. ఏలన $m \times S = S$. ఇట్లు, $S = M \times S$ అని మనకు పర్యవసానము లభ్యమైనది. ఇదియే మనము రుజువు చేయవలసినది.

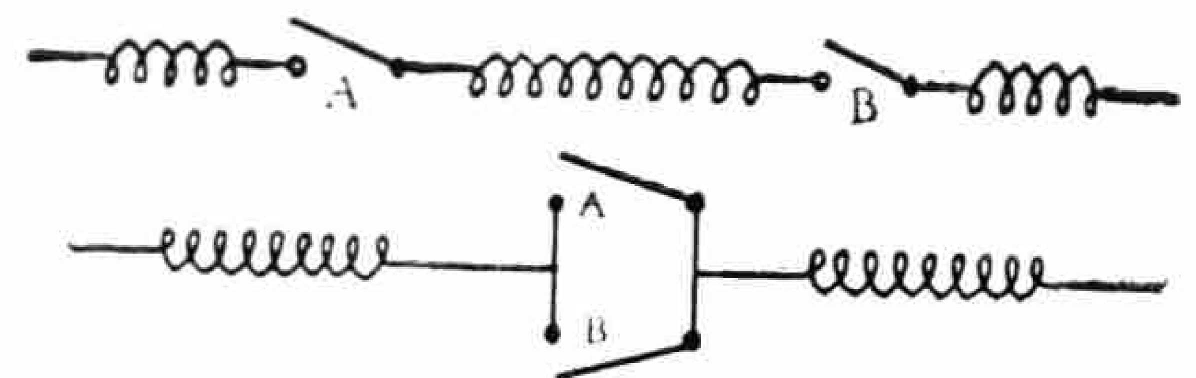
విద్యుత్ప్రవాహముల స్విచ్చి కార్యముల బీజగణితము : విద్యుత్ స్విచ్చి అనగా విద్యుత్ ప్రవాహమును పోనిచ్చు (సంవృత) స్థితి లేదా ఆపు (వివృత) స్థితి అను రెండు స్థితులు గల ఒక సాధనము. స్విచ్చి సంవృత స్థితిపై నున్నపుడు విద్యుత్తు స్విచ్చిగుండ ప్రవహించును. అది వివృత స్థితిలో నున్నచో విద్యుత్ప్రవాహముండదు.

I అను సంకేతముచే స్విచ్చి ద్వారా విద్యుత్ప్రవాహము ప్రవహించు చున్నదనియు, 0 అను సంకేతముచే అట్లు ప్రవహించుట లేదనియు గుర్తింతము. ఇప్పుడు A, B అను రెండు స్విచ్చిలను గణన లోనికి తీసికొందము. ఈ రెండు స్విచ్చిలును సమాంతరముగ గాని, శ్రేణివిధమున గాని సంబద్ధములై యుండవచ్చును. (చూ. క్రింది చిత్రములు) ఒకే స్విచ్చి



చిత్రము 299

299 చిత్రములో పై భాగము వివృతస్థితి అనగా విద్యుత్ ప్రవహించదు. క్రింది భాగము సంవృతస్థితి విద్యుత్ ప్రవ హించును. సంకేతము I రెండు స్విచ్చిలు A, B క్రింది విధమున ఏర్పాటుచేయవచ్చును. చిత్రము 300 లో ఉపరి



చిత్రము 300

భాగము శ్రేణిబంధమును, క్రింది భాగము సమానాంతర బంధమును సూచించుచున్నవి.

A, B లలో నేదైయైన సంవృతము (అనగా ప్రవాహము న్నదై) కావచ్చును లేదా వివృతము (అనగా ప్రవాహము లేనిదై) ఉండవచ్చును. మొదటి పక్షమున దాని విద్యు ద్వాహక మూల్యము I అగును, రెండవ పక్షములో

దాని విద్యుద్వాహక మూల్యము 0 అగును. ఇప్పుడు ఆ రెండు స్విచ్చిల సమ్మేళనము యొక్క విద్యుద్వాహక మూల్యమేది? అని ప్రశ్న. ఈ మూల్యమును C చేత సూచించెదము.

శ్రేణిబంధమున $A = 0$, $B = 0$, అయితే అప్పుడు $C = 0$ (ప్రవాహముండదు గనుక) $A = 0$, $B = I$ అయితే $C = 0$ (శూన్యప్రవాహము) $A = I$, $B = 0$ అయితే మరల $C = 0$ (శూన్యప్రవాహము) $A = I$, $B = I$ అయినచో $C = I$ సమ్మేళనము ద్వారా ప్రవాహముండును.

ఈ పర్యవసానముల 0, I ల గుణకార నియమములతో సరిపోల్చి చూచినచో మనము $C = A \times B$ అని ప్రతి పక్షములో రుజువుచేయవచ్చును.

సమానాంతర బంధమున $A = 0$, $B = 0$ అయితే $C = 0$ (శూన్యప్రవాహము) $A = 0$, $B = I$ అయితే $C = I$ ప్రవాహము సమ్మేళనము ద్వారా ప్రవహించును. $A = I$, $B = 0$ అయితే $C = I$ ప్రవాహమున్నది. $A = I$ అయి, $B = I$ అయితే $C = I$ ప్రవాహమున్నది. 0, I ల కూడిక నియమములతో పై పర్యవసానముల సరిపోల్చి చూచినచో ప్రతి పక్షమందును $C = A + B$ అని చూపవచ్చును.

ఇచ్చట మనము గ్రహించవలసిన విషయమేమన + అను వ్యాపారము, తర్కశాస్త్రమందలి 'లేదా' అను పదము, స్విచ్చిల సమానాంతర బంధము ఇవన్నియు సంబద్ధములై యున్నవి. × అను వ్యాపారము, తర్కశాస్త్ర మందలి 'మరియు' అను సముచ్చయ పదము, స్విచ్చిల శ్రేణి బంధము సంబద్ధములై యున్నవని, వైద్యుత సిద్ధాంతమందు ప్రవాహముల పరిశీలించుటకును, వాటిని సరళీకరించుటకును బూలియన్ బీజగణితము విస్తారముగ వాడుకలో నున్నది.

బూలియన్ బీజగణితము వికాస విస్తారమును గన్నది. శుద్ధ బీజగణిత సిద్ధాంతమున ఇది ఒక అంశము. మనమిచ్చట గణముల కూడికకు, వాటి పరస్పర ఛేదనమునకు +, × గురుతుల వాడితిమి. కాని +, × లకు బదులుగా వాడబడు సంకేతములు $\cup$ (సమూహ సంకలనము), $\cap$ (సమూహ ఛేదన లేదా గుణకారము). పంకజమ్

బెసెల్, ఎఫ్. డబ్ల్యు (1784 - 1846) : జర్మనీ ఖగోళ, గణిత శాస్త్రవేత్త. మిన్‌డెన్ నగరమునందు 1784 జూలై 22 న జననము. తామస్ హారియట్ 1607 లో చేసిన ఖగోళ అవేక్షణల నుండి హాలీ ధూమకేతువు కక్ష్యను 1804 లో బెసల్ గణించెను.

లిలియాంతల్ లోని జె. హెచ్. ష్రూటర్ వేధశాలలో సహాయకుడుగ 1805 లో బెసల్ నియమింపబడెను. 1807 లో కన్పించిన ధూమకేతువుపై బెసల్ చేసిన పరిశోధనలు ఆతని ఖ్యాతికి మూలమైనవి. ప్రష్యా రాజు ఆహ్వానముతో కూనిగ్స్‌బర్గ్ నందు నిర్మింపబడు నూతన వేధశాల నిర్మాణ పర్యవేక్షణ బాధ్యతను 1810 లో స్వీకరించి, వేధశాల నిర్మాణము పూర్తి అయినప్పటినుండి (1813), మరణాంతము వరకు దానికి డైరెక్టర్‌గ ఉండెను. నక్షత్రముల స్థానముల విజ్ఞానమును పెంపొందించు లక్ష్యముతో జేమ్స్ బ్రాడ్లీ గ్రీన్‌విచ్ వేధశాలలో చేసిన అవేక్షణలను సంస్కరించి 3,222 నక్షత్రముల పట్టికను బెసల్ 'ఫండమెంటా ఎస్ట్రానమీ' అను గ్రంథమున 1818 లో ప్రచురించెను. ఖగోళ అవేక్షణలను సంస్కరించుటయందు బెసల్ ప్రవేశపెట్టిన ఏకరూప వ్యవస్థ నేటికి వాడుకలో ఉన్నది. 1821-33 మధ్య కాలములో -15° నుండి $+45^{\circ}$ మండలములలో 9 వ తరము వరకు ఉన్న నక్షత్రముల నన్నిటిని బెసల్ అవేక్షించి నిశితముగ స్థాననిర్ణయము చేయబడిన నక్షత్రముల సంఖ్యను 50,000 కు పెంచెను.

సెకనుల లోలక పొడవును 1826 లో బెసల్ సవరించెను. తూర్పు ప్రష్యాలోని మెరీడియన్ చాపము నొకదానిని 1831-32 లో కొలిచి, భూమికి $\frac{1}{299}$ విలోపత్వము (ఎలిప్టిసిటీ) ఉన్నట్లు 1841 లో బెసల్ నిర్ణయించెను.

1838 లో 61 హంస (61 సిగ్ని) నక్షత్రమునకు $0''.31$ అతివర్తనము (పారలాక్స్) ఉన్నదని బెసల్ నిర్ణయించెను. విశ్వసనీయమైన నాక్షత్రాతివర్తనలో ఇదే మొదటిది. మృగవ్యాధుడు (సిరియస్), ప్రోసియాన్ నక్షత్రములకు సహచరులు ఉండితీరవలెనని 1844 లో బెసల్ సూచించెను. మరణ కాలములో ఆతని తరువాత నెప్ట్యూన్ గ్రహ ఆవిష్కరణముతో పరిష్కరింపబడిన సమస్యా పరిష్కారములో బెసల్ నిమగ్నుడై యుండెను.

ఇతని కృషిచే ఖగోళశాస్త్రము ఒక నిశిత విజ్ఞాన శాస్త్రముగ పరిగణింపబడ జొచ్చినది. శుద్ధ గణితములో ఇతడు బెసల్ ఫలములను వ్యవస్థీకరణము చేసెను. కూనిగ్స్‌బర్గ్ నగరమున 1846, మే 17 వ తేదీన బెసల్ మరణించెను. పొ. ల. నా.

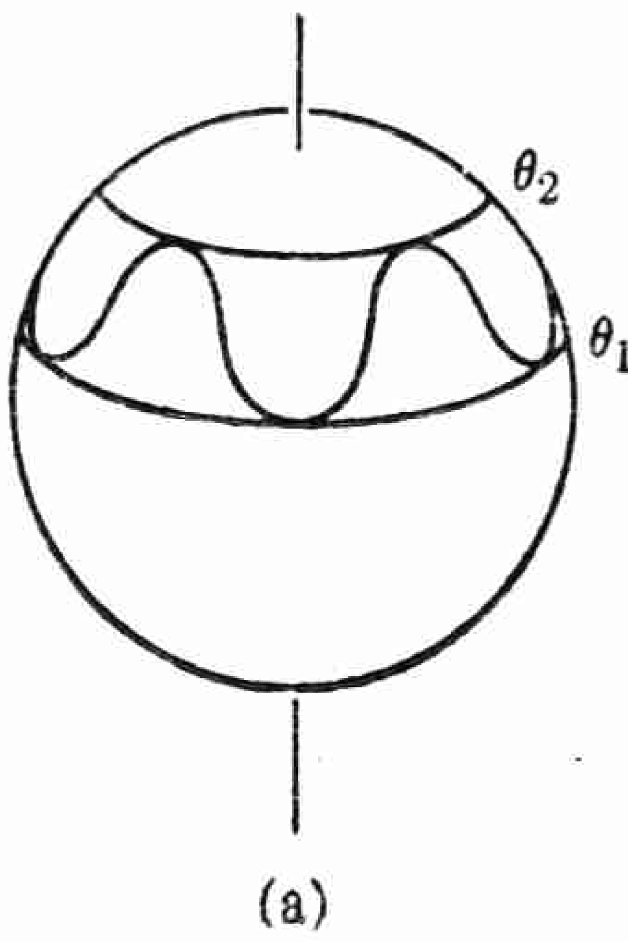
బొంగరము : బొంగరము చిన్న పిల్లల ఆటవస్తువే గాక, కఠిన పరిశోధనలకు కూడ విషయముగా నున్నది. భ్రమణ దర్శకము గైరోస్కోప్ అను పేరు గల శాస్త్రీయోపకరణముయొక్క మోటు రూపము బొంగరము. ఈ భ్రమణ దర్శకము వాయు విమానములను, అంతర్జల నౌకలను, విక్షేపక ఆయుధములను నడపుటయందును

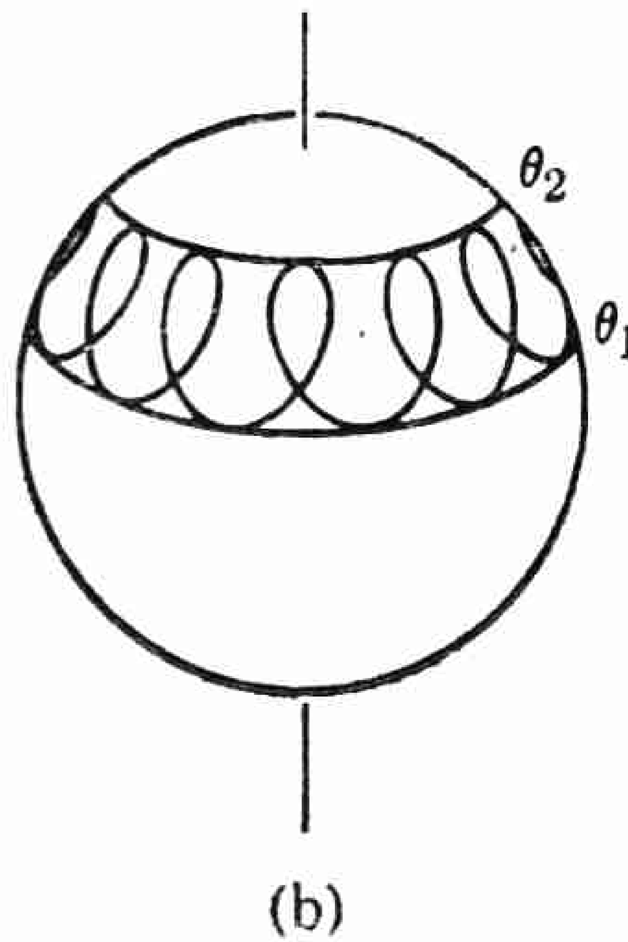
సాధారణముగా యంత్ర శాస్త్రీయ నియంత్రణకును మిక్కిలి వినియోగింప బడుచున్నది.

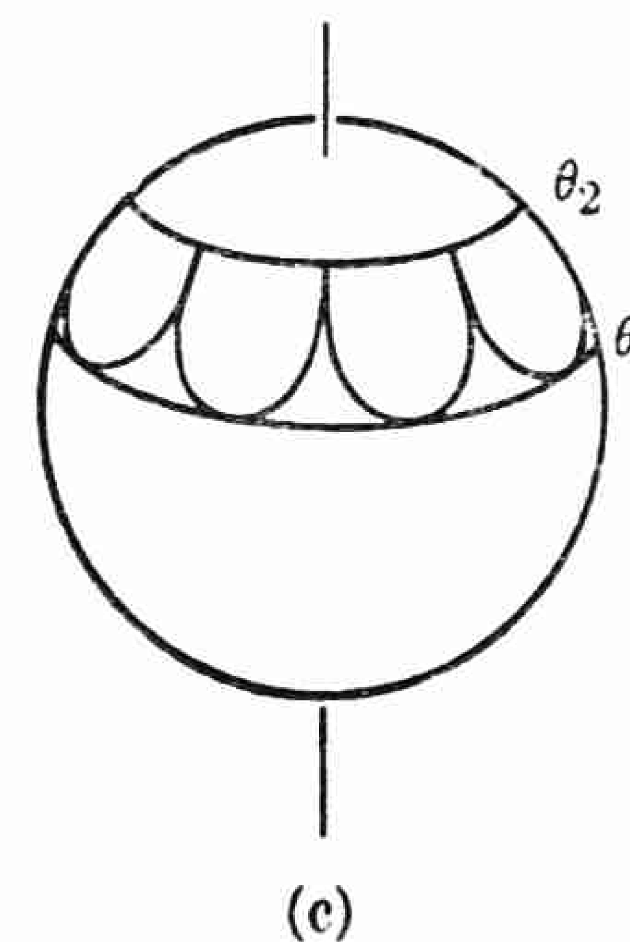
దృఢవస్తుచలనము: దృఢవస్తువు యొక్క చలనమును వర్ణించుటకు ఆ వస్తువునందున్న ఒక నియత బిందువు 'O' ఎట్లు చలించుచున్నదో, ఇంకను ఆ వస్తువు ఆ బిందువు 'O' చుట్టు ఎటుల భ్రమించుచున్నదో వర్ణించవలెను. 'O' యొక్క వేగమును వర్ణించుటకు నిరూపకాక్షములకు సాపేక్షముగ దాని మూడు ఘటకములను ఇవ్వవలెను. ఇట్లే 'O' చుట్టు దాని భ్రమణమును నిరూపించుటకు దాని కోణీయవేగముయొక్క మూడు ఘటకములును నిర్దేశించవలెను. ఇట్లు దృఢవస్తువునకు ఆరు స్వేచ్ఛాంశలు గలవు. ఆ వస్తువులోని ఒక బిందువు స్థిరీకృతమైనచో, (బొంగరములోనిదియే పరిస్థితి; దాని ములికి భూమిపై స్థిరముగా యుండును) అట్టి వస్తువునకు మూడే స్వేచ్ఛాంశలు, అనగా ఆ స్థిర బిందువు చుట్టు భ్రమణము మాత్రము మిగిలియుండును.

బొంగరపు నడక: బొంగరము ఇంచుమించు శంక్వాకారమును భ్రమణరూపమును గల ఘనవస్తువు. ఈ శంక్వాగ్రము నందు తీక్షణమైన బిందువో, లేదా ములికియో అమర్చబడి యుండును. బొంగరము తిరగనప్పుడు దాని ములికిపై యది ఉదగ్రముగ నిలబడనేరదు. కాని తిరుగుచున్నప్పుడు చాలకాలమది నిలబడియుండగలదు. అప్పుడు బొంగరము నిద్రించుచున్నది యందుము. తిరుగుచున్న బొంగరము ఇంకొకతరహా చలనమును కూడ స్వీకరించగలదు. ఇందు బొంగరపు ములికి భూమిని అని పెట్టుకొనియే యుండియు, దాని భ్రమణాక్షము ములికి గుండపోవు ఊర్ధ్వరేఖ చుట్టు ఒక శంకువును రచించును. ఈ శంక్వాకార చలనమునకు అక్షభ్రమణము లేదా విషుచలనము అని పేరు. ఇది సాధారణముగ అక్షభ్రమణముకన్న చాల మంద భ్రమణముగ నుండును. బొంగరపు భ్రమణాక్షము రచించు శంకువుయొక్క కోణము θ, (అనగా తిరుగుచున్న బొంగరముయొక్క భ్రమణాక్షమునకును, ఉదగ్రరేఖకును మధ్యనుండు కోణము) సాధారణముగా రెండు $(\theta + a)$, $(\theta - a)$ అను మూల్యముల మధ్య ఊగుచుండును. కాని, కొన్ని ప్రత్యేక పరిస్థితులందు a శూన్య మూల్యమును స్వీకరించును. అనగా భ్రమణాక్షము భ్రమణ శంకువును రచించును. ఈ θ కోణపు ఊగులాటకు అక్షవిచలనము అని పేరు. బొంగరపు భ్రమణాక్షముపై ఏ బిందువైనను, (ముఖ్యముగా బొంగరపు బుర్రపైనున్నది) రచించు వక్రరేఖ, బొంగరపు ములికి కేంద్ర బిందువుగా గల గోళతలముపై గోచరించును; ఆ గోళము చుట్టి మరల మరల చలించుచుండు ఊర్మిల రేఖగా కన్పట్టును.

ఈ దిగువ నీయబడిన చిత్రములు ఈ ఊర్మిల రేఖ యొక్క సాధ్యరూపముల చూపుచున్నవి.







చిత్రము 301

భూభ్రమణాక్ష చలనము: ఒక నాక్షత్ర దినమున కొకతూరి తన ఉత్తర దక్షిణ ధ్రువముల కలుపు భ్రమణాక్షము చుట్టి ఒక ప్రదక్షిణమును సాగించుచున్న పెద్ద బొంగరము వంటిదియే మనభూమి. ఒక దృఢ వస్తువు దాని జడతా కేంద్రబిందు (గురుత్వబిందువు) ద్వారా పోవు ప్రధానాక్షము చుట్టి భ్రమించుచున్నపుడు ఆ అక్షము యొక్క దిక్కును మార్చు బాహ్యబలము (అనగా అక్షము అపేక్షయా బిభ్రమిషగల) లెవ్వియు లేని పక్షమున, ఆ వస్తువు భ్రమణాక్షపుదిశ ఏ మాత్రమును మారదు. బొంగరము నిద్రించునపుడు సన్నివేశమిదియే. కాని అక్షము ఉదగ్రరేఖకు భిన్నదిశలో నున్నపుడు గురుత్వబలము ఆ అక్షమును ఉదగ్రదిక్కునుండి వంచు బిభ్రమిష కలిగియుండును. ఇట్టి సందర్భములో భ్రమణాక్షము శంక్వాకార చలనమును, భ్రమణాక్షమునకు ఊర్ధ్వలంబరేఖకు మధ్యనుండు కోణపు మూల్యము అందోళనను గ్రహించునని ఇదివరకే చెప్పితిమి. సరిగా నిట్లే గోళాభమును ఆకారముగాగల భూమిపై సూర్యచంద్రులు ప్రయోగించు ఆకర్షణ, భూమి అక్షమును కొంచెము వంచెడు బలము నుత్పాదించును. ఇందుకు తగినట్లు భూఅక్షమే ఒక శంకువు రచించును. 26,000 సంవత్సరములు ఆవృత్తి కాలము గల భ్రమణచలనమిది. దీనికి విషుచలనము అని పేరు. క్రీ. పూ. 120 ప్రాంతమున హిప్పార్కస్ అను గ్రీక్ గణకుడు ఈ విషు చలనమును

కనుగొనెను. ఈ విషుచలనము కారణముగ భూమధ్య రేఖను క్రాంతి వృత్తమును ఛేదించు బిందువు (దీనినే పాశ్చాత్య ఖగోళ శాస్త్రమందు ఫస్ట్ పాయింట్ ఆవ్ ఏరీస్ = మేషాది బిందువు అందురు) క్రాంతి వృత్తము వెంట ఒక సంవత్సరమునకు 50·2 సెకండ్లు చొప్పున వెనుకకు చలించుచున్నది. అక్ష విచలనము కారణముగ భూమధ్య రేఖకును క్రాంతి వృత్తమునకును మధ్య కోణము స్థిరముగా నుండక, రెండు మూల్యములమధ్య ఊగులాడుచుండును. ఈ అక్షవిచలనమును 1748 లో బ్రాడ్లీ హేతుబద్ధముగ వివరించెను. తిరుగుచున్న బొంగరము విషయములో ఉదగ్ర రేఖ ఏ పాత్రను నిర్వహించుచున్నదో, అట్టి పాత్రనే క్రాంతి వృత్త ధ్రువబిందువు భూమి విషయములో నిర్వహించుచున్నది. భారతీయ జ్యోతిశ్శాస్త్రజ్ఞుడు బాలగంగాధరతిలక్ పండితుడు వేదముల ప్రాదుర్భావ కాలమును నిర్ణయించుటకు విషుచలనము నుపయోగించెను.

భ్రమణ దర్శకము : ఇది యొక శాస్త్రీయోపకరణము. దీనియందొక చక్రముండును. చక్రము తిరుగునపుడు దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రము స్థిరముగ సంస్థితమై యుండును. భ్రమణమును స్వీకరించు ఆ చక్రముయొక్క భ్రమణాక్షము ఏ దిశనైనను స్వేచ్ఛతో గ్రహించుటకు వీలగునట్లు అమర్చబడియుండును. ఈ పనికై g_1 అను వలయపు వ్యాసముయొక్క రెండు చివరలందు భ్రమణ చక్రముయొక్క ధురాధారములు (బేరింగ్స్) ఆరోపితములై ఉండును. ఈ వలయము (దీనికి జింబల్ = హోకా పాత్ర అని పేరు) కూడ g_2 అను మరియొక్క వలయము లేదా ఒక ద్విశాఖ (ఫోర్క్) పైననో దాని చివరలు గల ఒక అక్షము చుట్టు తిరుగగలదు. g_2 అను రెండవ జింబల్ తన ఆశ్రయమునకు అతికించబడిన H అను ఊర్ధ్వలంబాక్షము చుట్టు స్వేచ్ఛగా తిరుగుటకు వీలగునట్లు ఉండును. ఇట్లు చక్రము దాని అక్షము చుట్టును, ఈ అక్షము g_1 తో బాటు g_2 లో స్థిరీకృతమైన లంబాక్షము చుట్టునను, g_2 తానే H అను ఊర్ధ్వ లంబాక్షము చుట్టును తిరుగును.

ఇట్లా చక్రమునకు మూడు స్వేచ్ఛాంశలు గలవు. ఉపకరణమందలి భ్రమణాక్షము లన్నియు చక్ర కేంద్రము గుండ పోవును. అందువలన నీ కేంద్రము విశ్రాంత స్థితిలో నుండును. భ్రమణ దర్శకము నెట్లు జరిపినను దాని చక్రముయొక్క అక్షదిక్కు మార్చగల బిభ్రమిష లెవ్వియును నుండవు. అందువలన నీ అక్షము ఆకాశమందు ఒకే దిక్కును చూపుచుండును. ఒక నక్షత్రమువంటి నభోమూర్తివైపు ఆ అక్షమును సారించుచో, ఆనక్షత్రమువైపే అది చూపుచునే యుండును. అనగా ఆ నక్షత్రముతో ఉదయించును, అస్తమించును. అయితే ఉపకరణావయవముల మధ్య ఘర్షణ బొత్తిగా లేకుండి, దాని సమతులిత స్థితి చెడకుండనుండు పరిస్థితులలోనే పై ఉక్తి సత్యమగును. కాని, ఈ పరిస్థితి సంపూర్ణముగ సిద్ధించదు. కాబట్టి తొలిని ఆ ఉపకరణము చూపు దిక్కునుండి అక్షము మెల్లగా విచలించును.

g_1 లేదా g_2 వలయముపై ఒకప్రక్క నుండి ఒత్తిడిని కలుగచేసి ఆ వలయమును త్రిప్ప యత్నించితిమనుకొందము. అక్షదిశలోని ఈ మార్పును భ్రమణ దర్శకము నిరోధించును. కాని, అదే కాలముననే రెండవ వలయమగు g_2 లేదా g_1 సాపేక్షముగ భ్రమణ మొకటి గోచరించును. ఇట్లు g_1 అక్షమునకు సాపేక్షముగ నెలకొల్పబడు ఘూర్ణాంకము g_2 కు సాపేక్షముగ భ్రమణము కలుగును. g_1, g_2 వలయములకు సంపూర్ణ చలన స్వేచ్ఛనొసంగ గల భ్రమణ దర్శకమును రెండు స్వేచ్ఛాంశలు గల ఉపకరణమందుము. ఈ ఉపకరణ సహాయమున దానితో బంధించబడిన ఏ వస్తువుయొక్క చలనమందైన సంభవించు భ్రమణము కనిపెట్టవచ్చును. ఈ రెండు స్వేచ్ఛాంశలలో నొకదానిని నిరోధించినచో, ఉపకరణము ఒకే స్వేచ్ఛాంశ కలదియగును.

వినియోగములు : (1) గైరోకంపస్ : ఇది ఆధునిక వాయు విమానములలో అమర్చబడుఒక నిశిత పరికరము. ఇది అత్యధిక సూక్ష్మగ్రాహి. స్థిరమైన అక్షములకు సాపేక్షముగ వాయు విమాన భ్రమణపు రేటు నిది నిర్ణయించును. ఇది భూభ్రమణమును గుర్తించి, ఆ సమాచారము నుపయోగించి, భ్రమణ దర్శకము యొక్క చక్రాక్షమును యామ్యోత్తర తలములోనికి వచ్చునట్లు చేయగలదు. ఇది అయస్కాంతిక దిక్సూచికన్న చాల సున్నితమైనది. ఒక డిగ్రీలో చాల చిన్న భాగము వరకు అది యథార్థ ఉత్తర దిక్కును సూచించగలదు. అయస్కాంతిక దిక్సూచి భూమియొక్క అయస్కాంతి కోత్తర ధ్రువ దిశనే సూచించగలదు. భూమి ఉత్తర ధ్రువము దీనికన్న భిన్నమైనది. ఒక యోడగాని, విమానముగాని తీవ్ర చలనమునకు గురియగునపుడు దాని అయస్కాంతిక దిక్సూచియొక్క పత్రము శాంతి రహితముగ ఇటునటు ఊగును. ఇట్టి స్థితిలో దిక్సూచి సూచనను నిశితముగ గుర్తించుట కష్టము. గైరోకాంపస్ యొక్క ముఖ పత్రము అట్లు గాక అవిచాల్యముగ నిలుచును. ఈ ఉపకరణమువలన మరియొక లాభమేమనిన, నౌకయొక్క లోపల ఏ సురక్షిత స్థలమునందైనను ప్రధానోపకరణము నుంచి అది ఇచ్చు సమాచారమును విద్యుత్పాదనముల ఉపయోగముచే ఆ నౌకలో వేరుచోట్ల తిరిగి సూచింపబడవచ్చును.

(2) ఇతర వాయు విమానోపయోగి గైరో ఉపకరణములు: ఒక విమానము గ్రుడ్డిగా ఎగురుచున్నప్పుడు, దాని నడపు వానికి అది ఏ దిక్కున పోవుచున్నదో నిర్ధరించుటకు వీలులేదు. ఆ విమానము ఊర్ధ్వముఖముగా పోవుచున్నదో, లేదా, ఎట్లు తిరుగుచున్నదో అతడు చెప్పలేడు. తలక్రిందుల ఎగురుచున్నాడో, (కూడా) లేదా సరిగనే ఎగురుచున్నాడో, ఇది కూడా అతడు గుర్తించలేడు. చిట్టచీకటిలో, లేదా దట్టమైన పొగమంచులో అతడికి క్షితిజము కనిపించదు. అందువలన నాతడు ఊర్ధ్వదిశ యేదియో ఎరుగజాలడు.

ఇట్టి దిగ్భ్రాంతి స్థితిలో గైరో ఉపకరణములు ఉపయోగపడుచున్నవి. ఈ ఉపకరణము అతనికి కృత్రిమ చక్రవాళము నొకదానిని దిఙ్నిర్దేశమునకై కల్పించియిచ్చును. ఇది గాక విమానము తిరుగుచున్న దిక్కును, అది తిరుగు రేటును సూచించు సాధనములు కూడ నుండును. ఆధునిక దీర్ఘయాత్రా విమానములందు స్వయంచాలక కర్ణధారి ఒకటుండును. ఈ ఉపాయము, అసలు చైతన్యయుతుడైన మానవ సారథిత్వము జోలిలేకుండగనే ఒక నిర్దిష్టదిశలో, ఒక నిర్దిష్టమైన ఎత్తులో, ఒక నిర్దిష్టమైన వేగముతో విమానమును నడపగలదు. ఒకవేళ వాయు విమానము పై చెప్పిన నిర్దిష్ట పరిస్థితులనుండి తప్పినచో, వెంటనే ఆవిమానమందు నెలకొల్పబడిన ఉపచార యాంత్రిక వ్యూహములు స్వయంప్రేరితముగ క్రియా రంగము నెక్కి, ఈ విపథగమనమును చక్కజేసి, ఎప్పటియట్లు పూర్వ నిర్దిష్ట పరిస్థితులలో విమాన యానమును సాగించుటకు సహాయపడును.

భ్రామకస్థైర్యస్థాపకము: సముద్రము పై పయనించు పెద్ద నౌక తరంగ సంక్షోభము కారణముగ ఇటునటు దొర్లుచుండును. దీని కారణమున యాంత్రికులు వాంతులకు దొరకొందురు. ఈ దొర్లుటను స్థైర్యస్థాపక భ్రమణ దర్శకమును ఉపయోగించి చాలవరకు తగ్గించవచ్చును.

ఈ స్థైర్య స్థాపకము ఘూర్జన నిరోధక యంత్రముల ప్రేరించి, ఓడ ఊగులాటను తగ్గించును. ఫిరంగులు, చాక్షుష పరికరములు, రాడార్ ఆన్టెనాలు, అన్వేషక దీపములు మొదలైన పరికరములకు స్థైర్యమును చేకూర్చుటకై చాల నిశితమైన గైరో ఉపకరణములను పెద్ద నౌకలపై ఉపయోగించుచున్నారు. ఇంతేకాదు. అట్టి స్థైర్యస్థాపక పరికరములను ఒకే ఇనుప పట్టీమీద నే నడచు రైలుబండ్లకు గమన స్థైర్యము నిచ్చుటకు వాడుచున్నారు. ఈ బండ్లపై అతి శీఘ్రముగ భ్రమించు గైరో చక్రము ఒకటి యుండును. బండి దాని చలనములో ఒక వైపునకు ఒరిగినదో, గైరో ఒక లంబాక్షము చుట్టు తిరిగి ఆ ఒరుగుబాటును వెంటనే నిరోధించును.

చాల వినియోగములందు పూర్వ నిర్దిష్టపరిస్థితుల నుండి తప్పుదలను గుర్తించుటకు, తప్పును దిద్దుటకు వలయు బల ప్రయోగ కార్యమునకై ఉపచార మోటార్లకు సంకేతముల నందించుటకు గైరో ఉపకరణము పనికి వచ్చుచున్నది.

గైరోయొక్క కార్యకరణ శక్తి అది భ్రమించు స్థితిలోనే కన్పట్టును; కనుక విద్యుత్ మోటార్ల సహాయమున దాని చక్రము నిమిషమునకు 24,000 భ్రమణముల చొప్పున సాగు అత్యుచ్చ భ్రమణ గతిలో నుంచబడును. ఒకదాని నొకటి తాకు యంత్రావయవముల మధ్య ఘర్షణ లేకుండ చేయుటకు రెండు ఉపాయముల కల్పించియున్నారు. మొదటిది అందు భ్రమణమున కాధారమగు చీలలను మణులతో చేయుట; రెండవది గైరో ఉపకరణమును, దాని కున్న సగటు సాంద్రతనే గల ద్రవ ద్రవ్యములలో తేల్చి యుండుట. ఆ. స.

బ్రహ్మగుప్తుడు: బ్రహ్మగుప్తుడు క్రీ. శ. 598 లో గుజరాతు రాష్ట్రములోని భిన్నమాల, లేదా, భిల్లమాల యను గ్రామములో జన్మించెను. ఇతడు బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతము, ఖండఖాద్యకము అను రెండు గ్రంథములను రచించెను. మొదటిది ఖగోళీయ, గణితశాస్త్రీయ గణన సూత్రములను బోధించు సిద్ధాంత ప్రకరణము. రెండవది కేవల గణితమునే వివరించుకరణ ప్రకరణము. మొదటి గ్రంథములోని 12 వ అధ్యాయము అంకగణితమును, జ్యామితిని చర్చించును; 18 వ అధ్యాయము బీజగణితమును, 19 వ అధ్యాయము ఛాయా సమస్యలను వివరించును. 20 వది యగు ఛందశ్చిత్యుత్తరాధ్యాయము వృత్తముల, ఛందప్రస్తారములందుపయుక్తమగు ప్రస్తారములను, సంయోగములను చర్చించును. కాని ఇది శుద్ధముగా లేక దుర్బోధముగా నున్నది. అంకగణిత విభాగమందు వర్గములను, ఘనములను కనుగొనుట; వర్గమూల, ఘనమూల ఆహరణము, త్రైరాశికము, మిశ్రములు మొదలైన ప్రధాన వ్యవహారములు పొందుపరుపబడినవి. శూన్యముతో భాగహారము పరిచితవ్యవహారమే. దీని లబ్ధము నకు ఖచ్ఛేదము అని పేరు. బహుశః దీని విలువ అనంతమని బ్రహ్మగుప్తునికి తెలిసియుండవచ్చును.

బ్రహ్మగుప్తుని జ్యామితి చక్రీయ చిత్రములను గూర్చి చర్చించును, వాటి వైశాల్యము, ఉన్నతి, పరివృత్త వ్యాసార్ధము, కర్ణములు, అకరణీయ భుజములు మున్నగు ఇతరాంశములను నిర్వచించును. అందలి ప్రధానోపపాదనములు:

1. త్రిభుజ వైశాల్యము =
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
2. చక్రీయ చతుర్భుజ వైశాల్యము =
$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$
(ఇచ్చట s అనునది అర్ధపరిమాణము ; a, b, c, d లు భుజములు)
3. చక్రీయ చతుర్భుజ కర్ణములు =
$$\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$
మరియు
$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

అకరణీయ చక్రీయ చతుర్భుజమును నిర్మించు ప్రక్రియను కూడ బ్రహ్మగుప్తుడు తెలియజెప్పెను; సూచికిని (పిరమిడ్), సూచీ ఛేదమునకును ఆయతనములను గణించుటకు యథార్థ సూత్రములను కనిపెట్టెను.

బీజగణితమునందతడు చర్చించిన విషయములు: కరణీయ సంఖ్యలు; ధన, ఋణసంఖ్యలు; సరళ బీజగణిత సరూపతలు; సరళ సమీకరణములు; 1 వ, 2 వ తరగతికి చెందిన అనిశ్చిత సమీకరణములు. సమీకరణములకు అకరణీయ, పూర్ణాంకీయ సాధనములను కనుగొనుటకు సూత్రము లీయబడినవి. ఆ సమీకరణములు క్రింది విధములలో నున్నవి:

$by - ax = c$ (కుట్టకము)

$Nx^2 + 1 = y^2$ (వర్గప్రకృతి)

$Nx^2 \pm c = y^2$

$Mn^2 x^2 \pm c = y^2$

$a^2x^2 \pm c = y^2$

ఇవిగాక $bx + c = y^2$ (వర్గకుట్టకము) అను విశేష పక్షములు కూడ చర్చింపబడినవి. ఇట్టి విషయమున యూరపులో 16 వ శతాబ్దము వరకు పురోభివృద్ధి వెలుగు చూడ లేదు. అంకశ్రేఢులు సమగ్రముగ చర్చింపబడినవి. సహజ సంఖ్యల సంకలనఫలములు, వాటి వర్గములు, వాటి ఘనములు, వాటి మొదటి తరగతి త్రికోణీయ సంఖ్యలు ఆర్యభటీయమునందువలె ఈయబడినవి.

ఖగోళ గణితమునందు బ్రహ్మగుప్తుడు మొదటి ఆర్యభట్టు మార్గమును అనుసరించెను. ఖండఖాద్యకరణమందు తన తొలి సిద్ధాంతములందు అతడు ఆర్యభటుని కఠిన విమర్శకు గురిచేసినను, తాను కొన్ని ప్రత్యవేక్షణలను నిర్వహించి, వాటి ఆధారమున ఆర్యభటుని ఫలములు కొన్ని అయథార్థములని చూపెను. బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతమునందలి యంత్రాధ్యాయములో అనేక ఖగోళ ప్రత్యవేక్షణోపకరణముల వివరణ కలదు.

బ్రహ్మగుప్తుని ప్రసిద్ధి భారతదేశమునకే పరిమితము కాదు, అన్యదేశములకు గూడ అతని కీర్తి ప్రాకినది. రెండవ భాస్కరుని సిద్ధాంత శిరోమణికి బ్రహ్మగుప్తుని బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతమే ఆధారము. అల్బరూనీ బ్రహ్మగుప్తుని విశేషముగా ప్రశంసించెను. ఇతని రెండు గ్రంథములు చాలకాలము క్రిందటనే అరబ్బీ భాషలోనికి అనువదింపబడినవి. సరస్వతి

బ్రిగ్స్, హెన్రీ (1556 - 1630): బ్రిటిష్ గణిత శాస్త్రవేత్త ; 1556 లో ఇతని జననము. కేంబ్రిడ్జి యూనివర్సిటీలో విద్యనభ్యసించి, లండన్ నగరమునందలి గ్రెషామ్ కాలేజీలో జ్యామితి ప్రొఫెసర్‌గ కొంత కాలము ఉండి, 1620 లో ఆక్స్‌ఫర్డ్ యూనివర్సిటీలో గణితశాస్త్ర ప్రొఫెసర్ అయ్యెను.

నేపియర్ తన లాగరిదమ్‌లను ప్రచురించిన (1614) ఒక సంవత్సరము తరువాత, బ్రిగ్స్ ఎడింబరో నగరము వెళ్ళి లాగరిదమ్‌ల సవరణను గురించి ఒక నెల రోజుల పాటు నేపియర్‌తో చర్చించెను. నేపియర్ లాగరిదమ్‌లను ఆధారము 10 కు, అనగా 10 యొక్క లాగరిదమ్ 1 గా తీసికొని, సవరించినచో లాగరిదమ్‌లు ఎక్కువ ఉపయోగకరములగునని బ్రిగ్స్ సూచించెను. ఈ సూచనను నేపియర్ ఆమోదించెను. ఈ నూతన ప్రణాళిక ప్రకారము బ్రిగ్స్ లాగరిదమ్‌ల పట్టికను తయారుచేసెను. నేడు వాడుకలో ఉన్నవి బ్రిగ్స్ లాగరిదమ్‌లే. 1 నుండి 20,000 వరకు, 90,000 నుండి 100,000 వరకు ఉన్న సంఖ్యల లాగరిదమ్‌లను 14 దశాంశస్థానముల వరకు అతడు గణించి, 'అరిత్‌మెటికా లాగరిదమికా' అను గ్రంథమున 1624 లో ప్రచురించెను. ఆ తరువాత 20,000 నుండి 90,000 వరకు ఉన్న సంఖ్యల లాగరిదమ్‌లు పూరించబడినవి. పొడుగు భాగహార విధానమును ఇతడే ప్రవేశ పెట్టెను. 'ట్రిగ్నామెట్రియా బ్రిటాన్నికా' అను ఇతని గ్రంథము అతని మరణానంతరము ప్రచురింపబడెను (చూ. నేపియర్ పు. 357). పొ. ల. నా.

భాగహారము: అంక, బీజగణితముల ప్రధాన పరికర్మలలో ఇది ఒకటి. గుణకార విలోమము భాగహారమనబడును. భాగహారమునందు ఎన్నిసార్లు ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యలో ఉన్నదో కనుగొనెదము. భాగింపవలసిన సంఖ్యను విభాజ్యము లేదా లవము (డివిడెండ్)

అని, దేనితో మనము భాగించెదమో ఆ సంఖ్యను భాజకము లేదా హారము (డివిజర్) అని, ఫలితమును భాగఫలము (కోషెంట్) అని అందురు. భాగహారమునకు సాధారణముగ నేడు వాడుకలో ఉన్న సంకేతము '÷' మొట్టమొదట 1659 లో ఉపయోగింపబడెను. a అను సంఖ్యను b అను మరొక సంఖ్యతో భాగించుటను $a \div b$ లేదా $\frac{a}{b}$ అని సూచించవచ్చును.

విభాజ్యములో హారము కచ్చితమైనన్నిసార్లు (పూర్ణసంఖ్య) లేనిచో, మిగిలిన సంఖ్యను శేషము అందురు. భాగహారమును

$$\frac{\text{విభాజ్యము}}{\text{భాజకము}} = \text{భాగఫలము} + \frac{\text{శేషము}}{\text{భాజకము}}$$

అనిగాని, లేదా

విభాజ్యము = (భాగఫలము × భాజకము) + శేషము

అని వ్రాయవచ్చును.

పొట్టి భాగహారము : భాజకము ఒకే ఒక అంకె అయిన, భాగహారమును పొట్టి భాగహారపద్ధతిని చేయుదురు. ఉదా :

$$\text{భాజకము}\quad 7\overline{)7\overset{2}{9}4}\quad \text{విభాజ్యము}$$
$$113\tfrac{3}{7}\quad \text{భాగఫలము}$$

విభాజ్యమునందలి మొదటి అంకెలో, భాజకము 7 శేషము లేకుండ ఒకసారి ఉన్నది. అందుచేత విభాజ్యమునందలి 7 కు క్రింద 1 వ్రాయవలెను. విభాజ్యమునందలి రెండవ అంకె 9 లో భాజకము శేషము 2 తో ఒకసారి ఉన్నది. 1 ని 9 క్రిందను, శేషము 2 ను దానికి పైన తరువాత అంకెఅయిన 4 కు ముందు వ్రాయవలెను; అప్పుడు అది 24 అగును. ఇప్పుడు 24 లో భాజకము 7 మూడుసారులు ఉన్నది; శేషము 3. అందుచేత భాగఫలము $113\frac{3}{7}$ అగుచున్నది.

పొడుగు భాగహారము : భాజకమునందు ఒకటికన్న ఎక్కువ అంకెలు ఉన్నప్పుడు భాగహారమును పొడుగు భాగహార పద్ధతిని చేయుదురు. ఉదా :

```
              7109    భాగఫలము
భాజకము 52 )369675    విభాజ్యము
           364
           ---
             56
             52
             ---
              475
              468
              ---
                7    శేషము.
```

మొదట విభాజ్యములో ఎడమ వైపునుండి భాజకములో ఉన్నన్ని అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య భాజకముతో భాగింపబడునో లేదో మనస్సులో గణించవలెను. 36, 52 కన్న చిన్న సంఖ్య అగుటచేత, మనము 369 తీసికొనవలెను. దీనిలో భాజకము 52 ఏడుసారులు అందాచుగా పోవును. అందుచేత 7 మొదటి ఆంశిక భాగఫలమగును. దీనిని మొదటి ప్రయత్న విభాజ్యమునందలి చివరి అంకె 9 పైన వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు భాజకము 52 ను 7 చేత గుణించి, గుణకారలబ్ధమును 369 నుండి తీసివేయగా శేషము 5 లభించును. ఇప్పుడు విభాజ్యమునందలి తరువాత అంకె 6 ను శేషము 5 కు కుడివైపున దించుకొనవలెను. ఈ 56 రెండవ ప్రయత్న విభాజ్యము అగును. దీనిలో భాజకము 52 ఒకసారి ఉన్నది. రెండవ ఆంశిక భాగఫలము 1 ని మొదటి ఆంశిక భాగఫలమైన 7 కు కుడివైపున, దించుకొనబడిన అంకె 6 కు పైన వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు 52 × 1 ని 56 నుండి వ్యవకలనము చేసిన శేషము 4 లభించును. విభాజ్యమునందలి తరువాత అంకె 7 ను శేషము 4 కు కుడిప్రక్కన దించుకొనగా, మూడవ విభాజ్యము 47 అగును. ఈ 47 లో 52 లేదు గనుక మూడవ ఆంశిక భాగఫలము '0' ను 71 కు కుడివైపున విభాజ్యమునందలి 7 కు పైన వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు విభాజ్యమునందలి తరువాత అంకె 5 ను దించుకొనిన నాల్గవ విభాజ్యము 475 అగును. 475 లో 52 తొమ్మిదిసారులున్నది. 9 ని భాగఫలములో 710 కు కుడివైపున విభాజ్యమునందలి 5 కు పైన వ్రాయవలెను. 52 × 9 గుణకార లబ్ధమును 475 నుండి వ్యవకలనము చేసిన శేషము 7 లభించును. విభాజ్యమునందలి అన్ని అంకెలను మనము ఉపయోగించుటచే ఫలితము $7109\frac{7}{52}$ అగును.

దశాంశసంఖ్యల భాగహారము : దశాంశ సంఖ్యల భాగహారమును చేయునప్పుడు కచ్చితముగ భాజనీయము కానిచో ఎన్నవ దశాంశస్థానమువరకు లేదా ఎన్ని సార్థకాంకములవరకు మనము భాగహారము చేయవలెనో నిశ్చయించుకొనవలెను. (1) భాజకము పూర్ణసంఖ్యగ ఉండుట; (2) భాజకము దశాంశ సంఖ్యగ ఉండు సందర్భములను పరిశీలించెదము. ఉదా 1 : 794 ÷ 7 యొక్క భాగఫలమును రెండు దశాంశ స్థానములవరకు కనుగొనుము :

$$7\overline{)794\cdot000}$$
$$113\cdot428 \quad \text{లేదా}\quad 113\cdot43.$$

ఇచ్చట భాగహారముపైన వివరించిన విధముననే చేయవలెను. అయితే దశాంశ బిందువు తరువాత శూన్యములను వ్రాసికొని భాగహారమును కొనసాగించవలెను.

భాజకము దశాంశ సంఖ్య అయిన, మొదట భాజకము నుండి దశాంశ బిందువును తొలగించవలెను. దీనిని విభాజ్యమును, భాజకమును 10 చేతగాని 10 యొక్క ఘాతములచేగాని గుణించి సాధించవలెను.

ఉదా 2: $14{\cdot}42 \div 0{\cdot}013 = 14420 \div 13$

```
        1109·23
   13)14420·00
      13
      ---
       14
       13
       ---
        120
        117
        ---
          30
          26
          --
           40
           39
           --
            1  శేషము.
```

మొదట విభాజ్యములోను, భాజకములోను దశాంశ బిందువు 3 స్థానములు కుడివైపుకు జరుపబడినది. చివరకు మిగిలిన శేషము $\frac{1}{13} < \frac{1}{2}$ అగుటచే ఆ తరువాత వచ్చు భాగఫలము 5 కన్న తక్కువ. అందుచేత రెండు దశాంశ స్థానములకు సవరింపబడిన భాగఫలము 1109·23 అగును.

భాగహార సులభ పద్ధతులు

భాజకము	
10, 100, 1000, ...	విభాజ్యములో దశాంశ బిందువును ఒకటి, రెండు, మూడు, ... స్థానములు ఎడమ వైపునకు జరుపుము.
0·1, 0·01, 0·001, ...	విభాజ్యములో దశాంశ బిందువును ఒకటి, రెండు, మూడు, ... స్థానములు కుడి వైపునకు జరుపుము.
$3\frac{1}{3}$	విభాజ్యమును 3 చేత గుణించి 10 చే భాగింపుము.
$33\frac{1}{3}$	విభాజ్యమును 3 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
$333\frac{1}{3}$	విభాజ్యమును 3 చేత గుణించి 1000చే భాగింపుము.
... ...	... ...
... ...	... ...

భాగహార సులభ పద్ధతులు

భాజకము	
$16\frac{2}{3}$	విభాజ్యమును 6 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
$12\frac{1}{2}$	విభాజ్యమును 8 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
$8\frac{1}{3}$	విభాజ్యమును 12 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
25	విభాజ్యమును 4 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
50	విభాజ్యమును 2 చేత గుణించి 100చే భాగింపుము.
125	విభాజ్యమును 8 చేత గుణించి 1000చే భాగింపుము.

సంఖ్యల భాజనీయత (డివిజబిలిటీ ఆవ్ నంబర్స్): ఒక సంఖ్యను మరొక సంఖ్య నిశ్శేషముగా భాగించునప్పుడు, మొదటి సంఖ్య రెండవ దానిచే భాజనీయము అనబడును; అనగా కచ్చితముగా భాగింపబడును. అట్టి సందర్భములలో, భాజకము, భాగఫలము ఆ సంఖ్య యొక్క విభాజకములు లేదా కారణాంకములు (ఫాక్టర్స్) అనబడును. ఉదా: $160 \div 8 = 20$. ఇచ్చట 160 కు 8,20 విభాజకములు అనబడును.

భాజనీయత పరీక్షలు: ఒక పూర్ణసంఖ్యలోని చివరి అంకె 0, 2, 4, 6, 8 అయిన అనగా అది సరిసంఖ్య అయిన 2 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

ఒక సంఖ్యలోని చివరి అంకె '0' లేదా '5' అయినప్పుడు అది 5 చే భాజనీయము.

ఒక సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము 3 చేత లేదా 9 చేత భాగింపబడిన ఆ సంఖ్య 3 లేదా 9 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

ఒక సంఖ్యలోని చివరి రెండు అంకెలు శూన్యములు అయినప్పుడు లేదా ఆ చివరి రెండు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 4 లేదా 25 చే భాగింపబడినప్పుడు ఆ సంఖ్య 4 చేత లేదా 25 చేత నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

1000 కన్న పెద్ద సంఖ్యలలో, చివరి మూడు అంకెలు శూన్యముగా ఉన్నప్పుడు లేదా ఆ మూడు అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య 8 చే భాజనీయమైన ఆ సంఖ్య 8 చే భాజనీయమగును.

ఒక సంఖ్యలో బేసిస్థానములందు, సరిస్థానములందుఉన్న అంకెల మొత్తముల భేదము 0 గాని, 11 చే భాగింపబడు సంఖ్యగాని అయినప్పుడు ఆ దత్త సంఖ్య 11 చే భాజనీయ మగును (చూ. గుణకారము - పు. 239). పా. ల. నా.

భారతీయ సంఖ్యామానము : భారతీయులకు గణితము ఒక వేదాంగము. వేదములు ఋషిద్రష్టములు. వానికి కర్తలు లేరు. కాబట్టి వేదాంగమగు గణితముకూడ అట్టిదై యుండవలయును గదా! ఇపుడు ప్రచారములో నుండు లిపులకన్నిటికి మూలము బ్రాహ్మీలిపి. వేదములు బ్రహ్మ యందు పుట్టినట్లు బ్రాహ్మీలిపి కూడ బ్రహ్మనుండి ఉద్భవించినట్లు భారతీయుల నమ్మకము. ఆ కారణమును అనుసరించియే ఆ లిపికి బ్రాహ్మీలిపి యను పేరు కలిగినది.

వేదాంగములలో గణితమునకు అగ్రస్థానము ఇవ్వబడినది.

శ్లో॥ యథా శిఖా మయూరాణాం, నాగానాం మణయో
యథా, తద్వద్వేదాంగ శాస్త్రాణాం గణితం
మూర్ధని స్థితం

గణితము వేదాంగము : దీనికి అనేక కారణములు కలవు. జ్యోతిష సంబంధ విషయములనేకములు వేదము నందు కలవు. కల్ప ప్రమాణము ఋగ్వేదము నందివ్వబడినది.

"శీఘవిభిందో అస్మై చత్వార్యయుతా,
దదదష్టావరః సహస్రా". (8-2-4)

దీనికి విల్సన్ సరియగు అర్థమివ్వలేదు. సరియగు అర్థము ఇచ్చుటకు పద్యమును గద్యముగా మార్చవలయును. గద్యరూపములో అది ఇట్లుండును :

శీఘవిభిందో అస్మైదదత్-చత్వారి అష్టావరః అయుతః సహస్రా అనగా నీవు విభిందు జ్ఞానము నాకిచ్చినావు-నాలుగు ఎనిమిది నాలుగులు, పదివేలు వేలు. ఇది 4,320,000,000 లకు సమానము. ఇది భారతీయ శాస్త్ర రీత్యా ఒక కల్ప ప్రమాణము. ఈ విషయము అన్ని పురాణములందును, సూర్యసిద్ధాంతము నందును కలదు.

గ్రీక్‌ల సంఖ్యామానము 'మిరియడ్' = 10000 తోను, రోమన్‌ల సంఖ్యామానము 'మిల్లి = 1000 తోను నిలిచెను. ఋగ్వేదములో కల్పప్రమాణము పదిస్థానముల సంఖ్యయని ఇవ్వబడినది. ఆధునిక విద్వాంసులు వేదకాలము క్రీ. పూ. 1000 కంటె ప్రాచీనమని చెప్పుచున్నారేగాని, మన పురాణములు వేదములు స్వయంప్రకాశములనియును, బ్రహ్మ ముఖములనుండి వెలువడినవనియు తెలుపుచున్నవి. ప్రతి కల్పాంతమున ప్రళయము సంభవించుననియు, బ్రహ్మకు దినమానము ఒక కల్పమనియును, రాత్రి మానమంతే యనియును పురాణములందు వివరింపబడియున్నది. బ్రహ్మయొక్క పగటి కాలములో జగత్సృష్టి జరుగుచుండును, అతని రాత్రికాలములో జగత్ప్రళయమగును. అప్పుడు విశ్వమంతయు వాయువుతో నిండియుండును. కల్ప ప్రమాణము 1000 మహాయుగములు; ఒక మహాయుగము = 4320000 సౌరసంవత్సరములు.

ఒక కల్పములో 14 గురు మనువులు రాజ్యము చేయుదురు. ఒక మనువుయొక్క కాలము 71 మహాయుగములు. ప్రతి మన్వంతరమున జలప్రళయము సంభవించును. అపుడు భూమియంతయు నీటితో నిండిపోవును. గ్రహములు, నక్షత్రములు అట్లే యుండును. ఈ కల్పములో ఆరుగురు మనువులకాలము పూర్తిఅయినది. ఏడవవాడగు వైవస్వత మనువు పరిపాలించుచున్నాడు. అతని కాలములో 27 మహాయుగములు గడిచినవి. 28 వ మహాయుగములో నాల్గవ యుగమగు కలియుగము జరుగుచున్నది. ఇట్లు మన జ్యోతిష గ్రంథములు తెలుపుచున్నవి. ఈ కల్పమునకు శ్వేతవరాహకల్పమని పేరు. ఒక మహాయుగ పరిమాణము 4320000 సౌర సంవత్సరములు. దీనిలో కృతయుగము 4 పాళ్లు, త్రేతాయుగము 3 పాళ్లు, ద్వాపరయుగము 2 పాళ్లు, కలియుగము ఒక పాలు.

మన గ్రంథముల ననుసరించి 1965 సంవత్సరమునకు ప్రస్తుత కల్పములో గతసంవత్సరములు 195, 58, 85, 066 ఇదియే సృష్టికాలము. నవీన భూగర్భ శాస్త్రజ్ఞులు భూమియొక్క వయస్సు 2000,000,000 సంవత్సరములని చెప్పుచున్నారు. ఈ అభిప్రాయము ప్రాచీన భారతీయ గణితముతో సరిపోవుచున్నది.

క్రైస్తవ మతాచార్యులు ఆరవ శతాబ్దమున సభ చేసి, బైబిలు ప్రకారము మానవ సృష్టి క్రీ. పూ. 5000 సంవత్సరములని సిద్ధాంతము చేసిరి. వారు బైబిలు తప్ప ఇతర శాస్త్రముల ననుసరింపక పోవుటచే వారి అనుయాయులగు పాశ్చాత్యశాస్త్రజ్ఞులు ఇతర దేశ చరిత్ర కాలముల నన్నిటిని తారుమారు చేసి, వారి సిద్ధాంతమును అనుసరించునట్లు చేసిరి. భారతీయ విద్వాంసులు కూడా పాశ్చాత్య ప్రభువుల అడుగుల జాడను వెళ్లుట కడు శోచనీయము. మహాభారత కాలమును కూడ వారు మార్చిరి. వారి మతములకు విరుద్ధములగు శ్లోకములను మార్చిరి. కొన్ని ముఖ్య గ్రంథములు ప్రచారములోనికి రాకపోయినవి. అట్టి గ్రంథములలో ముఖ్యమైనది కలియుగ రాజ వృత్తాంతము. నిష్పక్షపాతముగా భారతీయ చరిత్ర పరిశోధనచేసిన వారిలో ముఖ్యులు కీర్తి

శేషులైన టి. యస్. నారాయణశాస్త్రి, పండిత కోట వెంకటాచలం (విజయవాడ).

చరిత్ర కాలములలో కొన్ని ముఖ్య భేదాభిప్రాయములు క్రింద వివరింపబడును :

చారిత్రక అంశములు	భారతీయుల అభిప్రాయము	పాశ్చాత్యుల అభిప్రాయము
వేదములు	అనాది ; బ్రహ్మతో సమకాలీనములు	క్రీ. పూ. 1000
సూర్యసిద్ధాంతము	త్రేతాయుగాది ; అనగా క్రీ. పూ. 21, 63, 102	క్రీ. శ. 400
ఆర్యభటుడు	కలి 360 = క్రీ. పూ. 2742	కలి 3600 = క్రీ. శ. 498
వరాహమిహిరుడు	క్రీ. పూ. 123	క్రీ. శ. 498
బ్రహ్మగుప్త	క్రీ. శ. 36	క్రీ. శ. 628
భట్టోత్పల	క్రీ. శ. 338	క్రీ. శ. 966
బుద్ధభగవానుడు	క్రీ. పూ. 13-1-1807 నిర్యాణము	క్రీ. పూ. 550
ఆదిశంకర జననము	క్రీ. పూ. 509	క్రీ. శ. 550
చంద్రగుప్తమౌర్య	క్రీ. పూ. 1535	క్రీ. పూ. 324

ఇంతవరకు తిన్నని త్రోవను విడిచి ప్రక్క త్రోవను వెళ్ళితిమి. ఇట్లు వెళ్లుట అత్యంతావశ్యకము, అందుచే మన పురాణములు, శాస్త్రములు మొదలైన వానికిని, పాశ్చాత్యుల వాదమునకును గల వ్యత్యాసము అందరికి విశదమగును. ధీమంతులు ఇప్పటికైనను యథార్థమును కనుగొనుటకు ప్రయత్నింతురుగాత! పాశ్చాత్యులు మన చరిత్రముల ప్రాచీనతను ఒప్పుకొనిన వారి గౌరమునకు భంగము కలుగునని వారట్లు చేసిరా యను సంశయము అందరికి ఏర్పడును. వారిలో అగ్రగణ్యుడు కేయీ మహాశయుడు. కాని కొందరు నిష్పక్షపాతముతో వ్రాసినారు. వారిలో ముఖ్యులు ప్రొఫెసర్ బెయిలీ; సర్. డబ్ల్యు. హంటర్.

ఇతర నిదర్శనములు : యజుర్వేద వాజసనేయ సంహిత (17-2) లో సంఖ్యామానములు ఇవ్వబడినవి : ఏక (1) దశ (10), శత (100), సహస్ర (1000), అయుత (10,000), నియుత (100,000), ప్రయుత (1000,000), అర్బుద 10,000,000). న్యర్బుద (100,000,000), సముద్ర (1,000,000,000), మధ్య (10,000,000,000), అంత (100,000,000,000) పదార్థ (1,000,000,000,000).

ఇట్టి సంజ్ఞామానపట్టికలు తైత్తిరీయ సంహితలో రెండు చోట్ల కలవు. (iv, 40, 11, 4); (vii 2, 20, 1). కొన్ని స్వల్పమార్పులతో 'కాఠక, మైత్రాయణి' సంహితలలో ఇవి కలవు.

పంచవింశబ్రాహ్మణములో 'న్యర్బుదము' వరకు యజుర్వేదము నందిచ్చినట్లు ఇచ్చి, తర్వాత 'నిఖర్వ', 'చాడబ', 'అక్షితి' సంజ్ఞలు కలవు.

సాంఖ్యాయన శ్రౌత సూత్రములో 'న్యర్బుద' మునకు తర్వాత 'నిఖర్వ', 'సముద్ర', 'సలిల', 'అంత్య', 'అనంత' సంజ్ఞలు కలవు. ప్రతి సంజ్ఞయు వెనుకటి సంజ్ఞ కంటె పదిరెట్లు ఎక్కువ; కాబట్టి వానికి దశగుణోత్తర సంఖ్యలని పేరు.

తైత్తిరీయ ఉపనిషత్తు అనందవల్లిలో శతగుణోత్తర సంఖ్యలు వాడబడినవి.

మన పూర్వికులకు వేదకాలములో గణితము నందిట్టి జ్ఞానము కలదు. అపుడు ఏదో ఒక విధమగు వ్రాత లేనిచో వారికి ఇట్టి జ్ఞాన మెట్లు లభించినది? శిష్యుల కెట్లు బోధించిరి? పాశ్చాత్యుల వాదము సరియగునా యని ప్రతి మానవునికిని తోచును. వారి ఉద్దేశము భారతీయ విజ్ఞానమంతయు ఆధునికమనియు, గ్రీక్ లనుండియో, అరబ్బులనుండియో వారు అన్నిటిని నేర్చుకొనిరనియు స్థాపించుటయే కాని వేరుకాదు. వైదిక కాలమున ఏదైన లిపి వాడుకలో నుండెనా? అది ఎట్టిది? అను ప్రశ్నలు కష్టసాధ్యములు. లిపి వాడుకలో లేనిచో గణితము నందిట్టి ప్రజ్ఞను చూపుటకు మన ఋషులకు వీలగునా? అని ప్రజ్ఞావంతులు విమర్శింపవలయును.

సరస్వతి బ్రహ్మయొక్క నాలుకయందుండి జనించినది. కాబట్టి సరస్వతి వేదములతో కూడ బ్రహ్మముఖము నుండి వెలువడినది. ఏదో ఒకవిధమగు వ్రాతలేనిచో వేదముల ప్రసారమునకు అవకాశముండునా? రావణుడు యజుర్వేదమంతయుమ సవరించి 50 వాక్యముల వంతున పనసలుగా విభజించెనని పౌరాణిక గాథ కలదు. ఈ విభజన చతురక్షర సంయోగము లేనిచో వీలగునా యని అందరికి తోచుట సహజము. కాబట్టి మన దేశములో ఏదో ఒక లిపి అనాదిగా నుండవలయుననుట నిశ్చయము. కాని ఈ అభిప్రాయము పాశ్చాత్య వాదమునకు విరోధము.

ఛాందోగ్య ఉపనిషత్తునందు ఒక గాథ కలదు. అందు నారద ఋషి సనత్కుమారుని పరవిద్య - బ్రహ్మవిద్య - కు గాను ఆశ్రయించెను. అపుడతనికి ఏయే అపర విద్యలు వచ్చునని సనత్కుమారుడు ప్రశ్నించెను. నారదుడు తనకు తెలిసిన విద్యలన్నిటిని పేర్కొనుచు, తనకు నక్షత్రవిద్య (జ్యోతిషము), రాశివిద్య (అంకగణితము) కూడ వచ్చునని తెలియపరచెను (vii-1-2-4). రాశి

విద్యను చదివిన వారు ఏదో ఒక విధమగు లిపిని వాడ వలయును గదా ?

రామాయణము : నవీన శాస్త్రపరిశోధకులు రామాయణ కాలము దాదాపు క్రీ. పూ. 1000 యని తేల్చినారు. మరికొందరు అంత ప్రాచీనతను రామాయణమునకు ఇవ్వ లేదు. కాని రామాయణములో అయోధ్యాకాండము నందును, సుందరకాండమునందును నాలుగు దంతములు, మూడు దంతములు గల ఏనుగులున్నట్లు వర్ణింపబడినది. అట్టి జంతువులు లక్షలకొలది సంవత్సరములకు పూర్వ ముండినట్లు భూగర్భశాస్త్రజ్ఞులు నిశ్చయించినారు. మన పూర్వికుల అభిప్రాయము ప్రకారము రామావతారము ఈ వైవస్వత మన్వంతరములో 24 వ మహాయుగమున కృతయుగాంతమున జరిగినది.

ఇపుడు 28 వ మహాయుగము జరుగుచున్నది. అందు కృత, త్రేతాద్వాపరములు ముగిసి కలియుగములో 5067 వ సంవత్సరములో నున్నాము.

ఒక మహాయుగ ప్రమాణము	4320000	సంవత్సరములు
కృతయుగ ప్రమాణము	1728000	సంవత్సరములు
త్రేతాయుగ ప్రమాణము	1296000	సంవత్సరములు
ద్వాపరయుగ ప్రమాణము	864000	సంవత్సరములు
కలియుగ ప్రమాణము	432000	సంవత్సరములు

ఇపుడు రామావతార కాలమును నిర్ణయింతము :

24 వ యుగశేషము 1296000
864000
432000

25, 26, 27 మహా యుగముల కాలము
= 4320000 × 3 = 12960000

28 వ యుగములో	కృతయుగము -	1728000
	త్రేతాయుగము -	1296000
	ద్వాపరయుగము -	864000
	కలియుగములో -	5037
	మొత్తము	19,445,067

అనగా 19445067 — 3102 = క్రీ. పూ. 19,441,965 రామాయణ కాలమని తెలియుచున్నది. భూగర్భశాస్త్ర ప్రకారము సృష్టి జరిగి 2000,000,000 సంవత్సరములైనందున రామాయణ కాలము క్రీ. పూ. 19,441,965 అని చెప్పుటకు ఆక్షేపణ ఏమి ? అదియును గాక అపుడు నాలుగు దంతములు, మూడు దంతములు గల ఏనుగు లుండెనని తెలియుచున్నది. దానిని ప్రమాణ వాక్యముగా నేల తీసికొనగూడదు. రామాయణములో యుద్ధకాండము నందు వానరసేనను వర్ణించుటలో క్రింది సంఖ్యామానము ఇవ్వబడినది :

10,000,000	=	కోటి	$= 10^7$
100,000 కోట్లు	=	1 శంకు	$= 10^{12}$
100,000 శంకువులు	=	1 మహాశంకు	$= 10^{17}$
100,000 మహాశంకువులు	=	1 వృందము	$= 10^{22}$
100,000 వృందములు	=	1 మహావృందము	$= 10^{27}$
100,000 మహావృందములు	=	1 పద్మము	$= 10^{32}$
100,000 పద్మములు	=	1 మహాపద్మము	$= 10^{37}$
100,000 మహాపద్మములు	=	1 ఖర్వము	$= 10^{42}$
100,000 ఖర్వములు	=	1 సముద్రము	$= 10^{47}$
100,000 సముద్రములు	=	1 మహాసముద్రము	$= 10^{52}$

ఇచ్చట మానము లక్ష గుణోత్తరము.

10^{52} అనగా ఒకటి తర్వాత 52 సున్నలు గల సంఖ్య అని అర్థము.

ఇంతటి పెద్ద సంఖ్యలను మన పూర్వీకులెరిగియుండిరి. వ్రాతలేక ఇట్టి సంఖ్యల వాడుటకు వీలుకాదుగదా ?

శాసనములు : ఆధునిక చారిత్రక పరిశోధనలో శాసనములు ఒక ముఖ్యమగు అంశము. విదేశీయుల దండయాత్రలకు గత వేయి సంవత్సరములుగా ఉత్తర భారత దేశము గురియయి, అనేక నగరములు పాడుచేయబడెను. దేవాలయములు, ప్రాసాదములు, మసీదులుగా మార్చబడెను. ప్రస్తుత కుతుబ్ మీనార్, భారతీయుల విజయ స్తంభమట; కాశ్మీరములోని 'షాలిమార్ ఉపవనము' పూర్వపు 'సాలవన' మట. అదియు గాక ప్రాచీన పట్టణము లుండు ప్రదేశములన్నిటిని ఉత్ఖననము చేయుటలేదు. ఢిల్లీ, కిష్కింధ, మధుర, మొదలగు ప్రాచీన పురములుండు చోట్లను త్రవ్విన ముఖ్యమగు విషయములు వెలువడుటకు అవకాశము కలదు. కాని ఒక శిలా శాసనము దొరికినది, అది జనమేజయ భూపాలుని దాన శాసనపత్రము (ఇండియన్ ఆంటిక్విటీ) 333 - 334).

శ్రీ కురువంశావతంస శ్రీ జనమేజయ భూపాలానాం
దాన శాసన పత్రమ్.

శ్లో॥ పాతువో జలదశ్యామాః శార్ఙ్గజ్యాఘాత కర్కశాః
త్రైలోక్యమండ...శ్చత్వారో హరి బాహవః

స్వస్తిశ్రీ జయాభ్యుదయే యుధిష్ఠిర శకే ప్లవంగాఖ్యే (ఖ్య) ఏకోననవతి (89) వత్సరే సహస్య (మార్గశిర) మాసి అమావాస్యాయాం సోమవాసరే శ్రీ మన్మహా రాజాధిరాజ పరమేశ్వరో వైయగ్రణీ వైయాఘ్ర (?) పాదగోత్రజః శ్రీ జనమేజయ భూపః, కిష్కింధా నగర్యాం సింహాసనస్థః సకల వర్ణాశ్రమ ధర్మ ప్రతిపాలకః పశ్చిమదేశస్థ సీతాపుర వృకోదర క్షేత్రే తత్రత్యముని

బృంద మఠస్య గరుడవాహన తీర్థ శ్రీమచ్ఛిష్య కైకయ చాధై రారాధిత సీతారామస్య పూజార్థ కృతభూదాన శాసన మస్మ త్ప్రపితామహ యుధిష్ఠిరాధిష్ఠితముని బృంద క్షేత్రస్య చతుః సీమా పరిమితి క్రమః

ఈ శాసనమును కృత్రిమమని ఎవరును నిరసింపలేదు. కాబట్టి కలియుగాదిలోనే 'వ్రాత' ప్రచారములో నుండ వలయునని తోచుచున్నది.

మరికొన్ని నిదర్శనములు: (i) ఎపిగ్రాఫికా కర్నాటికా, షిమొగ్గజిల్లా. Vol 2, శాసనము 183, పుట 63 లో

"తుంగభద్రా హరిద్రా సన్నిధౌ కటకముత్కలితం, చైత్ర మాసే, కృష్ణపక్షే, సోమదినే భరణీ మహానక్షత్రే..." అని యున్నది.

"కటక ముత్కలితము" అనగా కలి 111.

(ii) కుతూహల మంజరిలో వరాహమిహిరుని కాలము 3042 కలియనియు, కాళిదాసుడు జ్యోతిర్విదాభరణమును 3068 కలిలో వ్రాసినట్లు ఇవ్వబడినది. ఇక బౌద్ధయుగమును తీసికొందము.

బౌద్ధయుగము: పౌరాణిక రీతిగా బుద్ధుని నిర్వాణము క్రీ. పూ.13-1-1807. ప్రచారములోనుండు కాలము క్రీ. పూ. 550. ప్రచారములో నుండు కాలము క్రింద ఇవ్వబడును.

లలిత విస్తరము: ఒక బౌద్ధ గ్రంథము క్రీ. పూ. మొదటి శతాబ్దమని అభిప్రాయము. అది విమర్శనీయము.

అందు బౌద్ధ - అర్జునుల సంవాదములో కోటికంటె పెద్ద సంఖ్యలు వివరింపబడియున్నవి:

100 కోట్లు = 1 అయుతము.
100 అయుతములు = 1 నియుతము.
100 నియుతములు = 1 కంకర.
100 కంకరలు = 1 వివరము.
100 వివరములు = 1 క్షోభ్యము.
100 క్షోభ్యములు = 1 వివాహము.
100 వివాహములు = 1 ఉత్సంగము.
100 ఉత్సంగములు = 1 బహుళ.
100 బహుళములు = 1 నాగబల.
100 నాగబలములు = 1 తిటిలంబ.
100 తిటిలంబములు = 1 వ్యవస్థాన ప్రజ్ఞాపతి.
100 వ్యవస్థాన ప్రజ్ఞాపతులు = హేతుహిల.
100 హేతుహిలలు = 1 కరబు.
100 కరబులు = 1 హేత్వింద్రము.
100 హేత్వింద్రములు = 1 సమాప్తలంబ.
100 సమాప్తలంబములు = 1 గణనాగతి.
100 గణనాగతులు = 1 నిరవద్య.
100 నిరవద్యలు = 1 ముద్రబల.
100 ముద్రబలములు = 1 సర్వబల.
100 సర్వబలములు = 1 విసజ్ఞాగతి.
100 విసజ్ఞాగతులు = 1 సర్వజ్ఞి.
100 సర్వజ్ఞములు = 1 విభూతాంగము.
100 విభూతాంగములు = 1 తల్లక్షణము.

1 తల్లక్షణము = 10^{53}.

కాచ్చాయన (కాత్యాయన), పాళీ వ్యాకరణములో కోటి రెట్లు హెచ్చగు సంఖ్యలు కలవు. వాని పేర్లు:

కోటి, పకోటి, కోటిప్పకోటి, నహుత, నిన్నహుత, అక్షౌహిణి, బిందు, అబ్బుద, నిరబ్బుద, అహహ, అబబ, అతత, సౌగంధిక, ఉప్పల, కుముద, పుండరీక, పదుమ, కథాన, మహాకథాన, అసంఖ్యేయ.

1 అసంఖ్యేయ = 10^{140} = $10,000,000^{20}$

'అనుయోగద్వార సూత్ర' మను జైన గ్రంథమునందు ప్రపంచమునందుండు జీవకోట్ల సంఖ్య 2^{96}; ఇది ఒక 29 స్థానముల సంఖ్య. కాలమానమును గుర్తించు ఒక సంఖ్య కలదు. దానికి శీర్ష ప్రహేళికయని పేరు. దానిలో 194 స్థానములు కలవు.

గణిత గ్రంథములు: ఆర్యభటుడు దశగుణోత్తరసంఖ్యలను ఇచ్చినాడు. అవి: ఏక, దశ, శత, సహస్ర, అయుత, నియుత, ప్రయుత, కోటి, అర్బుధ, న్యర్బుధ. న్యర్బుదము యొక్క విలువ = 1000,000,000.

శ్రీధరుడు: 18 స్థానములు గల సంఖ్యలకు స్థానముల పేర్లను ఇచ్చియున్నాడు. అవి క్రమముగా ఏక, దశ, శత, సహస్ర, అయుత, లక్ష, ప్రయుత, కోటి, అర్బుద, అబ్జ, ఖర్వ, నిఖర్వ, మహాసరోజ, శంఖు, సరితాంపతి, అంత్య, మధ్య, పరార్థములు.

మహావీరుడు: 24 స్థానముల పేర్లు ఇచ్చియున్నాడు. భాస్కర - II: ఇతని సంఖ్యలు శ్రీధరుని పదములను అనుసరించును. అతడు మహాసరోజమునకు 'మహాపద్మ' మనియు, 'సరితాంపతి' కి జలధి యనియును పర్యాయ పదముల వాడెను.

సంఖ్యలకు వ్యవహార భాషలో నుండు పేర్లు: సంస్కృత మందు ఒకటి నుండి తొమ్మిది వరకు సంఖ్యలకు గల పేర్లు:

ఏక, ద్వి, త్రి, చతుః, పంచ, షట్, సప్త, అష్ట, నవ, సంస్కృతమందు ఒక వింతయగు మార్గము కలదు. ఇరవై ఒకటికి ఏక వింశతి యని యుండును. ఇచ్చట తెలుగులో వలె నుండక, చిన్న సంఖ్య, 'ఏక' మొదట వచ్చును. పందొమ్మిదికి ఏకోనవింశతి అనగా ఇరవైకి ఒకటి తక్కువ యని యర్థము.

వేదములందు ఏకాన్నవిగ్ంశతి అని వాడుదురు. ఏకోన అనునది ఏకాన్న అని వేదములో మారును.

భారత దేశములో వ్రాత: వ్రాత భారత దేశములో ఎప్పటినుండి ప్రారంభమయినదను విషయమును చర్చింప వలయును. పాశ్చాత్యుల అభిప్రాయము ఒక నూతన మార్గము తొక్కినది. వేదములు, సరస్వతి బ్రహ్మ ముఖమునందు పుట్టినవనియు, అవి అనాదిగా నుండె ననియును, వ్రాత వేదములతో సమకాలీనమనియు ఇదివరలో చూపబడినది. కాని పాశ్చాత్యుల అభిప్రాయమును కూడ వివరించుట అత్యావశ్యకము,

సర్ విలియమ్ జోన్స్ (1806), కాప్ (1821), మొదలగు వారు మెసపొటేమియా, ఈజిప్టు దేశములనుండి భారతీయులు వ్రాతను నేర్చుకొని యుండవలయునను వాదమును ప్రతిపాదించిరి. డెక్కె, టెయిలర్ ఇద్దరు దక్షిణ సెమిటిక్ దేశము నుండి బూలర్ ఉత్తర సెమిటిక్ దేశమునుండి మన లిపి లభించినదని వాదమును ప్రతిపాదించిరి. కాని ఓజా మహాశయుడు ఈ వాదమును తీవ్రముగ ఖండించి, బూలర్ విధానమును అవలంబించిన, ప్రచారములోనున్న ఏ లిపిని తీసికొనినను, దాని జనక లిపి ఏదైన నుండవచ్చునను అసందర్భ ఉపపత్తికి అవకాశము కలుగునని చూపించెను.

వసిష్ఠ ధర్మ సూత్రము (XVI - 10, 14 - 15) లో వ్రాత పత్రములు న్యాయసభలో సాక్ష్యమునకు వాడ వచ్చునని చెప్పబడినది. వాసిష్ఠ ధర్మసూత్రము ఋగ్వేద కాలమునకు చెందినదని అందరు ఒప్పుకొని యున్నారు. ఋగ్వేదము (X - 62 - 7)లో ఎనిమిది అంకెతో గుర్తు వేసిన చెవులు గల వేయి ఆవులను నాకు ఇమ్ము' అని యున్నది,

వేదములందు 'అక్షర', 'కాండ', 'గ్రంథ' మొదలగు పదములు కలవు.

మద్రాసు మ్యూజియమ్‌లో పాశ్చాత్యుల అంచనా ప్రకారము క్రీ. పూ. 6000 - 3000 కి చెందిన కొన్ని పురాతన భాండములపై అక్షరములు లిఖింపబడియున్నవి. మొహెంజొదారో, హరప్పా ప్రాంతములలో దొరికిన వస్తువులపై అక్షరములు కలవు. కాబట్టి ఆఫ్రికా, అరేబియా దేశముల నుండి మన పూర్వీకులు వ్రాయుట నేర్చుకొనిరను పాశ్చాత్యవాదము అసంగతమని నిశ్చయమగుచున్నది.

అనాదికాలపు సంజ్ఞలు: మొహెంజొదారో పాత్రలపై అక్షరములను ఇదివరకు కనుగొనుటకు వీలులేక పోయినది. కాని సంఖ్యలకు గుర్తులు నిలువు గీతలైనట్లు కనబడుచున్నవి. అవి ఒకటి ప్రక్కన ఒకటిగ, లేదా రెండు వరుసలుగా ఉన్నవి. అవి కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి:

I   II   III   IIII   IIIII

IIIIII III
        III

మొహెంజొదారో వ్రాతలను పూర్తిగాకనుగొనుటకు వీలు కాలేదు. ఇతర పెద్ద సంఖ్యలకుగూడ అందు సంజ్ఞలు ఉండ వలయును. ఇదివరలో విమర్శించినట్లు మన దేశములో వ్రాతయును, అక్షరములు అనాదిగా ప్రచారములో నుండవలయునని తెలియుచున్నది. ఈ విషయమును పాశ్చాత్యులు ఇదివరలో అంగీకరింపలేదు. కారణము - మన మహోన్నత నాగరికతను చూచి వారికి కలిగిన అసూయయే.

భారతీయ లిపి భేదములు: అశోకుని శాసనములనుండి ఆనాటి లిపులు రెండు విధములని తెలియుచున్నది. ఒకటి ఖరోష్ఠి, రెండవది బ్రాహ్మి.

ఖరోష్ఠి లిపి గాంధార, పంజాబ్ దేశములనుండు శాసనములలో కనబడును. తక్కిన చోట్ల బ్రాహ్మిలిపి.

(అశోకునికాలము పౌరాణికరీత్యా క్రీ.పూ. 1472-1436) ఖరోష్ఠిలిపి: అందు నాలుగు సంకేతములు మాత్రము కలవు. అవి I (1), II (2), III (3), IIII (4). ఈ సంకేతములు శైశవావస్థను మాత్రమే తెలుపుచున్నవి. మంచి తరుణావస్థలోనుండు సంకేతములు శకశాసనములందును, పార్తియన్, కుషాన్ శాసనములందును కనపడును.

1	2	3	4	5	6	7	8
I	II	III	X	IX	IIX	IIIX	XX

10	20	40	100	200

ఖరోష్ఠి లిపి కుడివైపునుండి ఎడమ వైపునకు వెళ్లును. కాబట్టి దానికి సెమిటిక్ దేశము జన్మభూమియా యను ప్రశ్న బయలుదేరును. మొహెంజొదారో లిపి కూడ కుడివైపునుండి ఎడమ వైపుకు వెళ్ళుటచే ఖరోష్ఠి లిపి భారత దేశములో పుట్టినదని ఊహింపవచ్చును.

ఖరోష్ఠి లిపిలో 9వ సంకేతము కనబడదు. ఈ సంకేతములను గమనించిన ఒకటి మొదలు మూడు వరకు నిలువు గీతలతోను తర్వాత ఎనిమిది వరకు X వంటి సంకేతముతోను గుర్తింపబడినది. తర్వాత 3 వంటి సంకేతముచే ఇరవైకి పై సంఖ్యలు గుర్తింపబడినవి. దీనిని కొంతవరకు వింశతి గుణోత్తరమానమని చెప్పవచ్చును.

బ్రాహ్మిలిపి 'అ' ఖరోష్ఠిలిపి 7 గుర్తించును. 7 = 10 అయిన రెండుపదులు = 3 = 20 అయినట్లు తోచుచున్నది. ఈ సంకేతములను 'ఫినిషియన్‌లు' 'అరమేయిన్‌లు' వాడుచుండిరి.

200, 300 ల గుర్తించుటకు 100 యొక్క సంకేతమునకు కుడివైపున 2, 3 యొక్క సంకేతములు వాడబడును.

100 యొక్క సంకేతము బ్రాహ్మిలిపి 'త' 'త్ర' వలె నున్నది.

బ్రాహ్మిలిపి: పాశ్చాత్యుల అభిప్రాయ ప్రకారము క్రీ. పూ. 1000 కంటె పూర్వమే బ్రాహ్మిలిపి కల్పింపబడినట్లు తెలియుచున్నది. ఈ లిపి విదేశీయమని సమర్థించు పాశ్చాత్యుల ప్రయత్నము విఫలమయ్యెను. అతి ప్రాచీన శాసనములు లేనందున, బ్రాహ్మిలిపి ఏకాలమున కల్పింపబడినదియని కనుగొనుటకు వీలులేక పోయినది. శిలాశాసనములు, తామ్రశాసనములు అన్నియును చాలా పురాతనములు కావు. పూర్వకాలమందు మాటకు విలువగలదు. పదిమంది ముందు ఆడినమాటను ఒక సార్వభౌముడుకూడ తప్పడు. కాబట్టి ఆ నాటి దానములకు శాసనములనవసరమని అందరికి తోచినది. అశోకుని కాలమునుండి శాసనములు కలవు. అతనికాలము పౌరాణికరీత్యా క్రీ. పూ. 1472-1436; పాశ్చాత్యుల ప్రకారము క్రీ. పూ. 300. గాంధారదేశమునందు ఖరోష్ఠి లిపిలోను, తక్కిన చోట్ల బ్రాహ్మిలిపిలోను అశోకుని శాసనములు కలవు. బ్రాహ్మిలిపి ఎడమవైపు నుండి కుడివైపునకు వెళ్లును.

ఆ లిపిలోని కొన్ని సంకేతములు:

+ (4), ε (6), 6 (50)

తర్వాత శాతవాహనుని సంతతికి చెందిన వేదశ్రీ యొక్క శాసనములు నానాఘట్టపర్వతముపై కనబడినవి.

[పౌరాణిక రీత్యా ఆంధ్రశాతకర్ణులు మగధ దేశాధీశులై క్రీ. పూ. 833-327 వరకు 500 సంవత్సరములు రాజ్యమేలిరి. వారి సంఖ్య 32. ఇది ప్రచారములో నున్న కాలమునకు భిన్నము]

వానిలోకల సంఖ్యలలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి:

1	2	4	7	9	10	20	80	1000
—	=	+	⌉	ρ	α	○	⊕	T

నాసిక్ శాసనములలో కొన్ని మార్పులు కలవు. అందు ≡ సంకేతము '3' ను గుర్తించును. 100 = ๆ ; 1000 కి వేరు సంకేతము కలదు. స్థానమూల్యము లేని సంఖ్యలను ఆది కాలములో వాడుచుండిరి. తర్వాత 'సున్న' తో కూడ స్థానమూల్యములు గల సంఖ్యలను వాడుట భారత దేశములో తప్ప తక్కిన దేశములలో ఎచ్చటను కనబడదు. చాలకాలము వరకు రెండు లిపులు మన దేశములో ప్రచారములో నుండినట్లు తెలియుచున్నది.

లిపులలో భేదములు: బ్రాహ్మిలిపిలో 1, 4—9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300 — — 1000, 2000 సంఖ్యలకు వేర్వేరు సంకేతములు కలవు. కాని ఖరోష్ఠి లిపిలో 1, 10, 20, 100 సంఖ్యలకు మాత్రము సంకేతములు కలవు. అట్లే ఈజిప్టు, ఫినిషయన్ భాషలలో నుండును.

అక్షరపల్లి, అంకపల్లి: సంఖ్యలకు అక్షరములు వాడినట్లు కొన్ని వ్రాత ప్రతులలోను, శాసనములందును కనబడును. దీనిని జైనులు 'అక్షరపల్లి' అని చెప్పిరి, దశాంశమూలముగ వ్రాయు సంఖ్యలను 'అంకపల్లి' అనిరి.

బ్రాహ్మి అంకెలు అక్షరముల యొక్క మార్పుగా నుండవచ్చునని ఒక మతము కలదు, సంఖ్యలను, అక్షరరూపములను విమర్శించినపుడు ఈ క్రింది సిద్ధాంతము తేలినది:

1, 2, 3. సంఖ్యలకు తిర్యగ్రేఖలు వాడబడినవి,

4. సాధారణముగా క; కొన్ని సమయములందు 'ప్క', ప్న, ల్క, ట్క, ప్కి.

5. సాధారణముగా ట్ఱ; కొన్నిచోట్ల ట, టా, ప్రహురు, ట్రా, నా, న.

6. ఫ్ర, కొన్నిచోట్ల ప్రా, ఫ్రా, ఫ, జ, హా.

7. గ్ర లేదా గ.

8. హ్ర లేదా హ్రా.

9. సరియగు సంకేతము లేదు. కొన్నిచోట్ల ఉ.

10. ప్రాచీనముగా దీనికి అక్షర సంకేతములేదు. కొన్నిచోట్ల ర్య, హ, హృ, ఖ, థా.

20. థ

30. ల

40. ప్ట. లేదా స.

50. అనునాసికములు.

60. పు, ప, ప్ర.

70. పు, ప్ట, ప్ర, ప్న, వ్నా, ప్రా.

ఆవిష్కరణ కాలము: మన శాస్త్రముల ప్రకారము ఈ లిపి అనాదిగా ప్రచారములో నున్నది; పాశ్చాత్యులు దాదాపుగా క్రీ. పూ. 1000 కి పూర్వమే కలదని తలచుచున్నారు. బ్రాహ్మిలిపిని భారతీయులు కనిపెట్టిరనుట నిర్వివాదము. పండిత ఇంద్రాజి అభిప్రాయము ప్రకారము వ్రాత మనదేశములో క్రీ. పూ. 4000 ముందు నుండియే ప్రచారములో నుండెను. దానికి అనేక ఆధార

ములు కలవు. బౌద్ధవాఙ్మయములో గణిత సంకేతములు కలవు. అందు మిక్కిలి గొప్ప సంఖ్యయగు 10^{53} ఇవ్వబడినది. చతుష్షష్ఠి కళలు భారతదేశములో బౌద్ధయుగము నందే వృద్ధికి వచ్చి యుండెను. జైన, బౌద్ధ గ్రంథములు బ్రాహ్మీ లిపి బ్రహ్మచే నిర్మింపబడినదని చూపునట్లు బూలర్ మహాశయుడు వ్రాసి యున్నాడు. అతనికి ఆధారము నారదస్మృతి కూడ.

పూర్వకాలమునందు జాబులు, దస్తావేజులు వ్రాయుటకు, శాసనములు చెక్కుటకు ప్రత్యేక జాతివారు కలరు. వారికి లిపికారులు, లేఖకులు, కరణములు, కాయస్థులు అని పేరు. వారి నిబంధన సూత్రమునకు లేఖపంచాశిక లేదా లేఖప్రకాశ యని పేరు. ఎప్పుడావృత్తి ఆరంభమయినది, వారి గ్రంథములకు ప్రారంభమేది యను విషయము దురూహ్యము.

సంఖ్యామాన పదములు : పదముల మూలమున సంఖ్యల గుర్తించు విధానము భారత దేశములో క్రీస్తు పూర్వము అనేక శతాబ్దములుగా ప్రచారములో నుండెను. కొన్ని సంఖ్యలు క్రింద ఇవ్వబడినవి :

0 - శూన్యము, ఖ, గగన, అంబర, పూర్ణ, అనంత మొదలగునవి.

1 - శశి, ఇందు, విధు, చంద్ర, హిమాంశు, భూమి, క్షితి, కు, రూప.

2 - యమళ, అశ్విన్, దస్ర, నేత్ర, చక్షు, పక్ష, బాహు, కర, కర్ణ, జాను, జంఘ, ద్వంద, యుగళ. యుగ్మ, అయన.

3 - రామ, గుణ, లోక, కాల, అగ్ని, అనల, శిఖ, హోతృపుర.

4 - వేద, శ్రుతి, సముద్ర, కేంద్ర, వర్ణ, ఆశ్రమ, యుగ తుర్య, దిశ, కషాయ.

5 - బాణ, శర, శాస్త్ర, సాయక, ఇషు, భూత, పర్వ, ప్రాణ, పావన, పాండవ, విషయ, తత్త్వ, భావ ఇంద్రియ, రత్న.

6 - రస, అంగ, ఋతు, కాయ, దర్శన, రాగ, అరి, షణ్ముఖ.

7 - నాగ, పర్వత, అగ, ఋషి, వార, స్వర, ధాతు, అశ్వ, ద్వీప.

8 - వసు, అహి, దంతి, ద్విప, ద్విరద, సిద్ధి, భూతి, దిక్.

9 - అంక, నంద, నిధి, గ్రహ, రంధ్ర, దుర్గ.

10 - దిక్, దిశ, అంగుళ, అవతార.

11 - రుద్ర, ఈశ్వర.

12 - రవి, మాస, రాశి.

13 - విశ్వేదేవ, విశ్వ.

14 - మను, విద్య, ఇంద్ర, లోక.

15 - తిథి, ఘస్ర, పక్ష.

16 - నృప, కళా.

17 - అత్యోష్టి.

18 - ధృతి.

19 - అతిధృతి.

20 - నఖ.

21 - ప్రకృతి, స్వర్గ.

22 - కృతి, జాతి.

23 - వికృతి.

24 - గాయత్రి, సిద్ధ, జిన.

25 - తత్త్వ.

27 - నక్షత్ర.

32 - దంత

33 - దేవ, అమర, సుర.

వీనికి సమానార్థపదములు కూడ వాడవచ్చును. సంఖ్యలకు బదులు పదములు శతపథబ్రాహ్మణము, తైత్తిరీయము, ఛాందోగ్య ఉపనిషత్తు, వేదాంగ జ్యోతిషము లందు కనబడును.

జ్యోతిష గ్రంథములందు స్థానమూల్యములు గుర్తించు సంఖ్యలు కలవు. గ్రహభగణముల నిచ్చునపుడు చంద్ర భగణముల సంఖ్య సూర్యసిద్ధాంతములో క్రింది విధమున ఇవ్వబడినది :

ఇందో రసాగ్ని త్రిత్రీషు సప్తభూధర మార్గణాః

రస = 6, అగ్ని = 3, త్రి = 3, ఇషు = 5, సప్త = 7, భూధర = 8, మార్గణ = 5 చంద్ర భగణములు ఒక చతుర్యుగమున 5875, 336 అని తెలియుచున్నది.

బక్షాలీ గ్రంథమునందు కనబడు సంఖ్య స్థాన మూల్యము కలది : షడ్వింశశ్చ (26), త్రిపంచాశ (53), ఏకోనత్రింశ (29), ఏవచద్వాష(ష్ఠి), (62) షడ్వింశ (26), చతుశ్చత్వారించ (44), సప్తతి (70), చతుషష్ఠి (64), నవ నవతి, (99) సనంతరం త్రిరాశీతి (83), ఏకవింశ (21), అష్ట (8) ... ...

26 33 29 62 26 4470 64994... ...83218

సాధారణముగా అంకానాం వామతో గతిః అను న్యాయము గణితజ్ఞులు వాడినను, బక్షాలీ గ్రంథమున ఇపుడు ప్రచారములో నుండు మార్గము అనుసరింపబడినది.

సంఖ్యలకు బదులు అక్షరములు : సంఖ్యలకు బదులు అక్షరములు పాణినిచే వాడబడెను. పాణిని కాలము గూడ వివాదాంశమే. అతని కాలము క్రీ. పూ. 700 అని

ఒక వాదము. పతంజలి మహాముని పాణినికంటె అర్వాచీనుడు, అతని వ్యాకరణమునకు భాష్యకర్తయు కూడ. రాజ తరంగణిలో

చంద్రాచార్యాదిభిర్లబ్ధ్వా దేశం తస్మాత్తదాగమమ్
ప్రవర్తితం మహాభాష్యం స్వంచ వ్యాకరణం కృతమ్

52 వ కాశ్మీర రాజగు అభిమన్యుని కాలము - అనగా క్రీ. పూ. 1234-1182 లో చంద్రాచార్యుడు కాశ్మీరమునకు వచ్చి మహాభాష్యమును వ్యాపింపజేసెను అని కలదు. కాబట్టి పాణిని క్రీ. పూ. 12 వ శతాబ్దమున కంటె ప్రాచీనుడు.

ఆర్యభటుని గ్రంథము దశగీతికలో క్రింది శ్లోకము కలదు :

వర్గాక్షరాణి వర్గే ఽ వర్గే ఽ వర్గాక్షరాణి కాత్
ఙ్మౌయః।
ఖాద్విన్నవకే స్వరానవ వర్గే ఽ వర్గే నవాంత్యవర్గేవా ॥

అనగా, "క నుండి ప్రారంభించు వర్గాక్షరములను బేసి స్థానములందు, అవర్గాక్షరములను సరిస్థానములందు ఉంచవలయును అనగా 'య' అక్షరము 'ఙ్మౌ' కు సమానము. తొమ్మిది అచ్చులు తొమ్మిది బేసి స్థానములందుండు సున్నలను, తొమ్మిది సరిస్థానములందుండు సున్నలను గుర్తించును. తొమ్మిది బేసిస్థానములకు తర్వాత ఈ విధానమునే అనుసరింపవలయును."

వివరణ : ఆర్యభటుని సూత్రము దశ గుణోత్తర రీత్యా సంఖ్యలను గుర్తించు మార్గమును చూపుచున్నది.

క్రింది స్థాన విన్యాసమును గుర్తింపుము :

ఔ	ఓ	ఐ	ఎ	ఌ	ఋ	ఉ	ఇ	అ
అవ	అవ	అవ	అవ	అవ	అవ	అవ	అవ	అవ
ంం	ంం	ంం	ంం	ంం	ంం	ంం	ంం	ంం

అ = అవర్గస్థానము = సరిస్థానము. వ = వర్గస్థానము = బేసిస్థానము. క నుండి మ వరకు ఉండు వర్గాక్షరములను బేసిస్థానములందు వాడవలయును. అవి 1, 2, 3 ... 25 వరకు సంఖ్యలను గుర్తించును. వర్గాక్షరములు య నుండి హ వరకు 3, 4, 5 ... 10 సంఖ్యలను క్రమముగా గుర్తించును. అ చేత మొదట జత ఒకట్లు. దశమ స్థానములను, ఇ చేత రెండవజత వంద, వేయిస్థానములను, గుర్తించును. ఇట్లే ఇతర అచ్చులకు గూడ. బేసి (వర్గ) స్థానములందు వర్గాక్షరములను, సరి (అవర్గ) స్థానములందు అవర్గాక్షరములను వాడవలయును. ఉదా : య = య్ + అ సరిస్థానము దశమస్థానము అ వాడుటచే; కాబట్టి య = 30. యి = య్ + ఇ = పథకము ప్రకారము వేయిస్థానమును గుర్తించును. కాబట్టి యి = 3000. ఙ్ = 5; మ్ = 25; ఙ్మ = 5 + 25 = 30, రెండు హల్లులు సంకలనమును గుర్తించును. గి = గ్ + ఇ = 300, గ వర్గాక్షరము అయినందున. పృ = ప్ + ఋ, ఫ్ = 21 ఋ — 10 లక్షలు, కాబట్టి పృ = 21000000. వృ = వ్ + ఋ, 6 కోట్లు ; ఈ సూత్రము అనుసరించిన లభించు పదముల ఉచ్చారణ క్రమయుతము కాబట్టి కటపయాది విధానము ఎక్కువ ప్రచారములో నున్నది.

శ్లో॥ నాఞా వచాశ్చ శూన్యాని సంఖ్యా కటపయాదయః
మిశ్రే తూపాన్త్యహల్ సంఖ్యానచ చింత్యో హలస్వరః
—సద్రత్నమాల

భావము : న, ఞ లు శూన్యములు. క, ట, ప, యాది అక్షరములు క్రమముగా సంఖ్యలను గుర్తించును. సంయుక్తాక్షరములలో రెండవ హల్లును తీసికొనవలయును. అచ్చుతో చేరని హల్లునకు విలువలేదు. ఉదా : (ఎ) రఘునాద = 2047 (బి) పృథ్వీ (ప = 1, వ = 2) = 12.

శూన్యసంకేతము : ఇది ఛందశ్శాస్త్రమునందు క్రీస్తు పూర్వమే వాడబడినది. వరాహమిహిరుని సమకాలికుడగు జనభద్రగాణి శూన్యమును ఇతర సంఖ్యలవలె ఒక సంఖ్యగా గణించెను. అతడు 3,200,400,000,000 ను అక్షరములలో ముప్పది రెండు, రెండు శూన్యములు, నాలుగు, ఎనిమిది శూన్యములని వ్రాసెను.

బఖాలీ గ్రంథములో శూన్యమునకు ఒక బిందువు వాడబడెను. శూన్యబిందువు అను పదము ప్రచారములోనికి వచ్చెను. తర్వాత ఒక చిన్న వృత్తము 0 బిందువు (·) యొక్క స్థానమును స్వీకరించెను.

ఒక సంఖ్య పై నుంచిన బిందువు (·) ఆ సంఖ్య ఋణాత్మకమని తెలియజేయుటకు మునుపు వాడబడుచుండెను. ఇట్లు అరబ్బులును, ఐరోపియన్‌లును, భారతీయుల ననుసరించి ఋణాత్మక సంఖ్యను గుర్తించుచుండిరి.

భారతీయ సంఖ్యామానము : దశగుణోత్తర సంఖ్యామానము భారతదేశము నుండి ఇతర దేశములకు కొనిపోబడెను. సిరియా దేశస్థుడగు సెవరస్ సెబక్తు క్రీ. పూ. 662 లో వ్రాసిన గ్రంథము భారతీయ సంఖ్యామానము యూఫ్రెటీస్ నదీ తీరమునకు వ్యాపించినట్లు చూపుచున్నది. అనేక అరబ్బీ గ్రంథకర్తలు విస్తారముగా మన సంఖ్యామానమును గురించి వ్రాసియున్నారు. ఆచార్య

భాస్కరాచార్య - I : మహాభాస్కరీయము, లఘుభాస్కరీయము, ఆర్యభటీయ భాష్యము అను భాస్కరోపజ్ఞములగు గ్రంథములు మూడే మనకు మిగిలియున్నవి.

మహాభాస్కరీయము మొదటి ఆర్యభటుని ఖగోళీయపద్ధతి యొక్క వివృతియేయైనను, అదియొక స్వతంత్ర గ్రంథము. ఆనందాశ్రమ గ్రంథావళి (పూనా) లోను, మద్రాసు ప్రాచ్య లిఖిత పుస్తకాగార ప్రచురణలలోను, పరమేశ్వరుని వ్యాఖ్యతో సహా ఈ గ్రంథము ప్రచురింపబడినది. అక్షరశోధన సహితముగ మూలము శోధించబడి వైదుష్య స్ఫోరకమగు ఉపోద్ఘాతముతోను, టిప్పణులతోను టి. యస్. కుప్పన్నగారిచే ఇది ప్రచురింపబడినది.

ఈ భాస్కరుని గురించి మనకంతగా తెలియదు. కాలదేశ గణనలయందు ఈతడు వలభి, హరుకచ్ఛ వంటి నగరములను తీసికొనినాడు. స్థానేశ్వరమునకు విషువచ్ఛాయ పొడవు ఈయనచే ఈయబడినది. కార్తికశుక్ల పాడ్యమితో సంవత్సరారంభమును గణించు సౌరాష్ట్ర సంప్రదాయమును ఇతడు పాటించెను. చోద్యమేమనగా ఈతడు ఉత్తర భారతమందు విస్మృతుడై దక్షిణమున శ్రద్ధతో అనుశీలింపబడినాడు. గోవిందస్వామి, పరమేశ్వరుడు, శేకరనారాయణుడు, నారాయణుడు వంటి ఇతని వ్యాఖ్యాత లందరును కేరళదేశ వాస్తవ్యులు. బ్రహ్మగుప్తుని వ్యాఖ్యాతయగు పృథూదకుడు ఈ భాస్కరుని అనేక పర్యాయములు పేర్కొనుటయేగాక ఇతని గ్రంథములతో బ్రహ్మగుప్తునికి పరిచయమున్నదని చెప్పినాడు. ఆర్యభట పద్ధతిని నిభృతముగననుసరించి, వివరించినవాడైనను, ఈ భాస్కరుడాతని ప్రత్యక్ష శిష్యుడుగా గన్పట్టడు. సావజ్ఞముగా చెప్పినను ప్రభాకరుడే తన గురువని ఇతడు చెప్పుకొనెను. ఈ పరిస్థితుల పర్యాలోచన ఫలితముగ ఈ భాస్కరుడు క్రీ.శ. 500 - 628 మధ్య వాడని చెప్పవచ్చును. అతడు వసంత విషువును మేషాదినుంచినాడు గనుక ఆతని కాలము 574 కు చాల సమీపమై యుండవచ్చును.

మహాభాస్కరీయము ఆర్యభటీయమునకు విస్తరణమే గాక పూరకము కూడను. జీవకోష్టక సహాయములేకుండ గనే అతడు జీవ θ మూల్యములను కనుగొనుటకు దిగువ సూత్రమును తన గ్రంథమందు ప్రప్రథమముగా ఇచ్చినాడు.

జీవ $\theta = d\,(180^\circ - d) + \frac{1}{4}\,\{40500 - d\,(180 - d)\}$

ఇచ్చట d అనగా θ, $180^\circ - \theta$, $\theta - 180^\circ$, $360^\circ - \theta$. ఈ విలువలు నిరూపకాక్షముల యొక్క నాలుగు పాదములను θ యొక్క స్థానమునకు క్రమముగా నన్వయించును. ఈ పద్ధతిని బ్రహ్మగుప్తుడుకూడ చెప్పినాడు.

ఆర్యభటీయ భాష్యము గణితశాస్త్రరీత్యా మిక్కిలి హృదయంగమమగు గ్రంథము. శుల్బసూత్రములలోను, ఆర్యభటీయ సంప్రదాయ వ్యాఖ్యలలోను మనకు తారసిల్లు అంకగణిత, బీజగణిత సత్యములను నిరూపించుటకు జ్యామితి, లేదా చిత్రముల వాడుక ఈ వ్యాఖ్యానమందు కూడ మనకు చక్షుర్గోచరమగుచున్నది. జైన ప్రాకృత గ్రంథములనుండి, మరికొన్ని ఇతర గ్రంథములనుండి ఆకర మీయకుండ తన భాష్యమందు ఇతడుద్ధరించిన వాక్య బాహుళ్యము భారతీయ గణిత సంప్రదాయము యొక్క సారభూత ఏకతను ఉద్ఘోషించుచున్నది. ఇతరులకు తెలియని మస్కరి, పూరణ వంటి గణితజ్ఞుల నామములను ఇతడు పేర్కొనినాడన్న భూతార్థము మన గణితశాస్త్రీయ గ్రంథములు కాలవిప్లవమునకు లోనైనవియను అభిప్రాయము సత్యమేమో యనిపించుచున్నది.

మహాభాస్కరీయమువలె లఘు భాస్కరీయము కూడ ఖగోళశాస్త్ర గ్రంథమే. సరస్వతి

భాస్కరాచార్య II : బ్రహ్మగుప్తుని తరువాత గణిత ఖగోళ శాస్త్రవిదులలో ఉత్తమ తరగతికి చెందినవాడు రెండవ భాస్కరుడు. ఇతడు తన తల్లిదండ్రులను గురించి, జన్మస్థానమును గురించి, తన కాలమును గురించి తానే చెప్పుకొనినాడు. సహ్యాద్రికి సమీపమున విజ్జకవిడ అను గ్రామమున ఇతడు 1036 శక సంవత్సరము (క్రీ. శ. 1114) నందు జనించెను. భాస్కరోపజ్ఞమగు ఖగోళ, గణిత శాస్త్రముల అధ్యయనమునకు, ప్రచారమునకు భాస్కరుని పౌత్రుడగు చంగదేవుడు కట్టించిన మఠమందున్న శిలాశాసనము ఈ సమాచారమును కొంత పూరించి, అనువదించినది. మఠమీనాడు శిథిలమైయున్నను శిలాశాసనము మాత్రము మిగిలియున్నది. అది రెండవ భాస్కరుని కీర్తికి, ప్రజ్ఞకు ఆసూచకమగుటయేకాక, ఈ భాస్కరుని కుటుంబములోని పూర్వగులుకూడ ఒకరి తరువాత ఒకరు మహా ప్రతిభావంతులు జన్మించిరని తెలుపుచున్నది. వీరిలో చాలమంది రాజాస్థానము నాశ్రయించిన విద్వాంసులు. అందులో ఒకడగు త్రివిక్రముడు దమయంతీ కథయను కావ్యమును రచించి, వినుతి కెక్కినవాడు. రెండవ భాస్కరుని జన్మస్థానమగు విజ్జకవిడ గ్రామమునకు స్థాన నిర్దేశము గావించుట సులభము కాదు. ఈతని వ్యాఖ్యాతలు నృసింహ, మునీశ్వరు లిద్దరు ఈతడు మహారాష్ట్రుడని చెప్పియున్నారు. కాబట్టి ఈతని జన్మగ్రామము మహారాష్ట్రము లోనిదై యుండవచ్చును.

రెండవ భాస్కరుని రచనలలో నేడు మిగిలియున్నవి రెండు. అవి సిద్ధాంత శిరోమణియను సిద్ధాంత ప్రకరణ గ్రంథము, కరణ కుతూహలమను పేరు కల కరణ గ్రంథమును. మొదటిది (i) పాటీగణితము లేదా, లీలావతి ; (ii) బీజగణితము, (iii) గ్రహగణితాధ్యాయము, (iv) గోళాధ్యాయము అను నాలుగు ఖండములుగా

నున్నది. వీటిలో మొదటి రెండును స్వతంత్ర గ్రంథములు కావచ్చును. అవి స్వతంత్ర గ్రంథములనియే పరిగణింపబడెను. లీలావతి తడవిన విషయములు అంకగణితము, జ్యామితి. ఈ గ్రంథనామము అసాధారణము. దీని విషయమై అనేక కథలు ప్రచారములో నున్నవి. అందులో అతని కూతురగు లీలావతి కొరకు ఈ గ్రంథము వ్రాయబడియుండుటచే ఈ నామము దాని కుంచబడినదియను ప్రవాదము బలముగ నున్నది. కాని గణితశాస్త్రవైదుష్యముతోపాటు కవిత్వ దృష్టి నలవరచుకొనిన రెండవ భాస్కరుడు హృదయంగమమని తోచి, ఈ పేరు తన గ్రంథమునకు పెట్టి యుండవచ్చును. సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము, భాగహారము, వర్గాన్వేషణము, ఘనానయనము, వర్గమూల సాధనము, ఘనమూల సాధనము అను నీ ఎనిమిది పరికర్మలు (పరికర్మాష్టకము) ఈ గ్రంథమున తొలిని వివరింపబడినవి. తరువాత శూన్యముతో వ్యవహారము (శూన్యపరికర్మ), వ్యస్తవిధి, ఇష్టకర్మ, సంక్రమణ ($a+b$, $a-b$ లను ఇచ్చినచో a, b లను కనుగొనుట), వర్గసంక్రమణ [$(a-b)$, a^2-b^2లనుండి a, bలను సాధించుట], వర్గకర్మ [(a^2-b^2-1) సంపూర్ణ వర్గమగునట్లు a, bలను కనుగొనుట], మూలగుణకము (వర్గమూలములను వినియోగించు సమస్యలు - అనగా వర్గసమీకరణమునకు దారితీయు సమస్యలు), త్రైరాశికము, భాండ ప్రతిభాండకము, మిశ్రవ్యవహారము, శ్రేఢీ వ్యవహారములు, అంకపాశములు, కుట్టకములు చర్చింపబడినవి. శ్రేఢులు, అంకపాశము, కుట్టకములు బీజ గణితమందు విచారించుట సమంజసతరము.

జ్యామితి (క్షేత్ర వ్యవహారము) కర్ణవర్గ సిద్ధాంతముతో ప్రారంభించును. కాని దాని ప్రతిపాదన బీజగణిత ఫక్కిని నడచినది; జ్యామితీయ శాస్త్రమార్గమున సాగలేదు. ఈ ప్రతిపాదన అకరణీయ లంబ త్రిభుజములకు, ఎత్తులకు, దూరములకు చెందు సమస్యలకు ద్వారము. దత్త దైర్ఘ్యములుగల భుజముల నుపయోగించి సంవృత ఋజురేఖీయ చిత్రములను వ్రాయుటకు గల షరతులు తరువాత చర్చింపబడినవి. అనేక విధములగు త్రిభుజముల ఉచ్చత్వముల, వైశాల్యముల లెక్కగట్టుటకు ఉపయుక్తములగు సూత్రములు తరువాత నీయబడినవి. చక్రీయ చతుర్భుజముయొక్క కర్ణములను కనుగొనుటకు బ్రహ్మగుప్తు డొసంగిన నియమమును విమర్శించి, అకరణీయ త్రిభుజముల సంసర్గమువలన అకరణీయ చతుర్భుజములను సాధించుటకు విధానములిచ్చి, కర్ణములెట్లు సులభగణ్యములగునో నిరూపింపబడెను. తరువాతి విషయము వృత్తము, జ్యానిచ్చినచో చాపమును కనుగొను విధము. దీనికి ప్రతీప వ్యవహారమును నిర్వహించుటకూడ వివరింపబడెను. భారతీయ గణితశాస్త్ర చరిత్రలో తొలిసారి గోళముయొక్క ఆయతనమును, ఉపరితల వైశాల్యమును గణించుటకు యథార్థ సమాసములు రెండవ భాస్కరుని గ్రంథములో మనకు తారసిల్లును. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 భుజములుగల ఋజురేఖా చిత్రముల భుజముల పొడవులను లెక్కకట్టుట తరువాతి విషయము. ఖాతవ్యవహారము (త్రవ్విన గోతుల పరిమాణగణన), క్రకచ వ్యవహారము (రంపపు కోతల లెక్కలు) - వీటి విషయమున వాడుకలోనున్న లెక్కలు ఈయబడినవి. ఛాయా వ్యవహారముల (నీడల పొడవు విషయమైన సమస్యలు)లో కొన్ని విచిత్ర సమస్యలు పొందుపరుపబడినవి.

భాస్కరాచార్య-II తన బీజగణితమునందు విచారించిన విషయములు : (i) ధన ఋణరాశులతో జరిపించు మౌలిక వ్యవహారములు (ధనర్ణషడ్విధమ్); (ii) శూన్యముతో వ్యవహారము (శూన్యషడ్విధమ్); (iii) సంకేత వ్యవహారము (వర్గషడ్విధమ్); (iv) కరణీయ సంఖ్యలతో వ్యవహారము (కరణీ షడ్విధమ్); (v) కుట్టకములు; (vi) రెండవ తరగతి అనిశ్చిత సమీకరణములు (వర్గ ప్రకృతి); (vii) ఒక అవిదితాంశగల సమీకరణములు (ఏకవర్ణ సమీకరణములు); (viii) వర్గపూరణ విధానమున వర్గసమీకరణముల సాధన (మధ్యమాహరణ); (ix) అనేక అవిదితాంశలుగల సమీకరణము (అనేక వర్ణసమీకరణము)లో ఒకదానికన్న ఎక్కువగ తెలియని అంకములుగల ఉచ్చతరగతి సమీకరణములు; (x) తెలియని అంశల గుణన ఫలముల కన్వయించు సమీకరణముల (భావిత సమీకరణముల) సాధన.

గ్రహగణితాధ్యాయము సిద్ధాంత శిరోమణియొక్క కేవల సిద్ధాంతభాగము. గోళాధ్యాయము ఖగోళ గణిత సామీచీన్యమును సమర్థించును. ఇందలి విధానముల విశదతమ వివరణము భారతీయ ఖగోళ విద్వాంస శ్రేణిలో ఇతనికి ఉత్తమ స్థానము కల్పించినది,

ఈతని గణితశాస్త్ర నిర్వాహములలో ఈ క్రిందివి ప్రధానములు : శిఖరములన్నియు గోళకేంద్ర స్థానమున కలియునట్లు, వాటి ఆధారములు గోళోపరితలములను ఆక్రమించునట్లు సూచుల (పిరమిడ్స్) నిర్మించి ఆ గోళముయొక్క ఘనమును కనుగొను విధానము ; గోళోపరితలమును సమాన కేంద్ర వలయములుగను, కటకాకృతిగల ఖండములుగను కోసి, వాటి వైశాల్యములను సంకలించుటవలన కనుగొనుట. ఇది ఎట్లు ప్రత్యక్షముగా

నిర్వహింపబడినదో తెలియదు. కాని ఇదియొక విధమగు అంతరీకరణ చయనీకరణ ప్రక్రియ అని పి. సి. సేన్ గుప్తా గారి అభిప్రాయము రెండవ భాస్కరుని శూన్యరాశి గణిత ప్రక్రియ లోకోత్తరము. ఏలన, ఏ రాశియైనను ఖహరమై నపుడు-అనగా శూన్యముతో హరించబడినపుడు-అనంతము ఫలముగా లభ్యమగును అనియు, శూన్యముతో గుణించి హరించ బడినపుడు మారకుండనుండుననియు ఈతడు గుర్తించినాడు. బహుశః రెండవ భాస్కరుడు $\frac{0}{0}$ నిష్పత్తిని $\frac{\epsilon}{\epsilon}$ నిష్పత్తిగా (ఇచ్చట ε అనంతాల్పరాశి) భావించియుండవచ్చును.

చతుర్భుజ వైశాల్యమును, కర్ణములను కనుగొనుటకు బ్రహ్మగుప్తుడిచ్చిన సూత్రములను (చూ. బ్రహ్మగుప్తుడు - పు. 429). రెండవ భాస్కరుడు తన లీలావతిలో తీవ్రముగ విమర్శించెను. కాని బ్రహ్మగుప్తుడు చక్రీయ చతుర్భుజము లనే తన దృష్టిలో నుంచికొనినాడన్న విషయమును ఇతడు గుర్తింపలేక పోయెను. కాని మొత్తముమీద బ్రహ్మగుప్తుని పాదచ్ఛాయలందే నడచి భాస్కరాచార్య-II ఆతనిని తనకు ప్రేరకుడుగ, ఆదర్శముగ గ్రహించినాడు. కరణ కుతూహలమందలి ఖగోళీయాంశములు బ్రహ్మగుప్తుడు తడవినవియే. రెండవ భాస్కరుని బుద్ధి విశ్లేషణ చాతుర్య విలసితమేకాని, ఆతడు ప్రత్యవేక్షణలయందలి ఆదరము నంతగా పాటించినవాడు కాడు. అందువలన వివిధ గణిత, ఖగోళశాస్త్ర సంబంధములగు లెక్కలను వివరించుటయే రెండవ భాస్కరుడు కావించిన నిర్వాహము. అనగా అతని ఖగోళశాస్త్ర జ్ఞానముకన్న గణితశాస్త్రజ్ఞానమే ఎక్కువ యన్నమాట. సరస్వతి

భిన్నములు : ఒక యూనిట్‌లోని సమ భాగములలో ఒకటి లేదా అంతకన్న ఎక్కువ భాగములను గుర్తించునది భిన్నము. ఉదా : ఒక అంగుళము పొడవుగల ఒక ఋజురేఖను మూడు సమభాగములుగ విభజించిన, అందొకదాని పొడవు $\frac{1}{3}$ అంగుళము; రెండింటి పొడవు $\frac{2}{3}$ అంగుళము; ఇది ఖండ సంఖ్య (బ్రోకెన్ నంబర్) భావము. ఉదా : $\frac{3}{4}$ అనునది ఒక పూర్ణ వస్తువును 4 సమ భాగములుగ విభజించిన అందలి మూడు భాగములను సూచించును; లేదా అటువంటి మూడు పూర్ణవస్తువులను 4 సమభాగములు చేసినచో లభించు ఒక సమభాగము అగును.

రెండు సంఖ్యల లేదా రాశుల సూచిత భాగఫలమును భిన్నము అని నిర్వచింతురు.

ఉదా : $\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{a}{b}, \frac{x^2-2y}{x^2-y^2}$.

ఒకే రకమైన రెండు రాశుల మొత్తములను పోల్చు నిష్పత్తిగా కూడ భిన్నమును వ్యాఖ్యానించవచ్చును. ఉదా : A ఆస్తి 2 లక్షల రూపాయలు, B ఆస్తి 3 లక్షల రూపాయలు అయినచో, A ఆస్తి, B ఆస్తిలో $\frac{2}{3}$ వంతు అని, అట్లే B ఆస్తికి, A ఆస్తి $\frac{2}{3}$ రెట్లు అని చెప్పుదుము.

భిన్నములో ఉపరిభాగమును (భాజ్యమును గుర్తించు భాగము) లవము (న్యూమరేటర్) అని, క్రింది భాగమును (భాజకమును గుర్తించునది) హారము (డినామినేటర్) అని అందురు.

భిన్నములలోని రకములు : a, b లు పూర్ణాంకములుగ ఉండి a/b రూపములో వ్రాయబడిన సంఖ్యను అకరణీయ భిన్నము అందురు. ఇది ఒక సరళ భిన్నము. ఉదా : $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$.

a, b పదములలో (లవ, హారములలో) ఏదో ఒకటి లేదా రెండూ అకరణీయ భిన్నములయితే ఆ భిన్నమును మిశ్రభిన్నము (కాంప్లెక్స్ ఫ్రాక్షన్) అందురు.

ఉదా : $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}, \frac{4}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{3}{8}}{8}$.

అంకగణితములో ఒక భిన్నము యొక్క లవము, హారముకన్న చిన్నదైన దానిని క్రమ భిన్నము అని, అట్లు లేనిచో అపక్రమ భిన్నము అని అందురు. ఉదా : $\frac{2}{3}$ క్రమభిన్నము ; $\frac{3}{2}$ అపక్రమ భిన్నము.

ఏ అపక్రమ భిన్నమునైనను భాగహారముచేసి, పూర్ణసంఖ్య-క్రమభిన్నముతోకూడిన మిశ్రమ సంఖ్యగా వ్రాయవచ్చును. ఉదా : $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. ఇట్లే మిశ్రమ సంఖ్యను అపక్రమ భిన్నముగా వ్రాయవచ్చును.

ఉదా : $7\frac{1}{3} = (7 \times 3 + 1)/3 = \frac{22}{3}$.

భిన్నముల ప్రాథమిక నియమము : ఒక భిన్నమునందలి లవ, హారములను శూన్యము కాని ఒకే సంఖ్యచే గుణించినను లేదా ఒకే సంఖ్యచే భాగించినను దాని విలువ మారదు. ఉదా : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{12}{18}$; $\frac{75}{45} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$. కాని, భిన్నమునందలి పదములకు ఒకే సంఖ్యను కలిపిన లేదా తీసివేసిన ఆ భిన్నము యొక్క విలువ మారును.

ఉదా : $\frac{2}{3} \neq \frac{2+5}{3+5} = \frac{7}{8}$; అట్లే $\frac{25}{15} \neq \frac{25-6}{15-6} = \frac{19}{9}$.

భిన్నమును కనిష్ఠపదముల రూపములో వ్రాయుట : ఒక భిన్నమునందలి లవ, హారములకు 1 మినహా మరే ఉమ్మడి భాజకము లేనిచో ఆ భిన్నము కనిష్ఠ పదములలో ఉన్నదని అందురు. అట్లు లేనిచో లవ, హారముల రెండిం

టిని వాటి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకముచే భాగించి, దానిని కనిష్ఠ పదముల రూపములో వ్రాయవచ్చును.

ఉదా: $\frac{45}{63} = \frac{45 \div 9}{63 \div 9} = \frac{5}{7}$.

మిశ్ర భిన్నమును సరళ భిన్నముగ వ్రాయుట: ఒక మిశ్ర భిన్నమునందలి లవ, హారములను, వానిలో ఉన్న హారముల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజముచే గుణించిన అది సరళ భిన్నము అగును. ఉదా: $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$ అనునది మిశ్ర భిన్నము. ఇందు 4 కి, 8 కి క. సా. గు 8. అందుచేత $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{4}\times 8}{\frac{3}{8}\times 8} = \frac{2}{3}$. అను సరళ భిన్నముగా వ్రాయవచ్చును.

సంకలన, వ్యవకలనములు: ఒకే హారము గల భిన్నములను సంకలనము చేయుటకు లవములనన్నింటిని సంకలనముచేసి అదే హారముతో వ్రాయవలెను.

ఉదా: $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x+y}{a}$.

వేరువేరు హారములు గల భిన్నములను సంకలనము చేయుటకు, ముందు ఆ భిన్నముల నన్నింటిని ఒకే హారము గల భిన్నములుగ మార్చవలెను. ఇచ్చిన భిన్నముల హారముల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజమును ఉమ్మడి హారముగ తీసికొనవలెను.

ఉదా: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$.

ఇచ్చట 4, 6 లకు క. సా. గు. 12; ఈ 12 లో మొదటి భిన్న హారము అగు 4 మూడుసార్లు ఉన్నది. అందుచేత మొదటి భిన్న లవ, హారములను మూడుచేతగుణించి దానిని 3/12 గా వ్రాసితిమి. అట్లే 12 లో రెండవ భిన్న హారము అగు 6 రెండుసార్లు ఉన్నది. అందుచేత రెండవ భిన్న లవ, హారములను 2 చే గుణించి 2/12 అని వ్రాసితిమి. ఈ విధముగ ఎన్ని భిన్నములనైనను ఒకే హారము గల భిన్నములుగా మార్చిన పిదప పైన పేర్కొనినట్లు వాటిని సంకలనము చేయవచ్చును.

భిన్నములను వ్యవకలనము చేయునప్పుడు సంకలనములో అనుసరించిన విధమునే అనుసరించి, లవములను కూడుటకు బదులు తీసివేయవలెను.

ఉదా: $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$.

గుణకారము: ఒక భిన్నమును మరొక భిన్నముచే గుణించునప్పుడు లవమును లవముచేతను, హారమును హారముచేతను గుణించవలెను. కారణాంకములలో ఒకటి పూర్ణ సంఖ్య అయినచో, దాని హారము 1 గా తీసికొనవలెను.

ఉదా 1: $3 \times \frac{7}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$;

ఉదా. 2: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$;

భాగహారము: ఒక భిన్నమును మరొక భిన్నముచే భాగించుటకు భాజకమును తలక్రిందులు చేసి గుణించవలెను.

ఉదా. 1: $\frac{3}{4} \div 5 = \frac{3}{4} \div \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$.

ఉదా. 2: $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$;

సరళ భిన్నమును దశాంశ భిన్నముగ వ్రాయుట: లవమును హారముచేత భాగించవలెను.

ఉదా. 1: $\frac{2}{3} = 3\overline{)2\cdot0000}$ $\cdot 666\ldots$;

ఉదా. 2: $\frac{3}{5} = 5\overline{)3\cdot000}$ $\cdot 6$;

దశాంశ సంఖ్యలను సరళభిన్నములుగా వ్రాయుట:

ఉదా. 1: $3\cdot125 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} =$

$$3 + \frac{125}{1000} = 3\frac{1}{8}.$$

ఉదా. 2: $0\cdot\dot{2}\dot{6}$ దీనికి అర్థము ఏమనగా $\cdot 262626\ldots$ అని అనంత ఆవర్తనము చేయవలెననుటయే. దీని విలువ x అనుకొందము. అనగా

$x = 0\cdot262626\ldots\ldots$

ఈ సమీకరణము యొక్క రెండు వైపులను 100 చేత గుణించిన $100\,x = 26\cdot262626\ \ldots\ \ldots$ లభించును.

$\therefore 100\,x - x = 26$; $\therefore x = \frac{26}{99}$;

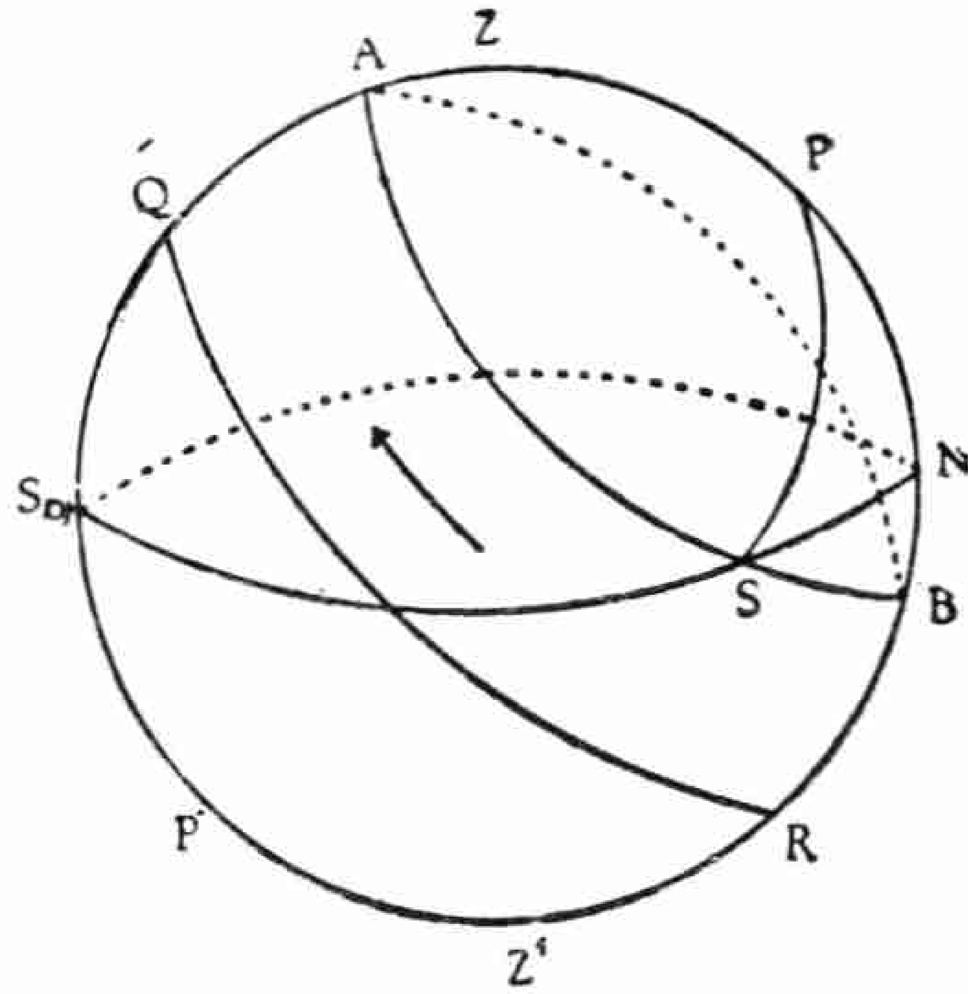
$3\cdot\dot{2}\dot{6}$ విలువ కావలెనంటే దీనిని

$$3 + \cdot2626\ldots\ldots = 3 + \frac{26}{99}$$

అని వ్రాయవలెను (చూ. గణితసమీక్ష పు. 6). పా. ల. నా.

భూ దైనిక పరిభ్రమణము: భూమి తనచుట్టు తాను తిరుగుటకు భూ దైనిక పరిభ్రమణము అని పేరు. ఆ పరిభ్రమణమునకు సంబంధించిన కొన్ని విషయములు ఇందు వివరింపబడును:

తారల ఉదయాస్తమయములు : తారల దైనిక గతి యామ్యోత్తర వృత్తమును రెండుచోట్ల ఖండించును. ఆ రెండు చోట్లను ఆ తారల ఉన్నత ప్రతరణము, అధః ప్రతరణము అని అందురు.



చిత్రము 302

S అను తార యొక్క గతి AB అను క్షితిజమును S, S' బిందువుల వద్దను, యామ్యోత్తర రేఖను A, B ల వద్దను ఖండించుచున్నదని అనుకొందము. ఆ తార S బిందువు వద్ద ఉదయించి, S' బిందువు వద్ద అస్తమించును.

తారల దైనిక గతి విషు వృత్తమునకు సామ్య (సమానాంతర) ముగ ఉండును.

అందుచేత చాపము $ASB =$ చాపము $AS'B$

$$\angle QPS = \angle APS = \angle APS' = \angle QPS'$$

తార ఉదయించునపుడు దాని నత కాలము అది అస్తమించు నప్పటి దాని నత కాలమునకు సమానము.

ఏ తారకైనను ఒక ప్రదక్షిణము చేయుటకు అనగా 360° పరిభ్రమించుటకు 24 గంటలు పట్టును. అందుచేత ఆ తార h° పోవుటకు $\frac{h}{15}$ గంటలు పట్టును. అందుచేత $\angle QPS = \angle QPS' = h^\circ$ అయిన యెడల ఆ తారకు S నుండి A కి పోవుటకు $\frac{h}{15}$ గంటలు, A నుండి S' వద్దకు పోవుటకు అదే కాలము పట్టును. అందుచేత ఆ తార క్షితిజ ఉపరిభాగమున (ఆ తార SAS' గతిమీద S నుండి S' వద్దకు పోవుటకు పట్టుకాలము) $\frac{2h}{15}$ గంటలు, క్షితిజ అధో భాగమున $\left(24 - \frac{2h}{15}\right)$ గంటలు ఉండును.

ముఖ్యముగ గమనించదగినది ఏమన ఒక దినమున సూర్యుడు ఉదయించునప్పుడు, అతని నతకోణము h° అయిన యెడల, ఆ దినమున పగలు $\frac{2h}{15}$ గంటలును, రాత్రి $\left(24 - \frac{2h}{15}\right)$ గంటలనియు తెలిసికొనవలయును.

సూర్యుడు ఉన్నత ప్రతరణము పొందు సమయమును సౌర మధ్యాహ్నమనియు, అధః ప్రతరణమును పొందు సమయమును సౌర అర్ధరాత్రియనియు అందురు.

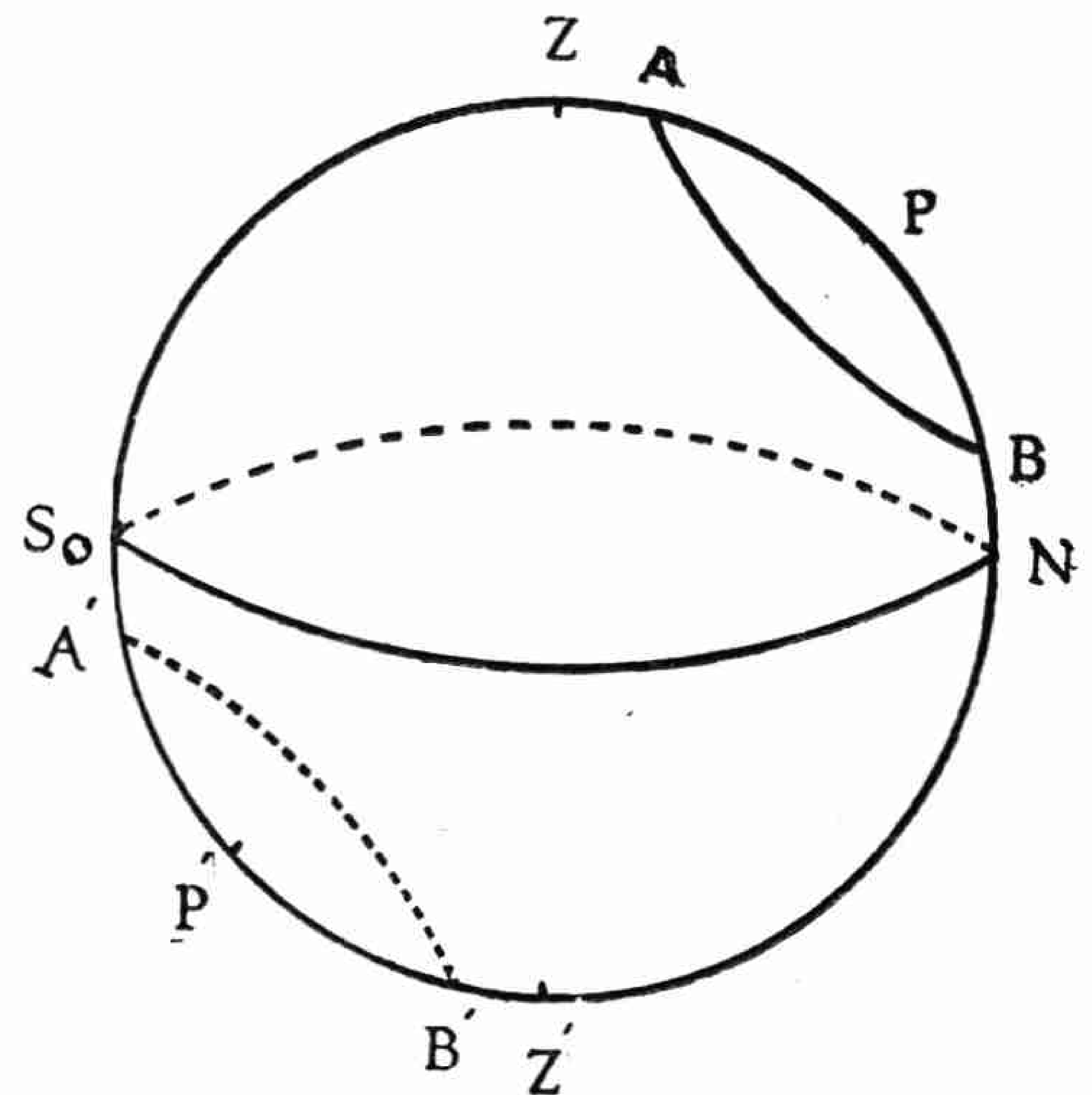
సూర్యుడు (లేదా చంద్రుడు) ఉదయించుటకు పట్టు కాలము : సూర్యుని కోణీయ వ్యాసము D'' అయిన యెడల, సూర్యోదయ ప్రారంభ సమయమున సూర్యుని కేంద్రము క్షితిజమునకు $D''/2$ క్రిందను, పూర్ణోదయానంతరము $D''/2$ క్షితిజమునకు ఉపరి భాగమునను ఉండును. సూర్యుడు (లేదా నభోమూర్తి) పూర్ణోదయము పొందుటకు క్షితిజమును అధిక్రమించుచున్నప్పుడు తన దైనిక పథమున D'' (తన కోణీయ వ్యాసము) ప్రయాణము చేయవలయును.

ఏ నభోమూర్తికైనను x'' క్షితిజ అధోగతమున గల లఘువృత్తము ns_0 నుండి క్షితిజము NS_0 నకు పోవుటకు $\frac{x''}{15\sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\delta}}$ సెకనుల కాలము పట్టును.

[ϕ ఆ ప్రదేశ అక్షాంశము, $\delta =$ ఆ దినమున సూర్యుని క్రాంతి]

క్షితిజము నుండి పై నభోమూర్తికి క్షితిజము NS_0 కు x'' ఉపరి భాగమున గల మరియొక లఘు వృత్తమునకు పోవుటకు కూడా అదే కాలము పట్టును.

పై సిద్ధాంతము మూలమున, సూర్యుడు పూర్ణోదయ మొందుటకు $\frac{D''}{15\cos^2\phi - \sin^2\delta}$ సెకనులు పట్టును. సూర్యునకు ఆ దినమున అస్తమించుటకు కూడా అంతే కాలము పట్టును.



చిత్రము 303

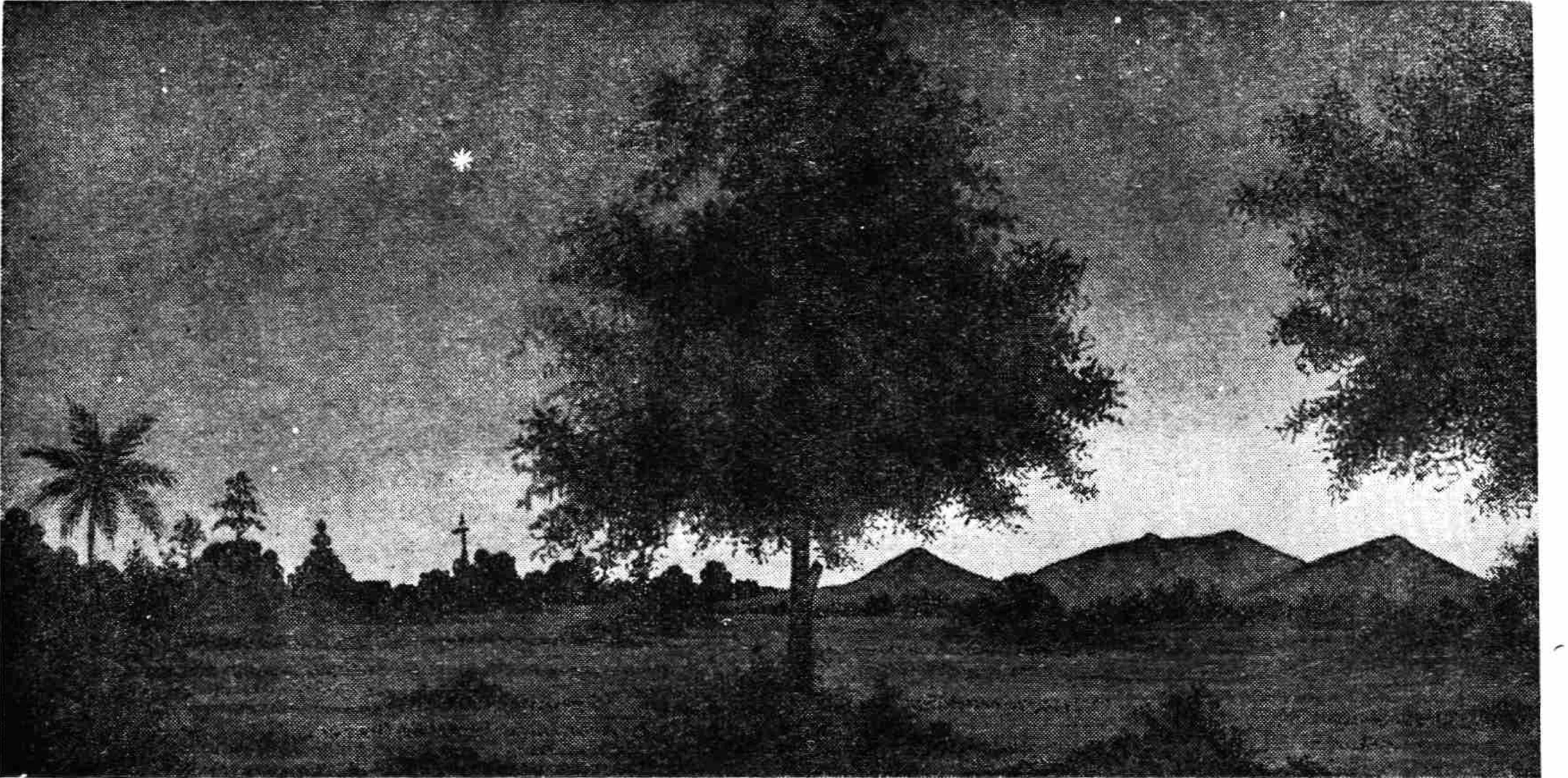
పరిధ్రువ తారలు : ఒక ప్రదేశమున ఉదయాస్తమయములులేని తారలను, ఆ ప్రదేశము యొక్క పరిధ్రువ తారలందురు.

ఘూ దైనిక పరిభ్రమణము

తార దైనిక గతి AB (చూ. చిత్రము 303 - పు. 445) క్షితిజమునకు పైననే ఉన్న ఎడల ఆ తారను ఆ ప్రదేశమునకు ఉత్తర పరిధ్రువతార యందురు. $PN = \phi$ (అక్షాంశము), $PB = 90 - \delta$ కనుక, ఆ తార పరిధ్రువమగుటకు ϕ ఆప్రదేశ అక్షాంశము, $(90 - \delta)$కు సమానముగ గాని, అంతకన్న హెచ్చుగా గాని ఉండవలయును.



చిత్రము 304 వేగు చుక్క



చిత్రము 305 సందె చుక్క

తార ఉచ్చత్వము దాని అధమ ప్రతరణమునకు కనిష్టమై యుండును. అందువలన B వద్ద ఆ తార క్షితిజమునకు పైన ఉన్న ఎడల, ఉది ఎప్పుడును అస్తమించదు. ఇపుడు తార దైనిక గతి $A'B'$ క్షితిజ అధోభాగముననే ఉన్న ఎడల ఆ తారను, ఆ ప్రదేశ దక్షిణ పరిధ్రువ తార యందురు.

కనుక ఒక స్థలముయొక్క ఉత్తర అక్షాంశము 90 — δ కన్న హెచ్చినప్పుడు అది δ క్రాంతిగా గల తార.

(1) అది నిరక్ష రేఖకు ఉత్తరమున ఉన్న ఎడల పూర్తిగా క్షితిజ ఉపరిభాగమున; (2) నిరక్షరేఖకు దక్షిణమున ఉన్న ఎడల పూర్తిగా క్షితిజమునకు అధోగతముగ నుండును.

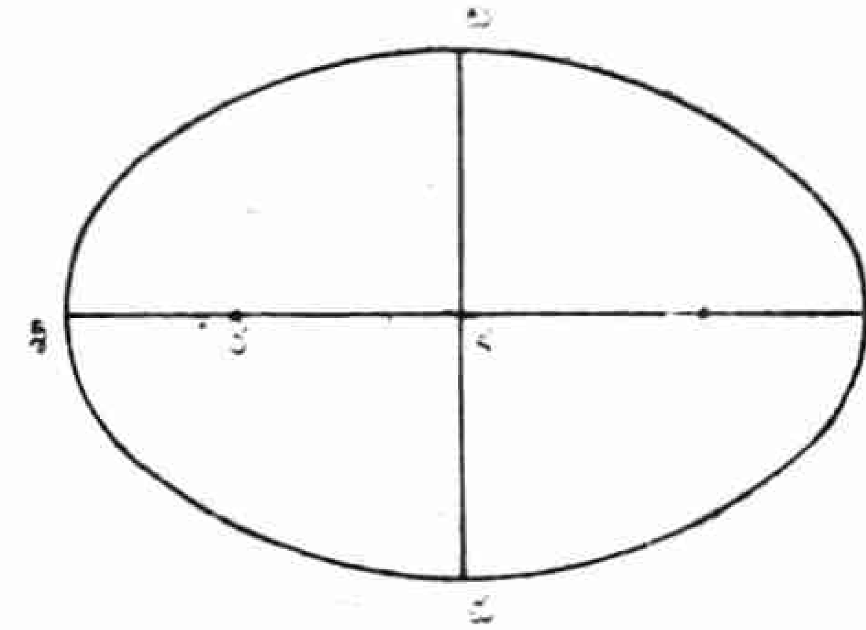
తన దక్షిణ ధ్రువాంతరము దక్షిణ అక్షాంశముకంటె తక్కువగా గాని, సమానముగా గాని ఉండు తార, దక్షిణ పరిధ్రువ తారయగును. అది ఉత్తర అక్షాంశము φ కి సమానముగా గాని, ఎక్కువగా గాని యుండు వారికి కనబడదు. పరిధ్రువ తారల ఉత్తమ, అధమ ప్రతరణ కాలములో ఏర్పడు ఉచ్చత్వము వలన ప్రదేశముయొక్క అక్షాంశమును కనుగొనవచ్చును.

వేగుచుక్క, సందెచుక్క : సూర్యోదయాత్పూర్వము తూర్పున ఉదయించు తారకు వేగుచుక్క అని, సూర్యాస్తమానాత్పరము ఒకగంటకాలములో అస్తమించు తారకు సందెచుక్క అని చెప్పుదుము. ఈ నిర్వచనము అన్ని నభోమూర్తులకు అన్వయించును. కాని శుక్రుని గురించియే ప్రజలలో ఈ పదములు వాడుకలోనికి వచ్చినవి (చూ. చిత్రములు 304, 305 - పు. 446).

ఇట్టి తారల క్రాంతియును, సూర్యుని క్రాంతియును కొంతవరకు సమానములై యుండవలయును. వేగుచుక్క యొక్క విషువాంశ సూర్యుని విషువాంశ కంటె 10 డిగ్రీలు తక్కువగా నుండవలయును; సందెచుక్క యొక్క విషువాంశ 10 డిగ్రీలు ఎక్కువగా నుండవలయును.

శుక్రుడు వేగుచుక్క అయిన, పల్లెటూరి వారికి అత్యంత ఆనందమును కలిగించును. శుక్రోదయము అయినవెంటనే అందరు తమతమ పనులయందు ఉద్యమింతురు. శుక్రుడు కొంతకాలము వేగుచుక్కగాను, మరికొంత కాలము సందెచుక్కగాను కనబడును. వ్యక్తసూర్యుడు క్రాంతి వృత్తములో పరిభ్రమణము చేయుచుండుటవలన సందెచుక్కయగు తార అస్తంగతమును పొంది తర్వాత, వేగుచుక్కగా మారును. ఎమ్. వి. సు.

భూభ్రమణము I : భూమి తన చుట్టూ తాను దినమున కొక పర్యాయము తిరుగుచు సంవత్సరమున కొకసారి సూర్యునిచుట్టు తిరిగి వచ్చుచున్నది. భూమి తన చుట్టు తాను తిరుగుటను దైనందిన పరిభ్రమణమనియు, సూర్యుని చుట్టు భ్రమణమును సాంవత్సరిక భ్రమణమనియు చెప్పుదురు. అందు మొదటి పరిభ్రమణముచేత మనము గంటకు సుమారు 1638 కి. మీ. తిరుగుచున్నాము. రెండవ భ్రమణముచేత గంటకు 1,22,850 కి. మీ పోవుచున్నాము. భూమి సూర్యునిచుట్టు ఒక విలోపము (దీర్ఘవృత్తము)లో తిరుగుచున్నది. ఆ విలోపవృత్తముయొక్క ఒక నాభియందు 'ర' అను బిందువువద్ద రవి ఉండును. 'మ' అను బిందువువద్దకు భూమి వచ్చినప్పుడు మందతమముగా పోవుచుండును. కావున ఆ బిందువునకు మందోచ్చ అని పేరు. భూమి స్థిరముగా నుండి, రవి తిరుగుచున్నాడని భావించినచో రవి మందతమముగా తిరుగు బిందువునకు రవి మందోచ్చ అని పేరు. రవి మందోచ్చకు భూమందోచ్చ 6 రాశుల దూరములో అనగా 180° దూరములో నుండును. 'శీ' అను బిందువు వద్ద భూమి శీఘ్రతమముగా తిరుగుచుండును. దీనికి శీఘ్రోచ్చ అని చెప్పుదురు. సిద్ధాంతగ్రంథములందు గ్రహములకు శీఘ్రోచ్చ బిందువులున్నవని వ్యవహరింపబడినది. వానికిని దీనికిని సంబంధము లేదని గ్రహించవలెను. కెప్లర్ శాస్త్రజ్ఞుడు గ్రహభ్రమణ విషయమై ఈ క్రింది మూడు సూత్రములను ప్రతిపాదించియున్నాడు.



చిత్రము 306

1. గ్రహములన్నియు రవి నాభిగ విలోపములందు తిరుగుచున్నవి.
2. అట్లు తిరుగుటలో గ్రహమును రవికి కలుపు రేఖ అనగా గ్రహకర్ణరేఖ సమానకాలములందు సమాన వైశాల్యము గల క్షేత్రములనుత్పాదించును.
3. భ్రమణకాలముల యొక్క వర్గములకును, విలోపీయ బృహద్వ్యాసార్ధ ఘనములకును సమాన నిష్పత్తి యుండును.

ఈ సూత్రములను ఇంచుక వ్యాఖ్యానింతము : రవి నాభియందుండగా గ్రహములన్నియు విలోపములలో తిరుగుచున్నవి. చిత్రము 306 లో 'మ' బిందువు రవి నాభిగ మందోచ్చ. 'శీ' బిందువు రవి నాభిగ శీఘ్రోచ్చ 'శీమ' రేఖ విలోపముయొక్క దీర్ఘాక్షమందుము. దీనికి లంబముగా నుండు 'చట' రేఖను హ్రస్వాక్షమందుము.

చంద్రుని విషయములో, చంద్రుడు యథార్థముగా భూ నాభికి విలోపములో తిరుగుచున్నాడు. కావున చంద్రుని మందోచ్చ భూ నాభిక మందోచ్చయే. సిద్ధాంతులు వ్యవహరించిన మందోచ్చకూడ ఇదియే.

కెప్లర్ యొక్క 1, 2 సూత్రముల నీ క్రింది విధముగా మనము సరిచూడవచ్చును. ప్రతి దినము మధ్యాహ్నమందు

రవి యొక్క బింబవ్యాసమును, యామ్యోత్తర వృత్తీయ నతాంశమును వేధచేయుము అక్షాంశ జ్ఞానము చేత :

యామ్యోత్తర వృత్తీయ నతాంశము + క్రాంతి = అక్షాంశము అను సూత్రముచేత రవి క్రాంతి సిద్ధించును. తద్వారా,

క్రాంతి జీవ = పరమ క్రాంతి జీవ × భుజ జీవ అను సూత్రముచేత రవి ధ్రువకము తెలియును. ప్రతిదినము రవి ధ్రువకజ్ఞానము చేత ధ్రువకములో దైనందిన వికారము తెలియును. ఈ క్రింది పథకమును తయారుచేయుము,

తేది	రవి బింబ వ్యాసార్ధము (బ)	రవి ధ్రువకము	దైనందిన వికారము (వ)	$\frac{\text{వ}}{\text{బ}^2}$

బింబ వ్యాసము ప్రతిదినము మార్పుచెందుచున్నదనియు జూలై మూడవ దినమున చాల చిన్నదిగాను, జనవరి మూడవ తేదీన చాల పెద్దదిగా నుండునని వేధ చేత తెలియును. దూరగత వస్తుప్రమాణము తక్కువగాను, అదే వస్తువు సమీపమున నున్నప్పుడు ఎక్కువ ప్రమాణముగాను నుండునట్లు కనబడును గదా! చిత్రము 306 లో 'మ' వద్ద రవి యుండగా బింబవ్యాసార్ధము 'వ_1' అనుము, 'శీ' బిందువు వద్ద నుండగా వ_2 అనుము. అపుడు పై కారణము చేత

$\frac{\text{రమ}}{\text{రశ}} = \frac{\text{వ}_2}{\text{వ}_1}$ అగును. కాని విలోప లక్షణము చేత

$\text{రమ} = \text{య}\,(1+\text{చ})$;

$\text{రశ} = \text{య}\,(1-\text{చ})$; 'చ' అనునది వికేంద్రత.

2 య = విలోపదీర్ఘాక్షము,

అందుచేత $\frac{\text{య}\,(1+\text{చ})}{\text{య}\,(1-\text{చ})} = \frac{\text{వ}_2}{\text{వ}_1} = \frac{1+\text{చ}}{1-\text{చ}} = \frac{1+e}{1-e}$

గణిత ప్రసారము చేత $\text{చ} = \frac{\text{వ}_2 - \text{వ}_1}{\text{వ}_2 + \text{వ}_1}$ అని సిద్ధించును.

వ_1, వ_2 అను బిందు వ్యాసార్ధములు పైన చెప్పిన తేదీలలో విద్ధములైనవి కావున, చ విలువ = 0·0167, భూపథము రవి నాభిక విలోపమని తెలియుచున్నది.

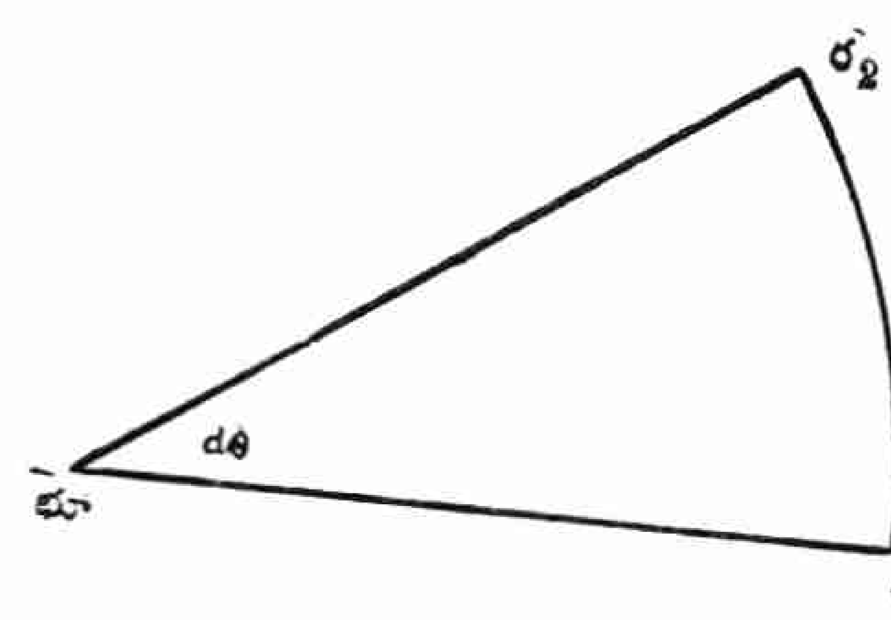
రవి కేంద్రము = రవి ధ్రువకము − రవి శీఘ్ర కేంద్ర ధ్రువకము : $\theta = \odot - P$

$\frac{1+\text{చ} \times \text{రవి కేంద్రకోటి జ్యా}}{\text{బ}} = \text{స్థిరరాశి}$; అనగా

$\frac{1+e\cos\theta}{\text{రవి వ్యాసము}} = K$; అనగా $r\,(1+e\cos\theta) = K$

రవి యొక్క మాధ్యమదూరము r యొక్క విలువ రవిబింబ వ్యాసకోణముకు విలోమముగా నుండును.

ఇక కెప్లర్ ద్వితీయ సూత్రము విషయము సరి చూచెదము ; పైన వ్రాయబడిన పథకములోని చివరి అంశముచేత ప్రతిదినమును $\frac{\text{వ}}{\text{బ}^2}$ ఒక స్థిరమగు రాశి యని తేలును. 'బ' యొక్క ప్రమాణము రవి కర్ణము (క = r)కు విలోమముగా నుండును. రవి ధ్రువకము $\odot$ అనుకొనిన ధ్రువకములోని దైనందిన వికారము $\frac{d\odot}{dt} = \text{వ}$; కాని $\odot - K = \theta$ అయినందున $\frac{d\odot}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ అనగా రవి ధ్రువకములోని దైనందిన వికారము రవి కేంద్ర వికారమునకు సమానము.



చిత్రము 307

ఇపుడు $\text{క}^2 \times \text{వ}$ స్థిరము ; అనగా $r^2 \frac{d\odot}{dt}$ స్థిరము ; అనగా $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ స్థిరము.

అనగా రవి కర్ణముచే నేర్పడు దైనందిన భూక్షేత్ర వికారము $\text{ర}_1\text{భూర}_2$ స్థిరమగు విలువ కలది, $\text{భూర}_1 = r = \text{భూర}_2$ అని తీసికొని, $\text{భూర}_1\text{ర}_2$ ఒక త్రిభుజముగా తలచిన, దాని వైశాల్యము = $\frac{1}{2}\,r^2\,d\theta$ కెప్లర్ రెండవ సిద్ధాంతము నిరూపింపబడినది.

కెప్లర్ మూడవ సిద్ధాంతము : ఒక గ్రహము యొక్క పరిభ్రమణకాలము = కా ; రవినుండి దాని మాధ్యమిక దూరము = దు ;

$\frac{\text{కా}^2}{\text{దు}^3}$ = ఒక స్థిరరాశి.

[దీనిని నిరూపించుట కొంత కష్టతరము].

సూత్రానీత నిష్పత్తి :

$$\frac{\text{వసంతము}}{\triangle\ \text{అ భూర}_1} = \frac{\text{గ్రీష్మము}}{\triangle\ \text{ర}_1\ \text{భూర}_2} = \frac{\text{శరత్}}{\triangle\ \text{ర}_2\ \text{భూర}_3} = \frac{\text{హేమంతము}}{\triangle\ \text{ర}_3\ \text{భూ అ}}\ (\triangle = \text{వైశాల్యము})$$

$$\frac{\text{వసంతము}}{\text{వి}_2 - \text{వి}_1} = \frac{\text{గ్రీష్మము}}{\text{వి}_3 - \text{వి}_2} = \frac{\text{శరత్}}{\text{వి}_4 - \text{వి}_3} = \frac{\text{హేమంతము}}{360^\circ + \text{వి}_1 - \text{వి}_4}$$

స్పష్టసావనకాలమునకు, మధ్యమ సావనకాలమునకు గల అంతరము కాలాంతర సంస్కారము E అని తీసికొని

$వి_1$, $వి_2$, $వి_3$, $వి_4$ విలువల కనుగొనవలయును. $ర_1$, $ర_2$, $ర_3$, $ర_4$ మధ్య రవి స్థానములు; వాని విలువలు 90, 180, 270, 360 అగును.

కాబట్టి $వి_1 = 90 + ఇ_1$;

$వి = 180 + ఇ_2$; $వి_3 = 270 + ఇ_3$;

$వి_4 = 360 + ఇ_4$ ఇచట $ఇ_1$, $ఇ_2$, $ఇ_3$, $ఇ_4$ లు కాలాంతర సంస్కారమానములు. డి. ఏ. సో.

భూ|భ్రమణము - II : ఖగోళశాస్త్ర పర్యవేక్షణలో ప్రథమమున మనలను ఆకర్షించు విషయములు రాత్రింబవళ్లు ఏర్పడుట; చంద్రుడు, నక్షత్రములు మున్నగు వాని ఉదయాస్తమయములును. ఈ విషయములను సకారణముగ నిర్వచించుట ఖగోళశాస్త్ర ముఖ్య కర్తవ్యము.

రాత్రింబవళ్ళు ఏర్పడుటకు, నభోమూర్తుల ఉదయాస్తమయసమయములకు, (1) ఆకసమంతయు భూమి చుట్టు తిరుగుట, (2) భూమి తన చుట్టు తాను దినమునకొక పర్యాయము పశ్చిమమునుండి తూర్పునకు తిరుగుట కారణములు కావచ్చును. మొదటిదియే సత్యమని పాశ్చాత్య ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు క్రీ. శ. 15వ శతాబ్దము వరకు తలచిరి. వారు భూమి స్థిరముగా నుండుటయే సిద్ధాంతీకరించి యుండిరి. దీనికి టాలెమీ సిద్ధాంతమని పేరు. ఇది క్రైస్తవ మతాచార్యుల ఆదరణను పొందెను (చూ. టాలెమీ - పు. 286).

కాని ఖగోళశాస్త్ర పర్యవేక్షణలు వృద్ధిచెందినకొలది టాలెమీ సిద్ధాంతము ప్రకారము పర్యవేక్షణల ఫలితములను బోధపరచుకొనుట కష్టమగుచుండెను. చివరకు కోపర్నికస్, టాలెమీ సిద్ధాంతము సరియైనది కాదనియు, భూమి సూర్యుని చుట్టు సంవత్సరమున కొకసారి తిరుగుచు, తన చుట్టు తాను దినమున కొకసారి తిరుగుచున్నదనియు సిద్ధాంతీకరించి, ఆ ప్రకారము ఖగోళ శాస్త్ర దైనిక పర్యవేక్షణల నన్నిటిని సిద్ధాంతీకరించెను. కాని అతని సిద్ధాంతము మతాచార్యుల ఖండనకు పాత్రమగుటచే అది వెంటనే ప్రచారమునకు రాలేదు.

ఇదే సమయమున గెలిలియో తాను తయారు చేసిన దూరదర్శని యంత్రముతో సౌర కళంకముల చలనములను గమనించి, సూర్యుడు కూడ తనలో తాను తిరుగుచున్నాడని తలచుటచే, భూమి కూడ ఇట్లే తన అక్షముపై దినమున కొక పర్యాయము తిరుగుచున్నదని వాదించెను (చూ. గెలిలియో - పు. 243).

తరువాత కెప్లర్ శాస్త్రజ్ఞుడు తన ప్రత్యవేక్షణల ఫలితముగా సూర్యగ్రహ కూటములో భూమి యొక గ్రహమనియు, మిగిలిన గ్రహములన్నిటికి ఇట్టి భ్రమణము కలదనియు గ్రహించెను. అందుచే భూమి కూడ తన చుట్టు తాను తిరుగుట నిశ్చయమని సిద్ధాంతీకరించెను. కాబట్టి పైన చెప్పిన రెండు కారణములలోను రెండవ కారణము సరియైనదనుట నిశ్చయమని అందరు ఒప్పుకొనిరి. కాని నిశ్చయముగా భూమి తిరుగుచున్నదను విషయమును నిరూపించుటకు ప్రయత్నములను శాస్త్రజ్ఞులు కావించిరి (చూ. కెప్లర్ - పు. 193).

భూమిచుట్టు ఆకసమునందలి నభోమూర్తులన్నియు దినమున కొకసారి చుట్టిరావలయుననిచో, భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి నభోమూర్తుల ద్రవ్యరాశితో పోల్చిన సూక్ష్మాతి సూక్ష్మమగుటచే భూమి అధికతమ కేంద్ర ప్రసార శక్తిని వినియోగించవలసి యుండును. భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి స్వల్పమగుటచే అంత శక్తి వినియోగించుటకు వీలులేనందున భూ|భ్రమణ సిద్ధాంతమే సత్యమని ఒప్పుకొనవలసి వచ్చినది.

చివరకు క్రీ. శ. 1851 లో ఫోకో అను ఫ్రెంచి శాస్త్రజ్ఞుడు భూ|భ్రమణమును విస్పష్టముగా నిరూపించు నొక పద్ధతిని కనుగొనెను. అందలి విషయము ఈ క్రింద వివరించబడినది.

భూ|భ్రమణాక్షము (ఉత్తర, దక్షిణ ధ్రువముల కలుపు రేఖ) ఉత్తర ధ్రువప్రాంతమువద్ద నొక లోలకము కంపించుచున్నదనుకొందము. దాని గోళము క్రిందవైపున సన్నని సూది అతికించబడియున్నది. ఆ సూది లోలక మార్గమును భూమిపై గుర్తించును. లోలకమునకు ఒక నిలువు తలములో కంపనము కలిగించినచో, ఆ తలములోనే అది కంపించుచుండును. భూమి సవ్యముగా భ్రమించుచుండుటచే లోలక మార్గము క్రమముగా అపసవ్యముగా చుట్టు తిరిగి 24 గంటల తర్వాత మొదటి స్థానమునకు చేరును. ఇదే విధముగా భూమధ్యరేఖపైనున్న ప్రదేశమున గమనించిన లోలకతలము భూ|భ్రమణమువలన భూమితో పాటు కదలుచుండుటచే లోలకమార్గము స్థిరముగా నున్నట్లు తెలియును.

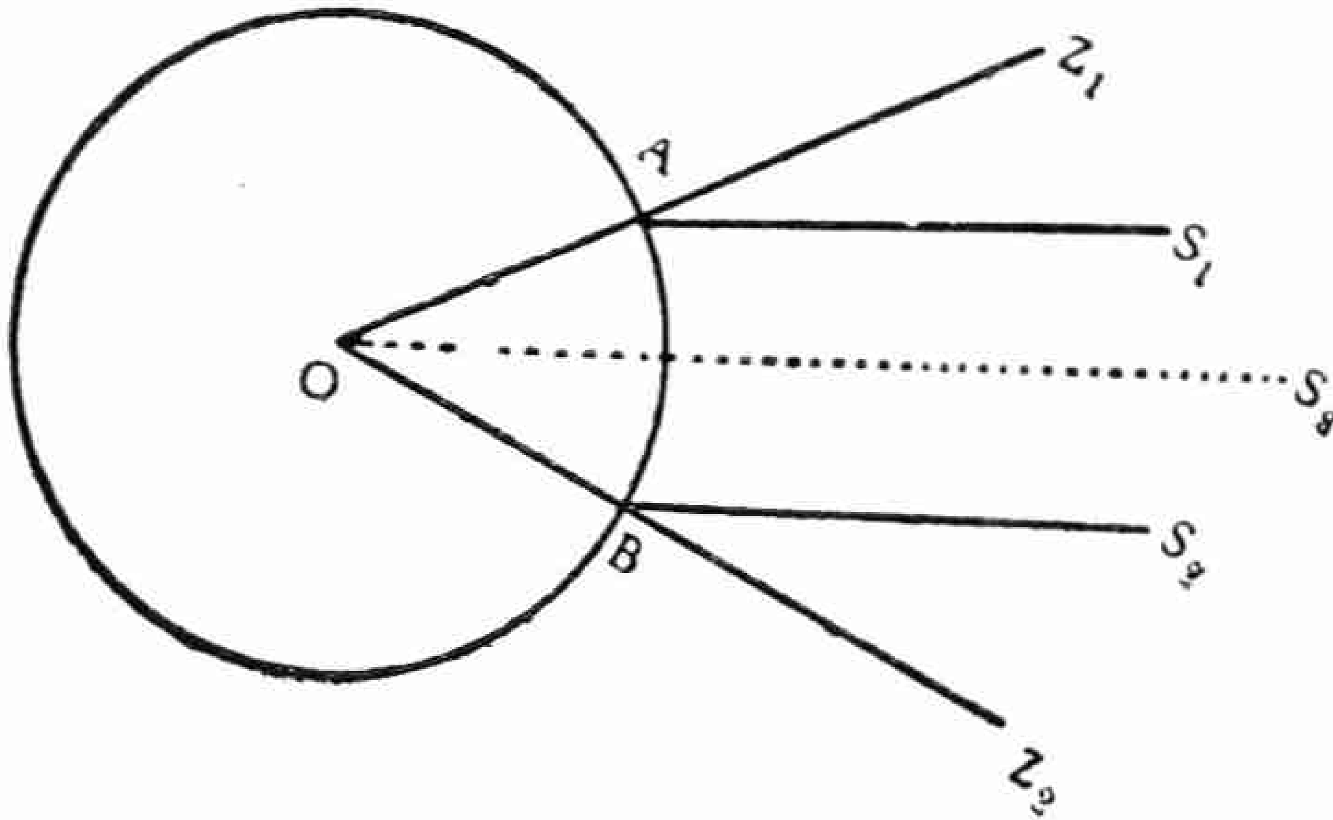
ఇదే విధముగా అక్షాంశగల ప్రదేశమున గమనించినచో లోలకతలము ఒక నాక్షత్ర గంటకు $15^\circ \sin\theta$ చొప్పున తిరుగుచున్నదని తెలియుచున్నది.

ఫోకో తన పర్యవేక్షణలను పారిస్ నగరమున జరిపి అచ్చట లోలకతలము ఒక నాక్షత్ర గంటకు $11^\circ \cdot 25$ చొప్పున తిరుగుచున్నదని గ్రహించెను. ఇది పైన చెప్పిన $15^\circ \sin\theta$ కు సరిపోవుచున్నది. కావున భూ|భ్రమణమును పై ప్రయోగము నిస్సందేహముగా రుజువు పరచుచున్నది. పి. సూ. నా.

భూమి : రూపము, ప్రమాణము : మన జ్యోతిష్కులు చంద్రగ్రహణ కాలములో భూచ్ఛాయ సమవృత్త శంకురూపములో ఉన్నదని గ్రహించి భూమి గోళాకారము అని ఊహించిరి. ఉత్తరముగా పోనుపోను దక్షిణార్ధ భాగములోని నక్షత్రములు కనబడక పోవుటచేతను, భూమి గోళాకారము గలదని గ్రహించిరి. ఇతర కారణములు కూడ కలవు.

భాస్కరాచార్యుల గ్రంథములో భూవ్యాసము $1581\frac{1}{24}$ యోజనములనియు, సూర్య సిద్ధాంతములో 1600 యోజనములనియు ఈయబడినది. ఒక యోజనము = 4.9 మైళ్లు (7.89 కి. మీ.).

ఒక మధ్యాహ్న రేఖపైగల A, B అను రెండు స్థానములను తీసికొనుము. రవి ఆ ప్రదేశములయందు ఒక దినము ప్రతరణము చేయునపుడు రవియొక్క నతాంశలను కనుగొనుము.



చిత్రము 308

Z_1, Z_2 బిందువులు క్రమముగా A, B ప్రదేశముల వద్ద మస్తక బిందువులు. సూర్యుడు మధ్యాహ్నరేఖను దాటునపుడు పొందు స్థానములు S_1, S_2 లచే గుర్తింపబడును. అపుడు A వద్ద సూర్యుని నతాంశ $\angle Z_1 AS_1$;

B వద్ద సూర్యుని నతాంశ = $\angle Z_2 AS_2$. చిత్రము 308 నుండి $\angle AOB = \angle Z_1 AS_1 + \angle Z_2 BS_2$; AB ధనుస్సును కొలిచిన, భూపరిధి కనుగొనవచ్చును.

$$\text{భూపరిధి} = \frac{360^\circ}{\angle AOB} \times \text{ధనుస్సు}$$

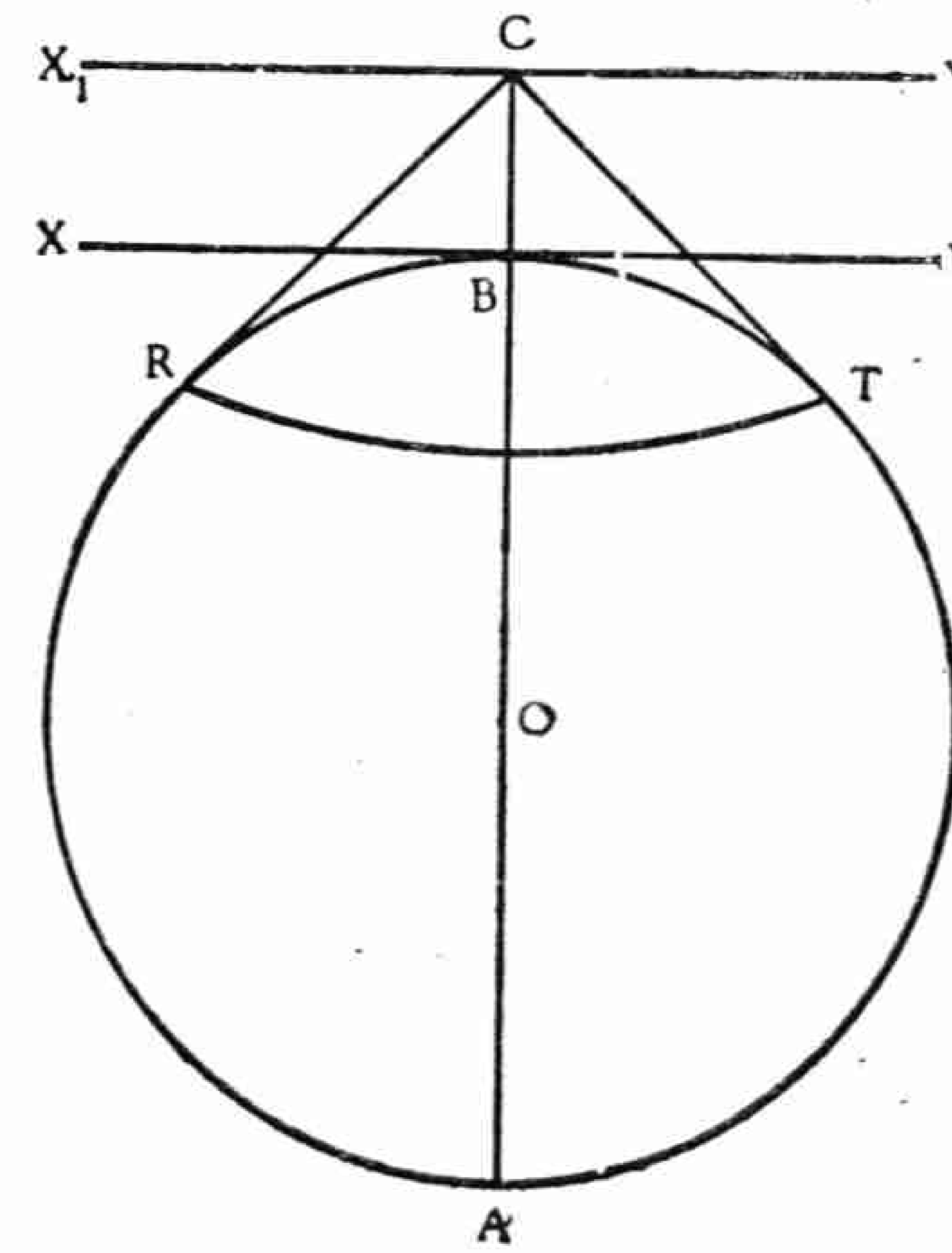
నవీన పరిశోధన ప్రకారము భూనిరక్ష వ్యాసార్ధము 6373.8 కి. మీ; ధ్రువ వ్యాసార్ధము 6356.9 కి. మీ. నిరక్ష వ్యాసార్ధము ధ్రువవ్యాసార్ధము కంటె 21.46 కి. మీ. ఎక్కువ. ఈ వ్యత్యాసము ఏర్పడుటకు కారణము భూమియొక్క దైనిక భ్రమణమే.

భూమి కచ్చితమగు గోళ రూపములో నుండదు. దబ్బపండువలె నుండును.

భూపరిధి = 40233.5 కి. మీ. (స్థూల ఫలము)

దైర్ఘ్యమానములు - రూపములు : మైలు, గజము మొదలగు కొలతల పుట్టుకను గురించి ఎక్కువగా తెలియదు. మీటరు కొలత ఫ్రెంచి శాస్త్రజ్ఞులచే స్థాపింపబడినది (చూ. భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు పు. 545).

నిమజ్జనము : ARBT భూగోళము. B భూతలముపై బిందువు, XBY క్షితిజ తలము, C ఒక ఎత్తగు ప్రదేశము. B బిందువుగుండ ఒక నిలువు కేంద్ర ఛేదకము తీసికొనిన, ఒక వృత్తము ARBT లభించును. క్షితిజమును గుర్తించు తలము XBY.



చిత్రము 309

B వద్ద నుండు వ్యక్తికి XBY తలమునకు పైనుండు వస్తువులన్నియు గోచరమగును. ఆ వ్యక్తి ఎత్తగు ప్రదేశము C వద్దకు వెళ్ళిన, క్షితిజములో మార్పు ఏర్పడును. $X_1 CY_1$ ఋజురేఖ XBY కి సామ్యమయిన B వద్ద నుండు వ్యక్తియొక్క క్షితిజము X_1CY_1 రేఖకు సామ్యముగా నుండును.

C వద్దనుండి భూమికి స్పర్శరేఖలు CT, CR తీసికొనుము. C వద్దనుండు వ్యక్తికి CT, CR స్పర్శరేఖలకు పై భాగమునుండు వస్తువులన్నియు కనబడును.

క్షితిజరేఖ $X_1 C Y_1$ స్పర్శరేఖలు CR, CT వైపు దిగినట్లు కనబడును. ఇట్లు దిగుటకే నిమజ్జనము (డిప్) అని పేరు.

$\angle Y_1 CT$ కి నిమజ్జనకోణము అనిపేరు. వృత్తము ARBT యొక్క కేంద్రము 'O' అయిన CT స్పర్శరేఖకు OT లంబముగా నుండును.

$\angle Y_1 CT = D$ అని తీసికొనిన $\angle COT = D$; భూవ్యాసార్ధము $BO = a$, ఎత్తు $BC = h$ అయిన

$$CT^2 = CB.\ CA = h(h + 2a) = h^2 + 2ah$$

a కంటె h అతి స్వల్పము అగుటచే h^2ను వదలివేయవచ్చును.

$CT^2 = 2ah$; $CT = \sqrt{2ah}$

$$\tan COT = \tan D = \frac{CT}{OT} = \frac{\sqrt{2ah}}{a} = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$\angle D$ చాల స్వల్పమయినందున, స్పర్శజీవ D కి బదులు D రేడియన్‌లుగా తీసికొనవచ్చును. నిమజ్జన కోణము $D = \sqrt{\frac{2h}{a}}$; నిమజ్జనము వలన నభోమూర్తుల యొక్క ఉదయము శీఘ్రముగాను, అస్తమానము ఆలస్యముగాను జరుగును. వీనికి ఎంతకాలమగునని కూడ ప్రౌఢ గణిత మూలముగా కనుగొనవచ్చును. ఫలితము మాత్రము క్రింద నీయబడినది : నిమజ్జన కోణము D'' అయిన

కాలము $= \frac{D''}{15} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\delta}}$ నిమిషములు

ఇచట ϕ ప్రదేశముయొక్క అక్షాంశము, δ నభోమూర్తి యొక్క క్రాంతి.

సంధ్య : సూర్యోదయమునకు కొంతకాలము పూర్వమునను, సూర్యాస్తమయమునకు కొంతకాలము తర్వాతను భూమియంతయు అరుణకాంతిమయమై ఉండును. నిరక్ష ప్రదేశములందు ఇట్టి కాంతి ప్రాతఃకాలమునను, సాయంకాలమునందును 72 నిమిషములు కాలము ఉండును. క్షితిజమునుండి నిలువుగ 18° లోతువరకు సూర్యుడు ఉండునపుడు సంధ్యాకాంతి ప్రసరించి యుండును.

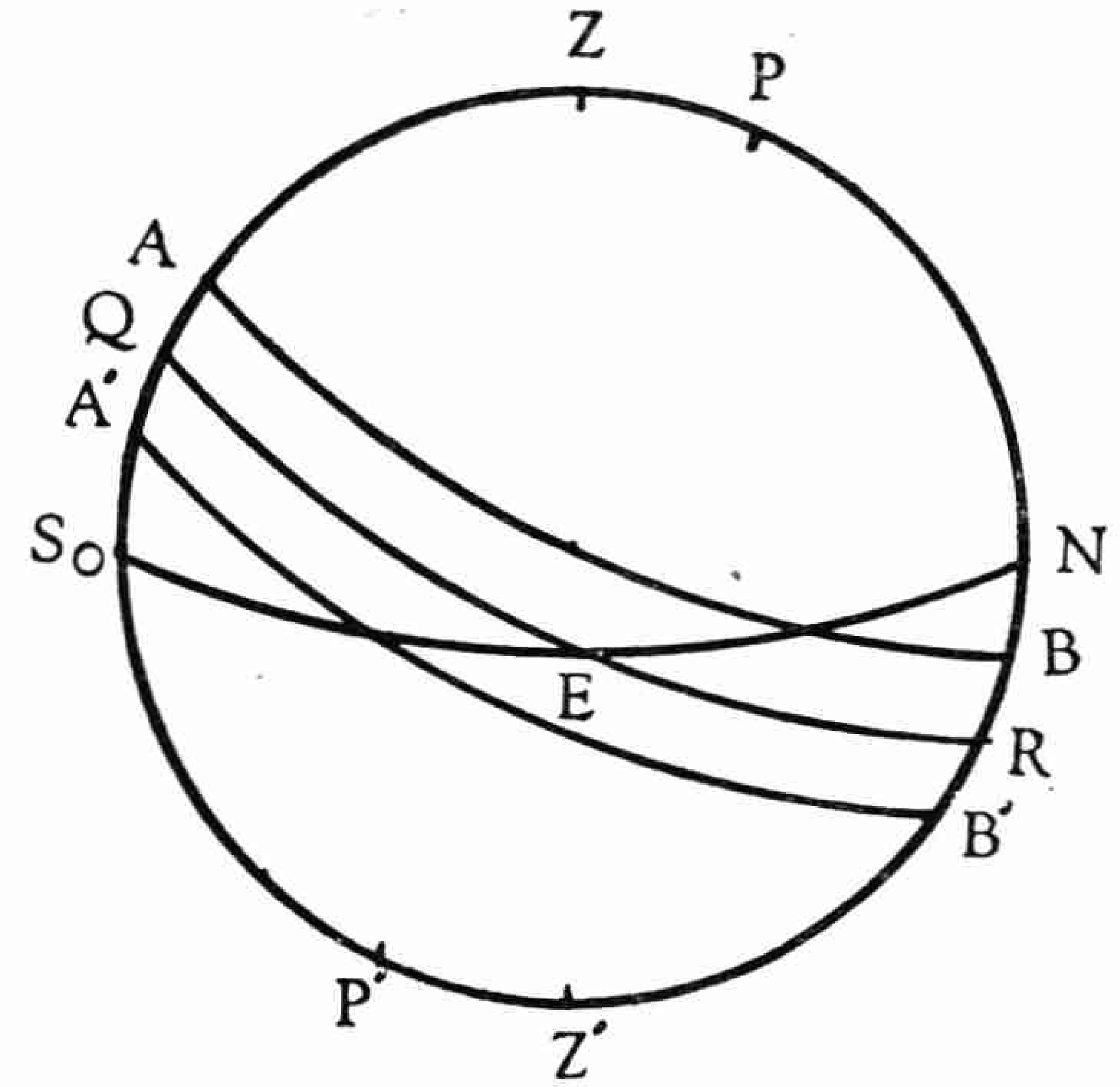
ఇతర ప్రదేశములందు సంధ్యాకాంతి (ట్వైలైట్) ఎక్కువకాలము కనిపించును. దీనికి కారణము సూర్యుడు ఏటవాలుగా 18° నిలువు లోతు పోవుటకు 72 నిమిషముల కంటె ఎక్కువ కాలము పట్టును.

సంధ్యాకాంతి రాత్రియంతయు కలదా : చిత్రము 310 గమనించుము. Z మస్తక బిందువు, P ధ్రువము; NS_0 క్షితిజము; QR విషువృత్తము ; AB సూర్యుని దైనికగతి. అర్ధరాత్రియందు రవి అధమ ప్రతరణము చేయుచు, B వద్ద నుండును.

రాత్రియంతయు సంధ్యాకాంతి ఉండవలయుననిన, NB ధనుస్సు 18° కు సమానముగాగాని, తక్కువగా గాని ఉండవలయును.

$PN = \phi$ అక్షాంశము (1) ; $PB =$ ధ్రువాంతరము $= 90 - \delta$; కాబట్టి $90 - \delta - \phi \leq 18^\circ$, అనగా $\delta + \phi \geq 72^\circ$; రవి ఉత్తరార్ధగోళములో చరించునపుడు δ ధనాత్మకముగా నుండి దాని విలువ 0° నుండి $23\frac{1}{2}^\circ$ వరకు మారుచుండును.

విషు దినమునందు, రాత్రియంతయు సంధ్యా కాంతి ఉండవలయుననిన $\phi \geq 72^\circ$ ఉండవలయును. కటకాయనము నందు (జూన్ 22) $\delta = 22\frac{1}{2}$; నిరంతర సంధ్యా కాంతి $\phi \geq 49\frac{1}{2}^\circ$ ప్రదేశములలో ప్రకాశించుచుండును.



చిత్రము 810

మండలములు : రవి పరిధ్రువ స్థితిని పొందు ప్రదేశము లెవ్వి? రవి ఎచ్చట మస్తక బిందువుగుండ వెళ్లును? తక్కిన ప్రదేశములెవ్వి? అని మూడు మండలములుగా ఉత్తరార్ధగోళమును, అట్లే దక్షిణార్ధగోళమును విభజింపవచ్చును. మామూలు సంజ్ఞలతో $\phi = z + \delta$.

$\phi =$ అక్షాంశము ; $z =$ నతాంశము ; $\delta =$ రవి యొక్క ఉత్తర క్రాంతి. రవి మస్తక బిందువుగుండ వెళ్లిన $z = 0$; కాబట్టి $\phi = \delta$, $\delta \leq 23\frac{1}{2}^\circ$; కాబట్టి నిరక్ష రేఖకు ఉత్తరమున అక్షాంశ $23\frac{1}{2}^\circ$ వరకు నుండు ప్రదేశములో రవి మస్తకబిందువు గుండ సంవత్సరములో రెండు దినములు వెళ్లును. ఉదా :

$\phi = 12^\circ$ అయిన, క్రాంతి ఎక్కువ యగునపుడు $\delta = 12^\circ$ గా నుండు దినమునను, క్రాంతి తక్కువయగునపుడు, మరల $\delta = 12^\circ$ అగునపుడును ఇట్లు సంభవించును.

ఈ ప్రాంతమునకు ఉష్ణమండలము అని పేరు. ఉష్ణమండలము, ఉత్తర అక్షాంశము $23\frac{1}{2}^\circ$ నుండి దక్షిణ అక్షాంశము $23\frac{1}{2}^\circ$ వరకు వ్యాపించియుండును. ఇచ్చట వేడి ఎక్కువ, దివారాత్రముల కాలములలో అధిక వ్యత్యాస ముండదు.

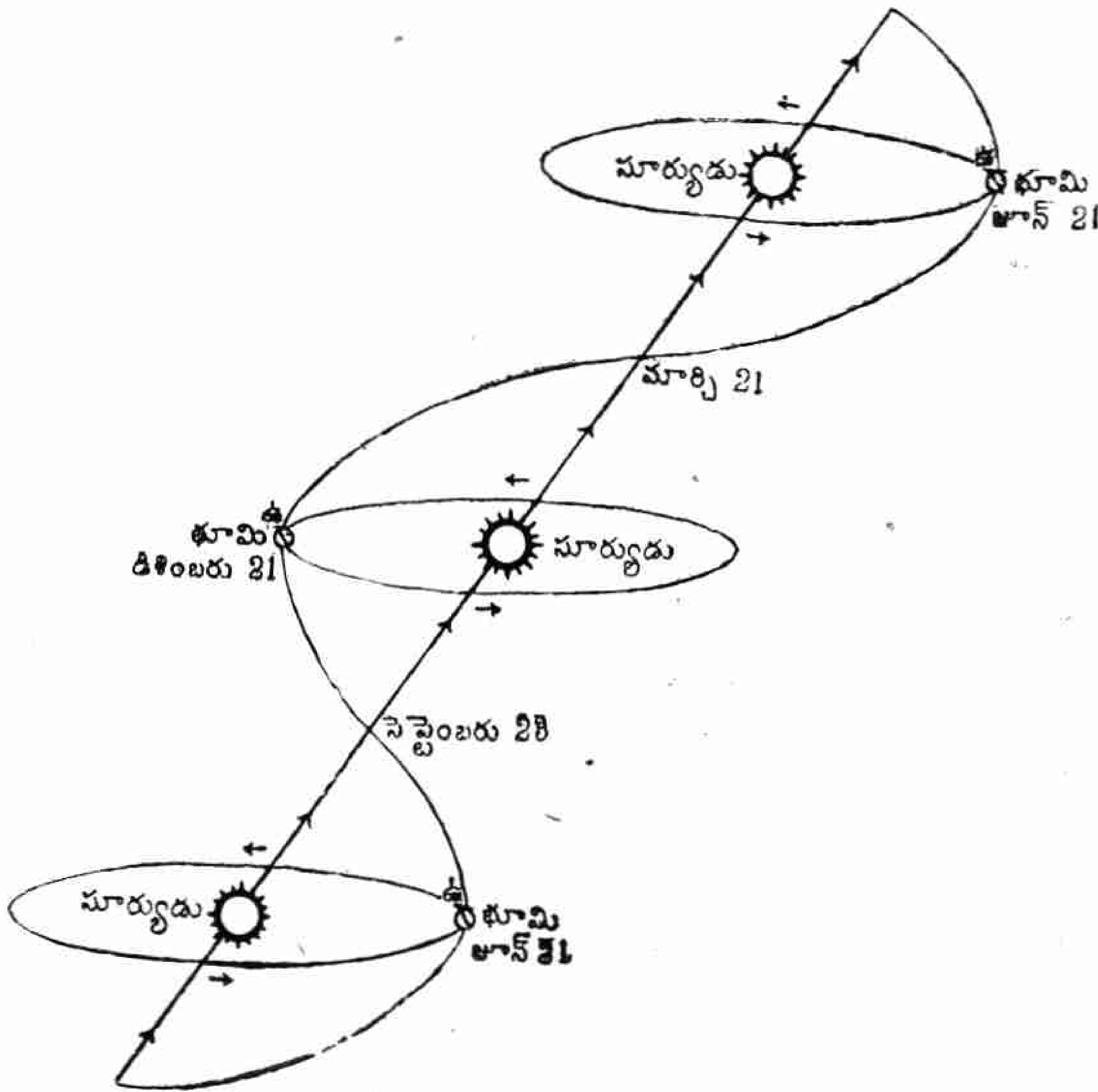
నిరక్ష ప్రదేశములలో దివారాత్రములు సమానములు. రవి పరిధ్రువ స్థితిని పొందుటకు $PS < PN$;

$$\text{అనగా } 90^\circ - \delta < \phi$$

రవి క్రాంతి (δ) యొక్క విలువ 0° నుండి 23½° వరకు వ్యాపించియుండును.

(ఇపుడు మనము రవి విషువృత్తమునకు ఉత్తరములో నుండు కాలములోనే, ఈ విషయమును పరిశీలింతము)

కాబట్టి రవి పరిధ్రువ స్థితిని పొందు ప్రదేశములు $\phi = 90°$ నుండి 66½° వరకు వ్యాపించియుండును. ఇట్లే దక్షిణ ధ్రువమునుండి 66°½ వరకు వ్యాపించియుండు ప్రదేశములో రవి విషు వృత్తమునకు దక్షిణములో నుండు



చిత్రము 311 అంతరిక్షములో భూ పథము

నపుడు, పరిధ్రువ స్థితిని పొందును. ఉత్తర ధ్రువమునుండి 66½° వరకును, దక్షిణ ధ్రువమునుండి 66½° వరకును గల ప్రదేశములకు శీతల మండలములనియు, ఇతర మండలములకు ఉత్తర దక్షిణ సమ శీతోష్ణ మండలములు అనియు పేరు.

ఉత్తర సమ శీతోష్ణ మండలము : ఉత్తర అక్షాంశము 23½° నుండి 66½° వరకు వ్యాపించియుండును. ఇచ్చట రవి మస్తక బిందువు గుండ వెళ్లడు ; పరిధ్రువస్థితిని పొందడు. రవియొక్క క్రాంతి ధనాత్మకమైనపుడు, పగటి కాలము ఎక్కువగాను, రాత్రికాలము తక్కువగాను ఉండును. రవి యొక్క క్రాంతి ఋణాత్మకమయినపుడు పగటికాలము తక్కువగాను, రాత్రికాలము ఎక్కువగాను ఉండును.

దక్షిణ సమ శీతోష్ణ మండలము : దక్షిణ అక్షాంశము 23½° నుండి 66½° వరకు వ్యాపించి ఉండును. ఇచ్చట దివారాత్రమానములు ఉత్తర సమశీతోష్ణ మండలములో నున్నవాటికి వ్యత్యస్తముగా నుండును.

ఉత్తర శీతల మండలము : 66½° — 90° అక్షాంశలు. ఇది అతి శీతల ప్రదేశము. దివారాత్ర ప్రమాణములలో చాల వ్యత్యాసముండును. ఉదాహరణము : $\phi = 66\frac{1}{2}°$ ప్రదేశములో జూన్ 22 తేదీ సూర్యుడు అస్తమింపక, ఒక క్షణకాలము ఉత్తర దిశలో క్షితిజమును తాకి మరల పైకి పోవును. ఈ దినమునకు నిరంతరదినము అని పేరు. ఆ దినము దక్షిణ అక్షాంశ 66°½ లో నిరంతరరాత్రి యగును. సూర్యోదయ అస్తమానములు ఏక కాలములో జరుగును. ఉదా : ఉత్తర అక్షాంశము 80° తీసికొందము. రవి ఉత్తర క్రాంతి 10° అయిన దినమున నిరంతర దినము ప్రారంభించి మరల కటకాయనానంతరము మరల రవి క్రాంతి 10° అగువరకు నిరంతర దినముండును. అపుడు దక్షిణ అక్షాంశము 80° లలో నిరంతర రాత్రికాలము. ఉత్తర ధ్రువ వాస్తవ్యుని తీసికొందము. అతనికి మార్చి 21 వ తేదీ సూర్యోదయము నందు క్షితిజమంతయును చుట్టుచు రవి కనబడును. అస్తమానము లేదు. క్రమేణ సూర్యుని ఉచ్చత్వము ఎక్కువయగుచు, క్షితిజమునకు సామ్యముగా సర్పిలము ఆకార పథములో దిరుగుచు, జూన్ 22 తేదీ 23½° ఉచ్చత్వమును పొంది, తర్వాత ప్రతిదినము క్రమేణ తగ్గుచు, సెప్టెంబరు 23 వ తేదీ క్షితిజ రేఖలో భూప్రదక్షిణము చేసి, అస్తమించును. తర్వాత చీకటి ఎక్కువయగుచు, సంధ్యారుణ కాంతి మాత్రమే ఉండును. ఈ సంధ్యాకాంతి రవి నిలువుగా 18° లోతు పోవువరకు లభించుచుండును. దక్షిణ ధ్రువవాసులకు దీనికి వ్యతిరేకముగా దివా రాత్రములు ఏర్పడుచుండును.

ఉత్తర ధ్రువము దేవ భూమి ; దక్షిణ ధ్రువము దైత్య భూమి ; మన సంవత్సరము వారికి ఒక అహోరాత్రము. శీతల మండలములో నిరంతర రాత్రులలో ఒక దివ్య కాంతి కనబడును. అచ్చటి వాస్తవ్యులు ఆ కాంతితో తమ కార్యములు నిర్వహించుకొందురు. ఉత్తర కాంతికి అరోరా బోరియాలిస్ అని పేరు. దక్షిణ ధ్రువమువద్ద నట్లే యొక కాంతి అరోరా ఆస్ట్రాలిస్ అనునది కలదు (చూ. భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములు పు. 154). ఎమ్. వి. సు.

మల్లన, పావులూరి : పావులూరి మల్లన క్రీ. శ. 1100 ప్రాంతమున జీవించెనని చరిత్రకారుల అభిప్రాయము. అతని తాతయగు మల్లన రాజరాజ నరేంద్రునిచే 'నవఖండవాడ' యను గ్రామమును అగ్రహారముగా పుచ్చుకొనుటచే అతడు నన్నయభట్టునకు రమారమి 50 సంవత్సరముల తరువాతివాడని భావించవచ్చును. గోదావరీ మండలాంతర్గతమగు కమ్మనాటిలోని పావులూరు అతని

నివాసస్థానమనియు, అతడాయూరికి కరణము అనియు తెలియుచున్నది.

మల్లన 'సార సంగ్రహ గణితము' అను గణిత గ్రంథమును రచించెను. ఆంధ్రమున వ్రాయబడిన మొట్టమొదటి శాస్త్ర గ్రంథము అదియేయని చెప్పవచ్చును. 'పావులూరి గణితము' అని ప్రసిద్ధికెక్కిన అది యొక స్వతంత్ర గ్రంథము కాదు; ప్రఖ్యాత జైనగణితవిశారదుడు మహావీరాచార్యుని 'గణితసారసంగ్రహము' నకు ఆంధ్రానువాదము. తాను రచింపదలచినది శాస్త్రగ్రంథమే అయినను అనూచానమైన ప్రాచీన సంప్రదాయమును అనుసరించి, మల్లన తన గ్రంథమును పద్యకావ్యముగా చెప్పి, చక్కని కవిత్వము కూడ చెప్పగల తన సామర్థ్యమును నిరూపించుకొనెను.

మూలగ్రంథము అగు గణితసారసంగ్రహములో పరికర్మ, భిన్న, ప్రకీర్ణ, త్రైరాశిక, మిశ్ర, క్షేత్ర, ఖాత, ఛ్ఛాయావ్యవహారములు అను ఎనిమిది ప్రకరణములు కలవు. మల్లన మిశ్ర గణితమును సూత్రగణితము, సువర్ణ గణితము అని రెండు విభాగములు కావించెను. మూల గ్రంథములోని గణిత విధానములను మాత్రమే స్వీకరించి, అతడు చాలవరకు స్వోపజ్ఞములైన లెక్కలను, ఉదాహరణములను తన గ్రంథమున పొందుపరచెను. భిన్నాంకముల సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహారములతో కూడి 'ఇష్టకర్మము' అని పిలువబడు గణిత వ్యవహారమునకు కూడ మల్లన పెక్కు ఉదాహరణము లిచ్చెను. గణిత సార సంగ్రహమును ప్రాతిపదికగా చేసికొని, మల్లన తన గణిత వైదుష్యమును ప్రదర్శించెను. అ. వెం.

మహావీరుడు : రాష్ట్రకూట రాజగు అమోఘ వర్షుని రాజ్య కాలమున మహావీరుడు తన గణితసార సంగ్రహమును క్రీ. శ. 814 - 877 మధ్య రచించెను. ఇతడు జైనుడు. జైన సామాన్య ధర్మమగు విషయ విస్తర ప్రావణ్యము ఈతనియందు కానవచ్చును.

మహావీరుడు తన గ్రంథములో మొదటి అధ్యాయమందు సంఖ్యల పేళ్ళను, దైర్ఘ్యభారపకాంకములు మొదలగు వాటిని చర్చించెను. రెండవ అధ్యాయములో ప్రధాన గణితపరికర్మలను చర్చించెను. పరంపరలు సంకలన వ్యాపార విషయములగుటచే ఇచ్చట చర్చింపబడినవి. సంకలన శ్రేఢీనిరూపణ మొదటి ఆర్యభట, బ్రహ్మగుప్త రచనలలో సంగ్రహముగ కన్పట్టు దాని విస్తరణమే ఇచ్చట చూడవచ్చును. కాని ఇతని గుణోత్తర శ్రేఢీ నిరూపణ జైనసాంప్రదాయిక గ్రంథముల నుండియు, పింగళచ్ఛందస్సూత్రములనుండియు ఉత్పన్నమైనది. పలుచోట్ల వికీర్ణమై, విస్తృతమైయున్న విజ్ఞానమును ప్రోగుచేసి, ఇందు వ్యవస్థీకరించుట మహావీరుడు భారతీయ గణితమునకు చేసిన అపారసేవ.

మహావీరుని అంకశ్రేఢీ నిరూపణయందలి విశేష విషయమేమనగా అతడు భిన్నాంకాత్మకములగు ఆవృత్తులను శ్రేఢియందు గ్రహించెను. ఇతనికి ముందు వెలువడిన గ్రంథములలో కానరాని అమూర్త భావమిది. సంకలన గుణోత్తర శ్రేఢులందు వీటి సమ్మేళనములందు తారసిల్లు అనేక సమస్యలను అతడు ఉట్టంకించియున్నాడు. ఇందు క్రింది సంకీర్ణ పరంపర సంకలనమున్నది.

$$a + (ar \pm m) + \{(ar \pm m) r \pm m\} + \left[\{(ar \pm m) r \pm m\} r \pm m\right] + \ \dots \ \dots$$

ఒక దత్తపరంపరనుండి కొన్ని పదముల నిష్కర్షను గురించిన వ్యాపారము ఒక సంకలన శ్రేఢి సంకలనమునకు ఉపయోగించు సూత్రమందు ఆర్యభటునిచే సంక్షిప్తముగా ప్రవేశపెట్టబడినది. దీనిని మహావీరుడు వ్యుత్కలితమను శీర్షిక క్రింద విస్తరించెను.

ఘనకరణమునకు శ్రీధరునిచే ఈయబడిన విధానములు గాక మహావీరుడు పరంపరాగణితాధారములగు మరిరెండు సూత్రముల నిచ్చెను. అవి :

$n^3 = n + 3n + 5n + \ \dots \ \dots$ n పదములవరకు

$$n^3 = n^2 + (n-1)\{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)\}$$

బ్రహ్మగుప్తుని గ్రంథమునందువలెనే గణితసారసంగ్రహమందుకూడ ప్రస్తారములు, సంయోగములు ఛందోమాత్రలకు అన్వయించు రీతి నిరూపింపబడినవి. బ్రహ్మగుప్తుని గ్రంథములో ఉన్న అస్పష్టత ఇందు లేదు.

భిన్నాంకముల సరళీకరణమునకు కళాసవర్ణనము, అపవర్తనము ఆవశ్యకములని గుర్తించబడినది. ఆరుజాతుల భిన్నాంక యోగములు సరళీకరించబడినవి.

1. భాగజాతి : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \dots \ \dots$

2. ప్రభాగజాతి : $\frac{a}{b}$ యొక్క $\frac{c}{d}$ యొక్క $\frac{e}{f} \dots$

3. భాగానుబంధజాతి : $\left(a + \frac{b}{c}\right)$ లేదా

$\frac{p}{q}$ యొక్క $\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right)$ యొక్క p/q +

$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right)$ యొక్క $\frac{t}{h} + \ \dots \ \dots$

4. భాగాపవాహజాతి : $\frac{p}{q}$ యొక్క $\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right)$ – $\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \ldots\right)$ యొక్క $\frac{t}{u}$ ... ...

5. భాగభాగజాతి : $a \div b/c$, లేదా $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s}$

6. భాగమాతృజాతి : మీది 5 జాతుల సమ్మేళనము

మహావీరుని ఉద్దేశము ప్రకారము ఇట్టి ప్రభేదకములు 26 కలవు.

భిన్నాంకముల యొక్క హారముల క. సా. గు నకు మహావీరుడిచ్చిన పేరు 'నిరుద్ధము'. ఈ పదము, ఈ పదానుపక్తమయిన భావము తొలిని గణితసారసంగ్రహమందు మనకు తారసిల్లును.

సరళ భిన్నముల గురించిన అనేక జాతుల, లేదా వర్గ సమీకరణముల సమస్యలను ఇతడు సాధించెను. ఏ భిన్నాంకమునైనను ఒక ఏకలవ భిన్నాంక పరంపర సంకలనముగ నిరూపించుటకు వలయు సూత్రములనేకములు మహావీరుడిచ్చియున్నాడు.

దృష్టాంతములు :

$$\text{(i)}\quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2 - 3^{n-2}}$$

$$\text{(ii)}\quad 1 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} + \cdots \frac{1}{(2n-1)\, 2n \cdot \frac{1}{2}}$$

ఇంతేకాక ఏకలవ భిన్నాంకములను దత్త లవములు గల భిన్నాంక పరంపర సంకలన ఫలముగాను

$$\text{ఉదా :}\quad \frac{1}{n} = \frac{a}{n(n+a)} + \frac{b}{(n+a)(n+a+b)} + \frac{c}{(n+a+b)(n+a+b+c)}$$

ఏ భిన్నాంకమునైనను రెండు ఇతర భిన్నాంకముల సంకలన ఫలముగా ప్రదర్శించుటకై వలయు సూత్రములు కూడ ఇచ్చెను.

$$\text{ఉదా :}\quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$$

ఇట్లు పరంపరల గణితమందు సంభవించిన పురోగతిచే అనుగృహీతమయిన భిన్నాంక అంకగణితమందు గణనీయమైన అభివృద్ధిని మహావీరుడు సాధించెను.

అనేకములగు సంఖ్యా సమస్యలు సరళ, వర్గసమీకరణముల సాధనమును అర్థించును. మహావీరుడిచ్చిన క్రొత్త రకపు సమీకరణములలో ఈ క్రిందిది గణనీయతమము :

$$a_1\sqrt{b_1 x} + a_2\sqrt{b_2(x - a_1\sqrt{b_1 x})} + \ldots + R = x$$

దీనిని అకరణీయ రాశిగా మార్చినచో $2r$ వ తరగతి సమీకరణము లభ్యమగును (r అనునది సమీకరణమునకు ఎడమవైపున ఉన్న పదముల సంఖ్య). అందుకు ఉపాయము ఉచిత ప్రతిక్షేపముచే ఈ సమీకరణమును వర్గ సమీకరణముగా మార్చుట. ద్విపద సమీకరణములుకూడ మహావీరుడు తన గ్రంథమునందు చర్చించెను.

తన పురోగాముల రచనలందలి జ్యామితి విషయములన్నియు మహావీరుని జ్యామితియందున్నవి. అకరణీయ విషయములను చర్చించు ప్రకరణము (1) సమాన పరిమానములు (పెరిమీటర్స్) దత్త వైశాల్య నిష్పత్తిలోనున్నవి, (2) సమాన వైశాల్యములు, పరిమానములు దత్త నిష్పత్తిలోనున్నవి, (3) పరిమానములు వైశాల్యములు కూడ దత్త నిష్పత్తిలో నున్నవి; దత్త వైశాల్యములు గల అకరణీయ త్రిభుజములు; దత్త వైశాల్యములు గల అకరణీయ చక్రీయ చతుర్భుజములు : ఒక దత్త వృత్తములో నుండు చతుర్భుజములు; - వీటిని గురించిన నిరూపణలు మహావీరుడిచ్చెను. క్షేత్రమాపనముల గురించిన సమస్యలందతడు వృత్తీయ క్షేత్రమాపనముతో ఋజురేఖ క్షేత్రముల మాపనమును చర్చించెను. పరస్పరము స్పర్శించు 3, 4, వృత్తములచే ఆక్రమితమగు వైశాల్యమును కనుగొనుటకు అతడు వాచకములను ఇచ్చెను; దీర్ఘవృత్తము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటకు యత్నించినాడు; కాని దాని వృత్త సాదృశ్యముపై ఆధారపడి, దాని వైశాల్యమును స్థూలముగ సాధించగలిగెను.

పరంపరల గణితమందు మహావీరుని మౌలిక నిర్వాహము కలదు. అతని విస్తరణగుణ మహత్త్వముచే గణిత సార సంగ్రహము అభిజ్ఞుల ఆదరమునకు పాత్రమైనది. ఈ గ్రంథపు వ్రాత ప్రతులు కేరళలో మెండుగా నున్నవి. ఈ రాష్ట్రమందే పరంపరా గణితము పూర్ణము యొక్క భాగముల సంకలనమునకు, లేదా, చయనీకరణమునకు దారితీసినది.

సరస్వతి

మాంటీకార్లో విధానములు : భౌతిక, రాసాయనిక శాస్త్రములయినట్లు గణితము ప్రాయోగిక విజ్ఞాన జన్యము కాదను అభిప్రాయము పలువురకు కలదు. గణితశాస్త్ర సత్యములు ఇదివరకు విదితములైన సత్యముల నుండి సాధించబడినవనియు, కొన్ని స్వీకృత ప్రాథమిక ప్రమేయముల నుండి ప్రారంభించి, తర్క నియమాను సారముగ సాధించబడినవనియు వీరందురు. కనుక గణితశాస్త్రమందు ప్రాయోగిక విధానములకు స్థానము లేదని, అందురు.

వ్యాసములందు, గ్రంథములందు సిద్ధరూపములలో ప్రదర్శించబడిన గణితశాస్త్ర పర్యవసానములకు ఈ పై ప్రతిపాదన అన్వయించినను, ఆవిష్కరణ దశలో నున్న గణిత సత్యములకు అది అన్వయించదు. ఇదియొక విదగ్ధ అభ్యూహాల అనుపూర్వి, విశిష్ట పక్షముల అనుశీలన, సత్య సంకాశములగు విస్తరీకరణములు, సోపపత్తికములగు సత్యాపనముల సమూహము - వీటి నుండి చివరకొక సుసంగతమగు సంస్థానమేర్పడును. కొసకీ విశిష్టపర్యవసాన మెట్లు వ్యక్తమైనదో తెలియరానంత చతురముగ అంత్య ప్రతివాదనముండి ప్రయత్న ప్రమాదముల ప్రదర్శన లేశమైన గానరాకుండ చేయబడినది.

మాంటీకార్లో విధానములు : మాంటీకార్లో విధానములన, పై జెప్పిన ప్రత్యేక పక్షములతో బయలుదేరి పర్యవసానము నూహించి, దాని స్వీకృత పక్షములనుండి గాని, లేదా పూర్వోపపాదిత ప్రమేయములనుండి గాని తర్కమార్గమున రుజువు చేయుట కాదు. మాంటీకార్లోవిధానములనగా సాంఖ్యక ప్రతిరూపకరణ సాంకేతిక జ్ఞానము నుండి ఆసన్న యథార్థత గల పర్యవసానముల సాధించుటయే. మాంటీకార్లో అనునది దక్షిణ ఫ్రాన్స్ దేశమునందొక చిన్న నగరము. ఈ నగరమంతయు ఒక ద్యూతకేంద్రము. ఇచ్చట ప్రభూత సంపదలు దినదినము ప్రాప్తములో, నష్టములో యగుచుండును. యదృచ్ఛాశ్రయములగు క్రీడలు సంబంధముగనే సంభవనీయతావాదము ఉద్భవించినది. రాబోవు గుర్రపు పందెములందు ఏ గుర్రము గెలుచునో, యదృచ్ఛాశ్రయమైన క్రీడలో తరువాతి ఫలమెట్లుండునో ముందుగా తెలిసికొనుటకు పద్ధతి నొకదానిని కనుగొనుటకు కాలమును, శక్తిని వృథావినియోగము చేయువారలు నేడుకూడ కలరు. కాని అట్టి యదృచ్ఛాపరములగు క్రీడల యందు ఫలముల ముందుగా తెలిసికొనుటకు అమోఘమైన పద్ధతి ఏదియును నేటికిన్ని వెలుగు చూడలేదు.

మొదటి దృష్టాంతము - π - గణనము : ఏ రెండు ప్రక్క గీతల మధ్య ఒక ఏకాంకము అంతరముండునట్లు సమాంతరఋజురేఖలతో నిండియుండు ఒక సమతలమున్నదనుకొందము. మన మొక సన్నని ఏకాంక దైర్ఘ్యము గల కర్రముక్కను తీసికొని, ఆ సమతలముపై యాదృచ్ఛికముగ విసరినచో, ఆ కర్రముక్క కొన్ని సమయములందు ఆ సమాంతర రేఖలలో నొక దానిని ఖండించును. మరి కొన్ని వేళల అది రెండు సమాంతరరేఖలమధ్య ఏ రేఖను ఖండించకుండ పడును, ఆ కర్రయొక్క ఆ సమాంతర రేఖలలో నొక దానిని ఖండించుటకు గల సంభవనీయత (ప్రాబబిలిటీ) $2/\pi$ అని చూపవచ్చును.

ఒక పెద్ద సంఖ్య N చే నిరూపించబడు నన్నిసారులు ఆ కర్ర నా తలముపై విసరి, ఆ కర్ర ఆ సమాంతర రేఖలలో ఒక దానిని ఎన్నిమారులు ఖండించినదో లెక్క పెట్టి, ఆ సంఖ్యను n చే వ్యక్తపరచిన, n/N అను నిష్పత్తి పై జెప్పిన సంభవనీయతను స్థూలముగా తెలియచేయును. ఇప్పుడీ నిష్పత్తిని π మూల్యమును కనుగొనుటకు సాంఖ్యక శాస్త్రీయ సాధనముగా నుపయోగించవచ్చును. ఉదా : 1000 సార్లు విసరుటలో 635 సార్లు ఆ కర్ర ఆ రేఖలలో నొక దానిని ఖండించినదనుకొందము. అప్పుడు

$$\frac{635}{1000} = \frac{2}{\pi} \text{ (స్థూలముగ).}$$

ఈ సంబంధమునుండి π యొక్క ఆసన్న మూల్యము 3.15 అని తెలియును. క్షేపముల సంఖ్య ఎక్కువగు కొద్ది π యొక్క యథార్థమూల్యము పొందు సంభవనీయత ఎక్కువగు చుండును.

రెండవ దృష్టాంతము : $\int f(x)\, g(x)\, dx$ మూల్యగణన :

పైన ఉదహరించబడిన సాంఖ్యక ప్రతి రూప గ్రహణ (శాంప్లింగ్) విధానములచే $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ విలువను లెక్కించవచ్చును. a, b ల మధ్య నుండు మూల్యముల నన్నింటిని, ఆ మూల్యములను మాత్రమే x గ్రహించగల సన్నివేశము నొక దానిని తీసికొనెదము. $x, x+\Delta x$ మధ్య x సన్నివిష్టమై యుండుటకు గల సంభవనీయత $f(x)\,\Delta x$ అనుకొనెదము. $a, b,$ ల మధ్యనొక బిందువును యాదృచ్ఛికముగ ఎన్నుకొనెదమేని $\int_a^b f(x)\, dx = 1$ ఇప్పుడు a, b ల మధ్య $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ బిందుసమితిని తీసికొని, ఈ బిందువులందు g ఫలము యొక్క విలువలగు $g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_n)$ ను తీసికొనినచో, వాటి సంకలనము $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \dots + g(x_n)$ ను n చే భాగహారము చేయగా $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ కు ఆసన్న మూల్యముగ నుండును. ఆ బిందువుల ఏర్పుట యెంత యాదృచ్ఛికముగ చేసెదమో అంతకంత మనకు లభించు మూల్యము ఎక్కువ యథార్థతను స్వీకరించును. ఇట్లు $\int_0^1 x\, dx$ ను సాధించుటకు, $p\ q\ r\ \dots$ అను కొన్ని విలువల ఏర్పుకొనెదము. ఇచ్చట p, q, r అనునవి 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అను $\cdot pqr \dots \dots$ అంకెలలో యాదృచ్ఛికముగ ఏర్పుకొనబడిన సంఖ్యలు, ఈ సంఖ్యల నన్నిటిని కూడి, ఆ సంఖ్యల మొత్తపు సంఖ్యచే భాగించుము.

వాటి సరాసరి అనగా (అవరేజ్) విలువను కనుగొనుము. ఇదే మనకు కావలసిన చయనము యొక్క స్థూలమూల్యము.

మూడవ దృష్టాంతము : ప్రసార సమీకరణము : వాయు ప్రసరణకు చెందిన ద్విపరిమాణిక సమస్య నొక దానిని పరిష్కరించవలసియున్న దనుకొనుము. ప్రతి అణువును ఒక తడవునకు ఒక పదము x — అక్షదిక్కులోగాని, y — అక్షదిక్కులోగాని, ధనదిశలోగాని ఋణ దిశలోగాని, చలించునట్లు చేయుటవలన ఆ వాయువునందలి అణువుల యదృచ్ఛాచలనమును అనుకరించవచ్చును. ఆ అణువు x — అక్షము దిశలో చలించుచున్నదో, y — అక్షము దిశలో చలించుచున్నదో ప్రతి దశయందు నిర్ధారణ చేయుటకు, రెండే రెండు విలువలు గ్రహించగల చలరాశి యొకటి మనకు కావలెను. ఒక నాణెమును ఎగుర వేయుట అట్టి మన ఊహకందిన చలరాశి. ఈ నాణెమును ఎగురవేయుటవలన ఆ వాయు అణువు x — అక్షము వెంట కదలునో, లేదా y — అక్షము వెంట కదలునో మనము నిర్ధరింతుము. ఆ పథము ధన దిశవైపు జరుగునో, లేదా ఋణ దిశవైపు జరుగునో నిర్ణయించుటకు మన మింకొకసారి ఎగురవేయుటచే నిర్ణయించవలసి ఉండును. ఇట్లు (x, y) బిందువు వద్దనున్న అణువు $(x+1, y)$ కి కదలునా, లేదా $(x-1, y)$ కి కదలునా, లేదా $(x, y+1)$ కు కదలునా, లేదా $(x, y-1)$ కు కదలునా అని నిర్ణయించెదము. మూలబిందువు $(0, 0)$ నుండి బయలుదేరి ఇట్లు మనము t ప్రయోగమును గావించితిమేని (m, n) (ఇచ్చట m, n లు పూర్ణాంకములు) అను బిందువు దొరకును. ఇది యే కాలము t తరువాత ఆ బిందు స్థలము. ఈ ప్రయోగము లనేకములు మనము చేసితిమేని, మనకు అనల్ప సంఖ్యాఫలములు దొరకును.

వీటినుండి t పదముల తరువాత ఆ అణువుయొక్క స్థానముల సంభావ్యతను స్థూలముగ కనుగొనవచ్చును. ఇంకొక విధమున చెప్పవలెననిన, నాణెమును మరల మరల ఎగురవేసి ఆ బిందు యాదృచ్ఛికచలన పథములను కనుగొనవచ్చును. అట్లు మనకొక సంభవనీయతా విభజనము $P(m, n, t)$ లభ్యమగును. ఇది ఆ అణువు $(0, 0)$ నుండి బయలుదేరి t పదముల తరువాత (m, n) అను స్థానము చేరు సంభావ్యతను సూచించును. ప్రతి పదమును, ఒక కాల ఏకాంకమును స్వీకరించునని యనుకొనినచో ఇది t కాలము తరువాత ఒక అతిసాంద్ర వాయురాశిలో సంభవనీయతా విభజనమును మన కందజేయును.

$P(m, n, t)$ ఈ క్రింది సమీకరణమును అనుసరించునని సులభముగా చెప్పవచ్చును.

$$P(m, n, t) = \frac{1}{4}\left[P(m, n-1, t-1) + P(m, n+1, t-1) + P(m-1, n, t-1) + P(m+1, n, t-1)\right]$$

ఏలన t కాలమున ఆ అణువు (m, n) వద్ద నున్నచో, అంతకు ముందు $t-1$ కాలమున

$(m-1, n)$, $(m+1, n)$, $(m, n-1)$, $(m, n+1)$ అను నీ నాలుగు బిందువులలో దేనివద్దనైన ఉండవలెను. అంతరాళము t ను మిక్కిలి చిన్నదిగ చేసినచో, క్రింది ప్రసరణ సమీకరణము మనకు లభ్యమగును.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

ఇట్లు కేవలము ప్రతిరూప గ్రహణ సాంకేతిక విజ్ఞానము నుపయోగించి పై ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణము యొక్క స్థూల సాధనమును పొందవచ్చును. అ. స.

మాధవుడు : సంగమ గ్రామ నివాసియగు మాధవుని రచనలలో వేణ్వారోహము, చంద్రవాక్యములు అను ఖగోళశాస్త్ర గ్రంథములు రెండు నేటివరకు మనకు తెలియవచ్చినవి. కాని ఇతడింతకన్న ఎక్కువ గణిత గ్రంథములు రచించియుండవచ్చును. నీలకంఠుడు, క్రియాక్రమకరి రచయిత, యుక్తిభాషాకర్త మొదలగు కేరళ జ్యోతిష్కులచే ప్రశంసించబడినవాడు మాధవుడు. ఆర్యభటీయ సంప్రదాయముచే ఆవిష్కరింపబడి, ఒక వృత్తము యొక్క పరిధిని (అనగా π ను), గోళతల వైశాల్యమును, ఘన పరిమాణమును లెక్కించుటకు విజయవంతముగ వాడబడిన సంకలన చయన పరికర్మ ఈ రచయితల గ్రంథములలో సవిరముగ చర్చించబడినది. π మూల్యమును లెక్కించుటకు గావింపబడిన యత్నముల సంఖ్యానమును, గుణకారశ్రేఢీ క్రమమున అతిశయించుచున్న భుజ సంఖ్యగల బహుభుజులను వృత్తములోన వ్రాసి, బహుభుజి భుజసంఖ్యను ఎక్కువచేసినయెడల కావలసినంత కచ్చితముగ విలుగునట్లుగ వృత్తపరిధిని కనుగొను మాధవుని విధానము క్రియాక్రమకరి వర్ణించియున్నది. (ఆర్కిమిడీజ్ వాడుకచేసినది ఈ విధానమే). దీనికే సులభతర విధానమొకటి ప్రదర్శించుచు క్రియాక్రమకరి కరణ పద్ధతిలో ఉదాహరించబడిన శ్లోకము 'వ్యాసే వారిధినిహతే' అనుదానిని వృత్తపరిధిగణనకు

$$c = 4d - \frac{4d}{3} + \frac{4d}{5} - \frac{4d}{7} + \dots \dots \dots \dots$$

అను అనంత పరంపరను (దీనికి గ్రెగొరీ పరంపర అని ఆధునిక నామము) ఒకదానిని ప్రదర్శించినది. ఇట్లే జీవల,

కోజీవల, జ్యాలమానములో చాపముయొక్క కొలతను తెలియపరచు అనంతపరంపర

$$a = \frac{S \cdot r}{c} - \frac{S \cdot r}{3c} \cdot \frac{S^2}{c^2} + \frac{S \cdot r}{5c} \cdot \frac{S^4}{c^4} - \frac{S \cdot r}{7c} \cdot \frac{S^6}{c^6} + \cdots$$

(ఇచ్చట a = చాపము, S = జీవజ్యా, r = అర్ధవ్యాసము, c = కోజీవజ్యా); ఇంకను జీవలకు, కోజీవలకు ఈయబడిన ఈ క్రింది పరంపరలు

$$S = a - \frac{a^3}{r^2 3!} + \frac{a^5}{r^4 5!} - \frac{a^7}{r^6 7!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$c = r - \frac{a^2}{r 2!} + \frac{a^4}{r^3 4!} - \frac{a^6}{r^5 6!} + \cdots\cdots\cdots$$

మాధవుని నిర్వాహములని కొనియాడబడినవి. చాపమునకు బదులుగ $r\theta$ ను, S, c లకు క్రమముగ $r \sin\theta$, $r\cos\theta$ లను ప్రవేశపెట్టినచో పరిచితములైన క్రింది పరంపరలు లభించును.

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots$$

ఈ అనంత పరంపరలను సాధించుటలో చాపము యొక్క జీవ, కోజీవల అంతరీకరణము ఇమిడియున్నది. జీవ పరస్పర న్యాయమను పేర ఆర్యభటీయ సంప్రదాయమందు పేరుగన్న $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ అను త్రికోణమితీయ ప్రతిపాదన కూడ మాధవోపజ్ఞమే యని కేరళ గణిత, ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులచే ప్రశంసింపబడినది.

ఇట్లు గ్రెగోరీ పరంపరను, జీవ, కోజీవల పరంపరలను ఐరోపా ఖండ గణితజ్ఞులకు చాల పూర్వకాలమందే ఆవిష్కరించిన మాధవుడు విశేష శేముషీ ధురంధరుడనుట నిర్వివాదము. 14 వ శతాబ్ద పరార్ధమందు జీవించి, యూరపులో ఈ ఆవిష్కరణలు వెలుగుచూచిన కాలమునకు కొన్ని శతాబ్దములముందు మాధవుడు వీటిని ఆవిష్కరించినను, ఆ కీర్తి అతనికి దక్కలేదను భూతార్థము నిశ్చయముగ చారిత్రక విధి విలాసమే. సరస్వతి

మాసములు, ఋతువులు : సిద్ధాంత గ్రంథముల ప్రకారము మాసములు రెండు విధములు. అవి చాంద్ర మాసము, సౌరమాసము.

చాంద్రమానమాసము చంద్రునిపై ఆధారపడి ఉన్నది; రెండు సన్నిహిత అమావాస్యలకు మధ్యనుండు కాలమునకు ఒక చాంద్రమాన మాసమని పేరు.

క్రాంతి వృత్తమునకు 12 రాశులు; సూర్యుడు ఒక రాశిలో సంచరించు కాలమునకు ఒక సౌరమాసమని పేరు. అవి 12 చేరిన ఒక సావన సంవత్సరము.

మేష విషు బిందువు వెనుకకు చలించుటచేతను, దానికి తగిన సంస్కారము చేయనందునను, మార్చి 21 తేదీ ప్రారంభింపవలసిన సంవత్సరము ఏప్రిల్ 13 తేదీ ప్రారంభమగుచున్నది. కేంద్ర ప్రభుత్వము చేసిన సంస్కరణ ఇటీవల అమలులోనికి వచ్చినది.

సౌరమాసములకు రాశి నామములు ఈయబడినవి. రాశి సంక్రమణమునందు మాస ప్రారంభమగును.

సౌరమాసములు	చాంద్రమాసములు
ప్రారంభ సమయము-ప్రతి రాశిని రవి సంక్రమణము (దాటుట) చేయునపుడు	ప్రారంభ సమయము అమావాస్య నుండి
మేషము	చైత్రము
వృషభము	వైశాఖము
మిథునము	జ్యేష్ఠము
కటకము	ఆషాఢము
సింహము	శ్రావణము
కన్య	భాద్రపదము
తుల	ఆశ్వియుజము
వృశ్చికము	కార్తికము
ధనుస్సు	మార్గశిరము
మకరము	పుష్యము
కుంభము	మాఘము
మీనము	ఫాల్గుణము

చాంద్రమాసమునకు ఆ నెలలో ఏర్పడు పూర్ణిమనాటి నక్షత్రము పేరు ఈయబడినది. చైత్ర మాసములో పూర్ణిమ చిత్తా నక్షత్రములో ఏర్పడును. అట్లే ఇతర నెలలకు కూడ.

మేష విషువు వెనుకకు చలించుటచే, సుమారు 72 సంవత్సరములకు ఒక దినము సంవత్సరారంభములో వెనుక పడుచుండును. దీనికి నిరయన సంవత్సరమని పేరు. మేషు విషువు వెనుకకు పోవుటచే ఏర్పడిన మార్పును గమనించి సంవత్సరమును సంస్కరించిన, ఆ సంవత్సరమునకు సాయన సంవత్సరము అని పేరు.

దేశీయ ప్రభుత్వముచే నేర్పడిన పంచాంగ సంస్కరణ సంస్థవారు పంచాంగ రచనకు మాస నిర్ణయము చేసిరి. దాని ప్రకారము సంవత్సరమునకు 365 దినములు; నాలుగు సంవత్సరములకు ఒకతూరి, నాలుగు శతాబ్ద

ములకు ఒకసారియు 366 దినములు సంవత్సరమందుండును.

మాసనామములు	దినములు	ఋతువులు
చైత్రము	31, 30	వసంతము
వైశాఖము	31	
జ్యేష్ఠము	31	గ్రీష్మము
ఆషాఢము	31	
శ్రావణము	31	వర్ష ఋతువు
భాద్రపదము	31	
ఆశ్వయుజము	30	శరత్తు
కార్తీకము	30	
మార్గశిరము	30	హేమంతము
పుష్యము	30	
మాఘము	30	శిశిరము
ఫాల్గుణము	30	
	365 లేదా 366	

ఈ ఏర్పాటు వలన సూర్యుడు సంవత్సరారంభములో సాయన మేష విషు బిందువు నందుండును.

అయనములు : ఆయనములు రెండు. ఉత్తరాయణము, దక్షిణాయనము.

వరాహమిహిరాచార్యుని కాలములో ఉత్తరాయణములో సూర్యుడు విషువృత్తమునకు ఉత్తరమున, దక్షిణాయనములో దక్షిణమున నుండినట్లు తెలియుచున్నది. అనగా చైత్రాది ఆరు నెలలు ఉత్తరాయణము, ఆశ్వయుజము మొదలు ఆరు నెలలు దక్షిణాయనము. ప్రస్తుతము సూర్యుడు ఉత్తరాభిముఖుడై పోవునపుడు అనగా, పుష్యమాసమునుండి ఆరునెలలు ఉత్తరాయణము; దక్షిణాభిముఖుడై వెళ్లునపుడు అనగా ఆషాఢాది ఆరు నెలలు దక్షిణాయనము. ఆచార్య

మూడవ, నాల్గవ తరగతి సమీకరణములు :

మూడవ తరగతి సమీకరణము a, b, c, d లు స్థిరరాశులుగను, x చలరాశిగను గలిగిన

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \quad \cdots (1)$$

అను రూపము గల సమీకరణము. దీనిని క్రింది విధమున సాధింపవచ్చును. పై సమీకరణమునందు x కు బదులు $\frac{1}{a}(z-b)$ ని ప్రతిక్షేపించిన z చలరాశిగా గల

$$z^3+3Hz+G=0 \quad \cdots (2)$$

అను సమీకరణమును పొందవచ్చును. ఇచ్చట

$$H=ac-b^2;\quad G=a^2b-3abc+2b^3 \quad \cdots (3)$$

$z=m^{1/3}+n^{1/3}$ అని తీసికొనినచో

$$z^3-3m^{1/3}n^{1/3}z-(m+n)=0 \quad \cdots (4)$$

అను సమీకరణము లభించును. కావున,

$$H=-m^{1/3}n^{1/3};\quad G=-(m+n) \quad \cdots (5)$$

అయినచో, సమీకరణములు (2), (4) సమానములగును. కావున, m, n సంఖ్యలు

$$t^2+Gt-H^3=0$$

అను సమీకరణము యొక్క మూలములైన, అనగా,

$$m=\frac{-G+\sqrt{(G^2+4H^3)}}{2};$$

$$n=\frac{-G-\sqrt{(G^2+4H^3)}}{2}$$

అయినచో పై రెండు సమీకరణములు సమానములగును. అప్పుడు $\sqrt[3]{m}$ యొక్క ఒక విలువ

$$\sqrt[3]{\left[\frac{-G+\sqrt{(G^2+4H^3)}}{2}\right]} \text{ అగును.}$$

ఈ విలువను Q అనిన $\sqrt[3]{m}$ యొక్క మిగిలిన రెండు విలువలు ωQ, $\omega^2 Q$ అగును. ఇచ్చట ω అనునది $x^3-1=0$ యొక్క ఒక ప్రధాన మూలము $\left(\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$-H=m^{1/3}n^{1/3}$ కావున $\sqrt[3]{n}$ యొక్క అనురూప విలువలు $Q-\frac{H}{Q}$, $\omega Q-\frac{\omega^2 H}{Q}$, $\omega^2 Q-\frac{\omega H}{Q}$.

ఈ మూడు విలువలు (4) యొక్క మూలములు, అనగా $z^3+3Hz+G=0$ యొక్క మూలములు. కావున (1) యొక్క మూలములు :

$$\frac{1}{a}\left\{Q-\frac{H}{Q}-b\right\},\ \frac{1}{a}\left\{\omega Q-\frac{\omega^2 H}{Q}-b\right\},$$

$$\frac{1}{a}\left\{\omega^2 Q-\omega\frac{H}{Q}-b\right\}$$

ఈ విధముగా మూడవ తరగతి సమీకరణమును సాధించు పద్ధతిని ' కార్డాన్ పద్ధతి ' అని అందురు.

$G^2+4H^3<0$ అయినప్పుడు పైన పేర్కొనబడిన ప్రకారము m, n సంకీర్ణ రాశులగును. కాని, త్రికోణమితీయ పద్ధతి అనుసరించి సమీకరణము యొక్క మూలములన్నిటిని వాస్తవిక రూపమున కనుగొనవచ్చును. $G^2+4H^3<0$ అగునపుడు, $H<0$, మరియు $-4H^3>G^2$ అగును.

$z^3+3H^2+G=0$ అను సమీకరణమున $z=2\sqrt{-H}\cos\theta$ ను ప్రతిక్షేపించిన, θ చలరాశిగా గల

$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\frac{G}{2(\sqrt{-H})^3} = 0$ అను సమీకరణము వచ్చును. అప్పుడు $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = \frac{1}{4}\cos^3\theta$ అను సంబంధమును ఉపయోగించిన

$\cos 3\theta = \frac{-G}{2(\sqrt{-H})^3}$ అని లభించును. $H < 0$, మరియు $-4H^3 < G^2$ కావున, 3θ విలువ వాస్తవిక రాశియై ఉండును. అప్పుడు $3\theta_1 = \alpha_1$ అయినచో $\theta_1 = \frac{\alpha_1}{3}$, $\frac{\alpha_1 + 2\pi}{3}$, $\frac{\alpha_1 + 4\pi}{3}$ అను విలువలకు $\cos 3\theta = \frac{-G}{2(\sqrt{-H})^3}$ అగును. అనగా $\frac{\alpha_1}{3}$, $\frac{\alpha_1 + 2\pi}{3}$, $\frac{\alpha_1 + 4\pi}{3}$ అనునవి

$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\frac{G}{2(\sqrt{-H})^3} = 0$ నకు

మూలములగును. కావున $2\sqrt{-H}\cos\frac{\alpha_1}{3}$, $2\sqrt{-H}\cos\left(\frac{\alpha_1 + 2\pi}{3}\right)$, $2\sqrt{-H}\cos\frac{\alpha_1 + 4\pi}{3}$ అనునవి $z^3 + 3H^2 + G = 0$ నకు మూలములగును. కావున, $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ యొక్క మూలములు

$$\frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{\alpha_1}{3} - b\right),$$

$$\frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{\alpha_1 + 2\pi}{3} - b\right),$$

$$\frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3} - b\right)$$

అగును. ఇచ్చిన α_1 వాస్తవిక రాశి. కనుక, ఈ మూలము లన్నియు వాస్తవిక రూపములో ఉండును.

నాల్గవ తరగతి సమీకరణము: ఇది a, b, c, d, e స్థిర రాశులుగను, x చలరాశిగను గలిగి,

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \quad \ldots (6)$$

అను రూపమున ఉండు సమీకరణము. ఈ సమీకరణము ఎడమ భాగమును

$$\frac{1}{a}\{(ax^2 + 2bx + s)^2 - (2mx + n)^2\} =$$

$$\frac{1}{a}\{(ax^2 + 2(b+m)x + (s+n))\} \times$$

$$\{ax^2 + 2(b-m)x + (s-n)\} \quad \ldots (7)$$

అని వ్రాయగలిగినచో, దానియొక్క నాలుగుమూలములు

$$ax^2 + 2(b+m)x + (s+n) = 0$$

$$ax^2 + 2(b-m)x + (s-n) = 0 \quad \ldots (8)$$

అను రెండు రెండవ తరగతి సమీకరణముల నాలుగు మూలములై ఉండును.

నాల్గవ తరగతి సమీకరణమును పై విధముగ వ్రాయుటకుగాను తగిన s, m, n అను క్రింది విధమున కనుగొనవచ్చును.

(6), (7) సమీకరణములందు x యొక్క అనురూప ఘాతముల గుణకములను పోల్చగా

$$2m^2 = as + 2b^2 - 3ac\ ;\ mn = bs - ad\ ;$$

$$n^2 = s^2 - ac \quad \ldots (9)$$

అని లభించును. ఈ మూడు సమీకరణములనుండి m, n లను నిరాసము చేయగా

$$(s^2 - ac)(as + 2b^2 - 3ac) = 2(bs - ad)^2$$

అను సమీకరణము వచ్చును. ఈ సమీకరణమున s ను చలరాశిగ భావించి పైన చెప్పిన విధముగ సాధించిన s యొక్క విలువలను కనుగొనవచ్చును. ఈ మూడు s విలువల కనురూపముగా m, nల మూడు విలువలు కనుగొనవచ్చును. ఈ మూడు s, m, nల విలువలకు అనురూపముగా నాల్గవ తరగతి సమీకరణమును రెండు వర్గముల భేదముగా మూడు విధములుగ వ్రాయవచ్చును. కావున (s, m, n) లకు ఏదియో ఒక జత విలువలను తీసికొని నాల్గవ తరగతి సమీకరణమును పైన చెప్పిన విధముగా సాధింపవచ్చును. ఎమ్. వి. సు.

యముడు (ప్లూటో): వరుణగ్రహము ఆవిష్కరింపబడిన తరువాత కూడ ఇంద్రగ్రహము గణితమార్గమును అనుసరింపక యుండినందున వరుణగ్రహమునకు తరువాత ఇంకొక గ్రహమున్నదేమోయని లోవెల్ మున్నగు శాస్త్రజ్ఞులు సంశయింపనారంభించిరి. వీరి సంశయఫలమే యమగ్రహావిష్కరణము (1930). ఇదియే నేటి సౌర కుటుంబములోని కడపటి గ్రహము; బాహ్యతమమయినది కూడను. ఈ గ్రహము చాల చిన్నదైనందున (దాని ద్రవ్యసంచయము భూమియొక్క ద్రవ్య సంచయములో 10 వ భాగముండును) యురేనస్ గ్రహకక్ష్యయందు ఇది కలుగజేయు సంక్షోభము ఖగోళీయ గణితములకు అందనంత అల్పముగా నుండును. కాబట్టి యమగ్రహా

విష్కరణము కేవల యాదృచ్ఛిక సంఘటనయే కాని వరుణగ్రహావిష్కరణమువలె ఖగోళ గణిత విజయము కానేరదు.

సూర్యకుటుంబములోని వేరువేరు గ్రహముల రాసాయనిక సంఘట్టన సాదృశ్యగణననుండి లబ్ధమయిన లెక్కల వలన యమగ్రహము సూర్యునినుండి 59070 లక్షల కి. మీ.లో నున్నట్లు తెలిసినది. దాని బింబవ్యాసము సగటున 6437 కి. మీ; పరిభ్రమణకాలము 284·43 సంవత్సరములు; తాపక్రమము సుమారు—348° F.

ఈ గ్రహము చాల చిన్నదైనందున దీని బింబమును చూచుట కష్టసాధ్యము. దీని పరావర్తనశక్తి సుమారు 0·17. ఇది సూర్యునికి అత్యంతదూరములో నుండుటచేత సూర్యుడు వికిరించు శక్తిని అంతగా పొందుటలేదు. దీని ద్రవ్యసంచయము చాల అల్పమగుటచే వాతావరణమున్నదనుటకు సంభావనలేదు. కె. ఎస్. వి. స.

యుక్తవిలువల, యుక్తఫలముల వ్యాకోచములు : ఒక తలములో (x, y) నిరూపకములుగను, అక్షదిశలలో i, j. యూనిట్ సదిశరాశులు (వెక్టర్స్)గను తీసికొనెదము. అపుడు మూలబిందువు O ను, $P(x, y)$ బిందువునకు చేర్చు సదిశరాశి $OP = ix + jy$ అగును.

దీనిపై
$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\} \quad \cdots (1)$$

అను దత్త పరికర్మమును ప్రయోగించిన ఎడల, అది $ix + jy$ సదిశరాశిని $ix' + jy'$ సదిశరాశిగా మార్చును. ఈ పరికర్మము (ఆపరేటర్) ను

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

అను మాత్రిక (మాట్రిక్స్) ద్వారా గుర్తించెదము.

T పరికర్మము OP ను OP′ గా మార్చుచున్నది. సాధారణముగా ఈ సదిశరాశుల దిశలు వేరు ; నిడుపులు వేరు. ఇవి రెండును మారకనే ఉండవలెనంటే, అనగా $OP = OP'$ అయితే, అపుడు $x' = x$, $y' = y$. ఇట్లగుటకు $x = 0$, $y = 0$ అని ఉండవలెను. అనగా OP శూన్యసదిశరాశి కనుక అటువంటి సదిశరాశి లేదు.

నిడుపు మాత్రము మారి దిక్కు మారక ఉండుట సాధ్యమా అని అడుగవచ్చును. ఇటులుండుటకు $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ గ ఉండవలెను. ఈ విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపించిన ఎడల

$$\left.\begin{aligned} (a - \lambda)\, x + by &= 0 \\ c\,x + (d - \lambda)\, y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (3)$$

ఈ సమీకరణములకు $x = 0$, $y = 0$ కాక వేరు సాధనము లుండవలెనంటే

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots (4)$$

అను నిబంధన కావలెను. ఇది λ లో రెండవ తరగతి సమీకరణము. కనుక దీనికి రెండు మూలములు $\lambda = \lambda_1$; $\lambda = \lambda_2$ ఉన్నవి. ఈ విలువలను (3) లో ప్రతిక్షేపించినచో $x : y = x_1 : y_1$ అనియు, $x : y = x_2 : y_2$ అనియు రెండు విధములుగ x/y నిష్పత్తి కనుగొనవచ్చును. కనుక T పరికర్మము వలన పొడవును మాత్రము మార్చి దిశలను అటులనే ఉంచునటువంటి రెండు సదిశరాశులున్నవి. అవి $A(ix_1 + jy_1)$; $B(ix_2 + jy_2)$ ఇచ్చట A, B ఇష్టమైన స్థిరసంఖ్యలు. కనుక

$$\left.\begin{aligned} TA(ix_1 + jy_1) &= \lambda_1 A(ix_1 + jy_1) \\ TB(ix_2 + jy_2) &= \lambda_2 B(ix_2 + jy_2) \end{aligned}\right\} \quad \cdots (5)$$

T పరికర్మము యొక్క యుక్తవిలువలు (కారెక్టరిస్టిక్ వాల్యూస్ లేదా ఐగెన్ వాల్యూస్) λ_1, λ_2 అనియు, వీటికి అను గుణమైన యుక్త సదిశరాశులు (కారెక్టరిస్టిక్ వెక్టర్స్ లేదా ఐగెన్ వెక్టర్స్) వరుసగా $(ix_1 + jy_1)$, $(ix_2 + jy_2)$ అనియు చెప్పెదము.

ఈ రెండు దిశలును పరస్పర లంబముగా నుండును.

ఇటులనే, త్రిపరిమాణిక ఆకాశములోని సదిశరాశులగు $ix + jy + kz$ ను మార్చు పరికర్మము T తీసికొనినట్లైతే, మనకు మూడు యుక్తవిలువలు λ_1, λ_2, λ_3 ను, వీటికి అనుగుణమైన 3 యుక్త సదిశరాశులును దొరకును. ఇవి మూడు పరస్పర లంబములు. T పరికర్మము ఈ సదిశరాశుల పొడవును మాత్రము మార్చును కాని దిశను మార్చదు.

ఇపుడు సదిశ రాశుల మార్పులను వదలిపెట్టి అవిచ్ఛిన్న ఫలముల మార్పులను పరీక్షించెదము. x ఒక చలరాశి $f(x)$ అనునది $a \leq x \leq b$ లో ఒక అవిచ్ఛిన్న ఫలమనియు, $f(x)$ కు మొదటి రెండు వ్యుత్పన్నములు $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ పైన చెప్పిన అంతరములోని ఒక్కొక బిందువునందు ఉన్నదనియు అనుకొనెదము.

ఇపుడు $f(x)$ ఫలముపై

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \cdots (4)$$

అను పరికర్మమును ప్రయోగించెదము. అపుడు మనకు దొరకునది $-\frac{d^3 f}{dx^3}$ అను మరొకఫలము. ఇది సాధారణముగా

$f(x)$ యొక్క గుణిజము $\lambda f(x)$ (λ ఒక వాస్తవిక లేదా సంకీర్ణ సంఖ్య, ఇది x యొక్క ఫలము కాదు) గా ఉండదు. అయితే $f(x)$ యుక్తముగా తీసికొనినట్లయిన, $-\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f$ అను సమీకరణమును తృప్తిచేయవచ్చును. ఇది కాక మరికొన్ని నిబంధనలు $f(x)$ పైన ఎక్కించవలెను. అవి

$$f(a) = 0;\ f(b) = 0 \qquad \ldots (5)$$

అనునవియే,

కనుక మనము (5) నిబంధనలను తృప్తిపరచు $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = 0$ అను అంతరీకరణ సమీకరణమును సాధించవలెను. దీని సాధనము $f(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\, x$ $B \sin \sqrt{\lambda}\, x$; $a = 0$, $b = \pi$ అని తీసికొనెదము. $f(0) = 0$ అగుటవలన $A = 0$, $f(\pi) = 0$ అగుటవలన $\sqrt{\lambda} = n$ ఒక పూర్ణ సంఖ్య. కనుక

$-\frac{d^2}{dx^2}$ అను పరికర్మమునకు యుక్తవిలువలు

$\lambda = 1^2, 2^2, 3^2, \ldots \ldots$ అను పూర్ణాంక వర్గములు.

$\lambda_n = n^2$ కు అనుగుణమైన యుక్తఫలము $B \sin nx$, కనుక యుక్తఫలముల సమితి

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots \sin nx, \qquad \ldots (6)$$

అగుచున్నది.

సదిశ రాశులలో యుక్త సదిశరాశుల పరస్పర లంబత్వమునకు అనుగుణముగా పైన వ్రాసినటువంటి యుక్తఫలములకును ఒక పరస్పర లంబత్వ గుణమున్నది. ఒక అంతరము (a, b) లో రెండు ఫలములు $f(x)$, $g(x)$ పరస్పర లంబములనగా

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0 \qquad \ldots (7)$$

అని నిర్వచించెదము. ఈ నిర్వచనము ప్రకారము (6) లో నున్న యుక్తఫలములన్నియు పరస్పర లంబములు, అనగా

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0;\ (m \neq n) \qquad \ldots (8)$$

అని సులభముగా సరిచూపవచ్చును.

యుక్త సదిశరాశులకును, యుక్తఫలములకును మరి యొక పోలిక ఉన్నది. త్రి పరిమాణిక ఆకాశములో 3 యుక్త సదిశ రాశులున్నందున, ఏ సదిశరాశియైన యుక్త సదిశరాశుల మొదటి తరగతి కూడిక (లీనియర్ కాంబినేషన్) గా వ్రాయవచ్చును.

అనగా త్రి పరిమాణిక ఆకాశములో ఏ సదిశరాశి v నైనను, $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట v_1, v_2, v_3 అనునవి T పరికర్మము యొక్క యుక్త సదిశ రాశులు.

అటులనే $(0, \pi)$ అంతరములో అవిచ్ఛిన్నమైన ఏ ఫలము $f(x)$ నైనను $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ అనురూపములో వ్రాయవచ్చును. ఇదియే ఫోరియర్ పరంపర సిద్ధాంతము. పై పరంపరలో a_n యొక్క విలువ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$ అగును.

ఇపుడు పై ప్రశ్నలో $a = 0$, $b = L$ అని తీసికొనినచో, $-\frac{d^2}{dx^2}$ యొక్క యుక్త విలువలు

$$\lambda = \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{2^2\pi^2}{L^2}, \frac{3^2\pi^2}{L^2}, \qquad \ldots (9)$$

అగును, వీటికి అనుగుణమైన యుక్తఫలములు

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{3\pi x}{L}, \qquad \ldots (10)$$

అని లభించును. $(0, L)$ అంతరములో ఒక ఫలము $f(x)$ ను

$$a_1 \sin\frac{\pi x}{L} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{L} \quad \ldots$$

అను రూపములో వ్యాకోచింపవచ్చును.

ఇపుడు $T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ అను పరికర్మమును తీసికొనెదము. ఇది $f(x)$ పై ప్రయోగించినచో మనకు దొరకు ఫలము $-\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x^2 f(x)$. ఇది $\lambda f(x)$ అను రూపములో (λ ఒక స్థిరరాశి) ఉండవలెనంటే λ అను ప్రాచలము (పారామీటర్) నకు ఏ యుక్తవిలువ లివ్వవలెను? అట్టి ఒక్కొక λ విలువకును అనుగుణమగు యుక్తఫలము $f(x)$ ఏది?

ఇచ్చట (a, b) అంతరము $(-\infty, +\infty)$ గా తీసికొనెదము. నిబంధన $x \longrightarrow -\infty$ అగునపుడును $x \longrightarrow +\infty$ అగునపుడును $f(x)$ మితమై (బౌండెడ్) ఉండవలెను అని తీసికొందము. అటువంటి యుక్తఫలములలో $f(x) = e^{-x^2/2}$ ఒకటి. ఏలన ఈ ఫలమునకు

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + x^2 f(x) = 1 \cdot e^{-x^2/2}$$

కనుక ఈ యుక్తఫలమునకు అనుగుణమగు యుక్త విలువ $x = 1$ అగుచున్నది. అటులనే

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = 3 \cdot x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

అని సరిచూపవచ్చును. కనుక $\lambda = 3$ అనునది మరియొక యుక్త విలువ. దానికి అనుగుణమైన యుక్తఫలము $x\, e^{-x^2/2}$ అగును. పైన వివరించిన రెండు ఫలములును $x \longrightarrow +\infty$ అయినను $x \longrightarrow -\infty$ అయినను, $f(x) \longrightarrow 0$ అని సులభముగా చూడవచ్చును.

వ్యాపకముగ $-\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$ అను పరికర్మమునకు యుక్తవిలువలు $\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots (2n+1) \ldots$ అగు అన్ని బేసి ధన సంఖ్యలు, వీటికి అనుగుణమైన యుక్తఫలములు

$$e^{-x^2/2},\ e^{-x^2/2}\, x,\ e^{-x^2/2}\,(4x^2 - 2),$$
$$e^{-x^2/2}\, H_n(x) \qquad \ldots (11)$$

ఇచ్చట $e^{-x^2/2}$ యొక్క గుణకములు x యొక్క బహుపదములు (పాలినోమియల్స్). H_n ఒక n వ తరగతి బహుపదము. $H_n(x)$ ను

$$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x) \qquad \ldots (12)$$

అని వ్రాయవచ్చును.

$T\, f(x) = \lambda\, f(x)$ అను గుణము సంబంధించినంతవరకు $f(x)$ కు బదులు $A\, f(x)$ ను తీసికొనవచ్చును. ఇచ్చట A ఒక స్థిరరాశి. అయితే (11) అను రూపములో వ్రాసినటువంటి బహుపదములకు హెర్మైట్ పాలినోమియల్స్ అనిపేరు. పైన సూచించిన పరికర్మము వాటి యుక్త ఫలములును క్వాంటమ్ వాదములో అత్యుపయోగముగ నుండును.

(11) లో ఇచ్చిన హెర్మైట్ ఫలములనుపయోగించి $(-\infty + \infty)$ అంతరములోని ఏ L^2 ఫలమునైనను వ్యాకోచించవచ్చునను సిద్ధాంతమొకటి ఉన్నది.

T అను పరికర్మము $-\dfrac{d^2}{dx^2} + q(x)$ అని తీసికొనినను, మరి వ్యాపకముగ ఏ మొదటి తరగతి (లీనియర్) పరికర్మము (ఆపరేటర్) T తీసికొనినను, $T\, f(x) = \lambda\, f(x)$ అను సమీకరణమును తృప్తిచేయు ఫలములు $f(x)$ పై కొన్ని సీమ నిబంధనలువేసి, ఏ λ విలువలకు సాధనములు $f(x)$ ఉన్నవనియును, ఆ సాధనములేమనియును చర్చించుటయే గణితమందు యుక్తఫలవాదము అను ఒక ముఖ్యశాఖ.

ఒకే చలరాశి x కు బదులు పెక్కు చలరాశులు $x, y, z \ldots$ ను, వానిపై ఆధారపడియుండిన ఒక చలరాశి u యు ఉన్న సందర్భములందును పై చర్చలు జరుపవచ్చును. ఉదాహరణమునకు

$$T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \ldots (13)$$

అను లాప్లాస్ పరికర్మమును తీసికొనెదము. దీనియొక్క యుక్తవిలువలు λ ను యుక్తఫలములు $f(x, y)$ ను $T\, f(x, y) = \lambda\, f(x, y)$ అను సమీకరణమును తృప్తిచేయవలెను. సీమనిబంధనలుగా $x = 0$ అగునపుడును, $x = a$ అగునపుడును, అటులనే $y = 0$ అగునపుడును, $y = b$ అగునపుడును $f(x, y) = 0$ అని ఉదాహరణముగ తీసికొనెదము. ఈ నిబంధనలను తృప్తిచేయు యుక్తఫలములు

$$f(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\ \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \ldots (14)$$

రూపమున ఉండవలెను. ఈ ఫలమునకు అనుగుణమైన యుక్తవిలువ $\lambda = \dfrac{m^2\pi^2}{a^2} + \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$ అగుచున్నది. ఇచ్చట m, n ధన పూర్ణాంకములు. సీమనిబంధనలను తృప్తిపరచు ఏ ఫలమునకును $\Sigma\,\Sigma\, a_{mn} \sin\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b}$ అను యుక్తఫలములనుపయోగించు వ్యాకోచమున్నది. ఇటువంటి వ్యాకోచములు వినియుక్త గణితములో అత్యుపయోగమైయున్నవి.

యుక్తవిలువలు, యుక్తఫలములు, వాటి ద్వారా దొరకు వ్యాకోచములు అంతరీకరణ పరికర్మములే కాక, చయనీకరణము మొదటితరగతి (లీనియర్) పరికర్మములుగను ఉండవచ్చును. ఉదాహరణమునకు

$$T\, f(x) = \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy \qquad \ldots (14)$$

అను f ఫలముపై ప్రయోగించిన పరికర్మము తీసికొనుము. ఇచ్చట $K(x, y)$ ఒక దత్తఫలము ; a, b దత్తస్థిరరాశులు, దీని ఫలము $\lambda\, f(x)$ (λ ఒక స్థిరరాశి) అయినచో, $K(x, y)$ గుజ్జు (కెర్నెల్) గా గల చయనీయ మార్పుకు యుక్త ఫలమనియు, λ ఈ ఫలమునకు అనుగుణమైన యుక్త విలువ అనియు చెప్పెదము. ఇటులనే (14) కు బదులు

$$T\, f(x) = f(x) - \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy$$

అను పరికర్మమును తీసికొనవచ్చును. ఇచ్చటను ఎపుడు $T\, f(x) = \lambda\, f(x)$ అగునని చర్చించెదము.

ఈ వ్యాసములో T అను పరికర్మ మొదటితరగతి పరికర్మము (లీనియర్ ఆపరేటర్) అని వర్ణించితిమి. దీని అర్థమేనగా, f, g అని రెండు వస్తువులపై T ప్రయోగించిన ఎడల $T(f+g) = T(f) + T(g)$, మరియొక గుణము: $T(af) = a\,T(f)$. ఇచ్చట a అనునది ఒక వాస్తవలేదా సంకీర్ణసంఖ్య. ఈ రెండు గుణములు గల పరికర్మములను మొదటితరగతి పరికర్మములనెదము. **ఆ. స.**

యుక్తిభాష : ఈ కేరళ గ్రంథము వృత్తియందు, ఆచరణయందు నీలకంఠుని తంత్ర సంగ్రహములో సంగ్రహించబడిన గణిత, ఖగోళశాస్త్ర విజ్ఞానము యొక్క వివరణము. గణిత విషయ సంఖ్యానములో అది ద్వితీయ భాస్కరుని లీలావతికి సంస్కృతభాషా వ్యాఖ్యానమగు క్రియాక్రమకరిని ఎంతేనియు పోలియున్నది. క్రియాక్రమకరియందు కన్పట్టునంత జ్యామితీయ బీజగణితము ఇందు కానరాక పోయినను, దానికి బదులుగ చక్రీయ చతుర్భుజ వైశాల్యమునకు సంబంధించిన ఎక్కువ ప్రతిపాదనల ఉపపత్తు లీయబడినవి.

వైశాల్యము $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

చక్రీయ చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు

$$\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}} \text{ లేదా } \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$$

(ఇచ్చట $s =$ చుట్టుకొలతలో సగము, a, b, c, d భుజములు): ఇవి నిస్సంశయముగ బ్రహ్మగుప్తుని నిర్వాహములు. కాని యుక్తిభాషకు పూర్వమందున్న గ్రంథమేదియు వీటికి ఉపపత్తులను కల్పింపలేదు. ఈ ఉపపత్తులకు ముందు మెట్లుగ ఈ క్రింది త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణము లీయబడినవి.

$$\sin^2 A \sin^2 B = \sin(A+B) \,.\, \sin(A-B)$$

$$\sin A \,.\, \sin B = \sin^2 \frac{A+B}{2} - \sin^2 \frac{A-B}{2}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \,.\, \sin B$$

ఇదియే సుప్రసిద్ధ జీవ సంకలన న్యాయము.

టాలెమీ సిద్ధాంతమునకు గూడ ఉపపత్తి కల్పింపబడినది,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

అను త్రిభుజ వైశాల్యమును తెలియజేయు సూత్రమునకు $A = \frac{1}{2}$ ఆధారము × ఉన్నతి అను సూత్రమును ఉచితముగ సవరించి ఉపపత్తి సమకూర్చబడినది. మొత్తము మీద యుక్తిభాష బీజగణిత ప్రక్రియల గురించిన ప్రయోగ కౌశలమును, పరిచయమును ప్రదర్శించెను.

జ్యామితి వైపు, చయనకలనము వైపు ఈ గ్రంథమునకు మొగ్గు ఎక్కువ. అనంతపరంపర యొక్క సంకలిత ఫలమును, అవధి భావమును ఉపయోగించి, ఇష్ట యాథార్థ్యాంశమును సాధించు విధానము యుక్తి భాషలో మనకు తొలిసారిగ తారసిల్లిన ప్రధాన వికాసము. మిగిలిన వాటి విషయమున యుక్తిభాష, క్రియాక్రమకరి సదృశములు.

యుక్తిభాషాగ్రంథ కర్తృత్వము, కాలము విషయమున ఇదమిత్థముగ ఏమియు చెప్పలేము. బ్రాహ్మణుడగు బ్రహ్మదత్తుని కృతి అదియని గ్రంథాంత సందర్భము తెలుపుచున్నది. బహుశః ఇది లేఖక నామము కావచ్చును. దీనిని వాస్తవముగ రచించినవాడు జ్యేష్ఠదేవుడు. ఇతడు 15వ శతాబ్ద పరార్ధ జీవి. ఈతని కుటుంబ గృహము పరణ్ణోట్టు. యుక్తిభాషయందు మనకు గన్పట్టు గణిత విజ్ఞాన సామస్త్యములో ఎంత భాగము మనము జ్యేష్ఠదేవునికి ఆరోపించవచ్చునో చెప్పుట చాల కష్టము.

యుక్తిభాషలో మొదటి భాగమే ప్రచురింపబడి నేటి వరకు అనుశీలింపబడినది. ఇది గణితశాస్త్ర భాగము. ద్వితీయ భాగము ఖగోళశాస్త్ర విషయమైనది. **సరస్వతి**

యురేనస్ : చూ. ఇంద్రుడు పు. 153.

యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్ : చూ. సమీక్ష - పు. 31 ; గ్రీక్ గణితము - పు. 256.

యూక్లిడేతర జ్యామితి : పూర్వకాలములో భారతీయులు తరచుగా యజ్ఞములు చేయుచుండిరి. యజ్ఞవేదికల నిర్మించుటకు సూత్రములను క్రోడీకరించి శుల్బ సూత్రములను గ్రంథములు వారిచే రచింపబడెను. వానిలో త్రిభుజ, చతుర్భుజముల నిర్మాణము, వృత్తము, సమకోణ త్రిభుజము మొదలగు జ్యామితీయ ఆకృతులను గురించిన విమర్శన కలదు. కాలవశమున వాని సంబంధమగు సిద్ధాంతములు లుప్తమై పోయినవి. నవీన కాలములో మన భారతీయులకు అట్టి గ్రంథములున్నవి యని కూడ తెలియదు.

పాశ్చాత్య దేశములో జ్యామితికి ఈజిప్టు పుట్టినిల్లు. ప్రాచీన గ్రీక్ ప్రఖ్యాత పురుషుడు, మైలీటస్ నగరవాసుడు అయిన తేలీజ్ (640 - 546 క్రీ. పూ.) ఈజిప్టులో వ్యాపకమగు జ్యామితిని గ్రీక్ దేశములో ప్రవేశపెట్టెను. పితాగొరస్ (568-500 క్రీ. పూ.) చేతిలో జ్యామితి మాపక శాస్త్రముగా మారి, అతని శిష్య పరంపరచే చక్కగ అభివృద్ధి పొందెను. తర్వాత హిపొక్రటీస్ (430 క్రీ.పూ.) నిర్వచనముల, ఆధార తత్త్వముల మూలమున జ్యామితిని తర్కబద్ధ శాస్త్రముగా చేసెను. అతని అనుయాయి

యగు యూక్లిడ్ (300 క్రీ. పూ) చేతిలో మెరుగు పెట్టబడి జ్యామితి పూర్వాపర విరోధ రహిత శాస్త్రరూపము పొంది 2000 సంవత్సరములు నిరాక్షేప ప్రచారములో నుండెను. అపుడు జ్యామితికి **యూక్లిడ్** పర్యాయ నామముగానుండెను.

తత్త్వములు : జ్యామితిలోని తత్త్వములు రెండు విధములు. అవి : (ఏ) ఆధారతత్త్వములు, (బి) స్వీకృత తత్త్వములు. యూక్లిడ్ తన గ్రంథములో రాశుల సమత్వ విషమత్వముల గురించి ఆధార తత్త్వములందు తెల్పెను. స్వీకృతతత్త్వముల సంఖ్య ఐదు. అందు మొదటి మూటిలో ఋజురేఖల వృత్తముల గురించియు, నాల్గవ దానిలో సమకోణముల (లంబకోణము) సమానత్వమును గురించియు వివరింపబడినది. ఐదవది ప్రఖ్యాత సామ్యత్వము. ఆధారతత్త్వములు స్వయం సిద్ధములనియు, స్వీకృతతత్త్వములు స్వయం సిద్ధములుకాక యుండినను, ఇతర సామాన్య సిద్ధాంతములచే నిరూపింపబడనివనియు యూక్లిడ్ యొక్క అభిప్రాయము. తర్వాతి గణితజ్ఞులు ఈ వ్యత్యాసమును చాలకాలము వరకు పాటింపలేదు.

సామ్యతత్త్వము : 17 వ శతాబ్దమువరకు దీనిని గణితజ్ఞులందరు ఒక స్వీకృత తత్త్వముగా తలచిరి. ఇచట ఆ తత్త్వమును వివరింతము.

ఋజురేఖలు AB, CD లను ఒక తిర్యగ్రేఖ BC బిందువులు B, C లలో ఖండించును (చూ. చిత్రము 5 - పు. 33).

$\angle ABC = \angle BCD$ యొక్క విలువ రెండు సమకోణములకు తక్కువయయిన BA, CDల పొడిగించిన అవి పరస్పరము ఖండించును.

అనిష్టాపత్తి మార్గమున ఈ తత్త్వము నుండి సామ్య సిద్ధాంతములు ప్రతిపాదింపబడినవి.

సామ్యసిద్ధాంతము : ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సామ్య రేఖల ఖండించునపుడు ఏర్పడు ;

(ఏ) ఏకాంతర కోణములు సమానములు.

(బి) అనురూప కోణములు సమానములు.

(సి) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపుననుండు లోపలి కోణముల మొత్తము రెండు సమకోణములకు సమానము.

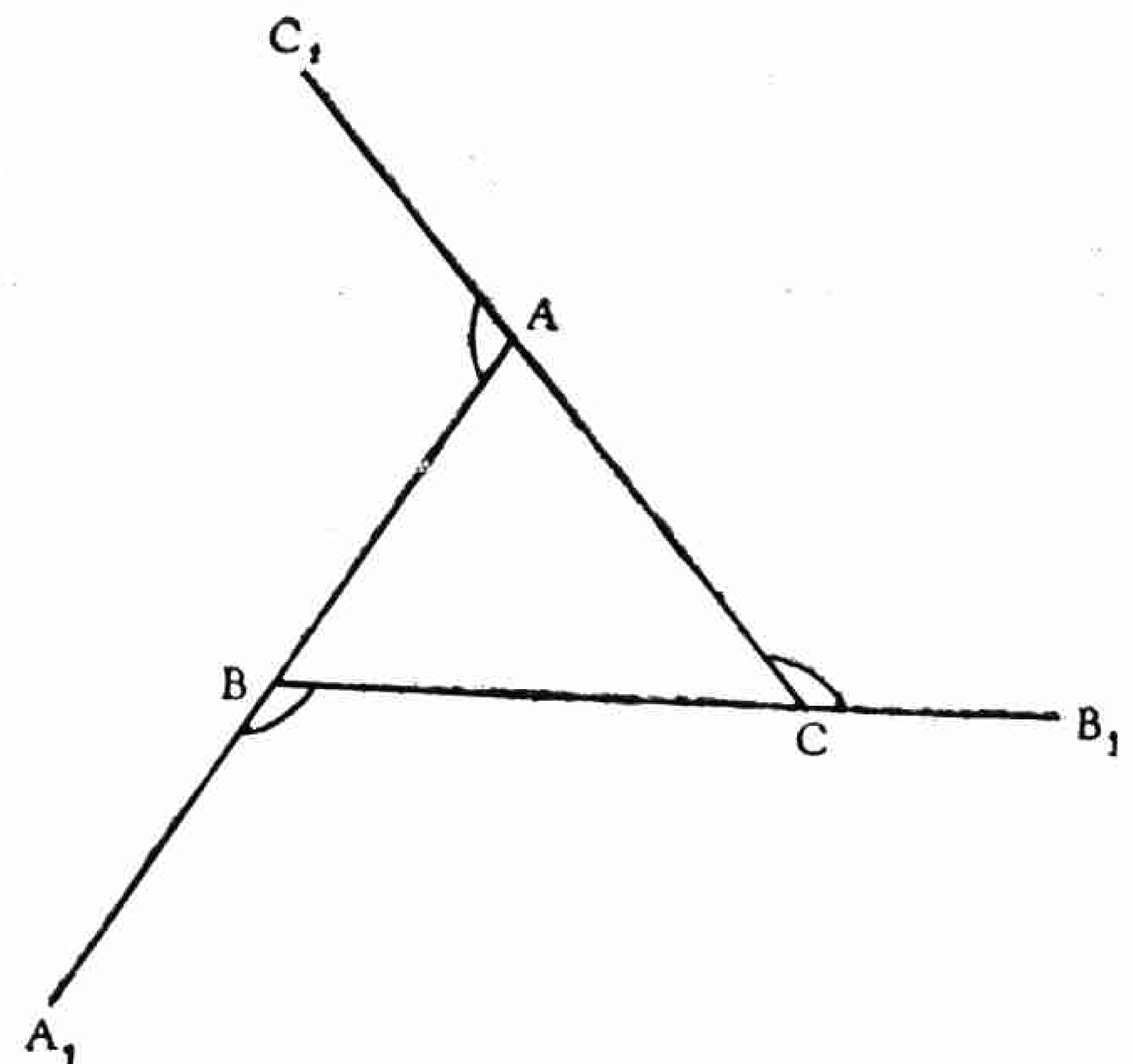
ఈ సిద్ధాంతము చాల అద్భుత సిద్ధాంతము. దీనిపై జ్యామితిలోని సిద్ధాంతములలో అనేకములు ఆధారపడియున్నవి. కాబట్టి విమర్శకులు దీనికి మూలమగు సామ్య తత్త్వమునకు ఉపపత్తి కలదాయని యోచించి విఫల మనోరథులయిరి. కాని వారి ప్రయత్నములవలన కొన్ని సమాన తత్త్వములు కనుగొనబడినవి.

సమాన తత్త్వములు : వీనిలో పరస్పర సంబంధము లేనట్లు పైకి కనబడినను, అన్నియు ఒక్కటే యని చాల కాల పరిశ్రమవలన విశదమయినది. ప్రచారములోనుండు సమానతత్త్వములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

(*a*) ప్లేఫేర్ తత్త్వము (క్రీ. శ. 1758) ఇది సర్వ సామాన్యము.

రెండు ఖండించు ఋజురేఖలు మూడవ రేఖకు సామ్యముగా నుండవు. లేదా, ఒక బిందువుగుండ ఒక ఋజురేఖకు సామ్యముగా ఒక ఋజురేఖ కంటె ఎక్కువ ఋజురేఖలు గీయుటకు వీలులేదు.

(*b*) ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల మొత్తము రెండు సమకోణములకు సమానము. తీబా (క్రీ. శ. 1809) ఒక కొలతబద్ద యొక్క భ్రమణమును ఉపయోగించి ఈ తత్త్వమునకు ఉపపత్తి ప్రతిపాదించెను. ఈ విధానము ఒక గోళీయ త్రిభుజమునకు కూడ వాడవచ్చును. కాని, ఒక గోళీయ త్రిభుజము యొక్క కోణములు రెండు సమకోణముల కంటె ఎక్కువ, ఇచట



చిత్రము 312

కొలతబద్ద వలయాకారములో నుండవలయును. కొలతబద్ద AC_1 స్థితినుండి AB స్థితికి తిరుగునపుడు అది $\angle C_1AB$ గుండ తిరుగును (చిత్రము 312). ఇట్లు మూడు శీర్షముల వద్ద కొలతబద్ద భ్రమణము చేయునపుడు మూడు బాహ్యా కోణములు $\angle C_1AB$, $\angle A_1BC$, $\angle B_1CA$ గుండ తిరుగును. అపుడు కొలతబద్ద ఒక పూర్తిభ్రమణము చేయుటచే నాలుగు సమకోణములగుండ తిరుగును.

$\triangle ABC$ లో

బాహ్యాకోణములు + లోపలి కోణములు = 6 సమకోణములు.

∴ లోపలి కోణముల మొత్తము = రెండు సమకోణములు.

(*c*) సదృశ త్రిభుజములు కలవు (వాలిస్ 1693).

(*d*) ఒక త్రిభుజ క్షేత్రఫలమునకు ఉపరి అవధి లేదు (గాస్. 1799).

(*e*) మూడు బిందువులగుండ ఒక ఋజురేఖగాని, ఒక వృత్తముగాని వెళ్లును (బాల్యాయి 1851).

ఇవియన్నియు పరస్పరము సంధించియుండును. ఒక తత్త్వమును స్వీకరించిన తక్కిన తత్త్వముల సాధింప వచ్చును. కాబట్టి సామ్యతత్త్వము ప్రత్యేకమనియు, దానికి ఉపపత్తి సాధించుటకు వీలులేదనియు రుజువు అయ్యెను. ఈ అభిప్రాయమునకు వచ్చుటకు పూర్వము కొన్ని అద్భుత విధానములను గణితజ్ఞులు అనుసరించిరి. కాని వారు ఒక అడుగు ముందుకువెళ్లి యుండిన నూతన సిద్ధాంత ఆవిష్కరణ గౌరవము వారికి లభించి యుండును. అట్టి వారిలో సాకెరీ (1667 - 1733) ఒకడు. అతని విధానము క్రింద ఇవ్వబడినది :

ఋజురేఖ AB కి AD, BC లు సమాన లంబములు. C, D ల చేర్చిన, చతుర్భుజము $ABCD$ లభించును. సౌష్ఠవరీతిగా కోణములు C, D లు సమానములు. కాని వాని ప్రమాణ మెంత? ఇందు మూడు విధము లుండ వచ్చును.

(ఏ) $\angle C$, $\angle D$ సమకోణములు ;

(బి) $\angle C$, $\angle D$ గురుకోణములు ;

(సి) $\angle C$, $\angle D$ లఘుకోణములు.

ఈ మూడు విధములలో ఏదైన తీసికొనవచ్చునని సాకెరీ తలచి యుండిన అప్పుడే సామ్యతత్త్వ సమస్యలోని రహస్యము గణితజ్ఞులకు విశదమయి ఉండును.

యూక్లిడేతర జ్యామితి ఆవిర్భావము : లొబషేవ్‌స్కీ (1793-1856) రష్యాదేశస్థుడు. అతను తన క్రొత్త సిద్ధాంతమును 1826 లో ప్రతిపాదించెను. దానికి 'కల్పిత జ్యామితి' అని అతడు నామకరణము చేసెను. అందు ఒక బిందువు గుండ ఒక ఋజురేఖకు రెండు సామ్యరేఖలు గీయవచ్చుననియు, అందుచే ఒక త్రిభుజము యొక్క కోణముల మొత్తము రెండు సమకోణములకు తక్కువ యని నిరూపించెను. ఇది సాకెరీ మూడవ కల్పనకు చేరినది. రెండవ కల్పన తీసికొనిన, రెండు ఋజురేఖలు సామ్యములుగా నుండవు ; అవి పరస్పరము ఖండించును. కాబట్టి ఒక ఋజురేఖ యొక్క పొడుగు పరిమితము అనియు, కాని సరిహద్దు లేనిదనియు ఏర్పడును. జర్మనీలో రీమాన్ 1854 లో ఇట్టి జ్యామితిని ప్రతిపాదించెను. ఈ అభిప్రాయము ఫెలిక్సుక్లీన్ విశదీకరించి ఈ జ్యామితి భాగములకు క్రొత్త నామకరణము కల్పించెను.

(*a*) సాకెరీ మొదటి ప్రతిపాదనము - సమకోణము. ఇందు ఒక త్రిభుజము యొక్క కోణములు చేరి రెండు సమకోణములు - యూక్లిడ్ లేదా పరాస జ్యామితి.

(*b*) రెండవ ప్రతిపాదనము - గురుకోణము. ఇందు ఒక త్రిభుజము యొక్క కోణముల సంకలనము రెండు సమ కోణముల కంటె ఎక్కువ. ఇది రీమాన్, లేదా విలోప జ్యామితి.

(*c*) మూడవ ప్రతిపాదనము - లఘుకోణము. ఇపుడు ఒక త్రిభుజము యొక్క కోణముల మొత్తము రెండు సమకోణముల కంటె తక్కువ. ఇది అతిపరాస జ్యామితి. దీనిని సమకాలికులగు లొబషేవ్‌స్కీ, బాల్యాయిలు ప్రత్యేకముగ ప్రతిపాదించిరి.

ఉపసంహారణ : పంతొమ్మిదవ శతాబ్దము కడపటి వరకు ఆధారతత్త్వముల స్వభావమును గణితజ్ఞులు గుర్తింపలేదు. హిల్బర్ట్ 1899 లో జ్యామితి యొక్క ఆధారములను గురించి ఒక అద్భుత గ్రంథము రచించెను. అందు ఆధార తత్త్వములన్నియు ఐదు భాగములుగా విభజింపబడినవి. అవి :

1. సంబంధ తత్త్వములు : ఇందు బిందువు, ఋజురేఖ, సమతలముల సంబంధము యొక్క విమర్శన కలదు.

2. క్రమతత్త్వములు : ఇందు మధ్య (నడుమ) అను పదవిమర్శన కలదు.

3. సర్వ సమతత్త్వములు : యూక్లిడ్ సర్వసమతను చూపుటకు ఉపరిస్థాపన విధానమును అవలంబించెను. అది తర్కబద్ధము కాదు. $\triangle ABC$ ని $\triangle DEF$ పై స్థాపించి నపుడు $\triangle ABC$ యొక్క రూపములో మార్పు ఉండునా లేదా యను సంశయమును నివారించిన తర్వాత ఉపపత్తి ప్రారంభింపవలయును. కాబట్టి సర్వ సమత్వ సంబంధముగా ఒక ఆధార తత్త్వమును ఏర్పరచుకొనినయెడల చిక్కులు ఏర్పడును.

4. సామ్యతత్త్వములు : ఇదివరలో విమర్శింపబడినది. ప్రస్తుత భాగము దీనిపై ఆధారపడియున్నది.

5. అవిచ్ఛిన్నతా తత్త్వములు : వీనిని ఇప్పుడు ఎక్కువ ఆచరణలో ఉంచుటలేదు.

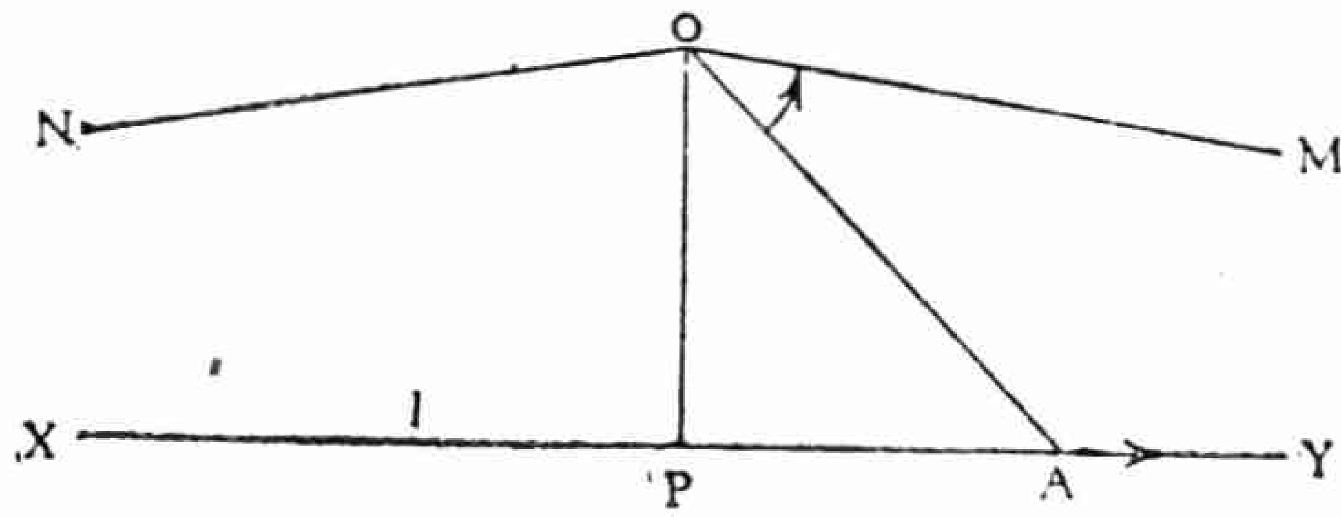
a, b రాశులలో $a < b$ అయినచో $ma > b$ చేయునట్టి సంఖ్య m కలదను తత్త్వము ఇందు చేరినది. దీనిని ప్రతిపాదించినది ఆర్కిమీడీజ్.

మరియొక అల్పవిషయమును తీసికొందము :

$\triangle ABC$ యొక్క తలములో P బిందువును తీసుకొని AP, BP, CP ల పొడిగించిన అవి ఎదుటి భుజముల ఎట్లు ఖండించును (చిత్రము 242 పు. 338)? బిందువు P త్రిభు

జము లోపల నుండిన, ఋజురేఖలు AP, BP, CP లు భుజముల నన్నిటిని లోపల ఖండించును. లేనిచో రెండు భుజముల బయటను, ఒక భుజమును లోపలను ఖండించును. దీనికి విపర్యయముగా ఒక తిర్యగ్రేఖ త్రిభుజము యొక్క భుజములన్నిటిని బాహ్యముగాను, లేదా ఒక భుజమును, లోపలను, తక్కిన రెండు భుజములను బయటను ఖండించును (చిత్రము 243 పు. 338). దీనికి ఉపపత్తి లేదు. దీనిని ఒక ఆధారతత్త్వముగా తీసికొనవలయునని పాస్కు ప్రతిపాదించెను. దీనిని సంబంధ తత్త్వములలో ఒకటి యని తీసికొనుట యుక్తము.

అతిపరాస జ్యామితి : సామ్యరేఖలు : చిత్రము 313 లో XY ఒక ఋజురేఖ. దానికి బయట బిందువు O కలదు.



చిత్రము 313

XY లో ఏదైన ఒక బిందువు A తీసికొనుము. XY వెంబడి A బిందువు జరిగినచో మూడు సందర్భములు ఏర్పడవచ్చును.

(a) ఋజురేఖ XY పై A పూర్తిగా చలించి మరల ప్రారంభ స్థానమును చేరవచ్చును. అపుడు బిందువు O వద్ద OA ఒక పూర్తి భ్రమణము ముగించును. OA, XY ఋజురేఖలు ఎల్లప్పుడు సంధించుచుండును. సామ్యరేఖలు ఇందు లేవు. ఇది రీమాన్ - విలోప జ్యామితి, XY యొక్క పొడవు పరిమితమయినది.

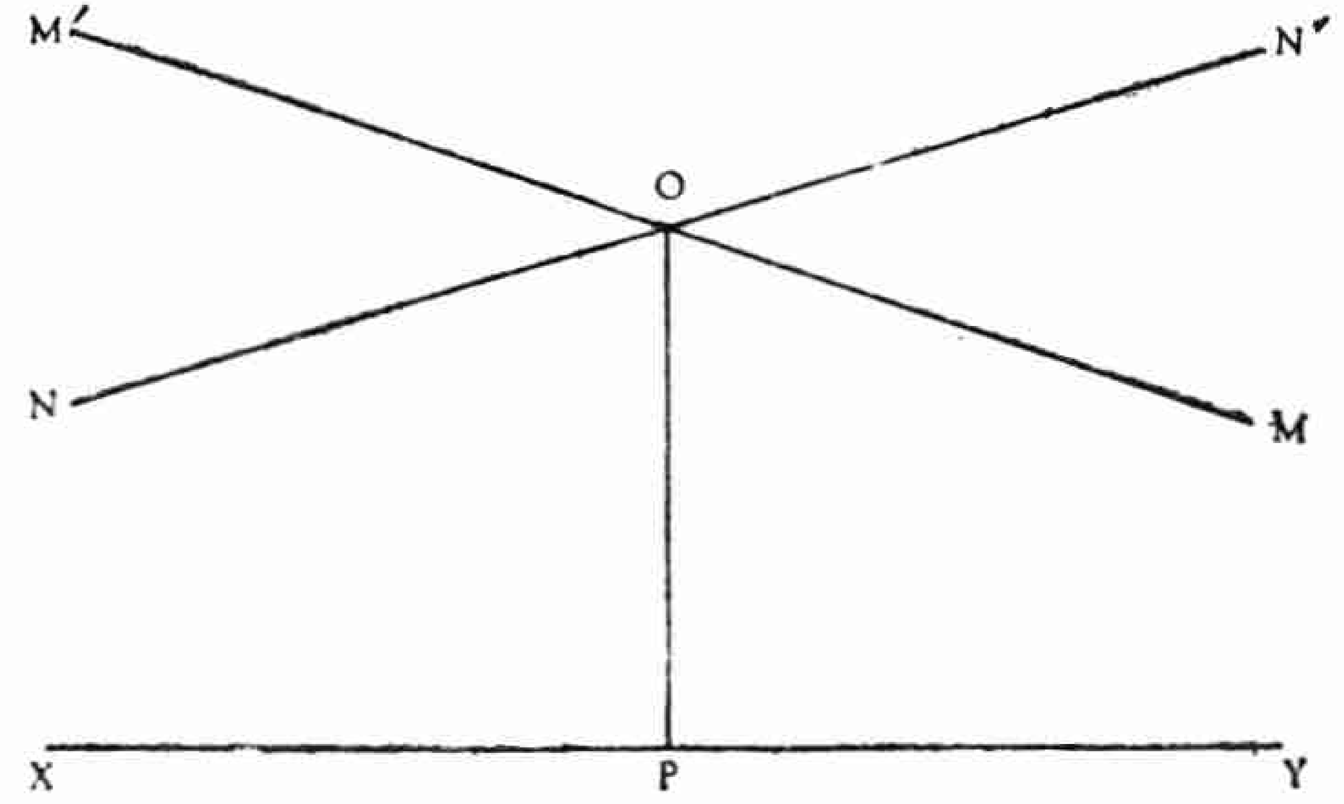
(b) మరియొక సంభవము. A బిందువు XY లో అనంత దూరము వెళ్లవచ్చును. అపుడు OA యొక్క స్థితి అవధిలో OM అగును. ఈ స్థితిలో OM, OA ఋజురేఖలు సామ్యములగును. ఎదుటవైపున A వెళ్లిన OA ఋజురేఖ అవధిలో ON స్థితిని పొందును. యూక్లిడ్ జ్యామితిలో ON, OM ఒక ఋజురేఖలో నుండును. XY కి OP లంబరేఖ అయినచో ∠ POM, ∠ PON సమకోణములు.

(c) ON, OM ఒకే ఋజురేఖగానపుడు, బిందువు O గుండ XY ఋజురేఖకు ON, OM ఋజురేఖలు సామ్యములగును. అవి రెండు ప్రత్యేక రేఖలు.

∠ POM = ∠ PON ; ప్రతి కోణము ఒక సమ కోణమునకు తక్కువ. ఇది అతిపరాస జ్యామితి.

∠ POM ను $\pi(p)$ సంకేతముతో గుర్తింతురు. $\pi(p)$ యొక్క ప్రమాణము $OP = p$ పై ఆధారపడియుండును.

సామ్యరేఖల విమర్శనము : చిత్రము 314 లో బిందువు 'O' గుండ కుడివైపు వెళ్లు రేఖలలో కొన్ని XY ని ఖండించును ; తక్కినవి ఖండింపవు. ఈ రెండు జాతుల రేఖ



చిత్రము 314

లను విభజించు సరిహద్దురేఖ OM ఒకటి కలదు. దానిని XY ఋజురేఖయొక్క సామ్యరేఖ అని చెప్పుదుము. ఎడమ వైపున మరియొక సామ్యరేఖ ON కలదు (చిత్రము 314). ఇది XY ను అనంతదూరములో ఖండించును. చిత్రములో OM, ON ఋజురేఖలు XY కి సామ్యములు. MO, NO లను M′, N′ వరకు క్రమముగా పొడిగించిన, కోణము MON′ లో నుండు రేఖలన్నియును XY కి సామ్యములు కావు ; దానిని ఖండింపవు. అట్టి రేఖలకు అఖండన ఋజురేఖలని పేరు. కోణము NOM లో నుండు రేఖలన్నియును XY ని ఖండించును. వానిని ఖండించు ఋజురేఖ లందురు.

$OP = p$ అయిన $\angle MOP = \angle NOP = \pi(p)$ సామ్య కోణమనబడును.

ఋజురేఖ MOM′ తీసికొనిన దాని సామ్య కోణమును రెండు విధములుగా గుర్తింపవచ్చును. ∠ MOP అనిగాని, ∠ POM′ అనిగాని తీసికొనిన, $\angle MOP = \pi(p)$, $\angle POM' = \pi(-p)$ అని గుర్తింపబడును.

అపుడు $\pi(p) + \pi(-p) = \pi$ (2 సమకోణములు) సామ్యకోణము $\pi(p) = (OP)$ పై ఆధారపడియుండును. ఋజురేఖలు AA′, BB′ లు MM′ కి సామ్యములు (చూ. చిత్రము 315 - పు. 467) AB, MM′ లంబములు.

$\angle A'AB + \angle ABB' < 2$ సమకోణములు.

$\angle B'BM + \angle ABB' = 2$ సమకోణములు.

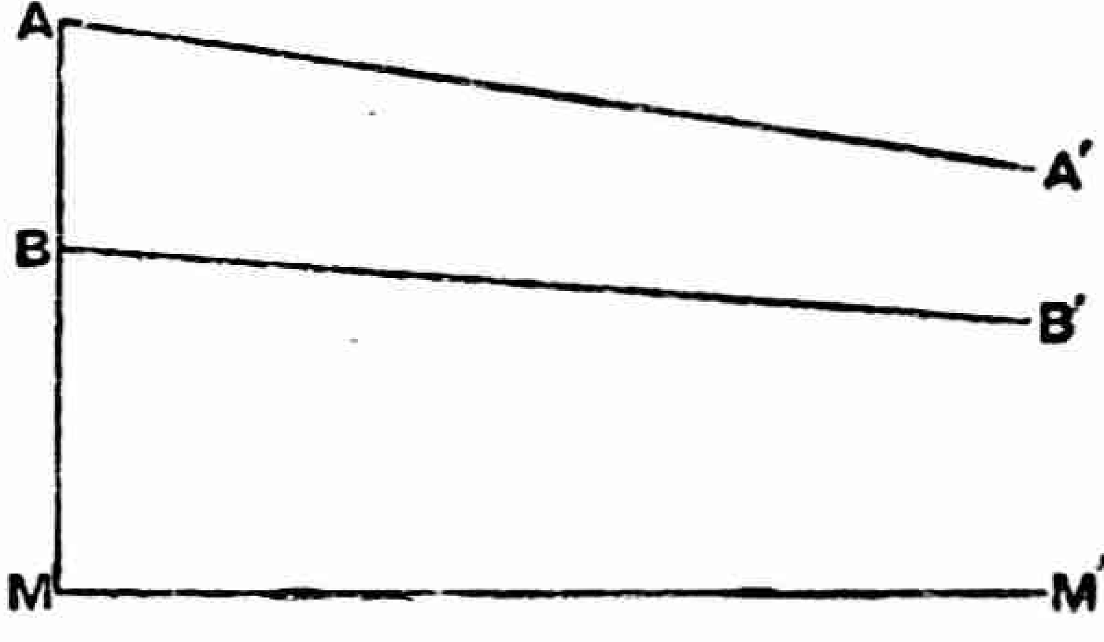
$\therefore \angle A'AB < \angle B'BM$

ఇపుడు $AP = p_1$, $BP = p_2$ అయిన

$\angle B'BM = \pi(p_1)$; $\angle A'AM = \pi(p_2)$

$\therefore \pi(p_2) < \pi(p_1)$

అవధిలో $\pi_{\prime}(p) = 0$ అయిన ; $p \longrightarrow \infty$;



చిత్రము 815

$\pi(p) = \frac{\pi}{2}$ అయిన $p = 0$ అగును.

బిందువుల జాతులు : మన జ్యామితిలో ఋజురేఖలు మూడు విధములు. అవి ఏవన

(ఏ) ఖండించు రేఖలు, (బి) సామ్య రేఖలు, (సి) అఖండన లేదా, పరస్పరము ఖండింపని రేఖలు. బిందువుల జాతులు రేఖలపై ఆధారపడి యున్నవి.

(i) ఖండించు రేఖలు పరిమిత ప్రదేశము (ఫినిట్ రీజియన్) లో వాస్తవ బిందువులలో ఖండించును.

(ii) సామ్యరేఖలు అనంత ప్రదేశములో ఖండించును. అపుడు అనంత బిందువులు ఏర్పడును.

(iii) అఖండనరేఖలు పరస్పరము ఖండింపవు. అట్టి రేఖలు రెండు కల్పితబిందువుల (ఐడియల్ పాయింట్స్)లో ఖండించునట్లు చెప్పుదుము.

కాబట్టి రెండు ఋజురేఖలు ఏ జాతిలో చేరినను, ఒక బిందువులో ఎల్లప్పుడు ఖండించును అనవచ్చును. ఆ బిందువు వాస్తవ బిందువుగా గాని, అనంత బిందువుగా గాని, కల్పిత బిందువుగా గాని ఉండును.

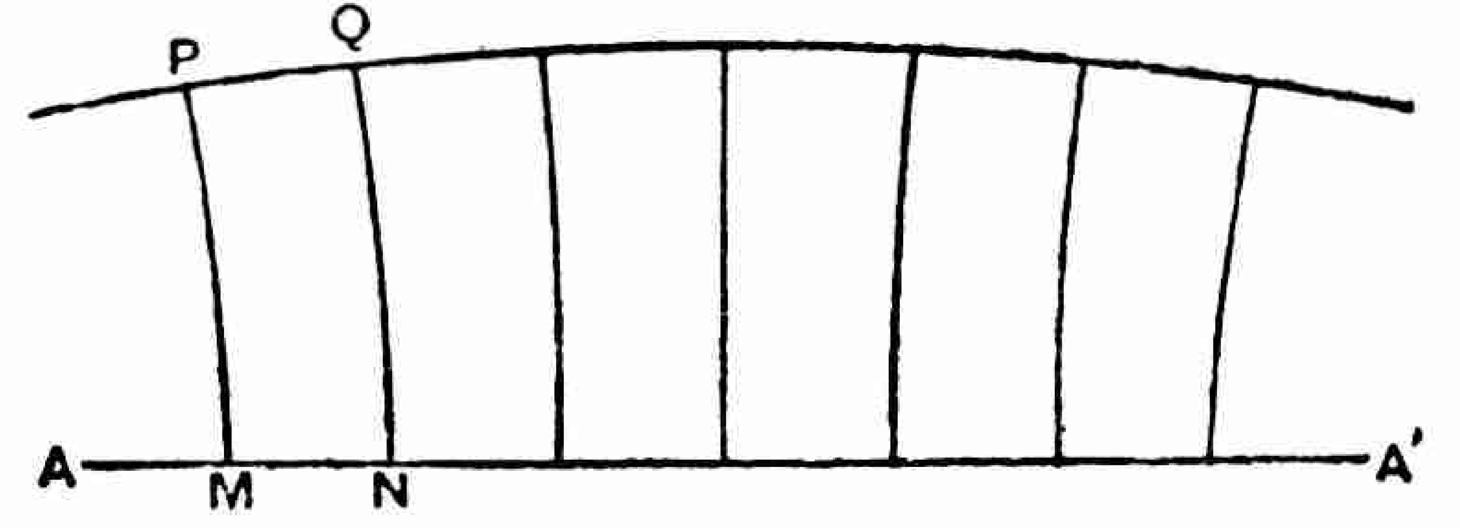
ప్రకేవల వక్రము : ఒక ఋజురేఖకు బయటనుండు బిందువుగుండ రెండు సామ్యరేఖలు ఉండుటచే, ఇవి ఆ ఋజురేఖను అనంతమునందు రెండు బిందువులలో సంధించును. ఆ బిందువులన్నియు ఒక శాంకవముపై నుండును. అనగా అనంతమున నుండు బిందువులన్నియు ఒక శాంకవము పై నుండును. దానికి ప్రకేవల వక్రము అనిపేరు. అది ఒక తలము పై నుండు బిందువులను మూడు తరగతులుగా విభజించును. అందు వాస్తవ బిందువులు ప్రకేవల వక్రములోపల నుండును. అనంత బిందువులు వక్రముపై నుండును. కల్పిత బిందువులు వక్రమునకు బయట నుండును.

వృత్తములు - గోళములు : ఒక బిందువు (కేంద్రము) నకు సమానదూరములో చలించు వేరొక బిందువు యొక్క పథమునకు వృత్తము అనిపేరు. లేదా సమాన దూరము యొక్క ప్రమాణమునకు త్రిజ్య (వ్యాసార్ధము) అనిపేరు. వృత్తములు మూడు విధములు ; అవి :

1. కేంద్రము పరిమిత ప్రదేశములో నుండుట ; త్రిజ్యకు పరిమిత ప్రమాణము. ఇది సాధారణ వృత్తము లేదా క్రమవృత్తము.

2. కేంద్రము అనంత దూరములో నుండిన, త్రిజ్య యొక్క ప్రమాణము అనంతము. దీనిని హోరో వృత్తము అందురు.

3. ఒక ఋజురేఖకు సమాన లంబముల రెండవ అగ్రములు ఒక వక్రముపై నుండును. దీనికి సమదూర (సమానాంతర) వక్రము అని పేరు. చిత్రము 816 లో AA' ఋజురేఖకు MP, NQ లంబములు. $MP = NQ$.



చిత్రము 816

PQ ... ... సమదూర లేక సమాంతనార వక్రము. చిత్రము 316 నందలి MP, NQ ఋజురేఖలు ఖండింపవు. అవి కల్పిత బిందువులో ఖండించును. అందుచే సమానాంతర వక్రము యొక్క కేంద్రము కల్పితమనియు, ఋజురేఖకు అక్షము అనియు చెప్పుదురు.

1. లో కేంద్రము వాస్తవికబిందువు, అక్షముకల్పితము.

2. లో హోరో వృత్తమునకు కేంద్రము, అక్షము అనంతములు.

3. సమానాంతర వక్రములో కేంద్రము కల్పితము, అక్షము వాస్తవము ఈ విషయములు విమాత్రయ జ్యామితిలో అన్వయించును.

4. క్రమగోళము యొక్క వ్యాసార్ధము పరిమితము ; కేంద్రము పరిమిత ప్రదేశములో నుండును. అక్షతలము కల్పితము ; దీని తలముపై జ్యామితి (రీమాన్) విలోప జ్యామితి.

హొరోగోళము : కేంద్రము అక్షము అనంత ప్రదేశములో నుండును. వ్యాసార్ధము అనంతము. దీని తలముపై జ్యామితి యూక్లిడ్ (పరాస) జ్యామితి.

సమానాంతరగోళము : కేంద్రము కల్పితము ; అక్ష తలము వాస్తవము. వ్యాసార్ధములు పరిమితములగు లంబ రేఖలు ; అవి అక్షతలమునకు లంబములు. దీనితలముపై జ్యామితి అతిపరాస జ్యామితి.

త్రికోణమితి : హారో గోళముపై హారో వృత్తములు (చక్రములు) గీసిన, ఏర్పడు త్రిభుజములకు యూక్లిడ్ జ్యామితి సూత్రములు అన్వయించును. వానికి మామూలు త్రికోణమితి సూత్రములు ఉపయోగపడును.

ఉదా : $\triangle ABC$ తీసికొందము. $\angle A$ కొలుచునపుడు హారో గోళమునకు A వద్ద AB, AC లకు ఏర్పడు - స్పర్శ రేఖల మధ్యనుండు కోణమును తీసికొనవలయును.

$\angle B = 90^{\circ}$ అయిన $\sin A = \dfrac{BC}{AC}$; $\cos A = \dfrac{AB}{AC}$

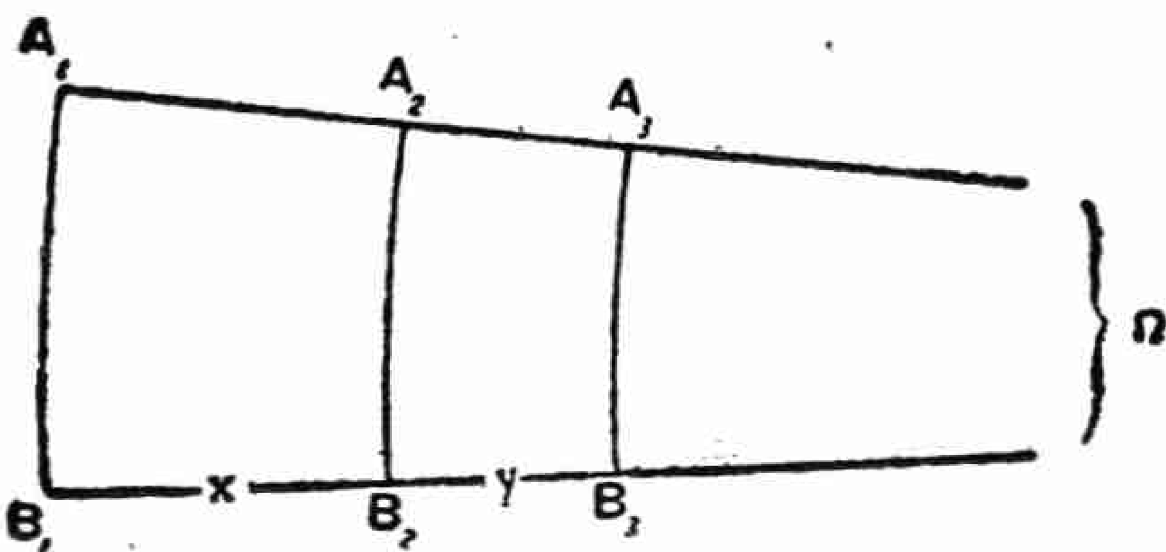
కాని ఇతర సమయములందు

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \dots$$

అనియు తీసికొనవలయును.

సకేంద్ర హొరో వృత్తచాపముల నిష్పత్తి, బ్రహ్మాండ కక్ష : $A_1\Omega$, $B_1\Omega$ సామ్య రేఖలు. వానిని హారో వృత్తములు A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 లలో ఖండింపనిమ్ము. వాని కేంద్రము Ω అనంతములో నుండనిమ్ము (చిత్రము 317).



చిత్రము 317

A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 చాపముల ప్రమాణము వాని మధ్య దూరములు $B_1B_2\ (=x)$, $B_2B_3\ (=y)$ లపై ఆధారపడి యుండును.

ఇపుడు $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = f(x)$ అని తీసికొనిన $\dfrac{A_2B_2}{A_3B_3} = f(y)$, $\dfrac{A_1B_1}{A_3B_3} = f(x+y)$ అనియు విశదమగును.

$$\text{కాని } \frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \cdot \frac{A_2B_2}{A_3B_3} = f(x) \cdot f(y)$$

కాబట్టి ఇట్టి లక్షణములుగల ఫలములు ఘాతఫలములు. $f(x) = e^{x/k}$ అని తీసికొనిన వచ్చునని సులభముగా నిరూపింపవచ్చును. ఇచట k కు అంతరాళ స్థిరరాశి అని పేరు.

భూకక్షా వృత్త వ్యాసార్ధము $= R$ అని తీసికొనిన, $k = 50000\ R$ మైళ్ళు ($80467\ R$ కి. మీ.)

సూర్యసిద్ధాంతము ప్రకారము బ్రహ్మాండము యొక్క కక్ష లేదా పరిధి 18712080864000000 యోజనములు. ఈ కక్ష యొక్క వ్యాసార్ధము $= 3 \times 10^{15}$ యోజనములు.

$= 15 \times 10^{15}$ మైళ్ళు $= 24140 \times 10^{12}$ కి. మీ.

నవీన సిద్ధాంతము అనుసరించి $k = 5 \times 10^{13}$ మైళ్ళు 8046×10^{10} కి. మీ. ఈ విలువ నిశ్చయమయినదని తలచుటకు వీలుకాదని శాస్త్రజ్ఞుల అభిప్రాయము. మన పూర్వీకులు ఇట్టి క్లిష్ట విషయముల గురించి విమర్శించి యుండుట వారి అద్భుత మేధాసంపత్తిని వెల్లడించుచున్నది.

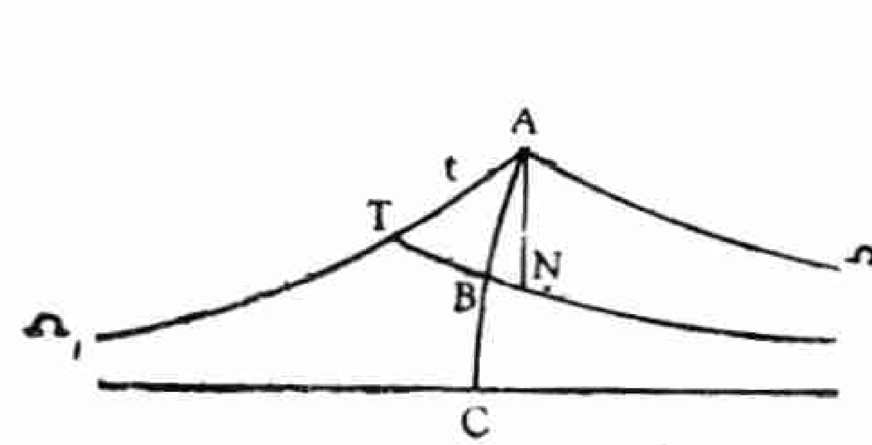
k యొక్క విలువ : AB ఒక హారో వృత్త చాపము. A వద్ద స్పర్శరేఖ B గుండ వెళ్ళు వ్యాసార్ధమునకు సామ్యమైన, $AB = k$ అని సాధింపవచ్చును.

కొన్ని సూత్రములు : (a) $\pi(p)$ సామ్యకోణమయిన

$$\cot \pi(p) = \sinh \frac{p}{k}$$

[కోస్పర్శజీవ $\pi(p)$ = అతిపరాసజీవ p/k]

(b) హొరో వృత్త సమీకరణములు : ABC ఒక హారో వృత్త చాపము. దాని కేంద్రము Ω ; $AB = s$, $BC = S - s$ అని తీసికొనుము.



చిత్రము 318

$A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ దాని వ్యాసార్ధములు. హారో వృత్తమునకు A వద్ద $A\Omega_1$కు లంబముగా నుండు బుజురేఖ $AT\Omega_1$కు సామ్యమయినచో $AC = S$ ఒక క్రమ ప్రమాణముగల చాపము.

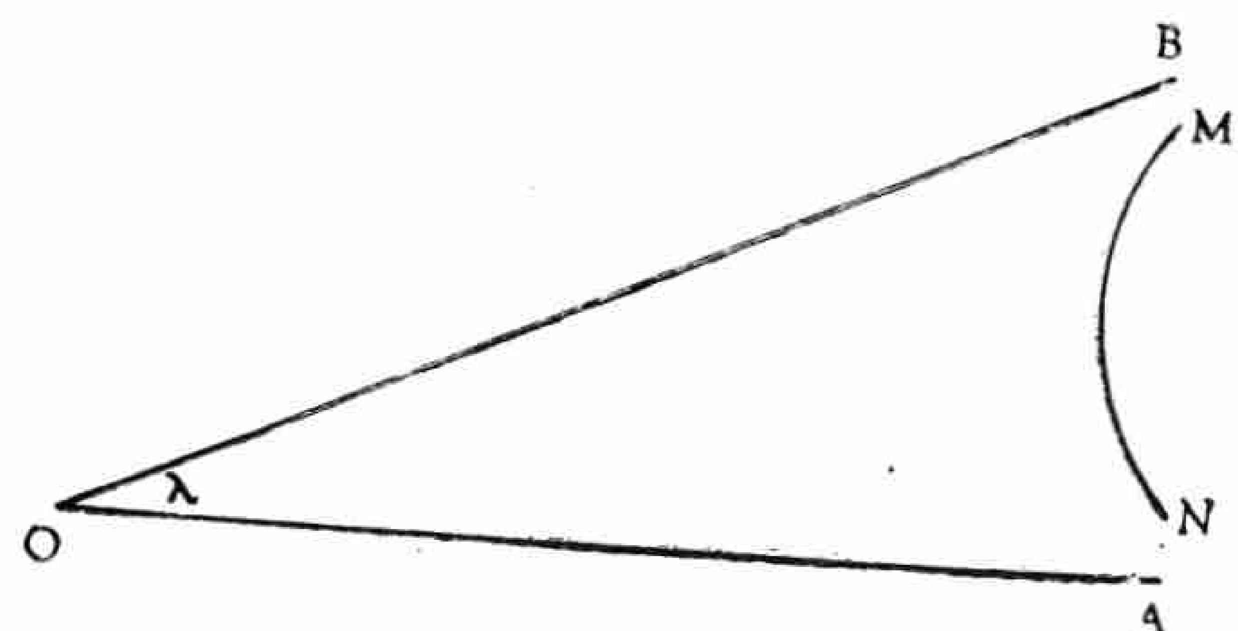
$B\Omega$ ను $AT\Omega_1$ బుజురేఖ T లో ఖండింపనిమ్ము. $AT = t$ అని తీసికొనుము.

హారో వృత్తసమీకరణములు రెండు లభించును.

$s = S \tanh t = S \sinh y$

(ఇందు $y = AN = A$ నుండి BT కి లంబము)

(c) ఒక త్రిభుజ వైశాల్యము : చిత్రము 319 లో MN

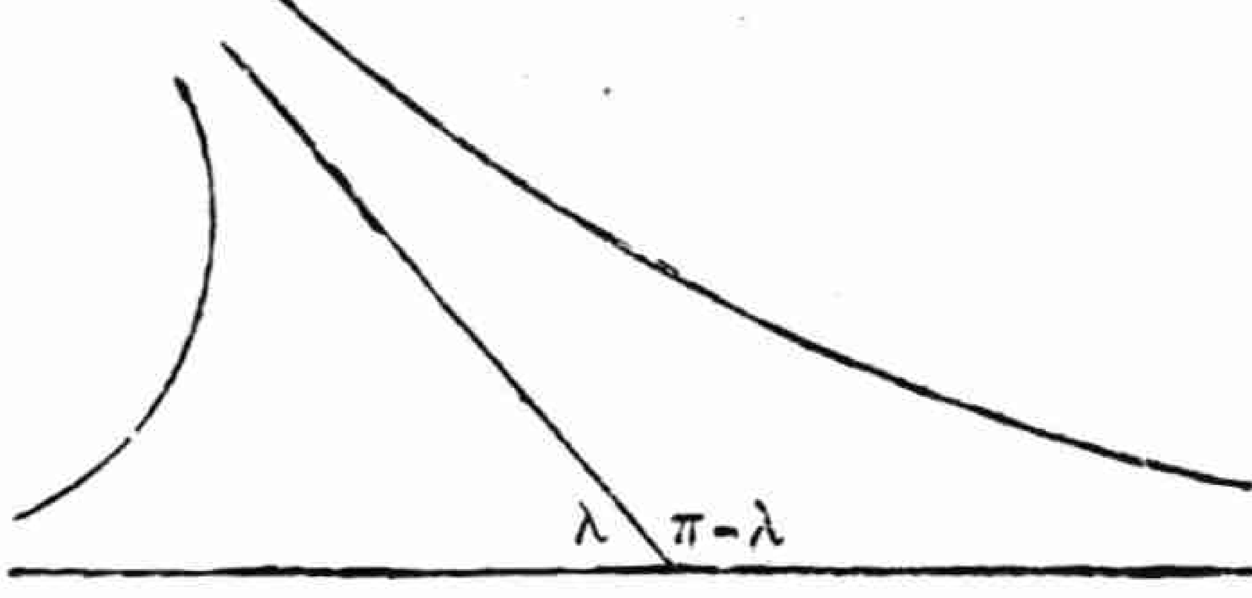


చిత్రము 319

బుజురేఖకు OA, OBలు సామ్యరేఖలు. MN, OA, OB

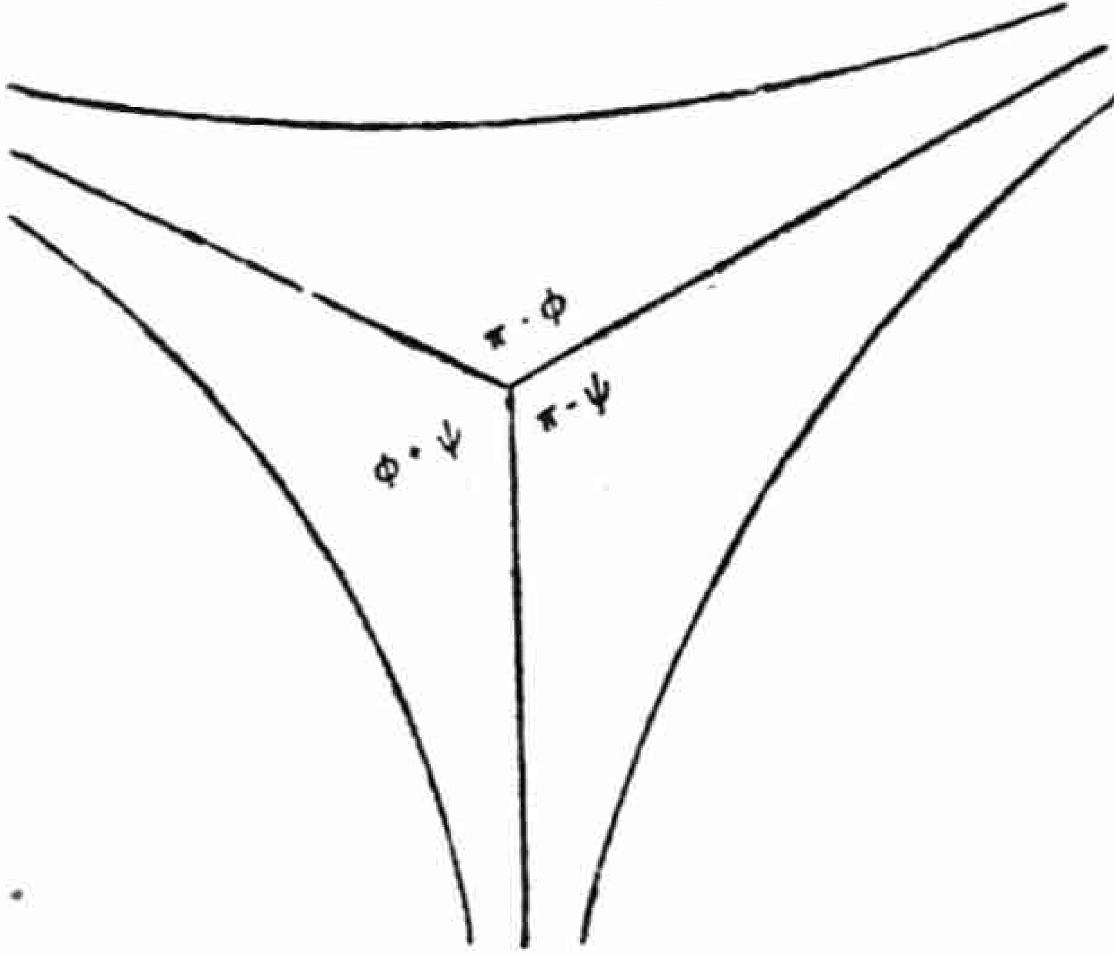
ఋజురేఖల మధ్యనుండు ప్రదేశ వైశాల్యము పరిమిత మనియు, $\angle AOB = \lambda$ అయిన, దాని వైశాల్యము $f(\pi - \lambda)$ అనియు తీసికొనుము.

ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షములు అనంతమందుండిన దాని వైశాల్యము ఒక పరిమిత రాశి t అయిన, చిత్రము 320 నుండి $f(\lambda) + f(\pi - \lambda) = t$.



చిత్రము 320

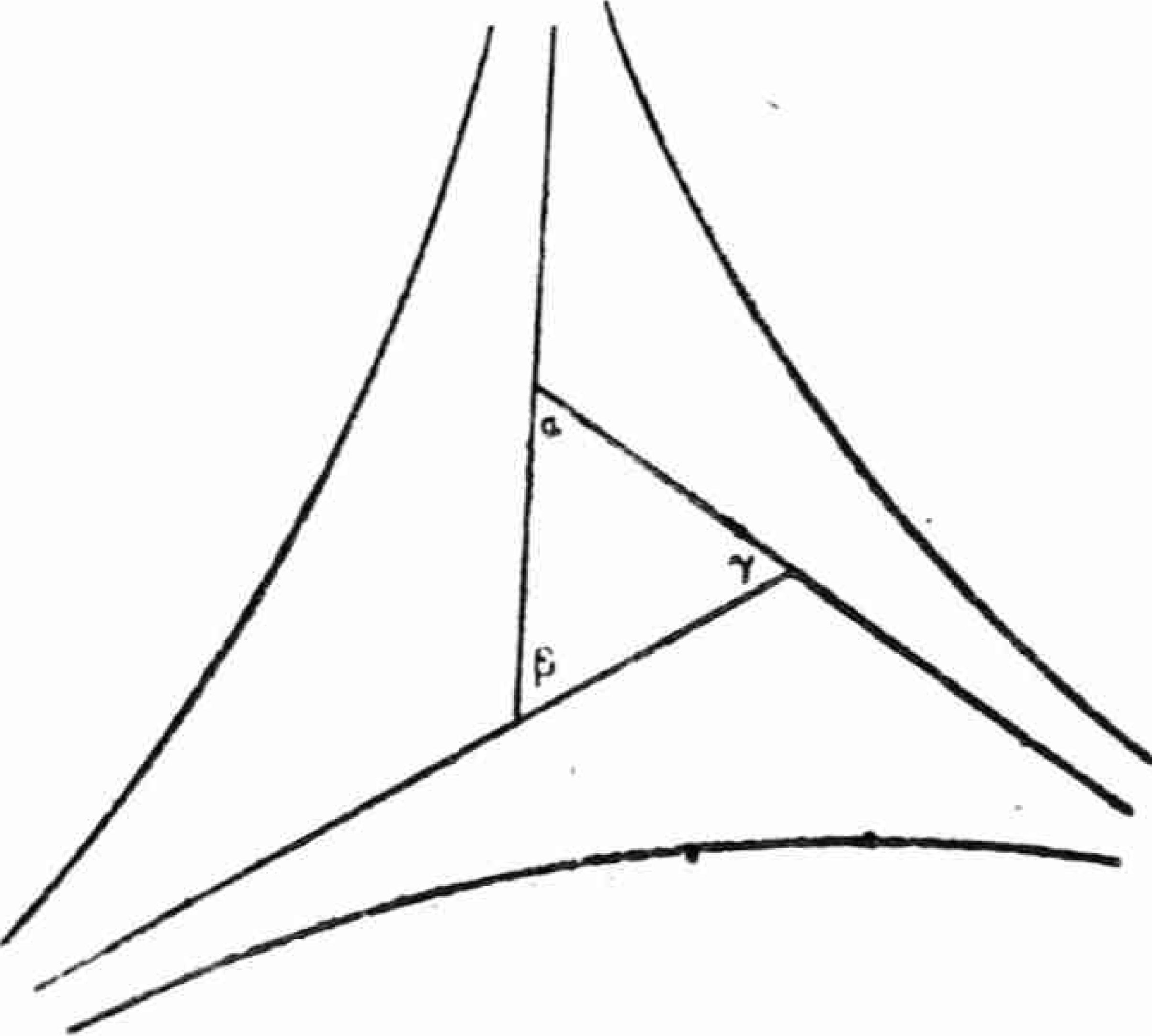
చిత్రము 321 నుండి $t = f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi)$;
కాని $t = f(\phi + \psi) + f(\pi - \phi - \psi)$
కాబట్టి $f(\phi + \psi) = f(\phi) + f(\psi)$



చిత్రము 321

అందుచేత $f(\phi) = k\phi$; ఇందు k ఒక స్థిరరాశి.

α, β, γ కోణములు గల ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములను పొడిగించి, వానికి సామ్యరేఖలు గీయగా (చూ. చిత్రము 322).



చిత్రము 322

$$t = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \Delta$$

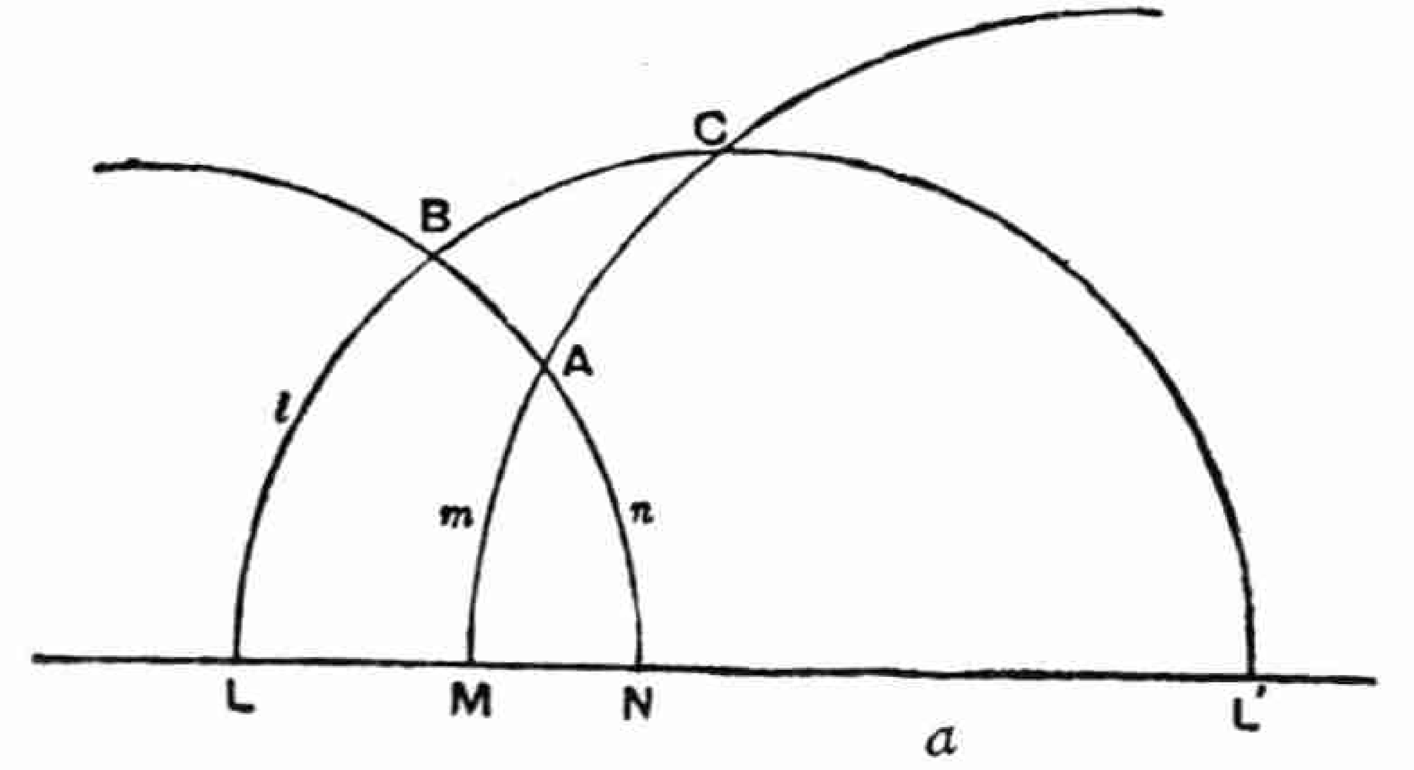
$$\therefore \Delta = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

అనగా ఒక త్రిభుజ వైశాల్యము, దాని కోణములపై ఆధారపడి యున్నది. (ఈ ఉపపత్తి గాస్ ప్రదర్శించినది).

సూచన: ఇందు త్రిభుజ లక్షణములను గోళీయ త్రిభుజముల సూత్రముల మూలముగా విమర్శింపవచ్చును.

విలోప జ్యామితి: సామ్యరేఖలు లేవు; రెండు ఋజురేఖలు ఎల్లపుడును ఖండించును; అవి మరియొక రేఖకు లంబములయి యుండునపుడు కూడ ఇట్లు జరుగును.

ఋజురేఖలను చిన్న అక్షరముల చేతను, తత్సంబంధ బిందువులను పెద్ద అక్షరముల చేతను గుర్తించిన, చిత్రము



చిత్రము 323

323 లో l, m, n ఋజురేఖలు a కు లంబములుగా L, M, N లో ఖండింపనిమ్ము. A లో m, n రేఖలు, B లో l, n రేఖలు, C లో l, m రేఖలు ఖండింపనిమ్ము.

LB పొడిగించిన, a ను మరల L' బిందువులో ఖండింపనిమ్ము. త్రిభుజములు ద్వి సమబాహువు లయినందున $BL = BN = BL'$. అట్లే $CM = CL = CL'$ కాబట్టి B, C లు ఏకీభవించవలయును, వానితో A కూడ ఋజురేఖ a కు లంబరేఖలు l, m, n అన్నియు ఒక బిందువు B గుండ వెళ్లును. బిందువు B, ఋజురేఖ a యొక్క కేవల ధ్రువ బిందువు అనియు, a ఋజురేఖ A బిందువు యొక్క ధ్రువరేఖ యనియు చెప్పుదురు.

l, m, n ఋజు రేఖలు a కు ఒకవైపు B లో అనుషక్తములైన అవి సౌష్ఠవ ధర్మముచే రెండవ వైపున కూడ అనుషక్తములు కావలయును. అనుషక్త బిందువులను B, B' అని తీసికొనిన, $BB'B$ ఒక పరిమిత రేఖ. దాని పొడుగు $4q$ అని తీసికొనవచ్చును. అపుడు $BB' = 2q$ అగును.

$MB = q$ ఒక పాదము.

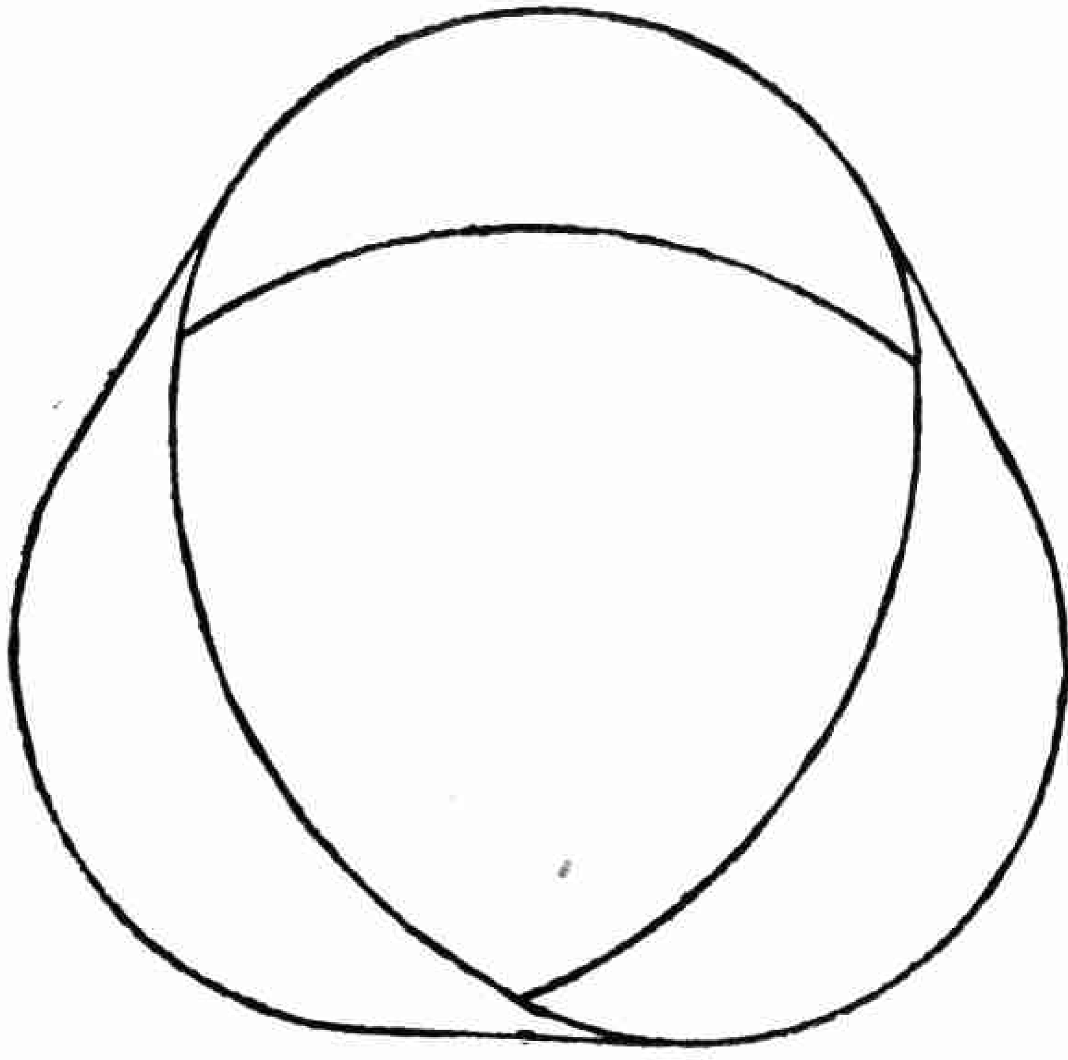
ఒక ఋజురేఖ a పై నుండు బిందువు లన్నియు దాని ధ్రువము A నుండి సమాన దూరములో నుండును.

ఈ జ్యామితి రెండు విధములు : (ఏ) ధ్రువ బిందువులు B, B'లు వేరు వేరుగా నుండుట; ఇది గోళీయ జ్యామితి; (బి) ధ్రువ బింధువులు B, B' లు ఏకమగును, ఇది విలోప జ్యామితి.

ఈ విలోప జ్యామితిలో ఋజురేఖలు అన్నియు $2q$ పొడవు ఉండును.

ముఖ్య లక్షణము: ఇందు ఒక తలమును ఒక ఋజు రేఖ రెండు భాగములు చేయదు.

ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారమగు కాగితపు ముక్కను ఒకసారి మెలిపెట్టి అంచులను అతికించిన ఏర్పడు తలము విలుప్త తలము (చిత్రము 324). ఈ తలమును ఒక ఋజు



చిత్రము 324

రేఖ రెండు భాగములు చేయదు. ఋజురేఖ అన్నియు పరిమిత పరిమాణము ($1 \Rightarrow 2q$) కలవి.

(ఏ) రెండు బిందువులు AB తీసికొనిన వాని మధ్య దూరము x చే గాని, $2q - x$ చే గాని గుర్తింపవచ్చును.

(బి) ఒక త్రిభుజము ABC యొక్క మూడు కోణములు రెండు సమ కోణములకంటె ఎక్కువగా నుండును.

$\Delta = k^2 (A + B + C - \pi)$

ఉప సంహారము: ఈ జ్యామితి శాఖలలో ఏది నిజమను ప్రశ్నకు అర్థములేదు. ప్రతి శాఖయు మనము స్వీకరించిన తత్త్వములపై ఆధారపడి యున్నది. తత్త్వములు మారిన జ్యామితి మారును.

కాని ఏది ఆచరణీయము? ఈ ప్రశ్నకు కూడ అర్థము లేదు. విశ్వము పరిమితమైనదనియు, అది విస్తరించు చున్నదనియు ఖగోళజ్ఞులు సిద్ధాంతము చేసియున్నారు.

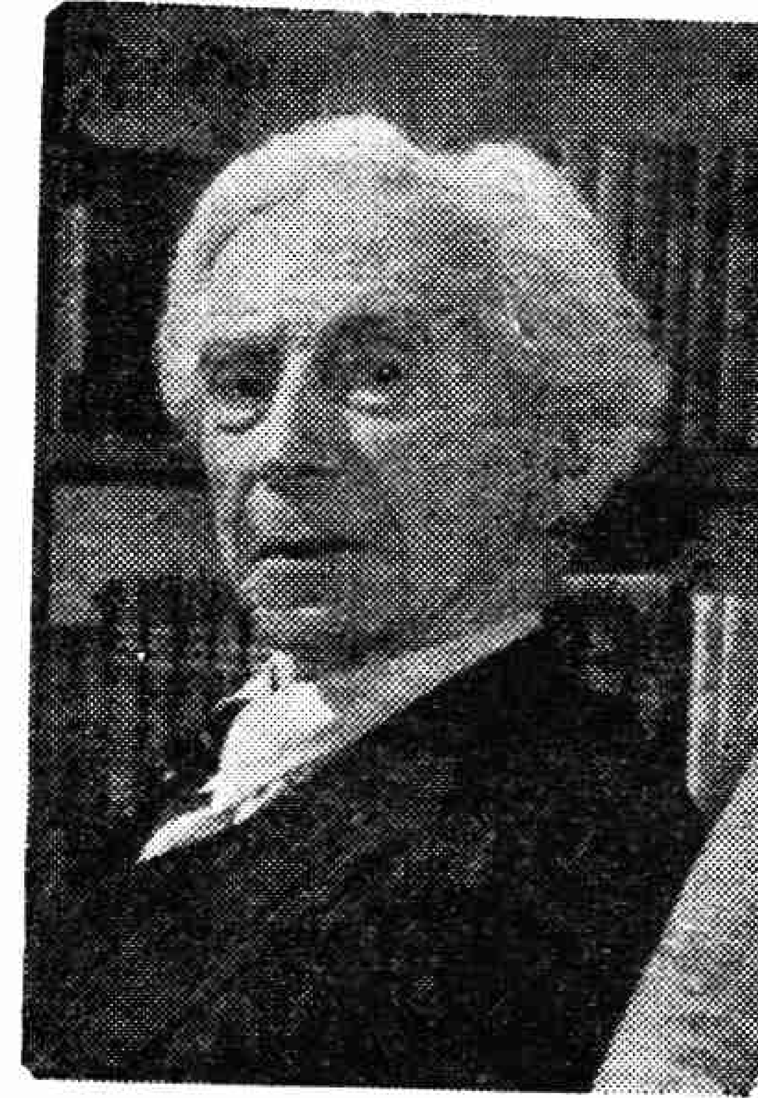
భారతీయశాస్త్రముల ప్రకారము విశ్వము అనేక అండములు చేరిన ఒక బ్రహ్మాండము అని తెలియుచున్నది.

విశేష జ్యామితి ప్రకారము, జ్యామితీ శాఖలకు పరస్పర సంబంధములు కలవనియును, ఒక శాఖ నుండి మరియొక శాఖకు మారవచ్చుననియు తెలియు చున్నది.

ఎమ్. వి. సు; ఆచార్య

రసెల్, బెర్ట్రాండ్ ఆర్థర్ విలియమ్ (1872): బ్రిటిషు గణితశాస్త్రవేత్త; దార్శనికుడు; సంఘసంస్కర్త. 1872 మే 18వ తేదీన ట్రెలెక్‌లో రసెల్ జన్మించెను. మొదటి ఎరల్ అగు లార్డ్ జాన్ రసెల్ మనుమడు.

కేంబ్రిడ్జి ట్రినిటి కాలేజీలో విద్యను అభ్యసించెను. 1895 లో ఈకాలేజీ ఫెల్లోగా ఎన్నుకొనబడెను. రాయల్ సొసైటీ ఫెల్లోగా 1908 లో ఎన్నుకొనబడెను. 1910 లో అచ్చటనే లెక్చరర్ అయ్యెను. మొదటి ప్రపంచ సంగ్రామ సమయమున తన యుద్ధ వ్యతిరేక శాంతివాద భావముల కారణముగ ఇతడు తన ఉద్యోగమును కోల్పోయెను. ఆ తరువాత యుద్ధ వ్యతిరేక భావములతో కూడిన గ్రంథ ప్రచురణ చేసినందులకు కొద్ది కాలము కారాగార శిక్షను రసెల్ అనుభవించెను.



రసెల్
చిత్రము 325

కేంబ్రిడ్జి, ఆక్స్‌ఫర్డ్, హార్వర్డ్, చికాగో, కాలిఫోర్నియా మొదలగు ప్రసిద్ధ యూనివర్సిటీలలోను, పెక్కు ఇతర విద్యాసంస్థలందును రసెల్ బోధన చేసెను. 1931 లో రసెల్ మూడవ ఎరల్ అయ్యెను.

సాంకేతికతర్కము (సింబాలిక్ లాజిక్) ను అభివృద్ధి చేసి దానిని గణిత, దర్శన శాస్త్రములందు ప్రవేశపెట్టుట రసెల్ ప్రధాన కృషి. ఇతడు వైట్ హెడ్‌తో కలసి రచించిన 'ప్రిన్సిపియా మాతమాటికా' (మూడు సంపుటములు ; 1910-13) ఇతని ఖ్యాతికి మూలమైనది. 'తర్కశాస్త్ర సూత్రనిర్మాణము, శుద్ధగణిత సిద్ధాంతములన్నియు తర్కశాస్త్రమునుండియే నిగమింపబడుననుటకు విస్తృత ఉపపత్తి, గణితభావముల నన్నింటిని తర్కశాస్త్ర పద జాలముతో నిర్వచింపవచ్చును' అను అంశములు పై గ్రంథమున వారు పేర్కొనిరి.

ప్రిన్సిపియాయందు పేర్కొనబడిన తార్కిక వైశ్లేషణిక విధానమును ఉపయోగించుట ద్వారా దర్శనము విజ్ఞాన శాస్త్ర ప్రతిపత్తిని సాధించగలదని రసెల్ భావించెను.

'గణిత సత్యము యొక్క స్వభావము ఏమి? భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములవలె గణితశాస్త్రముకూడ అవేక్షణ, ప్రయోగములపై ఆధారపడు విజ్ఞాన శాస్త్రమేనా? గణిత విషయముల అస్తిత్వము అననేమి? గణిత శాస్త్ర ఫలితములు నిరపేక్షక వాస్తవము లేనా? సప్రమాణ ఉపపత్తి భావము సంపూర్ణముగ నిర్వచనీయమేనా?' గణితశాస్త్ర పరిమితి, మూలము, ప్రమాణములను గురించిన ఇట్టి ప్రశ్నలు దర్శన శాస్త్రమునకు అతి ప్రధానములనియు, ప్లాటో, ఆరిస్టాటిల్, డేకార్ట్, లైబ్నిట్జ్, కాంట్ మొదలగు దార్శనికులచే అవి పునః పునః చర్చించబడినవని రసెల్ పేర్కొనెను.

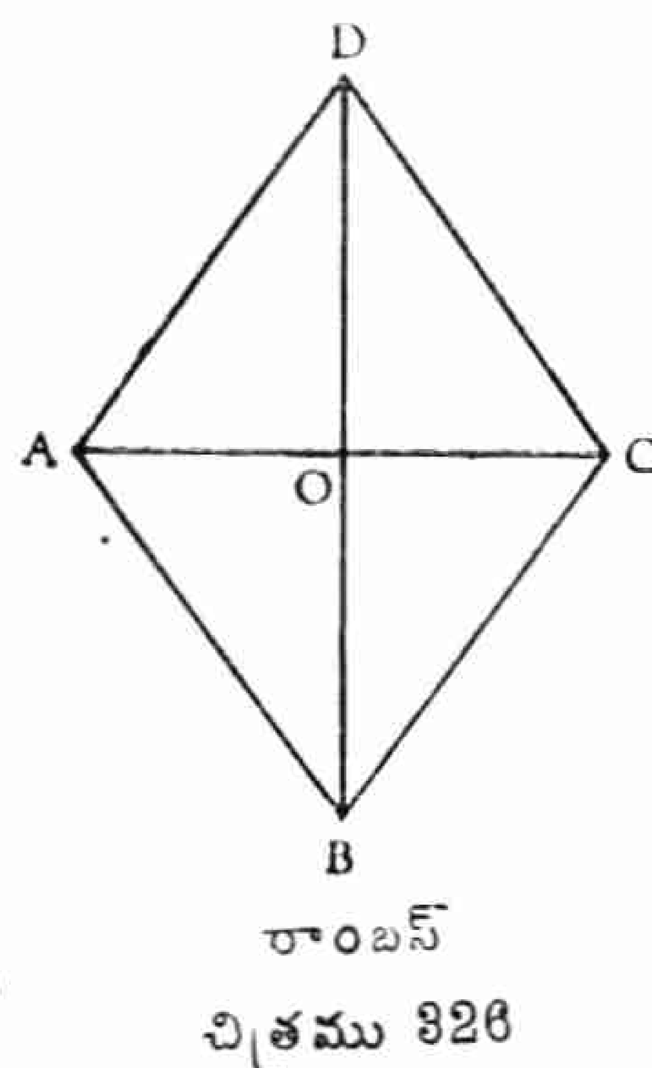
యూనివర్సిటీ పండితులనుండి పామరులవరకు అందరిని ఆకర్షించు శైలిలో 'ఇంట్రడక్షన్ టు మాతమెటికల్ ఫిలాసఫీ' (1919), 'ఏ. బి. సి ఆప్ ఆటమ్స్' (1923), 'ఏ. బి. సి ఆప్ రెలిటివిటీ' (1925), 'మారేజ్ అండ్ మోరల్స్' మొదలగు పెక్కు గ్రంథములను రసెల్ రచించెను. సాహిత్యములో 1950 నోబెల్ బహుమతి రసెల్‌కు లభించినది.

రెండవ ప్రపంచ సంగ్రామమునకు ముందు శాంతివాదమును పరిత్యజించి కొన్ని ప్రత్యేక పరిస్థితులలో యుద్ధమును బలపరచెను. యుద్ధానంతరము తిరిగి రసెల్ ప్రముఖ శాంతివాదులలో ఒకడై అణ్వాయుధములను స్వచ్ఛందముగ విసర్జింపవలెననే భావమును తరచు వ్యక్తపరచుచుండెను (చూ. దర్శనములు - మతములు పు. 641 ; వైట్ హెడ్).

పా. ల. నా.

రాంబస్ : నాలుగు భుజములు సమానముగ గల చతుర్భుజము 'రాంబస్' (చూ. చిత్రము 326).

దీనిలో ఎదురనుండు భుజములు సమానాంతరములు.



రాంబస్
చిత్రము 326

1. ఎదురెదురు కోణములు సమానములు.

2. సన్నిహిత కోణములు సంపూరకములు.

3. ఏ వికర్ణము చేతనైనా ఇది రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజములుగ విభజింపబడును.

4. వికర్ణములు కోణములను సమద్విఖండన చేయును.

5. వికర్ణములు లంబ సమద్విఖండన చేసికొనును.

రాంబస్ వైశాల్యమును భుజవర్గమును ఏదో ఒక కోణము యొక్క జీవచే గుణించి ($A = a^2 \sin \alpha$) కనుగొనవచ్చును. లేదా రాంబస్ వికర్ణముల పొడవు l, m అయిన దాని వైశాల్యము $A = \frac{1}{2} lm$ అగును. (చూ. చతుర్భుజము - పు. 261 ; సమానాంతరచతుర్భుజము).

పా. ల. నా.

రామానుజమ్, శ్రీనివాస : నవీన భారతదేశ గణిత కోవిదులలో ప్రసిద్ధతముడు శ్రీనివాస రామానుజమ్. ఈతని జీవిత చరిత్ర ఒక విచిత్ర ఆఖ్యాయిక. ఇతడు క్రీ. శ. 1887 ఈరోడ్‌లో ఒక అతి పేద వైష్ణవ కుటుంబమున జన్మించెను. 1903 లో మెట్రిక్యులేషన్ పరీక్షలో ఉత్తీర్ణుడై కుంభకోణ నగర ప్రభుత్వ కళాశాలయందు ఎఫ్. ఏ. తరగతిలో చేరెను. అతడు తాను చదువుకొనుచున్న రోజులలో కూడ తనకు పై తరగతులలో నున్న బాలురకు కఠినములగు సమస్యలకు సమాధానములిచ్చి వారికి సహాయపడుచుండెడివాడు.


రామానుజమ్ శ్రీనివాస
చిత్రము 327

పాఠశాలలో విద్యార్థిగనున్న సమయమందే స్నేహితుడొకడు కాలేజీ పుస్తక భాండారమునుండి కార్ : "సినోప్సిస్ ఆవ్ ప్యూర్ మేత్‌మెటిక్స్" అను గ్రంథమును తెచ్చి ఈతనికిచ్చెను. అది రెండు సంపుటములలో నుండెను. బీజగణితము, త్రికోణమితి, కలనము, విశ్లేషణాత్మక జ్యామితి అను విషయములకు చెందిన 6000 సిద్ధాంతము లిందు పొందుపరుపబడినవి. కాని వీటికి ఉపపత్తులు లేవు. ఈ గ్రంథము రామానుజమ్ ప్రతిభను రేపినది. ఆమూలాగ్రముగ ఆ గ్రంథమును ఉపపత్తులను ఉపకల్పించుకొనుచు అత్యాదరముతో అతడు అనుశీలించెను. తక్కిన గ్రంథములు లేకుండుటవలన ఆతనికి ప్రతి సమస్యయు పరిశోధన కార్యారంభకమేయయినది. గణితశాస్త్ర అధ్యయనములో ఇట్టి ఏకాగ్రతను ప్రదర్శించుట కలవాటుపడియుండుటచే ఇతడు ఇతర విద్యాశాఖలలో ఉత్తీర్ణుడగుటకు వలయు జ్ఞానమును సంపాదించలేకపోయెను. అందుచే అతడు ఎఫ్. ఏ. పరీక్షలో విజయము పొందలేక తన విద్యార్థి వేతనమును పోగొట్టుకొనెను. అతడు ఉద్విగ్నుడై, కాలేజీ విడిచిపెట్టి దేశమునందిటునటు ఒక లక్ష్యము లేకుండ తిరుగుచుండెను. తిరిగి కాలేజీలో ప్రవేశించి, రుగ్ణుడై, పరీక్షలో ఉత్తీర్ణుడు కాలేకపోయెను.

ఇంతలో ఇతడు అనంతపరంపరలు, శృంఖలిత భిన్నములు, నిశ్చిత చయనములు, ప్రధానసంఖ్యలు మొదలగు

విషయములలో తాను సాధించిన సమస్యల ఫలములతో రెండు పెద్ద నోటుపుస్తకములను నింపగలిగెను. ఈ ఫలములు నూతనమైనవగుటచేతను, వాటి మహత్వమును నిర్ణయింపగల పండితులు లేక పోవుటచేతను తన నోటుబుక్కుల నుండి ఒక వందకన్న ఎక్కువ సంఖ్య సమస్యల నెత్తి వ్రాసి, ఇంగ్లండులో ప్రసిద్ధిగన్న ప్రొఫెసర్ హార్డీకి ఉత్తరము వ్రాసెను. హార్డీ వెంటనే ఈ లేఖారచయిత గణితమందు మహామేధావియని తెలిసికొని, అతనిని ఇంగ్లండుకు రమ్మనెను. శిష్టాచార పరాయణుడైనను రామానుజమ్ ఎట్టకేలకు ఇంగ్లండు ప్రయాణమునకు ఇయ్యకొనెను. 1914 లో ఇతడు ఇంగ్లండు చేరి, అచ్చట ఆదేశములోని ఉత్తమగణిత కోవిదులతోసహా మూడేండ్లు నిర్విరామముగ తన పరిశోధన ప్రవృత్తిని ప్రదర్శించి, పరిశోధనఫలముల పత్రములు అనేకములు ప్రచురించెను. 1917 లో అతడు జబ్బుపడి స్వదేశమునకు తిరిగివచ్చెను. ఇచ్చట మద్రాసు యూనివర్సిటీ ఆయనకు ఒక ప్రత్యేక పరిశోధనా చార్యత్వపదవిని సృజించి గౌరవించెను. వైద్యసహాయము వలసినంత లభించినను 1920 లో అతడు దివంగతుడయ్యెను.

అతనికి ఇంగ్లండు రాయల్ సొసైటీ సభ్యత్వము వితరించబడుట, అతడు ట్రినిటీఫెల్లోగా ఎన్నుకొనబడుట, అతని పరిశోధన ఫలితములు ఇంగ్లండునందు గణితశాస్త్ర లోకముచే సంపూర్ణామోదమును బడసిన వనుటకు ప్రబల తార్కాణములు. ట్రినిటీఫెల్లోషిప్ అందుకొనిన ప్రథమ భారతీయు డాయనయే. ఆజన్మాంతము అతడు గణిత శాస్త్ర పరిశోధనలయందే మగ్నుడైయుండెను.

తక్కిన విషయములతోపాటు రామానుజమ్ ఈ క్రింద పేర్కొనిన విషయములందు తన పరిశోధనలు నెరపినాడు. అతివిభాజకసంఖ్యలు, అనగా వాటికి పూర్వమున్న అన్నిసంఖ్యలకన్న ఎక్కువ సంఖ్యాకారణాంకములు గల సంఖ్యలు, ఒక సంఖ్యయొక్క విభాగముల సంఖ్యల (నంబర్ అవ్ పార్టిషన్స్) విభాజ్యధర్మములు, వర్గముల సంకలన రూపమున సంఖ్యల నిరూపణ, అతిజ్యామితీయ పరంపరలు మొదలైనవి. అతని నోటుపుస్తకములలో అతనిచే ఊహింపబడిన ఫలములు నేడు అన్వేషణ విషయములు కావింపబడుచున్నవి అనేకములు కలవు.

మద్రాసు వ్యాపారియైన అళగప్ప చెట్టియార్ రామానుజమ్ పేర ఒక గణితశాస్త్ర సంస్థను నెలకొల్పెను. ఈ సంస్థ నేడు మద్రాసు యూనివర్సిటీ ఆధ్వర్యవమున పనిచేయుచున్నది. డాక్టర్ టి. విజయరాఘవన్ దీని ప్రథమ డైరెక్టర్‌గా నుండెను. ఇపుడు శ్రీ సి. టి. రాజగోపాల్ ఈ గణితాన్వేషణ స్థాపనమును జరుపుచున్నారు.

1962 డిసెంబరు 22 వ తేదీని రామానుజమ్ స్మృతి చిహ్నముగ ఒక తపాలాబిళ్ళను ప్రచురించి, భారత ప్రభుత్వమితనిని గౌరవించినది. ఆ. న.

రామానుజమ్ ఇన్‌స్టిట్యూట్ అవ్ మాతమేటిక్స్ : దక్షిణభారతములో గణితశాస్త్ర పరిశోధనావకాశములు పెంపొందించు లక్ష్యముతో విద్యాదాత అగు కీ. శే. ఆర్. ఎమ్. అళగప్ప చెట్టియార్ గారిచే ఈ సంస్థ 1950 లో వ్యవస్థాపింపబడినది. అళగప్ప చెట్టియార్ గారి మరణానంతరము (1957) నుండి ఈ సంస్థ కేంద్ర విద్యా మంత్రిత్వ శాఖ వారిచే యూనివర్సిటీ గ్రాంట్స్ కమిషన్ ఏజన్సీ ద్వారా మద్రాసు యూనివర్సిటీ నిర్వాహము క్రింద పోషింపబడుచున్నది. యూనివర్సిటీ గణితశాస్త్ర పరిశోధనను ఏర్పాటుచేసి నిర్వహించుటలో ఈ సంస్థ నేడు సహకరించుచున్నది.

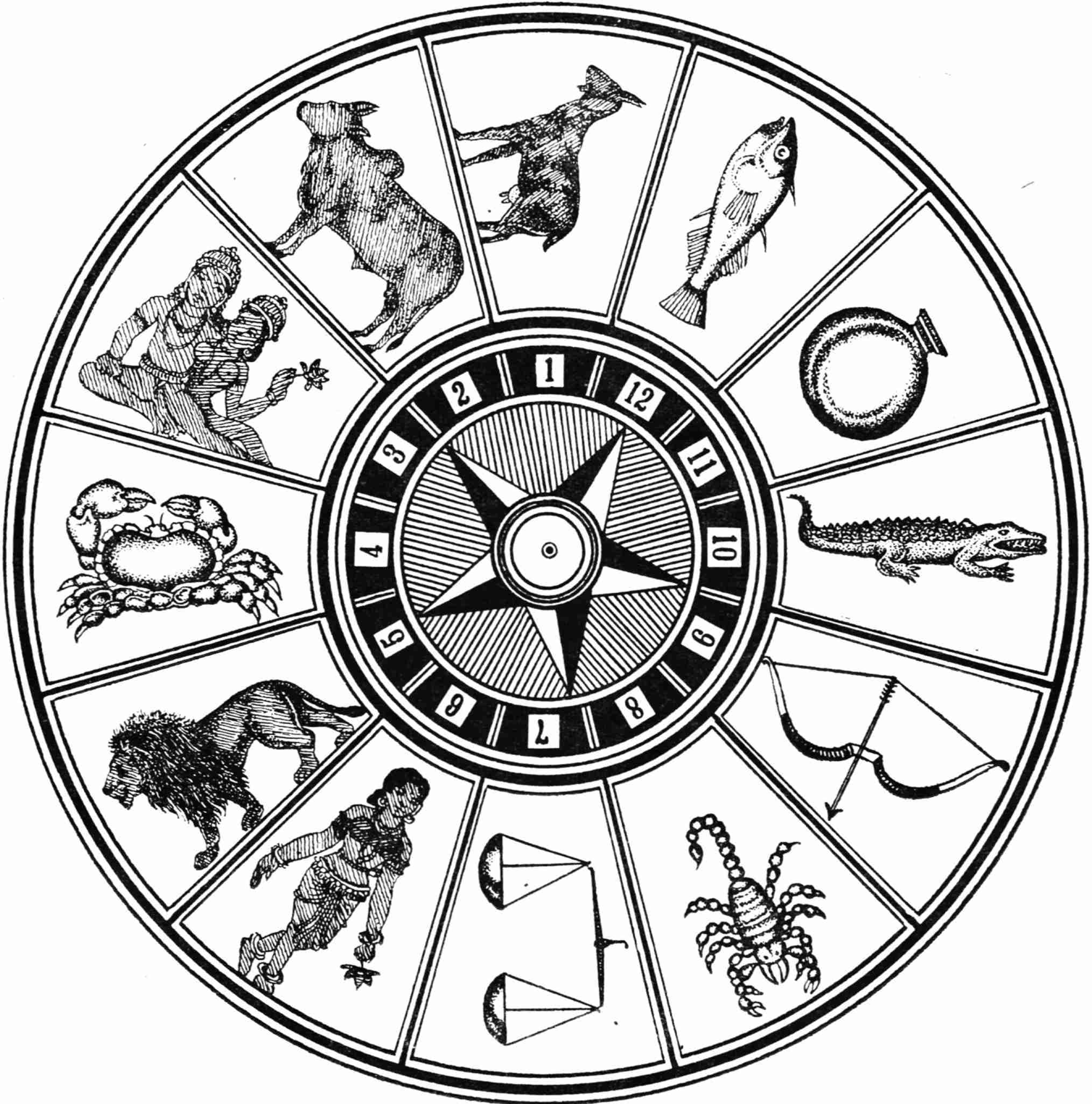
ప్రస్తుతము ఈ సంస్థ అధ్యాపక సిబ్బంది ఒక ప్రొఫెసర్ (డైరెక్టర్), ఒక రీడర్, ఒక లెక్చరర్. శ్రీనివాస రామానుజమ్‌గారి పేరుపై ఏర్పాటుచేయబడిన ఒక ప్రత్యేక ప్రొఫెసర్ పదవి, పరిశోధన శిక్షణా ప్రణాళిక క్రింద గవర్నమెంట్ అవ్ ఇండియా వారు కల్పించిన మూడు స్కాలర్‌షిప్‌లకు కూడ అవకాశము ఉన్నది.

ఇప్పటివరకు ఈ సంస్థచే శుద్ధగణిత రెండు శాఖలగు విశ్లేషణ శాస్త్రము (ఎనాలిసిస్), బీజగణితములందు పరిశోధన చేయబడినది. అంతర్జాతీయ ప్రసిద్ధములగు పెక్కు గణితశాస్త్ర పత్రికలలో ఈ సంస్థ సభ్యులచే రచింపబడిన 100 కు మించిన వ్యాసములు ప్రచురితములైనవి.

వివిధ పద్ధతులలో ఉపసరణలేని పరంపరల సంకలనీయతయందు ఈ సంస్థ సభ్యులలో పెక్కుమంది అభిరుచి కలిగియున్నారు. వర్గముల సంకలనములుగ సంఖ్యలను వ్రాయుటను పరిశోధించుటయందు శ్రీనివాస రామానుజమ్‌చే ఉపయోగించబడి ఉండవచ్చునని విశ్వసింపదగిన ఒక మరుగుపడిపోయిన సూత్రము సంఖ్యల విశ్లేషణ సిద్ధాంతము (ఎనలిటిక్ తియరీ అవ్ నంబర్స్) లో ప్రత్యేక అధ్యయనము చేసిన ఈ సంస్థ సభ్యునిచే వెలుగులోనికి తీసికొని రాబడుట గమనించదగినది. సి. టి. రా.

రాశి చక్రము : సూర్యుని, చంద్రుని, ప్రధాన గ్రహముల (ప్లూటో, పెక్కు లఘు గ్రహములు ఇందు చేరవు) పథమును దివ్యగోళముపై సూచించు 16° వెడల్పు గల మండలమును రాశి చక్రము (జోడియక్) అందురు. ప్రాచీన భారతీయులు దీనిని శింశుమార చక్రమనిరి. ఈ మండలమునకు మధ్యరేఖ క్రాంతి వృత్తమును సూచించును,

వసంతవిషువు (వెర్నల్ ఈక్వినాక్స్) నుండి ప్రారంభించి తూర్పు ముఖముగ ఒక్కొక్కటి 30° నిడివి గల 12 భాగములుగ రాశి చక్రము విభజింపబడెను. ఈ భాగములను రాశులు అందురు. ఈ రాశులకు దాదాపు 2000 ఏండ్ల పూర్వమునాడు ఆయా రాశులందున్న తారామండలముల (కాన్‌స్టెల్లేషన్స్) పేర్లు పెట్టబడినవి. కాని విషుచలనము చేత అప్పటినుండి నేటికి వసంతవిషువు పశ్చిమముగ దాదాపు 30° చలించుటచే, మేషాదిబిందువు (ఫస్ట్ పాయింట్ అవ్ ఏరీస్) మీన రాశిలో ఉన్నది. ఉదాహరణకు సూర్యుడు మేషాదిబిందువును మార్చి 21 న ప్రవేశించినప్పుడు వాస్తవమునకు అతడు మీన రాశిలో ఉండును. మరికొన్ని దినముల వరకు సూర్యుడు మేష రాశికి రాడు. రాశిచక్రములో రాశులను కొందరు సవ్య దిశలోను, మరి కొందరు అపసవ్యదిశలోను గుర్తింతురు. ఋతువుల ప్రకారము ఏర్పరచబడిన రాశుల పేర్లు, వాటి సంకేతములు దిగువ పేర్కొనబడినవి :



చిత్రము 328 రాశి చక్రము

వరుస నంబరు	రాశి సంకేతము	రాశి	ఋతువు
1	♈	మేషము (ఏరీస్)	
2	♉	వృషభము (టారస్)	వసంత ఋతువు
3	♊	మిథునము (జెమినీ)	
4	♋	కర్కాటకము (కాన్సర్)	
5	♌	సింహము (లియో)	గ్రీష్మ ఋతువు
6	♍	కన్య (వర్గో)	
7	♎	తుల (లైబ్రా)	
8	♏	వృశ్చికము (స్కార్పియో)	శరదృతువు
9	♐	ధనుస్సు (సాజిటారియస్)	
10	♑	మకరము (కాప్రికారన్)	
11	♒	కుంభము (ఎక్వారియస్)	శిశిర ఋతువు
12	♓	మీనము (పిసీస్)	

పా. ల. నా.

రీమాన్ (1826-1866) : బెర్నార్డ్ రీమాన్ సృజన శక్తిగల మహా ప్రతిభావంతుడు. అతని నాటి ఉజ్జ్వల మేధావంతులగు గణిత శాస్త్రజ్ఞులలో అతడు మిన్న. ఆతడు జర్మనీ దంపతుల బిడ్డ. రోగము, దారిద్ర్యము అతని పుట్టుకతో వెంటాడినవి. గాటింజన్ యూనివర్సిటీలో గాస్ అనుయాయి డిరిష్లె తరువాత ఆచార్య పదవి నతడలంకరించెను.

రీమాన్ ఆరోగ్య మెప్పుడును బాగుగ నుండెడిది కాదు. 40 వ ఏట అతడు మరణించెను. అందుచే అతని మహత్త్వమునకు గణిత శాస్త్రమునకు ఆతడు నూతనముగా చేర్చిన విషయ విస్తారముకన్న (అతని పరిశోధనలన్నియు ఒక సంపుటమును మీర లేదు) శుద్ధ, వినియుక్త గణిత శాస్త్రములలో అతడు ప్రకటించిన నూతన విధానముల, నూతన దృక్పథముల అసాధారణ విశాలీకరణ సామర్థ్యము కారణము. వివరములపట్ల అతడెప్పుడును ఆదరము చూపలేదు. అతడు ఒక విశాల సమస్యయొక్క రూపమును ఒక సంగత ఏకముగా దర్శించగల బుద్ధి మంతుడు.

గణితములలో అతనికి ప్రసిద్ధిని చేకూర్చిన ముఖ్య విషయములలో కొన్నిటిని మాత్రము ఇచ్చట తడవెదము.

రీమాన్ జీటా ఫలము అను పేరియబడిన $\zeta(s)$ ను ఈ క్రింది సంకలిత అనంతపరంపర రాశిగా నిర్వచించవచ్చును :

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \frac{1}{n^s} + \cdots \cdots \cdots$$

ఇచ్చట s అనునది సంకీర్ణ సంఖ్య. $s = u + iv$ (ఇచ్చట u, v లు వాస్తవిక సంఖ్యలు). ఒక దత్త సంఖ్య కన్న తక్కువ మూల్యము గల ప్రధాన సంఖ్యల గురించి అతని అన్వేషణ సందర్భమందు ఈ జీటా ఫలము మనకు తారసిల్లును. దేనికి $\zeta(s) = 0$ యొక్క మూలముల వాస్తవిక భాగములగు u, $0 < u < 1$ అయినచో అవన్నియు $u = \frac{1}{2}$ గనే ఉండునని రీమాన్ ఊహించెను. ఈ ప్రసిద్ధ కల్పనకు ఉపపత్తి గాని, నిరాకరణము గాని నేటికిని తలచూపలేదు. ఈ యూహా సత్యమను ప్రమేయము నాశ్రయించి, అనేకములగు సిద్ధాంతములకు ఉపపత్తులు పొందుపరుపబడినవి. $u = \frac{1}{2}$ విలువగల $\zeta(s) = 0$ యొక్క మూలముల సంఖ్య అనంతమని హార్డీ రుజువుపరచెను.

ఈ క్రింది అంతరీకరణ సమీకరణములద్వారా రీమాన్ సంకీర్ణ చలరాశియొక్క ఫల సిద్ధాంతమునకు పునాదులు వేసెను.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ఈ సమీకరణమునందు $u(x, y)$, $v(x, y)$ ఒక సంకీర్ణ ఫలము యొక్క వాస్తవిక, కాల్పనికాంశములు అగుచున్నవి.

ఒక అంతరము (a, b) అత్యంతసూక్ష్మ అంతరములు (x_r, x_{r+1}) గా భావించబడినచో

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ను } \Sigma f(X_r)(x_{r+1} - x_r)$$

యొక్క అవధి అని నిర్వచించు చయనీకరణ సిద్ధాంతమునకు రీమాన్ చయనీకరణ సిద్ధాంతమని పేరు.

సంకీర్ణ చలరాశిని గురించిన ఫల సిద్ధాంతమందు $\sqrt{x}$ వంటి బహు మూల్యములు గల ఫలమును ఒక బహు పత్రిత తలముపై ఏక మూల్యముగల ఫలములగా నిరూపించు విధము రీమాన్ చూపెను. అట్టి తలములకు రీమాన్ తలములని పేరు. రీమాన్ ఒక నూతన యూక్లిడేతర జ్యామితిని ఆవిష్కరించెను. అందు సమాంతర రేఖలు లేవు. ఋజురేఖలు పరిమిత నిడుపు కలిగియుండును. డాక్టరేట్ పట్టమును సంపాదించు సందర్భమున రీమాన్

ఇచ్చిన పరీక్షోపన్యాసము, జ్యామితి ఉపష్టంభకములగు కల్పనలు. చారిత్రక ప్రసిద్ధిని గాంచిన ఈ ఉపన్యాసము అంతరీకరణ జ్యామితి అనుశీలన యందొక ఉపప్లవమును తెచ్చిపెట్టుటయే గాక, మన నాటి జ్యామితీకృత భౌతిక శాస్త్రమునకు దారితీసినది. దీనిని చూచినప్పుడు గౌస్‌కు పట్టరాని సంతోషము జనించినది. రీమాన్ యొక్క ఈ నిర్వాహము జ్యామితికి నూతన రూపము నాపాదించినది. ఇది యూక్లిడేతర జ్యామితి కాదు; ఇంతకన్న ఎక్కువ వ్యాపక గుణము కలిగిన ఇంకొక క్రొత్త భావము. ఈ జ్యామితిలో మానిఫోల్డ్ అనగా బిందువు అను పేరుగల వస్తువులయొక్క సమూహము. ఇందు ఒక బిందువనునది n సంఖ్య $(x_1, x_2, \dots \dots \dots x_n)$ లచే నిర్వచింపబడును. తరువాత నతడు $(x_r, x_r + \Delta x_r)$ అను బిందువుల మధ్యగల దూర వర్గమును నిర్వచించెను. ఈ వర్గభేదక వచన రూపక పదములలో ఆ మానిఫోల్డ్ యొక్క వక్రతను నిర్వచించెను. రీమాన్ నిర్వచించిన ఈ వక్రత, ఈ వక్రతను సాధించు పద్ధతి, సాపేక్షతా వాదములో భౌతిక వినియోగము నార్జించినవి. ఈ భావములు రీమాన్, క్రిష్టోఫెల్ టెన్సార్, రీమాన్ జ్యామితి అను పదములో గర్భితమై యున్నవి.

విద్యుద్గతిశాస్త్రమందు, వైద్యుతాయస్కాంతిక సిద్ధాంత మందు రీమాన్ కృషిచేసెను. కాని ఇది తరువాత మాక్స్వెల్ కృషిచే అతిక్రమించబడెను (చూ. రీమాన్ చయనము, రీమాన్ తలములు).

ఆ. న.

రీమాన్ చయనము: చయనీకరణము అంతరీకరణమునకు విలోమకర్మయని ఇదివరలోనే తెలిసికొంటిమి. కాని దానిని నిశిత మార్గమున విమర్శించుట ఆవశ్యకము. అందుకు రెండు మూడు మార్గములు కలవు. వానిలో రీమాన్ విధాన మొకటి. దీనికి డార్బో విధానమని కూడ నామము కలదు. నిశిత మార్గమును అవలంబించుట వలన ఉపపత్తి దురవగాహమయ్యెను. అయినను ఎక్కువ వ్యాపకత్వము చయనీకరణమునకు ఏర్పడి విజ్ఞాన శాఖలలో దీని ఉపయోగము ఎక్కువ అయ్యెను.

అవిచ్ఛిన్నత: చయనీకరణ యోగ్యమగు ప్రతి ఫలమును అవిచ్ఛిన్నత కలిగి యుండవలయును. ఏ అంతరాళములో చయనీకరణము సాధింపవలయునో, ఆ అంతరాళములో అవిచ్ఛిన్నత కావలయును. అనగా ఆ అంతరాళములో $y = f(x)$ ఫలము రెండు మర్యాదలు m, M మధ్య నుండవలయును. m కనిష్ఠ మర్యాదగను, M గరిష్ఠ మర్యాదగను తీసికొనుము. ఒక ఫలము విచ్ఛిన్నమగు చోట ఫలము మర్యాదితమై యుండదు.

$y = \frac{x}{a-x}$ తీసికొందము. x యొక్క విలువ a ను సమీపించిన, y యొక్క విలువ అత్యధికమై అనంతమును సమీపించును. కాబట్టి y యొక్క చయనీకరణము $x = a$ వద్ద చేయకూడదు.

ఫలము $y = 400 - 32x$ తీసికొనుము. ఒక రాకెట్‌ను సెకనునకు 400 అడుగుల ద్రుతితో ప్రేల్చినపుడు, x సెకనులలో దాని ద్రుతి (స్పీడ్) సెకనునకు $400 - 32x$ అడుగులు. మొదటి సెకనులో దాని ద్రుతి 368 అడుగులు, ఆరవ సెకనులో 208 అడుగులు; కాబట్టి $x = 1$ నుండి 6 సెకనుల కాలములో y యొక్క విలువ 368 నుండి 208 మధ్య నుండును. y యొక్క అధమ మర్యాద 208, గరిష్ఠ మర్యాద 368. (1 అడుగు = 0·305 మీటరు)

చయనీకరణము: అంతరాళము 1—6 ను మూడు తుండ్లగా 2, 3 వద్ద చేయుదము. అపుడు అంతరాళముల ప్రమాణము 1—2, 2—3, 3—6. వీనిని 1_1, 1_2, 1_3 అని తీసికొనిన, y ఈ మూడు ఉపాంతరాళములలో కూడ మర్యాదితమై ఉండవలయును.

	అధమ మర్యాద (m)	గరిష్ఠ మర్యాద (M)
1_1	336	368
1_2	304	336
1_3	208	304
ప్రధానాంతరాళము	208	368

ప్రతి ఉపాంతరాళము నందును y మర్యాదితమై యున్నది. ఇపుడు ప్రధానాంతరాళము 1—6 ను సమానములు కాని n భాగములు $i_1, i_2 \dots \dots i_n$ గా విభజింతము. i_1 లో y యొక్క అధమ మర్యాద m_1; గరిష్ఠ మర్యాద M_1. ఇట్లే i_k లో y యొక్క అధమ మర్యాద m_k, గరిష్ఠ మర్యాద M_k అని తీసికొనుము. $y = 400 - 32x$, ఒక ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము. ఇది $y = f(x)$ యొక్క సులభరూపము. మనము $f(x)$ ను వ్యాపకరూపకములో తీసికొందము. మనము $\int_1^6 y\,dx = \int_1^6 f(x)\,dx$ యొక్క విలువ కనుగొనవలయును. ఇది

$x = 1$, $x = 6$, x— అక్షము

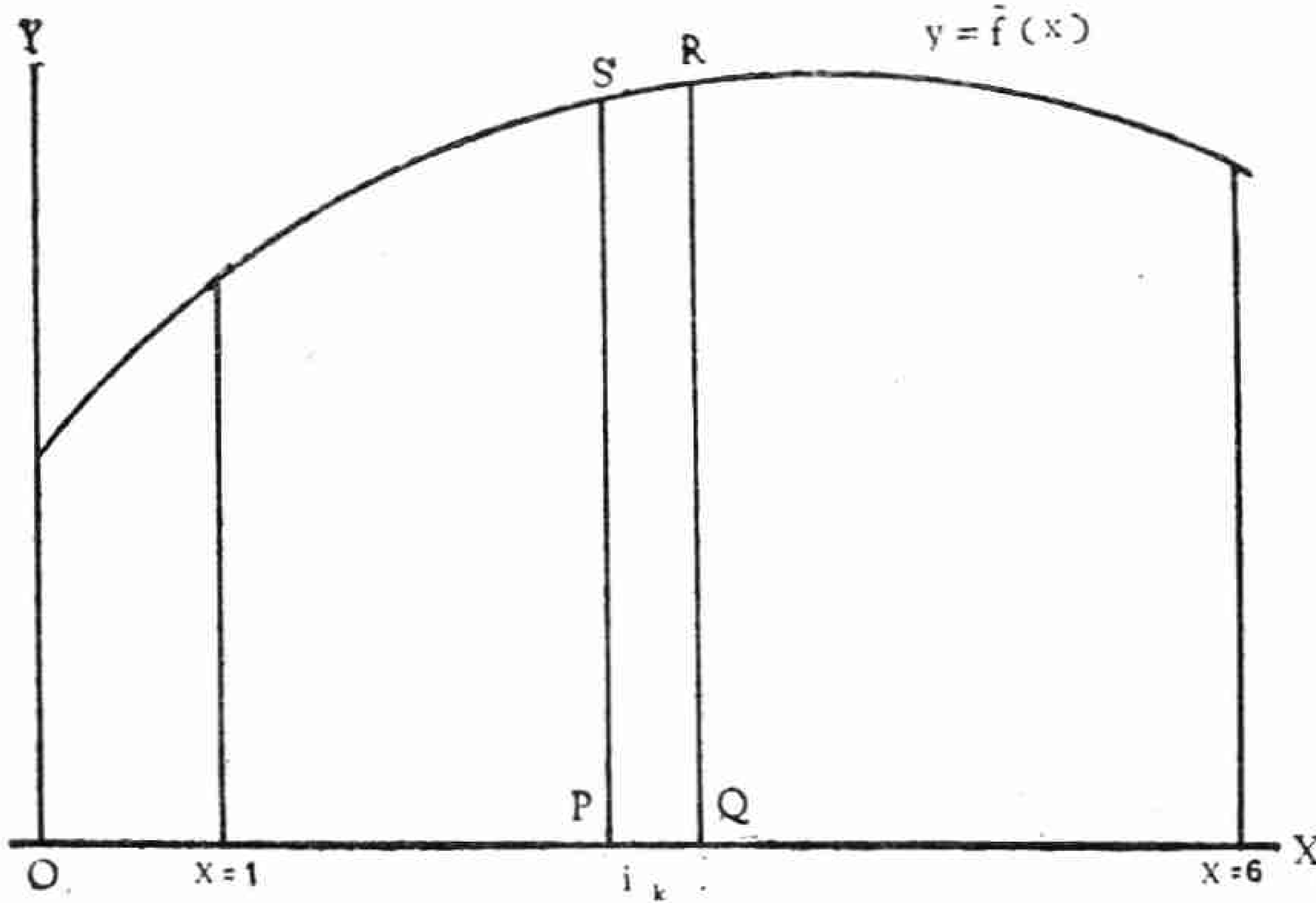
$y = f(x)$ వక్రమునకు మధ్యనుండు వైశాల్యమును గుర్తించును. చిత్రము 329 - (పు. 476) లో

ఉపాంతరాళము i_k (PQ) ను x - అక్షములో గుర్తింపనిమ్ము. PS, QR కోట్లను (ఆర్డినేట్స్) గీయుము.

i_k లో $f(x)$ యొక్క అధమ మర్యాద m_k, గరిష్ఠ మర్యాద M_k, అయినచో

$$m_k \cdot i_k < PQRS < M_k\, i_k$$

ఇట్లే అన్ని ఉపాంతరాళములకును కనుగొనుము.



చిత్రము 329

అధమ సంకలన రాశి $= m_1 i_1 + m_2 i_2 + \cdots + m_n i_n = s$
గరిష్ఠ సంకలనరాశి $= M_1 i_1 + M_2 i_2 \cdots + M_n i_n = S$

అంతరాళము 1—6 ను ఎట్లు విభజించినను, ప్రతి విభజనకు ఒక అధమ సంకలనరాశి s, ఒక గరిష్ఠ సంకలనరాశి S కలదు. వీనికి డార్బో సంకలన రాశులని పేరు.

ఇపుడు విభజన సంఖ్య n యెక్కువచేసి, ఉపాంతరాళములలో పెద్దది కూడ శూన్యమును అవధిగా నుండునట్లు చేయుదము.

ఉపాంతరాళములు ఈ విధమున చిన్నవి లేదా అత్యల్పములు అగునపుడు సంకలనరాశులు s, S యొక్క విలువలు రెండు నిశ్చిత విలువలు l, L అగును. ఇట్లు చూపుటకు ఉపపత్తి కలదు. అది కొంత కఠినమగుటచే ఇందు వివరింపబడలేదు. ఈ రెండు అవధులు l, L సమానములైన, ఆ సమాన విలువ $\int_1^6 f(x)\, dx$ యొక్క విలువకు సమానమగును.

$f(x)$ అవిచ్ఛిన్నఫలమైన, డార్బో సంకలనరాశులు l, L రెండును సమానములని చూపవచ్చును.

గమనిక: ఇదివరలో చయనీకరణము, అంతరీకరణము ప్రతిఫలమునకు కలదని తలచుచుండిరి. కాని 100 సంవత్సరములకు పూర్వము కొన్ని అవిచ్ఛిన్న ఫలములు చయనీయములైనను, అంతరీకరణీయములు కావని చూపబడెను. తర్వాత కొన్ని మర్యాదిత అంతరీకరణీయ ఫలములు చయనీకరణీయములు కావని నిరూపింపబడెను (చూ. రీమాన్). ఆచార్య

రీమాన్ తలములు (బహురూప ఫలములు): ఇదివరలో ఏక మూల్య ఫలములను గురించి విమర్శించియుంటిమి. $y = x^2$; $y = f(x)$ దీనికి ఉదాహరణములు. చలరాశి x యొక్క ప్రతి విలువకు y కి ఎల్లప్పుడును ఒక్క విలువ ఏర్పడును. ఇట్టి ఫలములకు ఏక మూల్య ఫలములని పేరు. $y^2 = x$ తీసికొనిన, x యొక్క ప్రతి విలువకు y యొక్క విలువలు రెండు. గణితమునందిట్టి ఫలము లనేకములు కలవు.

$y^n = x$ తీసికొనిన, x యొక్క ప్రతి విలువకు y కి n విలువలు కలవు. డీమాయర్ సిద్ధాంతముప్రకారము

$y^n = x\,(\cos 2r\pi + i \sin 2r\pi)$ అని వ్యాపక రూపములో గుర్తించిన, $y = x^{1/n}\left\{\cos\frac{2r\pi}{n} + i \sin\frac{2r\pi}{n}\right\}$ ఇచ్చట $r = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$. కాబట్టి y యొక్క విలువలను $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ గుర్తింపవచ్చును.

$y^n = x$ ను బహు మూల్యఫలము లేదా బహు రూప ఫలము అని చెప్పుదుము.

$y = x^2$ ను ఏకమూల్య లేదా ఏకరూప ఫలము అని చెప్పుదురు. $y^2 = x$ తీసికొనిన $y_1 = +\sqrt{x}$, $y_2 = -\sqrt{x}$ అని రెండు విలువలు వచ్చును. ఇచ్చట x ధనాత్మకమై యుండవలయును. రెండు ఫలములు అవిచ్ఛిన్నములు. వానికి రెండు విధములైన సంబంధములు కలవు: (a) అవి రెండును ఒకే సమీకరణమునకు చెందినవి. (b) ఒక ఫలము నుండి రెండవ ఫలమునకు మార్పు కలదు. $y_1(0) = y_2(0)$; $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ తీసికొనిన $(y - x)(y - x^2) = 0$ అనగా $y^2 - y(x + x^2) + x^3 = 0$. ఇవి రెండు $x = 0$ వద్ద చేరియుండును. వీనిని ఒక ఫలము యొక్క రెండు శాఖలన వచ్చునా?

మరియొక ఉదాహరణము:

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 - \sqrt{x} & \text{అకరణీయమయిన} \\ y_2 - \sqrt{x} & \text{కరణీయమయిన} \end{cases}$$

ఇవి $y^2 = x$ సమీకరణమును తృప్తిపరచును.

ఇకను అనేక ఏకమూల్య ఫలములు $x \geq 0$ అయినపుడు $y^2 = x$ సమీకరణమును తృప్తిపరచును. ఇచ్చట ఫలములు అవిచ్ఛిన్నములు కావు.

మొదట తీసికొనిన ఫలములు $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = -\sqrt{x}$ మాత్రము అవిచ్ఛిన్నములై యుండడము కాక, ఒకటితో మరియొకటి జతపడియున్నవి. వాస్తవిక చలరాశుల విమర్శించినపుడు ఇష్టము వచ్చిన రెండు ఫలములను జత చేర్చి ద్విమూల్య అవిచ్ఛిన్న ఫలముగా చూపవచ్చును. ఏక

మూల్య ఫలములకును, బహు మూల్యఫలములకును గల వ్యత్యాసము వాస్తవిక చలరాశులతో తృప్తికరముగా నిశ్చయించుటకు వీలు కాదు.

కాని సంకీర్ణ చలరాశులతో ఈ విమర్శ తృప్తికరముగా చేయవచ్చును. ప్రతి చలరాశి $z = x + iy = re^{i\theta}$ అని ప్రదర్శింపవచ్చును.

ఇపుడు $r = |\sqrt{x^2 + y^2}|$; $\tan\theta = \frac{y}{x}$;

$u = R\, e^{i\phi}$ అని తీసికొనుము.

$u^2 = z$ ఫలము తీసికొనిన, $R^2 e^{2i\phi} = r e^{i\theta}$.

ఒక దత్త విలువ r కు $\theta < 2\pi$ అయినపుడు రెండు విలువలు కలవు. అవి ఏవన,

$$u_1 = |\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}};\quad u_2 = |\sqrt{r}|\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -|\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

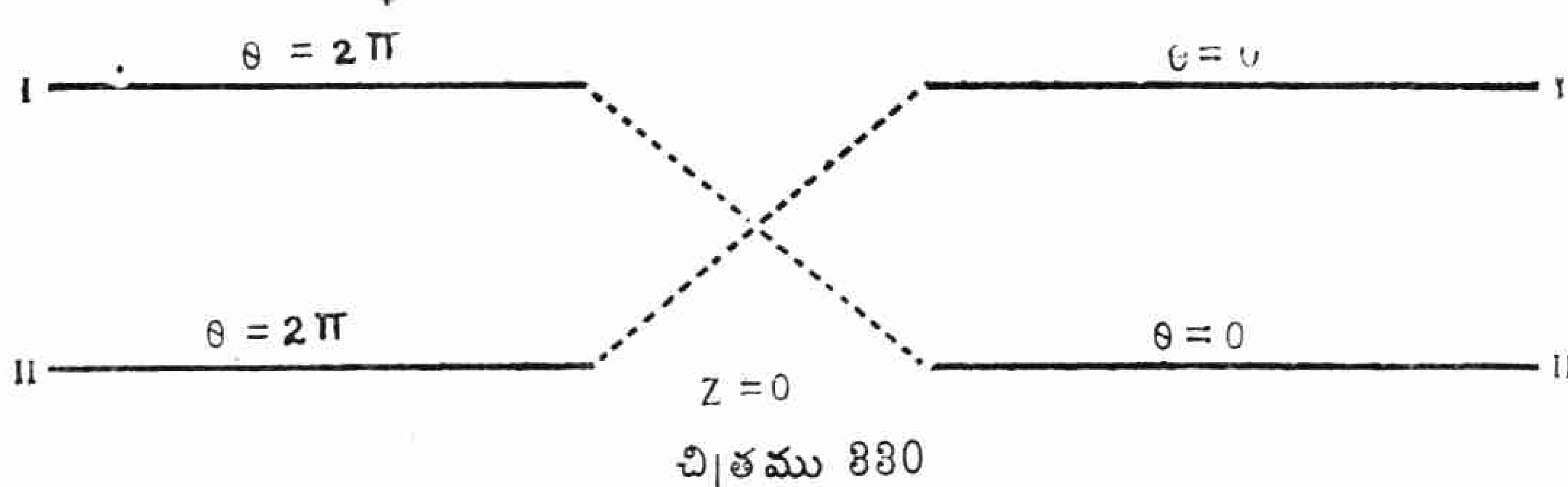
అవి అవిచ్ఛిన్న ఫలములు.

z యొక్క విలువలు ధన వాస్తవికములయిన, అనగా $\theta = 0$ అయినపుడు $u_1 = |\sqrt{r}|$, $u_2 = -|\sqrt{r}|$. ఇచ్చట u_1, u_2 ఫలములు z యొక్క ఏకరూప ఫలములు. అవి అవిచ్ఛిన్నములు. ఈ ధర్మము z యొక్క ప్రతి విలువకు అనువర్తించును.

θ యొక్క విలువ 0 నుండి 2π వరకు మారునపుడు, అనగా చలరాశి z, r వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తము వెంబడి పోవునపుడు, u_1 యొక్క విలువల మార్పును గమనింతము.

$e^{i\theta}$ ఫలము, θ యొక్క అవిచ్ఛిన్న ఫలమైనందున, దాని అవసాన విలువ $|\sqrt{r}|\, e^{i\pi} = -|\sqrt{r}| = u_2$.

జాగ్రత్తగా పరిశీలించునపుడు ధన వాస్తవికాక్షమును దాటునపుడు u_1 యొక్క విలువ విరుద్ధ చిహ్నములతో నుండును. మూలబిందువువద్ద మాత్రము u యొక్క విలువ శూన్యము. అదియును గాక ధన వాస్తవికాక్షము వెంబడి u_1, u_2 లు రెండును చేరియుండును. అట్లుండుటచే మూలబిందువు చుట్టు z మొదటి ప్రదక్షిణము చేసినప్పుడు u_1 ఫలము u_2 గా మారును; రెండవ ప్రదక్షిణము పూర్తి అయినపుడు u_2 మరల u_1 గా మారును.



చిత్రము 830

$u_1 = |\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ తీసికొనుము.

θ యొక్క విలువ θ నుండి $2\pi + \theta$ గా మారినపుడు

$$u_1 = |\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}+\pi} = -|\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}} = u_2$$

θ యొక్క విలువ θ నుండి $4\pi + \theta$ గా మారినపుడు

$$u_1 = |\sqrt{r}|\, e^{i\frac{\theta}{2}+2\pi} = u_1.$$

పూర్తి సంకీర్ణతలములలో $u^2 = z$ సమీకరణమునకు అవిచ్ఛిన్న ఏక మూల్య సాధనము లేదు. కాని వాస్తవముగా, θ యొక్క విలువ $\theta + 2\pi$ గా మారునపుడు u_1 అవిచ్ఛిన్నముగా u_2 గా మారును. అందుచే ఇదివరలో u_1 కు అవిచ్ఛిన్నత కలదని తలచుట కృత్రిమ కార్యము. కాబట్టి సమీకరణము $u^2 = z$ నకు ఒక అవిచ్ఛిన్న సాధనము కలదు. అది అసదృశమైనది. ద్విమూల్య ఫలము.

ఇపుడు $u^2 - \{f(z) + g(z)\}\, u + f(z)\, g(z) = 0$ తీసికొనుము. $f(z)$, $g(z)$ అవిచ్ఛిన్న ఏకమూల్య ఫలములు. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ విలువలకు $u_1 = f(z)$, $u_2 = g(z)$ అని తీసికొనుము. మూలబిందువు చుట్టు z ఒక వృత్త పరిధి వెంబడి చలించిన, $\theta = 2\pi$ అయినపుడు, u_1 యొక్క విలువ u_1 గా నుండును. u_2 లో మార్పు ఉండదు. అనగా u_1, u_2 ఫలములు ధన వాస్తవికాక్షము వెంబడి అతుకుకొనలేదు.

అవిచ్ఛిన్నత సంబంధముగా u_1, u_2 ఫలములు వేరు వేరుగా అవిచ్ఛిన్న ఫలములుగా సంకీర్ణతలమంతటను ఏకమూల్యములుగా నుండును.

రీమాన్ తలములు : $u = \sqrt{z}$ సంబంధము యొక్క శుద్ధమగు జ్యామితీయ ప్రదర్శనమునకు రెండు సంకీర్ణతలములు I, II తీసికొనుము. $u_1(z)$ యొక్క విలువలు తలము I లోను, $u_2(z)$ యొక్క విలువలు తలము II లోను ప్రదర్శింపబడనిమ్ము.

ధనవాస్తవికాక్షము వెంబడి $u_1(z)$, $u_2(z)$ రెండును అవిచ్ఛిన్నములు ; కాని I యొక్క క్రింది అంచు అనగా అవలంబము వెంబడి 2π అయినపుడు $u_1 = u_2$; II లో క్రింది అంచు వెంబడి $u_2 = u_1$. కాబట్టి రెండు సంకీర్ణ తలముల ధన వాస్తవికాక్షము వెంబడి అనగా 0 నుండి ∞ వరకు కత్తిరించి, I యొక్క క్రింది అంచును II యొక్క పై అంచునకును I యొక్క పై అంచును II యొక్క క్రింది అంచునకును చేర్చుము.

I, II తలములలోని మార్పు చిత్రము 830 లో చూపబడినది. $z = 0$ చుట్టు ఒకసారి తిరుగుటకు $z = re^{i\theta}$

వృత్తము వెంబడి వెళ్ళును. $\theta = 0$ అయినపుడు మనము I తలములో నుందుము. $\theta = 2\pi$ అయినపుడు అనగా, ఒక పూర్తి ప్రదక్షిణము అయినపుడు, తలము I లో నుండి తలము II నకు మారుదుము. తర్వాత θ యొక్క విలువ 2π నుండి 4π వరకు అధికమయినపుడు మూలబిందువు O చుట్టు II తలములో ఒక పూర్ణప్రదక్షిణము చేసి, తర్వాత II తలము నుండి I తలమును చేరుదుము. కాబట్టి $u_1(z)$, $u_2(z)$ యొక్కవిలువలు పరస్పరము మారునపుడు z మూలబిందువు చుట్టు ఒక పూర్తి ప్రదక్షిణము చేయవలయును. కాబట్టి మూలబిందువును శాఖాబిందువు అని చెప్పుదురు.

$u = \log z$ తీసికొనుము. ఇచట $z = re^{i\theta}$ అని తీసికొనినచో $u = \log r + i(\theta + 2n\pi)$

$n = 0$ అయినపుడు, θ స్థిరరాశి అయిన, $r > 0$ విలువలకు $u = \log r + i\theta$; u ఒక అవిచ్ఛిన్న రాశి.

$\theta = 0$ అయిన, $u = \log r$. ఇది సాధారణ ఫలము. $r = 0$ అయినపుడు $u = -\infty$, ఈ విలువ దగ్గరకు మనము వెళ్ళకూడదు. θ యొక్క విలువ 0 నుండి 2π అయినపుడు $u = \log r + i(\theta + 2\pi)$

z బిందువు మూలబిందువు చుట్టు r వ్యాసార్ధము గల వృత్తము వెంబడి చుట్టుచుండిన θ యొక్క విలువ ప్రతి చుట్టునకు 2π అధిక మగును.

కాబట్టి u యొక్క విలువలు క్రమముగా $\log r$, $\log r + 2\pi i$, $\log r + 4\pi i$, $\log r + 6\pi i$, ... ఒకటి నుండి ప్రక్క విలువకుమారును.

n యొక్క విలువలను ఋణాత్మకముగా గూడ తీసికొనవచ్చును. u లోని మార్పులను చిత్రము 331 గుర్తించును.

$u^6 = z^3(z-1)$ తీసికొనుము. u ఒక షణ్మూల్యఫలము $z = 0, z = 1, z = \infty$ శాఖాబిందువులు. $z = 0$ వద్ద మూడు ఆవర్తనములు, $z = 1$ వద్ద ఒక ఆవర్తనము, $z = \infty$ వద్ద 2 ఆవర్తనములు ఏర్పడును.

$z = re^{i\theta}$; $z - 1 = Re^{i\phi}$ అని తీసికొనుము.

$$u = r^{\frac{1}{2}},\ R^{\frac{1}{6}},\ e^{i\frac{\theta}{2}},\ e^{i\frac{\phi}{6}}$$

ఒకటి యొక్క ఆరు మూలములను వరుసగా

$$1,\ e^{\frac{2\pi i}{6}},\ e^{\frac{4\pi i}{6}},\ e^{\frac{6\pi i}{6}},\ e^{\frac{8\pi i}{6}},\ e^{\frac{10\pi i}{6}};$$

వీనిని క్రమముగా $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$ అని తీసికొనిన $u_k = \epsilon_k u$ అని ఏర్పడును. ఇచ్చట k యొక్క విలువలు 1 నుండి 6 వరకు వెళ్లును. $r < 1$ అని అనుకొని θ యొక్క విలువలు మాత్రము 0 నుండి 2π, 4π, 8π, 10π వరకు అధికము కానిమ్ము. ϕ యొక్క విలువలలో మార్పులేదు :

$$u_1(r, 0) = u_1 = r^{\frac{1}{2}} . R^{\frac{1}{6}} . e^{i\frac{\phi}{6}}$$

$$u_1(r, 2\pi) = r^{\frac{1}{2}} . R^{\frac{1}{6}} . e^{\pi i} . e^{i\frac{\phi}{6}}$$

$$= -r^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\phi}{6}} = -u_1$$

$$= \epsilon_4 u_1 = u_4(r, 0)$$

$$u_4(r, 2\pi) = r^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{6\pi}{6} + i\frac{2\pi}{2}} e^{i\frac{\phi}{6}}$$

$$= r^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\phi}{6}} = u_1 ;$$

కాబట్టి u_1, u_4 తలములకు పరివర్తనము కలుగును. అట్లే u_2, u_5 ; u_3, u_6 తలములకు పరివర్తనము కలుగును.

ఇచట తలములలో 3 వేరు వేరు ఆవర్తనలు కలవు

$z = 1$ వద్ద;

$u_1 \longrightarrow u_2$;
$u_2 \longrightarrow u_3$;
$u_3 \longrightarrow u_4$;
$u_4 \longrightarrow u_5$;
$u_5 \longrightarrow u_6$;
$u_6 \longrightarrow u_1$

మార్పులు ఏర్పడును.

చిత్రము 331

ఇచట 2^3 ఆవర్తనములు మాత్రము కలవు.

ఈ విషయము పరిశీలించుటకు

θ స్థిరరాశిగా అనుకొని, ϕ లోని మార్పులను గుర్తించవలయును.

$z=\infty$ వద్ద మార్పులను గుర్తించుటకు $z=\frac{1}{v}$ అని తీసికొనుము. z తలములో అనంత బిందువు v తలములో $v=0$ బిందువునకు అనురూప మగును.

అపుడు $u_6 = \frac{1-v}{v^4}$; $v=0$ కేంద్రముగా వ్యాసార్ధము $\rho<1$ తీసికొనుము. $v=\rho e^{i\alpha}$ ఆవృత్తము వెంబడి పూర్తిగ జరిగినపుడు $(1-v)^{\frac{1}{6}}$ పూర్వస్థానమునుపొందును. కాబట్టి శాఖల పరివర్తనము $(v^{-4})^{\frac{1}{6}}$ చే నిశ్చయింపబడును. పరివర్తనముల పరిశీలించిన u_1, u_5, u_3 శాఖాదళములు పరివర్తనము చేయును.

అట్లే u_2, u_4, u_6 పరివర్తనము పొందును.

చిత్రము 332 లో ఈ విషయములు ప్రదర్శింపబడును :

చిత్రము 332

$z=0$ వద్ద పరివర్తనములు $[u_1 \longrightarrow u_4]$; $[u_2 \longrightarrow u_5]$; $[u_3 \longrightarrow u_6]$

$z=1$ వద్ద పరివర్తనములు

$u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow u_3 \longrightarrow u_4 \longrightarrow u_5 \longrightarrow u_6 \longrightarrow u_1$

$z=\infty$ వద్ద పరివర్తనములు

$[u_1 \longrightarrow u_5 \longrightarrow u_3]$; $[u_2 \longrightarrow u_6 \longrightarrow u_4]$ ఆచార్య

రెండవ తరగతి సమీకరణము

రెండవ తరగతి సమీకరణము (క్వాడ్రాటిక్ ఈక్వేషన్) : ఏకచలరాశిలోని రెండవ తరగతి సమీకరణము $ax^2+bx+c=0$ అను రూపములో ఉండును. ఇందు x చలరాశి. a, b, c లు ఈయబడిన స్థిర సంఖ్యలు ; a విలువ శూన్యము కాదు.

ఇటువంటి సమీకరణములను సాధించు విధములను సంగ్రహించెదము.

విభాజకీకరణము ద్వారా మూలములు : ఉదా : $x^2-11x+18=0$ సమీకరణములోని ఎడమచేతివైపు సమాసమును విభాజకీకరణముచేసి, $(x-2)(x-9)=0$ అని వ్రాయవచ్చును.

రెండు సంఖ్యల గుణకార లబ్ధము శూన్యము అగునప్పుడు వాటిలో ఏదో ఒకటియైన శూన్యము. కావలయును. $x-2=0$ అనుకొనిన $x=2$ అగును. లేదా $x-9=0$ అనుకొనిన $x=9$ అగును. x కు 2 గాని, 9 గాని పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినచో సరిపోవుచున్నవి. కాబట్టి దాని మూలములు 2, 9 అగును.

కాని, ax^2+bx+c ను సులభముగ విభాజకీకరణము చేయగల్గినప్పుడు మాత్రమే పై పద్ధతి ఉపయోగపడును.

సూత్రము ద్వారా మూలములు : $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలములను

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

($b^2-4ac\geq 0$ అయినప్పుడు)

లేదా

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

($b^2-4ac<0$ అయినప్పుడు)

పై సూత్రములలో a, b, c విలువలను ప్రతిక్షేపించి కనుగొనవచ్చును.

ఉదా : $x^2-11x+18=0$ నే మరల తీసికొనిన ఇందు $a=1$, $b=-11$, $c=18$, $b^2-4ac=49$. వీటిని పై సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(1)(18)}}{2(1)}=\frac{11\pm 7}{2}$$

అనగా $x=\frac{11+7}{2}=9$ లేదా $\frac{11-7}{2}=2$. విభాజకీకరణము ద్వారా కూడ ఈ మూలములే వచ్చినవి గదా!

$x^2-2x+2=0$ అను సమీకరణమును మనము విభాజకములుగ విడగొట్టలేము. దానిని సాధించుటకు పై రెండవ సూత్రమును ఉపయోగించవలెను.

ఇచ్చట $a=1$, $b=-2$; $c=2$; $b^2-4ac=-4$.

కాబట్టి $$x=\frac{-(-2)\pm i\sqrt{4(1)(2)-(-2)^2}}{2(1)}$$

$$=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

ఈ సమీకరణము యొక్క రెండు మూలములు $x=1+i$; $x=1-i$. వీటిని $x^2-2x+2=0$ లో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడవచ్చును. పా. ల. నా.

రేడియో ఖగోళశాస్త్రము : బెల్ టెలిఫోన్ పరిశోధనాగారములందు పనిచేయుచున్న కార్ల్, జి. జాన్స్కీ అను యంత్ర శాస్త్ర నిపుణుడు రేడియో ప్రసారమును కలవరపరచెడు ధ్వని సంక్షోభ స్వభావమును అనుశీలించుచున్న తరిని, సాధారణ ప్రభవస్థానములకు చెందని నిరంతర, స్వల్ప, ఏకరూప ఇస్సాకారధ్వనియొకటి వినపడుచుండెనని 1932 లో ప్రకటించెను. కొనకది దూరాకాశము నుండి వచ్చుచున్న రేడియో తరంగముల వలని సంక్షోభమని అతడు నిశ్చయించెను.

దూరాకాశమునుండి వచ్చుచున్న ఈ రేడియో సంకేతములు సూర్యుని దిక్కునుండి మిక్కిలి బలముతో వచ్చుచున్నట్లు తొలిని అగపడినది. కాని రోజు రోజునకు ప్రసారదిశ మారుచున్నట్లు, అది ఆకాశమంతట తిరుగుచున్నట్లు జాన్స్కీ కనిపెట్టెను.

1933 నాటికి క్షీరపథము (మందాకిని) నుండి, ముఖ్యముగా, ధనూరాశి దిక్కునుండి ఈ తరంగములు భూమిని చేరుచున్నట్లు జాన్స్కీ కనుగొనెను. రేడియో ఖగోళశాస్త్రమిట్లు ఉద్భవించినది.

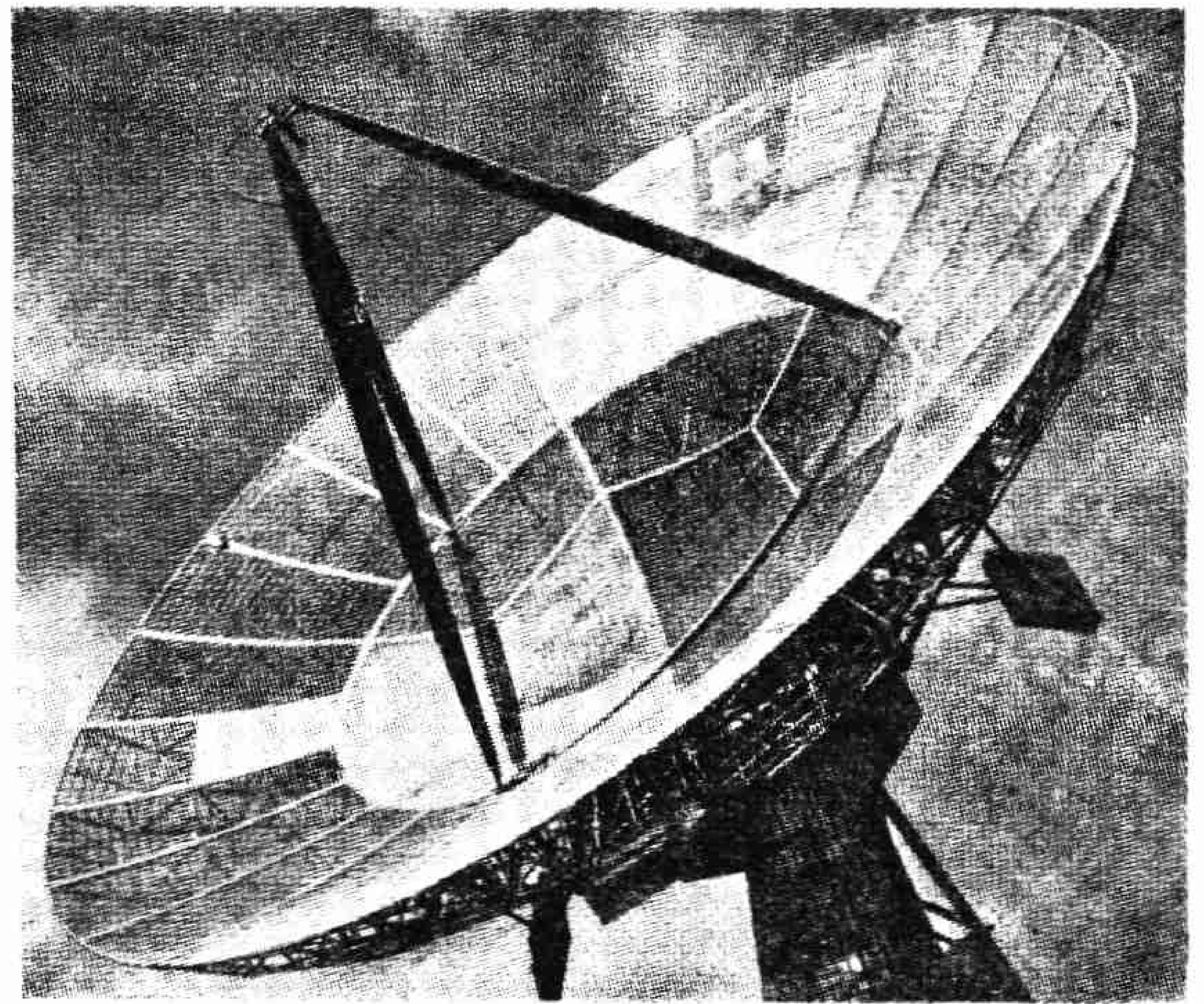
ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులు ఈ నూతన శాస్త్రమును వెంటనే ఆదరించలేదు. దీని కనేక కారణములుండెను. మొట్టమొదట ఈ రేడియో తరంగములు స్పష్టమైన చిత్రముల నీయక, అస్పష్టమైన గీతల నిచ్చినవి. రెండవ కారణము నక్షత్రములవంటి అల్ప పరిమాణము గల ప్రభవస్థానమును మనకు విశ్లేషించి చూపుటకు వీలులేనంత పొడవులు గలవి ఈ దూరాకాశ రేడియో తరంగములు. ఇవి కాంతి తరంగములకన్న కొన్ని కోట్ల రెట్లు పొడవులు గలవి. అందువలన సామాన్య రేడియో గ్రాహక మేదియు ఆ తరంగములు వచ్చుచున్న దిశను గురించిన సమాచారము తప్ప ఇంకేమియు మనకందజేయనేరదు.

కాని ఖగోళ రేడియో తరంగానుశీలనాభినివిష్టుడగు గ్రోట్ రీబర్ అను నొక యువకుడు ఉత్సాహపూరితుడై తన ఇంటి పెరటియందు పళ్లెము ఆకారము గల ఒక చిన్న రేడియో దూరదర్శినిని 1938 లో నిర్మించి, ధనూ రాశిలో నున్నవి కాక మరి కొన్ని తరంగ ప్రభవ స్థానముల గుర్తించెను. సైగ్నస్ తారాగణములో నొకటి, కేసియోపియాలో నింకొకటి అతనికి గోచరించెను. ఇవి వాస్తవముగ తారలైనను, కాకపోయినను ఇట్టి ప్రభవ స్థానముల కీనాడు 'రేడియో తారల' ని పేరు.

రెండవ ప్రపంచ మహా సంగ్రామ కాలమందు బ్రిటిషు శాస్త్రజ్ఞులు రేడార్ పరికరమును అభివృద్ధిపరచు సందర్భములో మైక్రోతరంగముల తరగతిలో (1 మీటరు పొడవు) తరంగముల పంపుచున్న సూర్యుడు ఈ అనుశీలన కడ్డు తగులుచున్నట్లు కనుగొనిరి. యుద్ధము తరువాత బ్రిటిషు శాస్త్రజ్ఞులు సూర్య గోళ ధ్వనుల పరిశీలన కొనసాగించిరి. సూర్యమండలమందు పర్యాయముగ (11 ఏండ్ల కొకతూరి) కన్పట్టు కళంకముల ఉద్రేకమునకు, రేడియో ధ్వనులకు సంబంధమున్నదని తెలిసినది (మచ్చల హడావిడి చాల తక్కువగనున్న దశలో జాన్స్కీ అన్వేషణ జరుగుటచే క్షీరపథవికిరణమునే ఆయన గుర్తించగలిగెను గాని, సూర్య తరంగముల పట్టలేక పోయెను).

బ్రిటిషు శాస్త్రజ్ఞులు తరంగ గ్రహణమును నిశితముగా జేయుటకును, రేడియో తారల గుర్తించుటకును పెద్ద పెద్ద ఆకాశకముల నిర్మించుటలో లోకమునకు మార్గదర్శకులైనారు. 250 అడుగుల (76 2 మీ.) వ్యాసము గల పళ్లెపు గ్రాహకమును జోడ్రెల్ బ్యాంకువద్ద వారు నిర్మించిరి. ఇది నేడు ప్రపంచమునకెల్ల పెద్దది.

సిడ్నీ (ఆస్ట్రేలియా), హ్యూమైన్ రోషిఫర్ట్ (బెల్జియమ్), పెంటిక్టన్ (పశ్చిమ కెనడా), కేంబ్రిడ్జ్, జాడ్రెల్ బ్యాంక్,



చిత్రము 333 హార్వర్డ్‌లోని రేడియో దూరదర్శిని

మాల్వెర్న్ (ఇంగ్లండ్), మ్యేదో (ప్యారిస్ వద్ద), హాట ప్రావెన్స్ (దక్షిణ ఫ్రాన్స్), బెర్లిన్, అల్డర్స డార్ఫ, బాన్, ఫ్రైబర్గ్, కీల్ పాట్స డామ్, టిబింజన్ (జర్మనీ), నగోయా, టోక్యో (జపాన్), లెయ్‌డెన్, యుట్రెచ్‌ట్, గ్రనింగన్ (నెదర్లాండ్సు) మొ. నగరములలో అమెరికా, బురాకన్, మాస్కో (రష్యా), మున్నగు దేశములలో రేడియో దూరదర్శనులు నెలకొలుపబడినవి. పలుచోట్ల విరివిగా సాగుచున్న పరిశోధనల పర్యవసానముగ విశ్వాకాశములో మునుపటివి కాక రేడియో తరంగముల ప్రభవ స్థానము లనేకములు గుర్తించబడినవి.

కర్కాటక గణమందున్న తేజోమేఘ మొకటి సైగ్నస్, కాసియోపియాల తరువాత మూడవ ప్రభవ స్థానము. ఇంతేకాదు, క్షీరపథమధ్యమ ప్రదేశమునుండి ప్రసరించు సంకేతములు ఆ దిక్కున ఉన్న వాయు మేఘములనుండి రావచ్చును. సంక్షోభము చెందుచున్న వాతావరణములు గల గురు శుక్ర గ్రహములు కూడ ప్రభవ స్థానములని తెలిసినది. ఈ చక్కి నింకను కాసియోపియా గణములలో నున్న 'కాస్' అను పేరు గల రేడియో తారనుండి ప్రబలతమమగు ప్రసారము వెలువడుచున్నదని రుజువైనది. బ్రిటిష్ రేడియో దూరదర్శని వలన స్థాన నిర్దేశము చేయబడిన ఆకాశ భాగమువైపు పాలమార్ 200-అంగుళముల దూరదర్శనిని త్రిప్పగా ఆ స్థానమందు సంక్షుబ్ధ వాయురేఖలగుపడినవి. ఇవి కాసియోపియాలో ఇదివరకు 1604 లో కెప్లర్ చూచిన సూపర్నోవా అవశేషములు కావచ్చును. ఇంత దనుక అత్యాశ్చర్యకరమైన ఆవిష్కరణ 1951 లో చేయబడినది. సైగ్నస్ తారాగణములలో రెండవ ప్రబలతమమైన రేడియో ప్రసారక తార ఉన్నదని నిశ్చయించబడినది. తరువాత మరింత నిశిత పరిశోధనలో ఈ రేడియో తార మన పాలపుంతకు వెలుపల నున్నట్లు తెలిసినది. ఈ నిర్దిష్ట ఆకాశ భాగమును 200-అంగుళముల దూర దర్శనితో పరిశీలించగా ఒక వింత పాలపుంత బయట పడినది. దీనికి రెండు కేంద్రములుండుటయే కాక, దాని ఆకారము అతి వికృతమైనట్లు కానవచ్చినది. ఈ వికృత ద్వికేంద్ర క్షీరపథము ఒకచే కాదనియు, ఇది తాళపు చిప్పలు కలసికొనినట్లు సమ్మిళితమైన రెండు వేరు వేరు క్షీరపథముల సంఘట్టనమనియు తెలిసినది.

కాని ఈ విషయ మిదమిత్థమని నిష్కర్షించుటకు తరువాత నొక యేడాది పట్టినది. ఆ రెండు పాలపుంతల ధూళి, వాయు రాశులు తలకు తల పరస్పర ప్రబల సంఘర్షణమునకు తలపడినవి అనుకొనిననే గాని, దూరదర్శనితో కలిపిన వర్ణమాలాదర్శనిలో అగపడ్డ విచూషణ రేఖల వివరించుట సాధ్యము కాలేదు. ఇంతేగాక క్షీరపథ సంఘర్షణలు ముఖ్యముగా సాంద్ర గుచ్ఛములలో చాల సామాన్య సంభవములని ఆలోచించవలసి వచ్చినది.

రెండు పాలపుంతలు తలకు తల ఢీకొనినపుడు అందుండు తారలు పరస్పర సమ్మర్దనకు లోనుగావు. ఏలన, ఈ పాలపుంతలు అపార విస్తారము గలవి యగుటచే అందుండు తార లెప్పుడును సన్నికృష్టములు కాకుండ క్షీరపథములు మాత్రము ఒకదాని నొకటి ప్రవేశించగలవు. సైగ్నస్ (హంస) రాశిలో సంఘర్షించుచున్న క్షీర పథములు మనకు 2300 లక్షల కాంతి సంవత్సరముల దూరములోనున్నవి. కాని వీటినుండి మనల చేరు రేడియో సంకేతములు మనకు 4,000 కాంతి సంవత్సరముల దూరములో నున్న కర్కాటక తేజో మేఘమునుండి వచ్చువాటికన్న బలవత్తరమైనవి. ఈ పరవడిని మనము చాక్షుష దూరదర్శని సహాయమున గుర్తెరుంగ వీలైన దూరములలో నున్నవాటికన్న ఎక్కువ దూరములో నున్న ఈ ఢీకొను క్షీరపథముల నీ రేడియో దూరదర్శని మనకు చూపినది.

ఇటులనే కేవల ఖగోళ శాస్త్రమున కందని విశ్వగర్భ విలీన రహస్యముల రేడియో ఖగోళ శాస్త్రము ఉద్ఘాటించుటయే కాక, దూరదర్శనిచే చేయబడిన ప్రత్యవేక్షణల పలుమారులు సమర్థించినది. ఇట్లు ఖగోళ, రేడియో ఖగోళ శాస్త్రములు రెండును పరస్పర సంపూరకములుగా నాచరించుచు, విశ్వ పరిపూర్ణ రూపమును మన కందించ గలవని శాస్త్రజ్ఞుల ఆశంస. మే. వ. న.

లంబ విక్షేపము : చూ. సమకోణీయ విక్షేపము.

లక్షణవాదము : మనము విమర్శించు వస్తు సముదాయమునకు లోకము (పాపులేషన్) అను పదము వాడుదుము. లోకములోని వ్యక్తులను లక్షణముల అనుసరించి విమర్శింపవచ్చును. అనగా ప్రతి వ్యక్తికిని ఏదో ఒక లక్షణము ఉన్నదా, లేదా అని గమనించి, అట్టి వ్యక్తుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణమునకు గ్రుడ్డివారు, లేదా చెవిటివారు, లేదా పొడుగైన వారు, కురుచుగా నుండు వారు అని ఒక ఊరి జనులను విభజింపవచ్చును.

మరియొక పక్షము ప్రతి వ్యక్తి యొక్క పొడవు ఎంత అని తీసికొనుట. మొదటి పక్షము లాక్షణికము; రెండవ పక్షము సాంఖ్యకీయము.

ఇపుడు లక్షణ శాస్త్రమును పరిశీలింతము : రోమన్ ప్రధానాక్షరములు A, B, C, ... పలు లక్షణములను, గ్రీక్ అక్షరములు $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ఆ లక్షణ లోపములను గుర్తించును. ఉదా : లక్షణము A గ్రుడ్డితనము గుర్తించిన, లక్షణము α మంచి చూపును గుర్తించును. లక్షణము B పొడవును గుర్తించిన, లక్షణము β కురుచతనమును గుర్తించును. ఇట్లే ఇతర లక్షణములకును కూడ.

A లక్షణ జాతిలో ఒక వ్యక్తికూడ α లక్షణము కలిగి యుండకూడదు. రెండు అక్షరములు ప్రక్కలో నున్న AB, రెండు లక్షణములు సామాన్యముగాగల జాతిని గుర్తించును.

లక్షణము AB, అనగా గ్రుడ్డి వారిలో పొడుగు మనుష్యులు. లక్షణము $A\beta$, అనగా గ్రుడ్డివారిలో కురుచ మనుష్యులు. $AB + A\beta = A$. గ్రుడ్డివారల

మొత్తపుజాతి. గ్రుడ్డివారి సంఖ్యను (A) సంకేతముతోను, చూపుగలిగినవారి సంఖ్యను (α) చేతను గుర్తింతురు.

తరములు : ఒక జాతికి ఒక లక్షణముండిన, దాని తరము ఒకటి అనియు, రెండు లక్షణములుండిన, తరము రెండనియు చెప్పుదుము. లోకమంతటికిని తరము శూన్యము. క్రింది వివరణ గమనింపవలయును.

తరము '0'	N		
తరము '1'	(A)	(B)	(C)
తరము '2'	(AB)	(AC)	(BC)
	$(A\beta)$	$(A\gamma)$	$(B\gamma)$
	(αB)	(αC)	(βC)
	$(\alpha\beta)$	$(\alpha\gamma)$	$(\beta\gamma)$

తరము '3' ఇందు మూడు లక్షణములు ఉండవలయును. ఉదా: (ABC). అనగా A, B, C లలో α, β, γ చేర్చిన 8 వివిధజాతులు లభించును.

ధనలక్షణములు : అధికార పత్రము లెప్పుడును ధన లక్షణములుగల అంశములను ఇచ్చుచుండును. అందు సాగుబడి అయిన ఎకరములు, గ్రుడ్డివారి సంఖ్య మొదలగునవి ఇవ్వబడును. సాగుబడి కాని ఎకరములు, మంచి చూపుగల వారి సంఖ్య అని ప్రత్యేకముగా అందు కనబడవు. ఉన్న లక్షణములు మాత్రము ఇవ్వబడును.

ఒక లోకములో కొన్ని లక్షణముల నిచ్చిన తక్కిన లక్షణములు గల జాతుల కనుగొనవచ్చును.

ఉదా : క్రింద ధనజాతి పౌనఃపున్యముల నుండి తక్కిన పౌనఃపున్యములను కనుగొనుము :

$N = 1000$, $(A) = 88$, $(B) = 109$, $(C) = 29$, $(AB) = 34$, $(AC) = 14$, $(BC) = 13$, $(ABC) = 6$.

$(AB) = (AB\gamma) + (ABC)$

$\therefore 34 = (AB\gamma) + 6 \quad \therefore (AB\gamma) = 28$

అల్లే $(A\beta C) = (AC) - (ABC) = 14 - 6 = 8$

$(\alpha BC) = (BC) - (ABC) = 13 - 6 = 7$

ఇల్లే ఇతర ఋణజాతుల కనుగొనవచ్చును. దీనికి ఒక సూత్రము వాడవచ్చును.

$\alpha = 1 - A,\ \beta = 1 - B,\ \gamma = 1 - C$

కాబట్టి $(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma) N$ (సంజ్ఞారూపమున)

$$= (1 - A)(1 - B)(1 - C) N =$$
$$N - (A) - (B) - (C) + (BC) +$$
$$(CA) + (AB) - (ABC) =$$
$$1000 - 88 - 109 - 29 + 13 + 14 + 34 - 6 = 829$$

అవిరుద్ధత : ప్రతి జాతియు ధనాత్మకముగా నుండవలయును. ఋణాత్మకమయినచో పొరబాటు జరిగినదని నిశ్చయింపవలయును. ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము :

$N = 1000$	$(AB) = 32$
$(A) = 435$	$(AC) = 160$
$(B) = 340$	$(BC) = 90$
$(C) = 570$	$(ABC) = 62$

ఈ జాతి పౌనఃపున్యములందు పొరబాటు ఏమియు కనబడదు. కాని వీని సేకరణ ఒకే కాలమున, ఒకే చోటున చేయలేదని చూపవచ్చును.

$$(\alpha\beta\gamma) = 1000 - 435 - 340 - 570 + 32 + 160 + 90 - 62 = -125 \text{ (ఋణ సంఖ్య)}$$

కాబట్టి ఈ జాతుల అవలోకనములో ఏదో పొరబాటు కలదు.

స్వతంత్రత : రెండు లక్షణములు A, B లకు పరస్పర సంబంధము లేకుండిన అవి B లోను, β లోను, A ఒకే నిష్పత్తిలో నుండవలయును.

గణిత రూపమున, $\dfrac{(AB)}{(B)} = \dfrac{(A\beta)}{(\beta)}$

ఇందుండి క్రింది సంబంధములు లభించును.

$$\frac{(\alpha B)}{(B)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\beta)}$$
$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$$
$$\frac{(A\beta)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$$

లక్షణము	A	α	మొత్తము
B	(AB)	(αB)	B
β	$(A\beta)$	$(\alpha\beta)$	β
మొత్తము	A	α	N

వీనిని వేరు విధముగాగూడ వ్రాయవచ్చును.

$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(AB) + (A\beta)}{(B) + (\beta)} = \frac{(A)}{N}$$

లేదా $\dfrac{(AB)}{(A)} = \dfrac{(B)}{N}$; $(AB) = \dfrac{(A)(B)}{N}$;

$$\frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$$

కడపటి సూత్రము నుండి లభించు ఫలితము : A, B ల లక్షణములు స్వతంత్రములైన, లోకములో AB యొక్క నిష్పత్తి A, B ల నిష్పత్తుల లబ్ధమునకు సమానము. A, B లక్షణములకు సంబంధముండినపుడు

$$(AB) > \frac{(A)(B)}{N} \text{ ; లేదా } (AB) < \frac{(A)(B)}{N}$$

ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము : తండ్రులు రక్తవర్ణ చ్ఛాయ, కొడుకులు రక్తవర్ణచ్ఛాయ $(AB) = 471$.

తండ్రులు రక్తవర్ణచ్ఛాయ, కొడుకులు రక్తవర్ణచ్ఛాయా రహితులు $(A\beta) = 151$.

తండ్రులు రక్తవర్ణచ్ఛాయా రహితులు, కొడుకులు రక్తవర్ణచ్ఛాయ కలవారు $(\alpha B) = 148$.

తండ్రులు రక్తవర్ణచ్ఛాయారహితులు, కొడుకులు రక్తవర్ణచ్ఛాయారహితులు $(\alpha\beta) = 230$

ఇందుండి తండ్రి కొడుకుల ఛాయలకు సంబంధమున్నదా ? అని కనుగొనవచ్చును.

రక్తవర్ణచ్ఛాయ గల తండ్రులతో రక్తవర్ణచ్ఛాయ గల కొడుకుల నిష్పత్తి $= \frac{471}{622} = 76\%$

రక్తవర్ణచ్ఛాయ గల తండ్రులతో రక్తవర్ణచ్ఛాయా రహిత కొడుకుల నిష్పత్తి $= \frac{151}{622} = 39\%$

కాబట్టి తండ్రి కొడుకుల ఛాయలకు సంబంధము కలదని విశదమగుచున్నది.

బహువిధ జాతుల సారణి : A జాతిలో m విధములు, B జాతిలో n విధములుండిన $A_r B_s$ జాతుల సంఖ్య mn. దీనిని ఒక సారణి రూపమున ప్రదర్శింపవచ్చును.

లక్షణములు	$A_1 \; A_2 \; A_3 \; \dots \; \dots \; A_m$	మొత్తము
B_1	$(A_1B_1)(A_2B_1)(A_3B_1)\cdots \cdots (A_mB_1)$	(B_1)
B_2	$(A_1B_2)(A_2B_2)(A_3B_2)\cdots \cdots (A_mB_2)$	(B_2)
B_3	... ...	...
...	... ...	...
...	... ...	...
...	... ...	...
B_n	$(A_1B_n)(A_2B_n)(A_3B_n)\cdots \cdots (A_mB_n)$	(B_n)
మొత్తము	$(A_1)\;(A_2)\;(A_3)\cdots(A_m)$	N

దీనికి ఆధీనతా సారణి అని పేరు.

ఆధీనతా గుణకము : A, B లక్షణములు పరస్పర స్వతంత్రములయిన $A_r B_s = \frac{(A_r)(B_s)}{N} = (A_r B_s)_0$. r, s అన్ని విలువలకు ఈ సంబంధము సత్యము. వానిలో పరస్పర స్వతంత్రత లేనిచో,

$(A_r B_s)$, $(A_r B_s)_0$ రెండును సమానములు కావు. వాని వ్యత్యాసము δ_{rs} అని తీసికొనిన

$$\sum_{r=1}^{m} \delta_{rs} = 0 \; ; \; \sum_{s=1}^{n} \delta_{rs} = 0.$$

$$\Sigma \left\{ \frac{\delta_{rs}}{(A_r B_s)_0} \right\}^2 = X^2 \text{ ...ఆధీనతా గుణకవర్గము.}$$

$$\frac{X^2}{N} = \phi^2 \text{ ...ఆధీనతా గుణకవర్గ మాధ్యమికము.}$$

ఇది σ^2 కు అనురూపము.

ఆచార్య.

లఘుగ్రహములు : కుజ, గురు కక్ష్యల నడుమ అనేకములైన చిన్న గ్రహములు సూర్యుని చుట్టు తిరుగుచున్నవి. వీనికి లఘు గ్రహములు అని పేరు. వీటిలో జల, వాతావరణముల జాడ కానరాదు. లఘుగ్రహముల ఉత్పత్తి విధానము సందేహాస్పదమైయున్నది. కుజ, గురు గ్రహముల మధ్య పరిభ్రమించుచుండిన ఒక గ్రహము గురుగ్రహమునకు సమీపముగా వచ్చినప్పుడు విచ్ఛిత్తిని పొందుటచే ఏర్పడిన లఘుద్రవ్యరాశులే లఘుగ్రహములని కొందరు శాస్త్రజ్ఞులు తలచుచున్నారు. లఘుగ్రహముల ద్రవ్యసంచయము ఆదిలో సూర్యుని చుట్టు వలయాకారములో పరచబడియుండెననియు, గురుగ్రహ సంక్షోభముల ఫలితముగ అది తునకలుగా చేయబడెననియు, ఆ తునకల సముదాయమే లఘుగ్రహములనియు మరియొక వాదము.

లఘుగ్రహముల ద్రవ్యరాశుల మొత్తము భూద్రవ్యరాశిలో $\frac{1}{1000}$ వ పాలు ఉండవచ్చును. అనేక లఘుగ్రహముల వ్యాసములు 80·47 కి. మీ. లోగా నుండును. అంతకంటె అధిక వ్యాసములు కల లఘుగ్రహములలో సిరీజ్ (772·49 కి. మీ.), పల్లాస్ (489·24 కి మీ.), జానో (193 కి. మీ.), వెస్ట (386·24 కి. మీ.) ముఖ్యములు. సాధారణముగా వీటి పరావర్తన శక్తి 0· 15 కంటె ఎక్కువగా నుండదు (వెస్ట 0.26).

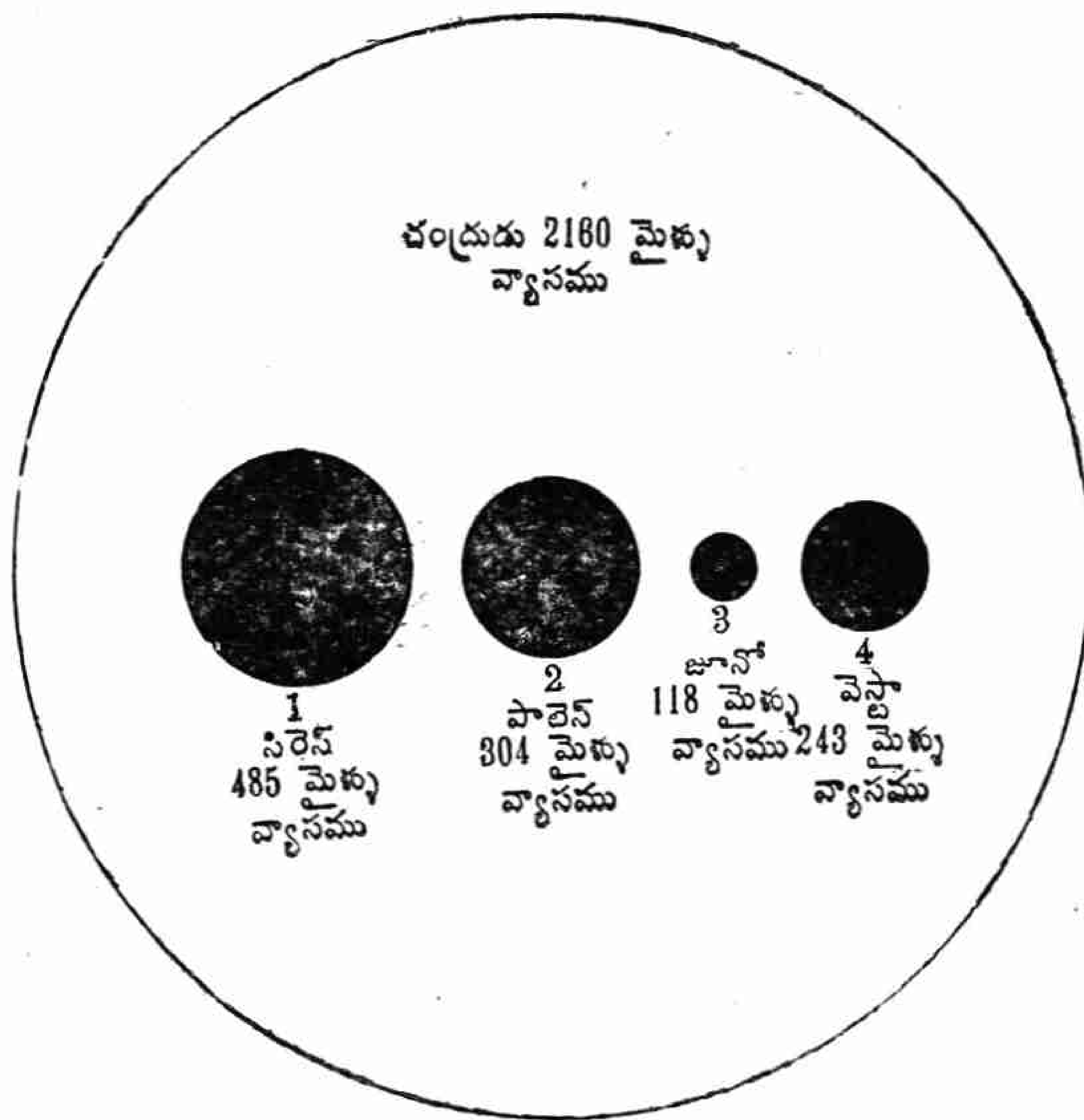
రవినుండి లఘుగ్రహముల దూరములు చాలవరకు 2 నుండి $3\frac{1}{2}$ ఖగోళీయ రూపముల వరకు నుండును. వీటి సరాసరి ఆవర్తనకాలము సుమారు $4\frac{1}{2}$ సంవత్సరములు (హిడాల్గో 14 సంవత్సరములు). వీటి కక్ష్యానతులు చాల వరకు 16 డిగ్రీలకంటె తక్కువగను, కక్ష్యల వికేంద్రతలు

0.3 కంటె తక్కువగను ఉండును. కొన్ని లఘుగ్రహముల కక్ష్యలు శని కక్ష్యను దాటియుండును.

ఇప్పుడు ప్రసిద్ధ లఘుగ్రహములు కొన్నింటిని పరిశీలింతము.

1. సిరీజ్ : (చూ. సిరీజ్.)

2. ఈరోస్ : 1898 లో విట్ దీనిని ఆవిష్కరించెను. దీని సరాసరి దూరము 1.46 ఖగోళీయ రూపములు. దీని



చిత్రము 384 లఘుగ్రహములు

1 మైలు = 1.609 కి. మీ.

కక్ష్యావికేంద్రత 0.22 అగుటచే ఇది భూమికి అతి సమీపమునకు వచ్చుచుండును. దీని సహాయముతో సౌరాతివర్తనమును కనుగొనవీలగును (చూ. సౌరాతివర్తనము).

3. అపోలో ; రీన్‌మత్ 1932 లో దీనిని ఆవిష్కరించెను. దీని సరాసరి దూరము 1. 49 ఖగోళీయ రూపములు. దీని కక్ష్యావికేంద్రత 0.57. దీని కక్ష్య శుక్రుని కక్ష్యకు లోపల కూడ నుండును. ఇది ఈరోస్‌కంటె భూమికి ఎక్కువ చేరువకు వచ్చును.

4. ట్రోజన్ సముదాయము : ఈ బృందములో 13 లఘుగ్రహములున్నవి. వీటికి ట్రోజన్ యుద్ధవీరుల నామములు పెట్టబడినవి. వీటి సరాసరి వ్యాసములు సుమారు 128.75 కి. మీ. ఇవి కాంతిహీనము లగుటచే బలమయిన సాధనములతోనే వీటిని చూడవీలగును. వీని కక్ష్యలు గురుకక్ష్యకు సమీపముగా నున్నవి.

త్రిమూర్తి ప్రశ్నకు, లాగ్రాంజ్ విధానమునకు ఈట్రోజన్ సముదాయము తగిన ఉదాహరణము. ఒక పెద్ద మూర్తి, ఒక చిన్నమూర్తి, ఒక లఘుమూర్తి ఒక సమబాహు త్రిభుజముయొక్క శీర్షి కలుగనుండినచో, వాని గురుత్వకేంద్రమును అనుసరించి అవి పరిభ్రమణముచేయునప్పుడు వాని సాపేక్షక స్థితులలో మార్పులుండవని రుజువు చేయబడినది. ఈ బృందములోని లఘుగ్రహములు, పెద్దగ్రహమగుసూర్యుడు ఈ నిబంధనలను ఇంచుమించుగ అనుసరించుచున్నవి.

కె. ఎస్. వి. న.

లవెరియా. యు. జె. జె. (1811 - 77) : ఫ్రెంచ్ ఖగోళశాస్త్రవేత్త. 1811 మార్చి 11వ తేదీన జననము. బుధగ్రహ ప్రతరణముపై పెక్కు అవేక్షణలను సల్పి అకాడెమీ ఆవ్ సైన్సస్‌లో సభ్యత్వము పొందెను.

ఇంద్రుని పరిక్షోభములను పరిశీలించి ఇంద్రుని (యురేనస్) కక్ష్యకు బాహ్యమున అజ్ఞాతగ్రహము ఒక్కటి ఉన్నదని గణనాపూర్వకముగ కనిపెట్టెను. జె. సి. ఆడమ్స్ అను బ్రిటిష్ ఖగోళశాస్త్రవేత్త ఇతనికన్న కొంతకాలము ముందుగనే అట్టి ఫలితమును పొందెను. కాని తన ఫలితమును ప్రచురించలేదు. నూతన గ్రహము నెప్ట్యూన్ (వరుణ)ను ఆవిష్కరించిన కీర్తి ఇరువురికి దక్కినది.

ఇతడు 1854 లో పారిస్ వేధశాలకు డైరెక్టర్ అయ్యెను. గ్రహసిద్ధాంతముల సవరణను లవెరియా 1875 లో పూర్తి చేసెను. 1877, సెప్టెంబర్ 23వ తేదీన ఇతడు పారిస్ నగరమున చనిపోయెను (చూ. ఆడమ్స్ పు. 143).

పా. ల. నా.

లాగరిదమ్‌లు : అంకెల గణనమును సులభపరచి, శ్రమను తగ్గించు ఉపాయములలో లాగరిదమ్‌లు చాల ప్రధానమైనవి. ఈ లాగరిదమ్‌లను సారణుల రూపమున, స్లైడ్ రూల్ * రూపమున వైజ్ఞానికులు, యంత్రశాస్త్రజ్ఞులు విరివిగా వాడుచున్నారు. గుణకారముకన్న అంకెల కూడికలు చాల సుఖతరమైన కర్మయని మన కందరకును తెలిసిన విషయమే. లాగరిదమ్‌లు వాడుక గుణకారమును సంకలనముగాను, భాగహారమును వ్యవకలనముగాను మార్చును. లాగరిదమ్‌ల పద్ధతి జాన్ నేపియర్ అను స్కాట్లాండ్ దేశస్థునిచే నిర్మించబడి 1614 లో ప్రకటించబడినది. స్వతంత్రముగ నీ పద్ధతి స్విట్జర్లాండు దేశీయుడగు జె. బుర్గీ చేత కూడ 1620 లో కనుగొనబడినది.

లాగరిదమ్‌ల వాడుకకు ఆధారసూత్రమును బోధపరచుటకు 64, 16 అను రెండు అంకెల గుణకారమును తీసికొని విశదీకరింతము. 2 అను అంకె యొక్క వేరువేరు ఘాతముల మూల్యముల తెలియజేయు కోష్టక మొకటి ఉన్నదనుకొందము. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$, ... $2^{10} = 1024$, కోష్టక పరిశీలన నుండి

* చూ. గణిత్రయంత్రములు - పు. 280.

$64 \times 16 = 2^6 \times 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10} = 1024$ అని గుర్తించ గలము. ఇచ్చట 64×16 గుణకారమును $6 + 4$ అను సంకలనముగా మార్చితిమి.

సామాన్య లాగరిదమ్‌లు : సామాన్య లాగరిదమ్‌లందు పై దృష్టాంతములో 2 కు బదులు 10 ని మూలముగా తీసి కొనెదము. ఈ 10 ని వేరువేరు ఘాతములకు హెచ్చిం చెదము. ఈ ఘాతములు ఎల్లప్పుడును పూర్ణాంకములుగా నుండనక్కరలేదు. ఒక్కొక్క వాస్తవిక సంఖ్యను - అది పూర్ణముగాని, భిన్నముగాని, కరణీయముగాని కావచ్చును - 10 యొక్క ఘాతముగా వ్రాయవచ్చును. $n = 10^l$ అయినచో l ని n యొక్క లాగరిదమ్ అందుము. ఇట్లు $2 = 10^{0.30103}$ (సుమారు). కనుక 0.30103 అనునది 10 అను మూలమునకు 2 యొక్క లాగరిదమ్. దీనిని వ్రాయువిధము : $\log_{10} 2$ = లాగరిదమ్ 2 లేదా లాగ్ 2.

ఈ పక్షములో లాగరిదమ్ ఒక అనంతమైన దశాంశ భిన్నాంకము. అందువలననే ఇది కొన్ని స్థానముల వరకే (4 గాని, లేదా 7 గాని) ఈయబడును.

$n_1 = 10^{l_1}$, $n_2 = 10^{l_2}$, అయిచో $n_1 \times n_2 = 10^{l_1+l_2}$

$\therefore \log n_1 \times n_2 = l_1 + l_2 = \log n_1 + \log n_2$

n_1 ను n_2 చే గుణించుటకు $\log n_1$ $\log n_2$ లను మన మొక లాగరిదమ్ కోష్టకమునుపయోగించి కనుగొందము. ఈ లాగరిదమ్‌లను కలిపి $l_1 + l_2$ సంపాదింతుము. తరువాత ఆంటీ లాగరిదమ్‌ల పట్టికనుండి $l_1 + l_2$ లాగరిదమ్‌గా గల సంఖ్యను కనుగొందుము. n_1 ని n_2 చే భాగించుటకు మరల వీటి లాగరిదమ్‌ల l_1, l_2 లను కనుగొని $l_1 - l_2$ అను వాటి భేదమును సాధించి, మరల ఆంటీ లాగరిదమ్‌ల కోష్టకము నుండి ఈ $l_1 - l_2$ అను భేదము లాగరిదమ్‌గాగల సంఖ్యను వెతకి కనుగొందుము. ఇదియే మనకు కావలసిన n_1/n_2 ; ఇట్లే n_1, n_2 మూల్యమును కనుగొనుటకు కూడ లాగరి దమ్‌ల వాడుదుము. ఏలన ఘాత $n_1^{n_2} = n_2 \log n_1$. లాగరిదమ్‌లు, ఆంటీ లాగరిదమ్‌లు సాధారణముగ అనంత దశాంశ సంఖ్యలగుటచే ఇదివరకు చెప్పినట్లు, దశాంశ బిందువు తరువాత నాలుగు లేదా 7 స్థానములవరకే లాగరిదమ్‌లు కోష్టకములలో నీయబడును. ఈ ఆసన్న మూల్యములు ప్రాయికముగ వ్యవహారమందు చాలును.

కోష్టకములు లాగరిదమ్‌ల దాశమికాంశములనే కన పరచును. ఒక సంఖ్య లాగరిదమ్ యొక్క పూర్ణాంక భాగముల ఈ క్రింది సూత్రము ననుసరించి వ్రాయవచ్చును. నాలుగు అంకెల సంఖ్య ఏదియైనను 10^3, 10^4 మధ్య ఉండును. అందువలన ఆ సంఖ్య లాగరిదమ్ యొక్క పూర్ణాంకభాగము 3 అగును. ఒకటి కన్న తక్కువ సంఖ్యలకు లాగరిదమ్ ఋణాత్మక సంజ్ఞ కలదియగును. కాని గణనప్రయోజనమునకు దశాంశ భిన్నాంకము ఎప్పుడును ధనాత్మక సంజ్ఞాయుతముగనే యుండుట అను కూలము. దృష్టాంతమునకు $\log 0.05 = -1.6990$; కాని దీనినే $-2 + 0.3010$ అని వ్రాయవచ్చును. ఆ ఋణసంజ్ఞను పూర్ణాంకము నెత్తిపైనుంచుట పరిపాటి ; $-2 + 0.3010$ ని $\bar{2}.3010$ అని వ్రాయుదురు.

నేపీరియన్ లాగరిదమ్‌లు : అంకెల గణనవ్యాపార మునకై పది మూలముగా గల లాగరిదమ్‌లు చాల సదుపాయములైనవి. అయితే ఏ ధనాత్మకమైన అంకె నైనను మూలముగాగొని లాగరిదమ్‌ల నిర్మించవచ్చును. అనగా ఆ మూలము b ఒకటికన్న పెద్ద సంఖ్య కావలెను. $b > 1$, ఈ పక్షమందు $b^l = x$ అయినచో, b మూలమునకు x యొక్క లాగరిదమ్ l అగును. మన మొదట దృష్టాం తములో $b = 2$ అని తీసికొంటిమి. శుద్ధగణితము నందు $e = 2.718281828459\ldots$ ను మూలముగా తీసికొనుట అను కూలము.

e అను సంఖ్య ఈ క్రింది అనంత శ్రేణి యొక్క సంకలన ఫలము :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \quad \ldots \quad \ldots$$

ఈ సంఖ్యను మూలముగా గ్రహించుటవలన లాభమేమన దీనికి ఉన్న ఒక విశేష ధర్మము. ఆ ధర్మము నీ క్రింది సమీకరణముచే వ్యక్తపరుచవచ్చును. $\frac{de^x}{dx} = e^x$, e మూల ముగా గొని నిర్మించబడిన లాగరిదమ్‌లకు నేపీరియన్ లాగరిదమ్‌లని పేరు. ఇవి కోష్టకముల ప్రకటింపబడినవి.

e^x అను ఫలము, దాని ప్రతిలోమ ఫలము $\log x$ ఈ రెండును గణితములో చాల ముఖ్యమైన ఫలములు. a^x అను ఫలమును (ఇచ్చట a వాస్తవిక సంఖ్య ఏదైన కావచ్చును) e^{kx} అను రూపములో వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $k = \log_e a$ స్థిరపదము. e మూలముగా గల లాగరిదమ్ ఫలమును ఈ క్రింది రీతిని విస్తరింపవచ్చును.

$$\log_e (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad \ldots \quad \ldots$$

దీనినుండి చాల విచిత్రమైన పర్యవసాన మొకటి లక్ష్య మగును.

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

పై శ్రేణి ఉపయోగించి లాగరిదమ్‌లను గణించుటకు అనుకూలము లేదు. ఏలన దాని ఉపసరణత చాలా మెల్లనిది. ఇంతకన్న మంచిది ఈ క్రిందిది.

$$\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \cdots \cdots \cdots$$

$$* \; |x| < 1$$

సంకీర్ణ సంఖ్యల లాగరిదమ్‌లు: e^x లో x యొక్క వాస్తవిక మూల్యమునకు బదులు సంకీర్ణ సంఖ్యల నుంచినచో, మనకొక చిత్రమైన పర్యవసానము లభించును. ఇది ఆయ్‌లర్ చే కనుగొనబడినది.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (i = \sqrt{(-1)})$$

ఇచ్చట θ అను కోణము రేడియన్ యూనిట్‌లలో కొలువవలెను.

ఈ పై సమీకరణము లంబకోణ త్రిభుజముయొక్క ధర్మముల పరిశీలనద్వార జనించిన త్రికోణమితి ఫలమునకును, ఈ క్రింది అనంతశ్రేణితో నిర్వచింపబడిన లాగరిదమ్ ఫలమునకును గల అత్యాశ్చర్యకరమైన సంబంధమును తెలియజేయుచున్నది.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdots \cdots$$

(చూ. సమీక్ష - పు. 49) దీని నుండి

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

అను విచిత్రమయిన సూత్రము దొరకుచున్నది.

$z = x + iy$ వంటి ఏ సంకీర్ణ సంఖ్యనైనను $z \times 1^n = z \times e^{2i\pi n}$ అని వ్రాయవచ్చును. $\log z$ బహు మూల్యక ఫలమనికూడ నిది తెలుపును.

ఈ బహు మూల్యములన్నియు $2i\pi$ యొక్క గుణిజములను భేదములుగా గలిగియుండును. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ అని వ్రాసినచో, $\log(x+iy)$ యొక్క వేరు వేరు మూల్యములు, $\log r + i(\theta \pm 2n\pi)$ అనుదానిచే నీయబడును. ఇట్లు మనము $\log z$ యొక్క వివిధ మూల్యములు, OP, OX అను రేఖల మధ్యనుండు θ అను కోణమును $\theta \pm 2n\pi$ గను తీసికొనవచ్చునను విషయము నుండి ఉద్భవించునని గుర్తించగలము.

పైన చెప్పినదానినుండి $\log i = \frac{i\pi}{2} \pm 2ni\pi$ దీనినుండి లభ్యమైన ఒక అత్యాశ్చర్యకరమైన పర్యవసానము $i^i = e^{i\log i}$ యొక్క మూల్యములలో $e^{-\pi/2}$ అను వాస్తవిక సంఖ్య యున్నదనుటయే. ఆ. స.

* |x| ఋణ, ధన చిహ్న నిరపేక్షమైన మూల్యము.

లాగ్రాంజ్ (1736 - 1813): జోసెఫ్ లూయీ లాగ్రాంజ్ 18 వ శతాబ్దపు గణితజ్ఞులలో అగ్రగణ్యుడు, అతి వినీతుడు; 'సామ్రాజ్య ప్రభు' బిరుద ప్రదానముచే నెపోలియన్‌చే గౌరవించబడినవాడు. యూరపు ఖండమునకెల్ల గొప్ప సార్వభౌముని కొలువులో యూరపు ఖండమునకెల్ల గొప్పవాడైన గణితజ్ఞుడుండవలెనను ఆశయముతో ఫ్రెడరిక్ ది గ్రేట్ (జర్మనీదేశపు ప్రభువు) లాగ్రాంజ్‌ను బెర్లిన్‌కు ఆహ్వానించెను. లాగ్రాంజ్ ఆవిధమున, బెర్లిన్ నగరములో ఇరువది యేండ్లుండెను. ఈతని తలిదండ్రులు ఒకరు ఫ్రెంచి జాతికి, రెండవ వారు జర్మన్ జాతికి చెందినవారు. అతని తండ్రి తొలుత ధనవంతుడైనను, సాహసవ్యాపారమందు ధనమునంతను కోలుపోయినాడు. అందుచే లాగ్రాంజ్ పిన్నవయసుననే పొట్టపోసికొనుటకు ఆర్జనకు దిగవలసివచ్చెను; ఇటలీలో గణిత శాస్త్రాధ్యాపకుడుగా నుండి, బెర్లిన్ అకాడెమీలో ఆయ్‌లర్ తరువాత ఆస్థానమందు నియుక్తుడయ్యెను. అటు తరువాత ఇతడు పారిస్‌కు ఆహ్వానితుడై, నూతనముగా స్థాపితమైన ఈకోల్ నార్మేల్, ఈకోల్ పాలిటెక్నిక్‌లలో ఆచార్యునిగా పనిచేసెను.

17 ఏండ్లవరకు అతడు గణితశాస్త్రమందు ఆదరమును చూపలేదు; తరువాత తన నాడు జీవించియున్న గణితజ్ఞులలో మేటియని అనిపించుకొనునంత అభివృద్ధిని సాధించినాడు. తన ఆరోగ్యమును భంగపరచునంతటి శ్రమతో అతడు పనిచేయుచుండెడివాడు. 23 వ ఏట అతడు గణితశాస్త్రమందు ప్రసిద్ధినిగన్న జ్యామితీయ ఆకారముల సమపరిధి సమస్యను చేపట్టి దానిని పరిష్కరించగలిగెను. ఇది యాతని చలకలన అనుశీలనకు దారితీసినది. ఇందు క్రింది సమస్యలు సమాలోచించబడును: 1. సమతలము, లేదా గోళము, లేదా పరవలయాభము - వీటిమీదనున్న రెండు బిందువులను కలుపు హ్రస్వతమ రేఖను కనుగొనుట; 2. ఆకాశమందు వినివేశితమైన ఒక దత్త వక్రముగుండ పోగల కనిష్ఠ వైశాల్యముగల ఒక వక్రతలమును కనుగొనుట.

గణిత శాస్త్రమునకు లాగ్రాంజ్ కావించిన మహోనిర్వాహము విశ్లేషణయాంత్రికశాస్త్రముపై అతడు రచించిన ఉద్గ్రంథము. దీనినే హామిల్టన్ గణిత శాస్త్ర పద్యమని వర్ణించినాడు. ఇందులో లాగ్రాంజ్ కాల్పనిక కర్మసూత్రమును చర్చించి, ఆ ఒక్క మౌలిక సూత్రము నుండి ఘనముల, ప్రవాహము యాంత్రిక శాస్త్రమునంతను నిగమించగలిగెను. ఇట్టి ఫలితమును సాధించుటకు కారణమగునట్టి 'విశాలీకృత నిర్దేశకములు'. ఈతని గణితశాస్త్ర

విజయములలో అతి ఉజ్జ్వలమైనది. కనిష్ఠ కర్మ సూత్రము విషయమై తన నాటికి పూర్వమున్న దానికన్న ఎక్కువ వ్యాపకము గల ప్రతిపాదనను ఈతడు చేయగలిగెను. ఈతని నిర్వాహములగు ఇతర గణితశాస్త్ర విషయములలో సంఖ్యా సిద్ధాంతము, బీజగణితము, అంతరీకరణ సమీకరణ ములు, గ్రహ చలనము, అంకాత్మక సమీకరణములు, పరిమిత భేదముల కలనము ముఖ్యమైనవి. యాంత్రిక శాస్త్రమును శుద్ధగణితశాస్త్ర శాఖగా పరిగణించి, ఆ శాస్త్ర శాఖా స్వభావమును సంపూర్ణముగ మార్చివేసిన గణ్యాత ఇతనిది. గరిష్ఠ వ్యాపకత్వము గల భావములను నిర్మించి, అతడు వాటి వినియోగమును ఇతరులకు వదలి పెట్టెను. ఆ. స.

లాటిన్ చతురము : ఈ చతురము యొక్క గళ్లలో లాటిన్ అక్షరములుండును. ప్రతి అక్షరమును ఒక్కొక్క లక్షణమును గుర్తించును. ఈ విన్యాసము వ్యవసాయ ప్రయోగములో పాదులను ఏర్పాటు చేయుటకు ఉపయో గించును. ఇందు పాదులకు ఉపచారములు సమానముగా చేయుటకు వీలగును. పరిమిత వైశాల్యముగల పొలము చాలును; ఖర్చు ఎక్కువకాదు. పై చూపులో హెచ్చు తగ్గులులేక, సమానముగ అన్ని పాదులకు జరుగును. ఈ విధానమును ఇతరవిధ పరిశోధనలో శాస్త్రజ్ఞులు ఇపుడు అనుసరించుచున్నారు. ఇట్లు చేయుటవలన ప్రయోగములో వాడు ఉపచారములన్నియు ఏకముఖ ముగ నుండును.

మనము పరిశోధనలో ఉపయోగించు వస్తువులలో మార్పు సహజము; కాని అవి ఎట్లు మారునను విషయము మనకు తెలియదు. వస్తువులలో మార్పుల పరిమితి తెలిసిన, తగినట్లు ప్రయోగములలో మార్పులు చేసి, శుద్ధతను ఎక్కువ చేయుటకు వీలగును. ఉదాహరణమునకు ఆరు నెలలలో పండు వరివిత్తులను, మూడు నెలలలో పండు వరివిత్తులను వాడి ఒక ప్రయోగము చేసిన ఫలితములో శుద్ధత నమ్మ తగినదికాదు.

ఈ లాటిన్ చతుర విధానములో 4 మొదలు 8 విధము లైన ఉపచారములు ప్రయోగములో వాడినచో, నమ్మ దగిన ఫలితములు లభించును.

ఉదా : ఒక పొలమును 6×6 చతురపు గళ్లుగా చేసి, 6 విధములగు ఉపచారములను వాడవచ్చును. మనము ఉపయోగించు ఉపచారము ఒక వరుసలో, ఒక వంశములో ఒక పాదుకంటె ఎక్కువకూడదు. ఈ విధముగ 36 పాదులను ఏర్పాటు చేసితిమని తీసికొందము. ఒక విధమగు అమర్పు అయిన తర్వాత వరుసలను పరస్పరము 16 విధములుగా అనగా, 720 విధములుగా మార్చవచ్చును. అట్లే వంశములు కూడ.

మొత్తము విన్యాసములు 720×720.

ఉపచారముల తీసికొనిన మరియొక 720 విన్యాసములు ఏర్పడును. ఉత్తమ పక్షములో $720 \times 720 \times 720$ విన్యా సములు; ఒక పాదును మార్చకయుండిన అధమ పక్షమున లభించు విన్యాసముల సంఖ్య $720 \times 120 \times 120$.

అవశ్యకత : పొలములలో కొన్ని సమయములందు పాదుల వరుసలు కొన్నిట సారవ్యత్యాసము కలవై యుండును. అట్లే పాదుల వంశములు కూడ, ఇట్టి వ్యత్యాసములు లేకుండ జేయుటకై లాటిన్ చతుర విన్యాసము వాడుదుము. పొలములందు వ్యత్యాసముండు టకు అనేక కారణములు కలవు. అవి మృత్తికలోతు, నీటి పారుదల, పూర్వచరిత్ర, సత్తువను వాడిన విధము మొదలగునవి.

వెడల్పులోను, పొడవులోను పొలమునందు గల వ్యత్యాసములను సవరించుటకు లాటిన్ చతుర విధానము చాల ఉపయోగకరము.

మనము తీసికొనిన పొలములో 36 పాదులు కలవు. 36 విధములగు పంటలు లభించును, స్వేచ్ఛతా తరము $36 - 1 = 35$. ఒక పాదుతో తక్కిన 35 పాదులను సరి పోల్చుటకు వీలగును. కాబట్టి స్వేచ్ఛతాతరము 35; వానిలో 5 తరములు వరుసలకును, 5 తరములు వంశములకును, 5 తరములు ఆరు విధములగు ఉపచారములకును విభ జింపవలయును. మిగిలిన 20 తరములు ఇదివరలో సవరింప బడని ప్రమాదములను గుర్తించును.

ప్రతి స్వేచ్ఛతాతర భాగమునకు, ప్రయోగములోని పంట ఒక వర్గ సంకలనము గుర్తించును. ప్రతివర్గ సంకలన మును అనురూప స్వేచ్ఛతాతరముతో విభజించిన, వర్గ మధ్యమమునుండి చలన మదింపు లభించును. వరుసలు, వంశములు, ఉపచారములు - వీటికి సంబంధించిన స్వేచ్ఛతా తరములను, వర్గ సంకలనములను గుర్తించి విడదీసిన, ప్రమాదముల వర్గమధ్యమము ఒక పాదులోని పంట యందు ప్రమాదము యొక్క యాదృచ్ఛికతా విలువను గుర్తించును.

వ్యవసాయ ప్రయోగములో ఒక లాటిన్ చతురము వాడిన లభించు శుద్ధత 2% క్రమ ప్రమాదముకంటె తక్కువ యగును.

చతురములు : మొదటి విధ లాటిన్ చతురమునకు కర్ణచతురము అని పేరు. ఇందు పొరబాట్లు జరుగుటకు ఎక్కువ అవకాశము కలదు. యాదృచ్ఛికతకు అవ

కాశము లేదు. ఒక పాదు ఒక వరుస యందును, ఒక వంశము నందును మాత్రమే కనబడును.

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

చిత్రము 385 కర్ణచతురము

ఈ లోపములను సవరించుటకు 1872 లో నట్ విక్ వేరొక విన్యాసమును ప్రతిపాదించెను.

ఇది పై విన్యాసములో ప్రతి వరుసను ఒకటి, రెండు చోట్లు ముందుకు త్రోయుటవలన లభించును.

కర్ణ చతురముల వలన లభించు ప్రమాదము నట్ విక్ చతురములవలన లభించు ప్రమాదముల కంటె చాల ఎక్కువ యని ఇతర శాస్త్రజ్ఞులు నిరూపించిరి.

లాటిన్ చతురమునకు ఉదాహరణముగా ఒక విన్యాసమును వివరింతము: ఒక ఢిల్లీ సంఘ సభలో 16 మంది

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B

చిత్రము 386 నట్ విక్ చతురము

సభ్యులు కలరు. వారిని విమర్శించినపుడు వారొక వినోద విన్యాసములో కనబడిరి. వారు చెరియొక ప్రదేశమునకు నలుగురి వంతున తమిళ, ఆంధ్ర, కర్ణాటక, వంగ ప్రదేశములకు చెందినవారు. వారందరు 4 విధములగు వయస్సులలో నుండిరి. 30, 35, 40, 45 సంవత్సరములు. ఒకే ప్రదేశస్థులలో ఇద్దరు ఒకే వయస్సులో నుండకూడదు.

ప్రదేశము / వయస్సు	తమిళ	ఆంధ్ర	కర్ణాటక	వంగ
30	విధురుడు డాక్టర్ కాంగ్రెస్	స్వతంత్ర అవివాహితుడు లాయర్	సన్యాసి సోషలిస్టు ఉపాధ్యాయుడు	వివాహితుడు సైనికుడు జనసంఘ
35	వివాహితుడు సైనికుడు స్వతంత్ర	సన్యాసి ఉపాధ్యాయుడు కాంగ్రెస్	విధురుడు డాక్టర్ జనసంఘ	అవివాహితుడు లాయర్ సోషలిస్టు
40	సన్యాసి ఉపాధ్యాయుడు సోషలిస్టు	వివాహితుడు సైనికుడు జనసంఘ	అవివాహితుడు లాయర్ కాంగ్రెస్	విధురుడు డాక్టర్ స్వతంత్ర
45	అవివాహితుడు లాయర్ జనసంఘ	విధురుడు డాక్టర్ సోషలిస్టు	వివాహితుడు సైనికుడు స్వతంత్ర	సన్యాసి ఉపాధ్యాయుడు కాంగ్రెస్

వారిలో నలుగురు లాయర్లు, నలుగురు సైనికులు, నలుగురు వైద్యులు, నలుగురు ఉపాధ్యాయులు,

నలుగురు కాంగ్రెస్‌వాదులు, నలుగురు జనసంఘము వారు, నలుగురు సోషలిస్టులు, నలుగురు స్వతంత్ర పార్టీ వారు.

తుదకు నలుగురు అవివాహితులు, నలుగురు వివాహితులు, నలుగురు విధురులు, నలుగురు సన్యాసులు.

ఒకే దేశస్థులలో ఒక తరగతికి చెందినవారు ఒకరికంటె ఎక్కువ ఉండకూడదు. అదియును గాక,

జనసంఘ పార్టీలో ఒక వ్యక్తి తమిళ అవివాహిత లాయర్ 45 సంవత్సరముల వయస్సుగలవాడు, రెండవ వ్యక్తి 40 సంవత్సరముల వయస్సుగల వివాహిత ఆంధ్ర సైనికుడు, మూడవ వ్యక్తి 35 సంవత్సరములు వయస్సు గల కర్ణాటక సన్యాసి డాక్టర్. ఒక కర్ణాటక సోషలిస్టు వయస్సు 30 ఏండ్లు. ఆంధ్ర కాంగ్రెస్ పక్ష వ్యక్తికి 35 సంవత్సరములు, తమిళ ఉపాధ్యాయుని వయస్సు 40 ఏండ్లు.

ఈ అంశములను క్రోడీకరించి పు. 488 లో చూపినటుల ఒక పథకములో అమర్చుము :

ఇట్టి విధానమును కృషిశాఖయందుపయోగించి, పంటను అభివృద్ధిచేయు మార్గము శాస్త్రజ్ఞులు పరిశీలించుచున్నారు.

ఆచార్య

లాప్‌లాస్ (1749 - 1827) : పియరీ సైమన్ లాప్‌లాస్ ఒక పేద ఫ్రెంచి కుటుంబమున జన్మించెను; పారిస్‌లో ఒక సైనిక పాఠశాలలో గణితాచార్యుడుగా పని చేసెను. ఆధునికసంభావ్యతాసిద్ధాంతమునకు పునాది వేసిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఇతడే. తన గణిత ఖగోళ శాస్త్ర నిర్వాహమువలనఅతడు ఫ్రాన్సుదేశపు న్యూటన్ అని పేరందినాడు సౌరకుటుంబమున కంతకును న్యూటన్ గురుత్వాకర్షణ నియమమునుఅన్వయింపజేయుటయే లాప్‌లాస్ జీవిత నిర్వాహము.



లాప్‌లాస్
చిత్రము 337

అతి సరళపక్షములలో తప్ప విలోమవర్గనియమమును అనుసరించి, పరస్పరము ఆకర్షించుకొనుచున్న మూడు వస్తువులగతిని నిర్దేశించు సమస్యయే అసాధ్యమయ్యెను. ఇంతకన్న కఠినతరమయిన అనగా సూర్యునియొక్క, సూర్యుని చుట్టు భ్రమించుచున్న గ్రహములయొక్క చారములనన్నిటిని సమగ్రముగా నిర్ణయించుటకు లాప్‌లాస్ ప్రయత్నించెను. శని క్రమముగా విశాలాకాశములోనికి తప్పించుకొని పోవునా? ఎల్లప్పుడును సౌరకుటుంబము ఒకటిగనే యుండునా? గురునియొక్క త్వరణము గురుని సూర్యునిలో పడునట్లు చేయునా? ఏదో ఒకనాడు చంద్రుడు భూమిని గ్రుద్దునా? గతిసంక్షోభముల ఫలితములు సంచితములగునా లేదా? అవి ఆవర్తక ధర్మములు కలవియా? సౌరవ్యవస్థాస్థైర్యమును గురించిన ప్రధాన సమస్యకు అంగములుగా ఇవి, ఇట్టివి మరికొన్ని సమస్యలు లాప్‌లాస్‌చే పరిశీలింపబడినవి.

సూర్యుని నుండి గ్రహముల మాధ్యమదూరములు చిన్నచిన్న ఆవర్తక విచలనములకు గురిఅయినను అవి మొత్తములో సీమితములు అను ముఖ్య విషయమును లాప్‌లాస్ తన 24వ ఏట నిరూపించెను. ఇది అతని మొదటి ఆవిష్కరణమయినను మిక్కిలి ప్రధానమైన విషయము. లాప్‌లాస్ యొక్క సౌరవ్యవస్థా శోధనలు 5 సంపుటములలో 26 ఏండ్ల కాలమున విస్తరించబడినవి. ఈ గ్రంథమందతడు సౌరకుటుంబము స్థిరమని నిరూపించెను. కాని ఈ పరిశీలనలో భూమియొక్క దైనందిన పరిభ్రమణమునకు నిరోధకముగా ఆచరించుచున్న సముద్రముయొక్క పోటుపాటుల ఘర్షణను (టైడల్ ఫ్రిక్షన్) పరిగణనలోనికి తీసికొని రాలేదని జ్ఞాపకముంచుకొనవలెను. లాప్‌లాస్ తరువాతి కాలములో సౌరకుటుంబమును గురించి ఎంతయో విజ్ఞానము ప్రకటింపబడినది. కాని వాస్తవిక సౌరకుటుంబముయొక్క స్థైర్యమును గురించిన సమస్య నేటికి అసాధితముగనే మిగిలియున్నది. ఈ సౌరకుటుంబమందు ప్రేక్షకునికి కన్పట్టు సంకీర్ణయాతాయాతఆవర్తనములు అస్వారస్యమని విసుగుకొను మహానుభావులు భావికాలమందు ఎప్పుడో ఒకనాడు సూర్యగోళము ప్రేలి, ఆకాశములోనికి ప్రళయాగ్ని ప్రవాహమును పంపించి, ఒక క్రొత్త తారయై మన భూమి, దానితోపాటు మనము పరమాణుమయవాయుస్థితిని చెందవచ్చునను ఆధునిక ఊహను చేపట్టి, ఊరడిల్లుదురుగాక!

క్షేత్రశక్మ భావమును వికసింపజేసి లాప్‌లాస్ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$ అను అంతరీకరణ సమీకరణము (దీనికి లాప్‌లాస్ సమీకరణమని పేరు) శూన్యాంతరాళమందు క్షేత్రశక్మ విలువ v ను అనుసరించుచున్నదని చూపెను.

లాప్‌లాస్ ఇతర గణితనిర్వాహములలో ఒకటి 'గోళాభము దాని వెలుపలనున్న ఒక కణముపై ఆకర్షణ

నిర్ణయను' అనునది. ఈ పరిశోధనమార్గమందు గోళీయ స్వరాత్మక ఫలములను అతడు ప్రవేశపెట్టెను.

లాప్‌లాస్ అనేకములగు వైజ్ఞానిక, రాజకీయ గౌరవములకు పాత్రమైనాడు. ఈయనకు మార్క్వెస్ బిరుదు ప్రసాదింపబడినది. కాని వ్యక్తిగతముగ విమర్శింపబడుచో లాప్‌లాస్ అహంకారి; స్వార్థపరాయణుడు; ఇతరుల పరిశోధనల ఫలితములను అనేకములను వారికి తన అధమర్ణత ప్రకటింపకయే అతడు వాడుకొనెను; అధికార పదవిలో ఉన్నవారి నైచ్యాను సంధానమునకు వీలగునట్లు తన రాజకీయపక్షములను మార్చుకొను చుండెడివాడు. ఇతడు సభ్యంమన్యుడు; తన వయఃకాలములో తనకు ఉపకారము చేసిన వారి యెడల ఏమాత్రము కృతజ్ఞతలేనివాడు. అ. న.

లైబ్నిట్జ్ (1646 - 1716): ఇతడు జర్మనీ దేశపు గణితజ్ఞుడు; దార్శనికుడు; రాజకీయ తంత్రవేత్త. కలనశాస్త్రమును కనిపెట్టిన గౌరవము న్యూటన్‌తో ఇతనికిని దక్కినది. అయితే వారు వాడిన చిహ్నములు వేరు. ఇప్పుడు మనమువాడుచున్న dx, dy లు లైబ్నిట్జ్ ఉపయోగించినవి. స్వతంత్ర చలరాశిని కాలము t అని తీసికొని, న్యూటన్ t మారగా x యొక్క మార్పురేటును $\dot{x}$ అను చిహ్నముచే గుర్తించెను. $\frac{dx}{dt}$ అని వ్రాయుటలో స్వతంత్ర చలరాశి t అని మనకు విశదమగుచున్నది; కాని $\dot{x}$ చిహ్నములో చలరాశి ఏదియో తెలియుటలేదు. కనుక పెక్కు స్వతంత్ర చలరాశులున్నప్పుడు న్యూటన్ వ్రాసిన పద్ధతి పనికిరాదు.



లైబ్నిట్జ్
చిత్రము 338

ఇంగ్లండులోని న్యూటన్ అనుయాయులకును, జర్మనీలోని లైబ్నిట్జ్ అనుయాయులకును ఎవరు మొదట కలనశాస్త్ర భావమును స్వతంత్రముగా కనిగొనినారని ఒక ఉగ్రమయిన వాదము తీవ్రముగా జరిగెను. ఆధునిక దృష్టిలో వారిద్దరును స్వతంత్రముగనే కలనశాస్త్ర ముఖ్య భావములను కనిపెట్టిరి. ఈ వాదముయొక్క పర్యవసానముగ ఇంగ్లండులో న్యూటన్ చిహ్నములును, యూరపు ఖండములో dy/dx చిహ్నములును వాడబడినవి. ఇట్లు సుమారు 100 సంవత్సరములు కడచెను. కనుక లైబ్నిట్జ్ చిహ్నములను ఉపయోగించి, ఆయ్‌లర్, లాగ్రాన్జ్, లాప్‌లాస్‌లు సాధించిన కలనశాస్త్ర పురోగమనమును ఇంగ్లండులోని గణితజ్ఞులు అనుసరించలేదు. తరువాత dy/dx చిహ్నముల సౌకర్యమును గుర్తించి, ఇంగ్లండులో కూడ ఈ పద్ధతి అనుసరింపబడినది.

కలనశాస్త్రము కాక లైబ్నిట్జ్ వేష్టన వక్రముల గురించి, వక్రీయ వృత్తముల గురించి వ్రాసియున్నాడు. అయితే రెండవ దాని గురించిన వ్యాసములో తప్పులున్నవి. అ. న.

లొబషేవ్‌స్కీ, నికోలాయ్ ఇవానోవిచ్ (1793 - 1856): యూక్లిడేతర జ్యామితి నిర్మాతలలో ఒకడైన ప్రసిద్ధ రష్యా గణితశాస్త్రవేత్త. 1793, అక్టోబర్ 11నాడు జననము. కజాన్ యూనివర్సిటీలో పట్టభద్రుడై, అచ్చటనే ప్రొఫెసర్‌గ ఉండెను.

ఇతడు, హంగేరీ గణితశాస్త్రవేత్త అయిన బాల్యాయి విడివిడిగా యూక్లిడ్ ఐదవ స్వీకృతత్త్వమును 'ఒక స్థిర బిందువుగుండా దత్తరేఖకు సమానాంతరముగ ఒకే ఒక రేఖను గీయనగును' విమర్శించి దానికి విరుద్ధమైన అతిపరాస జ్యామితి ప్రవేశపెట్టిరి. వీరి వ్యవస్థ 'ఏ బిందువు నుండి అయిన మరొక రేఖతో ఉమ్మడి బిందువులేని అనంత రేఖలను గీయనగును; త్రిభుజములోని అన్ని కోణముల మొత్తము 180° కన్న తక్కువ' అని తెల్పును. రీమాన్ ప్రవేశపెట్టిన విలోప జ్యామితిలో 'సమానాంతర రేఖలే లేవు; త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తము 180° కన్న ఎక్కువ'.

జ్యామితి సూత్రములు (ప్రిన్స్‌పుల్స్ ఆవ్ జ్యామెట్రీ 1829 - 30), ఊహాకల్పిత జ్యామితి (ఇమాజినరీ జ్యామెట్రీ 1835), జ్యామితి నవీన సూత్రములు (న్యూ ప్రిన్స్‌పుల్స్ ఆవ్ జ్యామెట్రీ (1835 - 38) మొదలగునవి ఇతని ప్రధాన రచనలు. ఇవి అన్ని జర్మనీభాషలోనికి అనువాదముచేయబడినవి (చూ. రీమాన్ - పు. 474). పొ. ల. నా.

వక్రములు: ప్రారంభములో కొన్ని జ్యామితి విషయములను చర్చింతము. ఒక ఋజురేఖ పై నాలుగు బిందువులు A, B, C, D ఉన్నయెడల $\frac{AB.CD}{AD.CB}$ అను నిష్పత్తికి వానియొక్క వజ్రనిష్పత్తి అని పేరు. దానినే $(ABCD)$ చే గుర్తింతురు. దాని విలువ $= -1$ అయినచో (A, B, C, D) వరుస స్వరాత్మకము అని చెప్పుదురు. ఒక బయటి బిందువు 'O'తో వీనిని చేర్చిన మనకు రేఖాశలాకము లభించును. ప్రతి ఋజురేఖయు ఈ శలాకమును

$(ABCD)$ కి సమమగు వజ్రనిష్పత్తి గల నాలుగు బిందువులలో ఖండించును. దీనిని శలాక యొక్క వజ్ర నిష్పత్తి యందురు.

రెండు రేఖలపై రెండు బిందు వరుసలుండి, ఒక వరుస లోని ఏ నాలుగు బిందువుల వజ్ర నిష్పత్తియైనను రెండవ వరుసలో దానికి అనురూపమగు నాలుగు బిందువుల వజ్ర నిష్పత్తికి సమానమయినచో, ఆ బిందువరుసలు విక్షేపక లేదా హోమోగ్రాఫిక్ వరుసలు అని చెప్పుదురు. ఏలన ఇవి విక్షేపము వలన పొందవచ్చును. ఈ రెండు వరుస లును ఒకే ఋజురేఖపై నుండవచ్చును. ఒక బిందువును మొదటి వరుసలోగాని, రెండవ వరుసలోగాని చేరినట్లు తీసికొనవచ్చును. ఎటు తీసికొనినను, దానియొక్క అను రూప బిందువు ఒకటేయయిన, ఆ అనురూపతను సమ న్వయము (ఇన్వల్యూషన్) అని చెప్పుదురు.

(A, A'), (B, B') ... మొదలగు బిందువులు సమన్వ యములో నుండిన, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \ldots = K^2$ అను సంబంధము ఉండునట్లు ఒక బిందువు 'O' కలదు. K ఒక స్థిరరాశి.

$OL^2 = OL'^2 = K^2$ అగునట్లు బిందువులు L, L' ఉండిన, L, L' బిందువులను సమన్వయము యొక్క బిందు యుగ ళము అని చెప్పుదురు. ఈ బిందువులను బయటనుండు ఒక శీర్షము V బిందువునకు చేర్చిన సమన్వయ శలాక లభించును.

వృత్తము : వక్రములలో ముఖ్యమయినది వృత్తము. ఒక స్థిర బిందువు 'O' నుండి స్థిర దూరము r లో జరుగు బిందువుయొక్క పథము వృత్తమగును. O బిందువు కేంద్ర మగును ; వ్యాసార్ధము r. ఒక ఋజురేఖలో లేని మూడు బిందువుల గుండ ఒక వృత్తము గీయవచ్చును. వృత్తము పైనుండు ఒక బిందువు P యొక్క స్పర్శరేఖకు (అనగా P యందు రెండు సన్నిహిత బిందువుల చేర్చు జ్యా యొక్క అవధికి) P బిందువు గుండ వెళ్లు వ్యాసార్ధము లంబముగా నుండును. జ్యాచే ఖండింపబడిన వృత్త భాగ ములకు వృత్త ఖండములు అని పేరు.

ఒక ఖండములోని కోణములు సమానములు ; అర్ధ వృత్తములోని కోణము లంబకోణము. ఒక వృత్తములో చతుర్భుజము అంతర్లిఖితమయిన దానికి వృత్తీయ చతుర్భు జము అని పేరు. దాని ఎదుటి కోణముల మొత్తము రెండు లంబ కోణములు.

దత్తపరిధి (చుట్టుకొలత) గల అన్ని వక్రములలో వృత్త మునకు గరిష్ఠ వైశాల్యము కలదు. దత్తవైశాల్యముగల వక్రములలో వృత్తమునకు కనిష్ఠ పరిధి కలదు.

వ్యాసార్ధము k గల ఒక వృత్తము యొక్క కేంద్రము O; P, P' బిందువులు ఒక వ్యాసము పైనుండి, $OP' \cdot OP = k^2$ అయినచో P యొక్క విలోమ బిందువు P' అనబడును.

P ఒక వక్రముపై ఉన్నచో P' యొక్క పథము మరి యొక వక్రమగును. దానికి మొదటి వక్రముయొక్క విలోమ వక్రమని పేరు ; విలోమ వక్రమునకు విలోమ వక్రము ప్రారంభ వక్రముగా నుండును. సామాన్యముగా ఒక వృత్తముయొక్క విలోమము మరియొక వృత్తము. కాని, O బిందువు వృత్తముపై నుండినచో, దాని విలోమము ఒక ఋజురేఖ యగును. ఇది O గుండ వెళ్లు వ్యాసమునకు లంబముగా నుండును.

శాంకవము : ఒక పరిభ్రమణ శంకువును ఒక సమతలము ఛేదించు వక్రమునకు శాంకవము అని పేరు. శీర్షము గుండ వెళ్లు సమతలముచే నేర్పడు ఋజురేఖా ద్వయము కూడ శాంకవముయొక్క అవధి అని తెలిసికొనవలెను. ఒక శంకుయొక్క జనక రేఖలను శీర్షముగుండ పొడిగించిన యుగళశంకు ఏర్పడును. ఒక సమతలము శంకువును శీర్షమునకు ఒకే వైపున ఖండించినచో, సంవృత అండా కార వక్రము ఒకటి ఏర్పడును. దానికి దీర్ఘ వృత్తము అని పేరు. వృత్తము దీనియొక్క ప్రత్యేక రూపము.

యుగళ శంకువుల రెండింటిని ఒక సమతలము ఖండించి నచో రెండు శాఖలు గల వక్రము ఒకటి ఏర్పడును. దానికి అతిపరాస అనిపేరు. సమతలము శంకుయొక్క ఒక జనక రేఖకు సమాంతరమయిన, మనకు పరాస లభించును. అది వివృతము, అనంతవ్యాప్తి కలిగినది.

ప్రాచీన గ్రీకులు శాంకవ లక్షణములను అనేకములను కనిపెట్టిరి. తన కాలములో ప్రచారములోనున్న శాంకవ లక్షణములను గ్రంథరూపములో పాపుస్ (క్రీ. శ. 300) వెలువరించెను.

శంకు సహాయము లేకుండ శాంకవ లక్షణముల పరిశో ధించవచ్చును. S ఒక స్థిర బిందువు ; l ఒక స్థిర రేఖ. ఒక బిందువు P తీసికొని, SP కిని, P నుండి l కు లంబ దూరము నకును గల నిష్పత్తి e ఒక స్థిరరాశి అయినచో P యొక్క పథము ఒక శాంకవము. S శాంకవనాభి ; l నియత రేఖ ; e వికేంద్రత. $e < 1$ అయినచో అది దీర్ఘవృత్తము ; $e = 1$ అయిన పరాస, $e > 1$ అయిన అతిపరాస అగును.

పై నిర్వచనముతో ఒక శాంకవమును గీయవచ్చును. l కు లంబముగా S గుండ వెళ్లు ఋజురేఖ వక్రమునకు సౌష్ఠవాక్షము. దీర్ఘవృత్తమునకు, అతిరాసకు మరి యొక సౌష్ఠవాక్షము కలదు. అవి రెండు పరస్పర

లంబములై, కేంద్రమువద్ద ఖండించుకొనును. కేంద్రము గుండ వెళ్లుచు, వక్రముచే అంతరించు రేఖలు కేంద్రముచే సమముగా విభక్తములగును. కాబట్టి ఈ వక్రములకు వేరొక నాభి S', వేరొక అనురూప నియత రేఖ l' ఉండునని తెలియుచున్నది.

సంవృత శాంకవములయొక్క అక్షములు AA', BB' అయిన శాంకవమును వానిచే ఖండింపబడు నాలుగు బిందువులు శాంకవ శీర్షికలనబడును. దీర్ఘవృత్తములో ఈ నాలుగు బిందువులు వాస్తవికములు. AA' దీర్ఘాక్షము, BB' హ్రస్వాక్షము. అతిపరాసలో బిందువులు B, B' వాస్తవికములు కావు.

వేదమునందు దీర్ఘవృత్తమునకు త్రినాభియనిపేరు. ఒక శంకును ఒక సమతలము ఖండింపగా నేర్పడు భాగములలో అంతర్లిఖితమగు గోళములచే సమతలమున స్పృశింపబడు బిందువు శాంకవము యొక్క నాభి బిందువు అగును.

శాంకవములకు కొన్ని ఉమ్మడి లక్షణములు కలవు. ఒక ఋజురేఖ శాంకవమును రెండు బిందువులందు ఖండించును. కాబట్టి, వానికి రెండవ తరగతి వక్రములని పేరు. వాని సమీకరణము క్రింది విధముగా నుండును :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ఒక బిందువు P నుండి శాంకవమునకు రెండు స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చును. ఈ రెండు స్పర్శ బిందువులచేర్చు రేఖ P యొక్క ధ్రువరేఖయనబడును; ఆ రేఖయొక్క ధ్రువము P. P గుండ వెళ్లురేఖ శాంకవమును A, Bల లోను P యొక్క ధ్రువరేఖను Q లోను ఖండించిన $(PAQB) = -1$. ఈ లక్షణమును ఉపయోగించి ధ్రువరేఖ యొక్క నిర్వచనము ఇవ్వవచ్చును. A, B లందు గీయబడిన స్పర్శ రేఖలు P యొక్క ధ్రువ రేఖపై సంధించును.

P యొక్క ధ్రువరేఖ P' గుండ వెళ్లిన, P' యొక్క ధ్రువరేఖ P గుండ వెళ్లును. అట్టి బిందువులు రెండును సంయుగ్మ (కాంజుగేట్) బిందువులు. అట్లే ఒక రేఖ యొక్క ధ్రువము మరియొక రేఖపై నుండిన, రెండవ రేఖయొక్క ధ్రువము మొదటి రేఖపై నుండును. అట్టి రేఖలకు సంయుగ్మ (కాంజుగేట్) రేఖలని పేరు.

కొన్ని ముఖ్య లక్షణముల వివరింతము :

(1) నియతరేఖ అనురూప నాభియొక్క ధ్రువరేఖ; కాబట్టి నాభిగుండ వెళ్లు జ్యాల మొనలవద్ద నుండు స్పర్శ రేఖలు నియత రేఖపై సంధించును ; పరాసయందు ఇవి లంబములుగా ఖండించును.

(2) పరస్పర లంబములుగా నుండు స్పర్శరేఖలు ఒక వృత్తముపై సంధించును. దానికి నియత వృత్తము అని పేరు. దాని కేంద్రము శాంకవ కేంద్రముగనే యుండును. పరాస విషయములో నియత వృత్తము ఒక ఋజురేఖ అగుచున్నది.

(3) నాభినుండి స్పర్శరేఖపై లంబముయొక్క పాదము పరాసలో శీర్షమువద్ద నుండు సర్శ రేఖపై నుండును. ఇతర శాంకవములకు దీర్ఘాక్షము వ్యాసముగా గల వృత్తమై యుండును.

(4) స్పర్శ బిందువునకును, నియత రేఖను మధ్యనుండు స్పర్శరేఖ భాగముచే అనురూప నాభివద్ద లంబకోణ మేర్పడును.

(5) SY, $S'Y'$ నాభి బిందువుల నుండి ఒక స్పర్శరేఖ లంబములయినచో $SY \cdot SY' = b^2$; దీర్ఘవృత్తములో b అర్ధహ్రస్వాక్షము. అతిపరాసలో $SY \cdot S'Y' =$ ఒక స్థిరరాశి.

(6) P వద్ద స్పర్శరేఖ దీర్ఘవృత్తమయిన SPS' యొక్క బయటి కోణమును, అతిపరాస అయిన లోపలి కోణమును సమభాగముగా విభజించును.

(7) P బిందువు ఒక దీర్ఘవృత్తముపై నుండినచో $PS + PS' =$ దీర్ఘాక్షము.

అతి పరాసకు $SP - SP' = \pm 2a$.

(8) సమానాంతర జ్యా రేఖల మధ్య బిందువుల బిందుపథము ఒక వ్యాసము. సంవృత శాంకవములలో ఈ వ్యాసమునకు సమానాంతరముగ నుండు జ్యా రేఖలమధ్య బిందువులు మరియొక వ్యాసముపై నుండును. ఇట్టి వ్యాసముల జత పరస్పర సంయుగ్మ వ్యాసములు అనబడును.

(9) దీర్ఘవృత్తములో సంయుగ్మ వ్యాస వర్గముల మొత్తము ఒక స్థిరరాశి. సంయుగ్మ వ్యాసాంతముల వద్ద స్పర్శరేఖలచే ఒక సమానాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడును. దాని వైశాల్యము స్థిరము.

అతిపరాసలో కేంద్రము నుండి ఏర్పడు స్పర్శరేఖలు వక్రమును అనంతదూరములో తాకును. ఈ రెండు స్పర్శ రేఖలకు అసంపాతములు అనిపేరు. అసంపాతములు లంబములైన అతిపరాసను ఆయత అతిపరాస అందురు.

(10) ఒక అతిపరాస యొక్క సంయుగ్మ వ్యాసములు, అసంపాతములు, యుగళరేఖలు గల సమన్వయముగా నుండును.

(11) అసంపాతములచే అంతరించు అతిపరాస యొక్క స్పర్శరేఖ స్పర్శబిందువు వద్ద సమభాగములుగా విభజింపబడును.

(12) అసంపాతములు, అతిపరాసయొక్క స్పర్శరేఖలచే ఏర్పడు త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము స్థిరము.

(13) ఆయత అతిపరావలయముపై మూడు బిందువులు P, Q, R తీసికొనిన PQR త్రిభుజము యొక్క లంబ కేంద్రము వక్రముపై నుండును.

(14) ఒక త్రిభుజమునకు బహిర్లిఖితములగు ఆయత అతిపరావలయ కేంద్రములన్నియు త్రిభుజము యొక్క నవ బిందు వృత్తముపై నుండును.

రెండు వేల సంవత్సరములుగా మనకు తెలిసిన శాంకవ లక్షణములలో ముఖ్యములగు వానిలో కొన్ని ఈయబడినవి. ప్రస్తుత కాలములో కనుగొనిన వానిలో కొన్నిటిని గమనింతము.

(15) స్థిరబిందువులు A, B, C, D ఒక శాంకవముపై నుండిన, దానిపై చలబిందువు P చే నేర్పడు వజ్రనిష్పత్తి P (ABCD) ఒక స్థిరరాశి (చాసుల్ సిద్ధాంతము). విలోమముగా A, B, C, D నాలుగు బిందువులు; వానిలో ఏ మూడును ఒక ఋజురేఖలో నుండకూడదు. వజ్రనిష్పత్తి P (ABCD) కి ఒక స్థిరవిలువ యుండిన, P యొక్క బిందుపథము A, B, C, D గుండ వెళ్లు ఒక శాంకవము.

(16) విక్షేప సంబంధముగల (ప్రొజెక్టివ్) రెండు శలాకలలో అనురూపకిరణములు ఖండించు బిందువులన్నియును ఒక శాంకవముపై నుండును. రెండు శలాకలు ఒకే సమతలములో ఉండవలయును.

శలాక శీర్షములను చేర్చు రేఖయొక్క అనురూపరేఖ అదియేయయిన శాంకవము ఋజురేఖగా మారును.

(17) ఏకసమతల గతములగు రెండు రేఖలపై నుండు బిందువరుసలు విక్షేపీయవరుసలయినచో, అనురూప బిందువులచేర్చు రేఖలన్నియును ఒక శాంకవమునకు వేష్టనము లగును. కాని, ఆ రెండు రేఖలు ఖండించు బిందువు అను రూపబిందువు అయిన, తక్కిన అనురూప బిందువుల చేర్చు రేఖలు ఒకే బిందువుగుండ వెళ్ళును.

(18) నాలుగు స్థిరబిందువుల గుండ వెళ్లు శాంకవముల ఖండించు ఋజురేఖపై నేర్పడు బిందు జతలు సమన్వయములో నుండును.

(19) A, B, C, D, E, F బిందువులు ఆరును ఒక శాంకవముపై నుండిన (AB, DE), (BC, EF), (CD, AF) లచే ఏర్పడు బిందువులు ఒకే రేఖపై నుండును. దీనికి పాస్కల్ సిద్ధాంతమని పేరు (చూ. పాస్కల్ - పు. 375). పాస్కల్ సిద్ధాంతమువలన ఆరు బిందువులు ఒక శాంకవముపై నుండుటకు ఆవశ్యకమగునట్టియు, పర్యాప్తమగునట్టియు నిబంధన తెలియుచున్నది.

(20) ఒక షడ్భుజియొక్క భుజములు ఒక శాంకవమును స్పృశించిన ఎదుటి శీర్షముల చేర్చు రేఖలు ఒకే బిందువు గుండ వెళ్లును. ఇది బ్రయాన్ కాన్ సిద్ధాంతము.

సైక్లాయిడ్: ఒక వృత్తము ఒక ఋజురేఖపై జారకుండ దొర్లినపుడు ఆ వృత్త పరిధిపై నుండు ఒక బిందువుచే ఒక సైక్లాయిడ్ గీయబడును. ఇందు తోరణములవలె ఒక్కొకటి ఆనుకొని అనేక భాగములు కలవు. చిత్రము 339 (6) లో వృత్తము GPT భూమి AB పై దొర్లును. దాని పరిధిపై P ఒక స్థిర బిందువు; భూమిని తాకు G బిందువుగుండ వెళ్లు వ్యాసము GT. తోరణము యొక్క మధ్యబిందువు C; CX, CY లు వక్రమునకు C వద్ద క్రమముగా స్పర్శరేఖయు, అభిలంబరేఖయు అగును. పరిభ్రమణ తాత్కాలిక కేంద్రము G ; కాబట్టి PG సైక్లాయిడ్‌నకు P వద్ద అభిలంబ రేఖ అగును. PT దానికి P యందు స్పర్శరేఖ ; AB కి సమాంతరముగా P గుండ వెళ్లు రేఖ, CD వ్యాసముగా గల వృత్తముయొక్క పరిధిని Q వద్ద ఖండించినపుడు $AG =$ చాపము $GP =$ చాపము DQ; $\angle COQ = \theta$ అయిన, CX, CY లను నిరూపకాక్షములుగా తీసికొని, సైక్లాయిడ్ యొక్క సమీకరణములు క్రింద నీయబడినవి :

$$x = CM = a\,(\theta + \sin\theta)\,;\quad y = a\,(1 - \cos\theta).$$

$\angle PTX = \psi = \dfrac{\theta}{2}$ అనియు, చాపము $CP = s = 4\,a \sin\psi$ అనియు సులభముగా కనుగొనవచ్చును. $s = 4\,a \sin\psi$ ను వక్రముయొక్క సహజ సమీకరణము అందురు. P వద్ద వక్రతా వ్యాసార్ధము $= 2\,PG$. వక్రము (ఒక తోరణము) యొక్క పొడుగు $= 8\,a$; భూమికిని వక్రపరిధికిని మధ్య ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యము $= 3\pi a^2 =$ జనక వృత్త వైశాల్యమునకు మూడురెట్లు.

సైక్లాయిడ్ యొక్క అంతర్లుఠి సమాన పరిమాణము గల మరియొక సైక్లాయిడ్. దత్త సైక్లాయిడ్ యొక్క సూచీముఖములు A, B అంతర్లుఠియొక్క శీర్షములు; 4 a దూరమునందు CY లో అంతర్లుఠి యొక్క సూచీముఖము ఒకటి కలదు. ఈ వక్రమును ఉపయోగించి సైక్లాయిడ్ లోలకమును నిర్మించెదరు.

గురుత్వముచే ఒక కణము స్వేచ్ఛగా A నుండి B వరకు వేర్వేరు ఘర్షణలేని వక్రములపై జారుటకు పట్టుకాలము శీఘ్రతమమై యుండవలయుననిన ఆ వక్రము సైక్లాయిడ్‌గా నుండవలెను.

ఎపిసైక్లాయిడ్, హైపోసైక్లాయిడ్: ఒక వృత్తముపై మరియొక వృత్తముజారక దొర్లినపుడు, దొర్లెడు వృత్త పరిధి బిందువుచే లోపల దొర్లిన హైపోసైక్లాయిడ్ ; బయట

దొర్లిన ఎపిసైక్లాయిడ్ ఏర్పడును. వృత్త వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి అకరణీయసంఖ్య అయినచో, వక్రము సంవృతము ; అనగా ఉల్లేఖన బిందువు ప్రారంభ స్థానమును చేరును. సూచీ ముఖములు పరిమితములు.

స్థిరవృత్త వ్యాసార్ధము a అనియు, దొర్లు వృత్త వ్యాసార్ధము b అనియు తీసికొనెదము.

$a = b$ అయిన, ఎపిసైక్లాయిడ్ కార్డియాయిడ్ అగును. $a = 2b$ అయిన, హైపోసైక్లాయిడ్ స్థిరవృత్తముయొక్క వ్యాసమగును. $a = 4b$ అయిన హైపోసైక్లాయిడ్ 4 సూచీ ముఖములు గలదగు నాక్షత్రక వక్రము అగును. దాని సమీకరణము $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ఈ వక్రమునకు నిరూపకాక్షముల మధ్యనుండు స్పర్శరేఖ పొడవు ఎల్లపుడు ఒకే విలువగలదగును.

$a = 3b$ గా గల హైపో సైక్లాయిడ్ యొక్క పటమును చిత్రము 339 (3) లో చూడవచ్చును.

కాటినెరీ, దాని బహిర్లతి : ఏకరూప భారముగల ఒక గొలుసును కొనల నుండి వ్రేలాడ విడిచిన ఏర్పడు వక్రమునకు కాటినెరీ అని పేరు. దాని క్రింది స్థానపు బిందువు C గుండ వెళ్లు నిలువు రేఖకు అది సౌష్ఠవముగా నుండును. ఈ రేఖను y— అక్షముగాను, C స్థానపు బిందువునకు క్రింద c దూరములో y— అక్షమునకు లంబముగా x— అక్షమును తీసికొనిన వక్రముయొక్క సమీకరణము : $y = c \cosh \frac{x}{c}$ అగును.

x— అక్షమునకు నియత రేఖయని పేరు. గొలుసులో ప్రతి బిందువువద్ద గల తానకము y— నిరూపకమునకు అనుపాతముగా నుండును. y— అక్షము వక్రమును భేదించు బిందువు C ను అనుకొని చాపము CP యొక్క పొడవు s అయినచో, $y^2 = c^2 + s^2$ వక్రముయొక్క సహజ సమీకరణము $s = c \tan \psi$. ఇచ్చట ψ స్పర్శరేఖకును x— అక్షమునకును మధ్య కోణము.

ప్రతి బిందువువద్దను గల వక్రతా వ్యాసార్ధము అచటి అభిలంబరేఖయొక్క నిడుపుకు సమానము. ఈ నిడుపును ఆ బిందువునుండి x— అక్షము వరకు తీసికొనవలెను. ఒక స్పర్శరేఖకు స్పర్శబిందువు యొక్క కోటి యొక్క పాదము నుండి లంబపు పొడవు స్థిరముగా నుండును. దాని ప్రమాణము $= c$. ఈ లంబ పాదము కాటినెరీ యొక్క బహిర్లతిని ఉల్లేఖనము చేయుచున్నది. దీనికి ట్రాక్ట్రిక్స్ అని పేరు. దాని సూచీ ముఖము C వద్ద నుండును; నియతరేఖకు అసంపాతములైన శాఖలు రెండు దీనికి గలవు [చూ. చిత్రము 339 (4)].

ఒక ఋజురేఖ వెంబడి ఒకడు వెళ్లుచు, గరుకు నేలపై ఒక రాతిని దారముతో కట్టి ఈడ్చినచో, ట్రాక్ట్రిక్స్ ఏర్పడును.

సిస్సాయిడ్ : చిత్రము 339 (2) లో AB ఒక వృత్త వ్యాసము ; A గుండ వెళ్లు ఒక రేఖ వృత్తమును P యందును, B వద్దనుండు స్పర్శరేఖను T వద్దను ఖండింపనిమ్ము. AT ఋజురేఖలో $AQ = PT$ అయిన, Q యొక్క బిందుపథము ఒక సిస్సాయిడ్. A మూలబిందువుగాను, AB, AY రేఖలను x, y— అక్షములుగాను తీసికొనిన, వక్రముయొక్క సమీకరణము $y^2(2a - x) = x^3$. ఇందు $AB = 2a$; దానికి A వద్ద ఒక సూచీముఖము కలదు. B వద్ద నుండు రేఖ BT ఈ వక్రమునకు అసంపాతము.

ఈ వక్రము సహాయముతో రెండు దత్తరాశులకు రెండు మధ్యమానుపాతములు కనుగొనుటకు వీలగును. అనగా a, b రెండు రాశులు తీసికొనుము ; $a^{2/3} b^{1/3}$, $a^{1/3} b^{2/3}$ రాశులను నిర్మించవచ్చును.

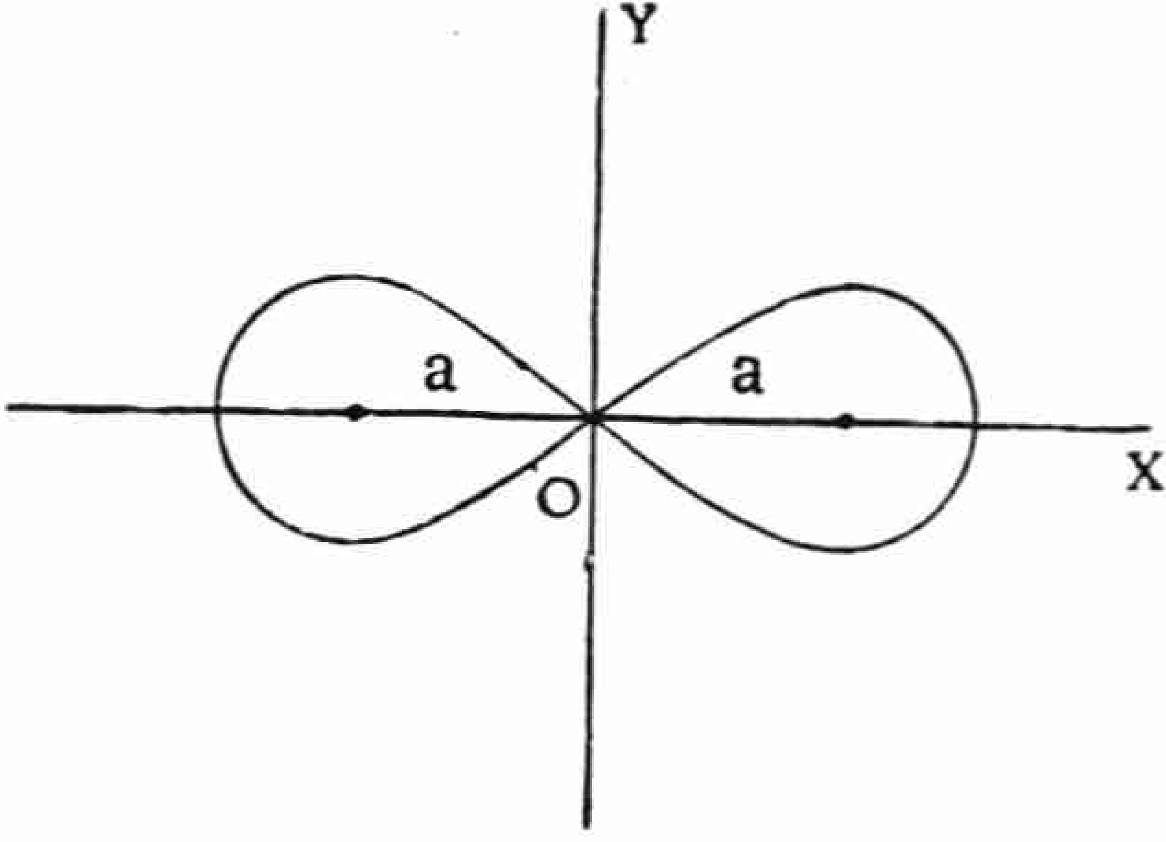
లిమేసాన్ : E కేంద్రముగాగల ఒక వృత్తములో OD వ్యాసము తీసికొనుము. ఋజువుగాగల కమ్మి PP′ ఒకటి O గుండ వెళ్లుచు, దాని మధ్య బిందువు Q వృత్తముపై జరుగనిమ్ము. కమ్మియొక్క కొనలు P, P′ రెండును లిమేసాన్‌ను ఉల్లేఖించును. $OD = b$, $PP' = 2a$ అయిన వక్రముయొక్క సమీకరణము : $r = a + b \cos \theta$; ఇందు O ధ్రువము ; OD మూలరేఖ. వక్రముయొక్క ఆకారము a, b ల విలువలపై ఆధారపడియుండును [చూ. చిత్రము 339 (7)]. $a < b$ అయిన, వక్రమునకు రెండు పాశీలు (లూప్స్) కలవు. అవి ధ్రువమువద్ద ఖండించుచు, ఒక దానిలో నొకటి ఇమిడియుండును.

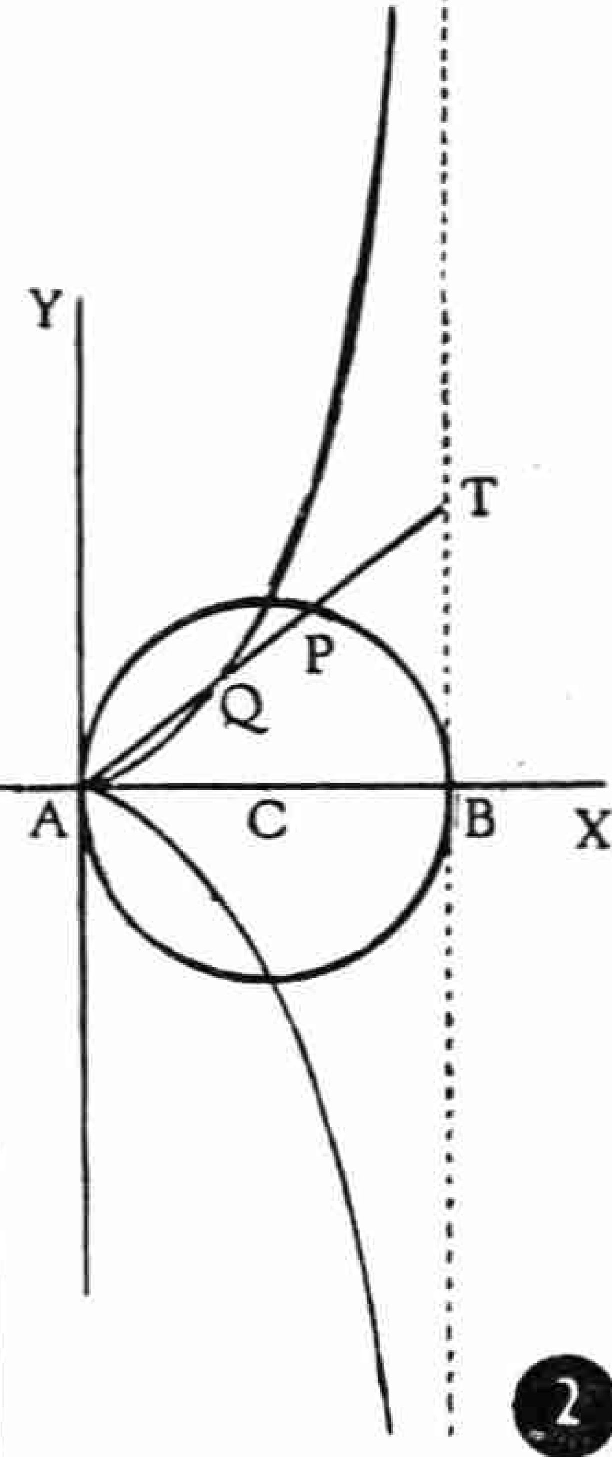
$a > b$ అయిన, వక్రమునకు ఒక పాశీ యుండును ; ధ్రువము వక్రము లోపల ఉండును.

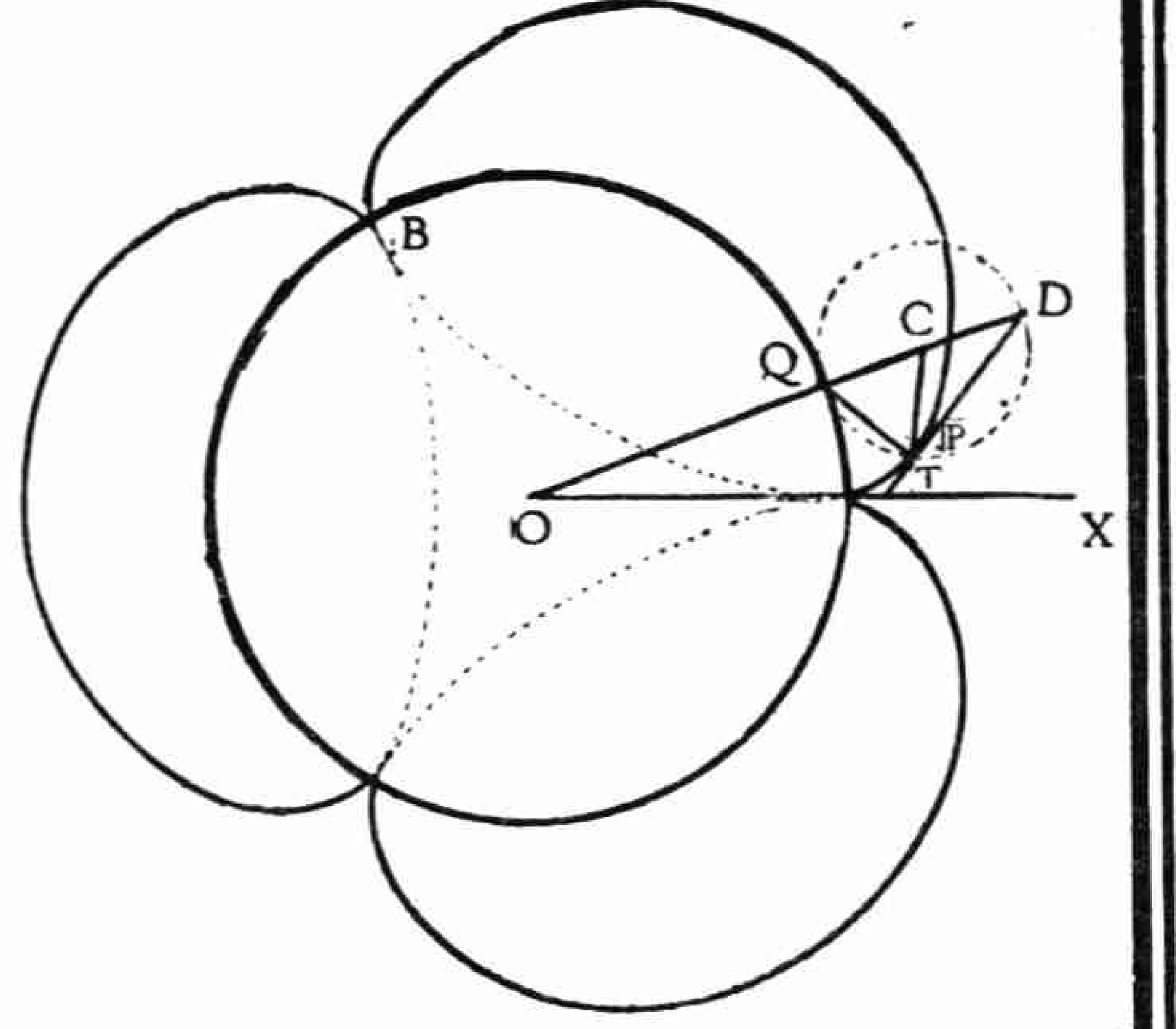
$a = b$ అయిన, వక్రమునకు కార్డియాయిడ్ అని పేరు ; ఇది ఒక పాశీ గలది : సూచీ ముఖము ధ్రువము వద్ద నుండును.

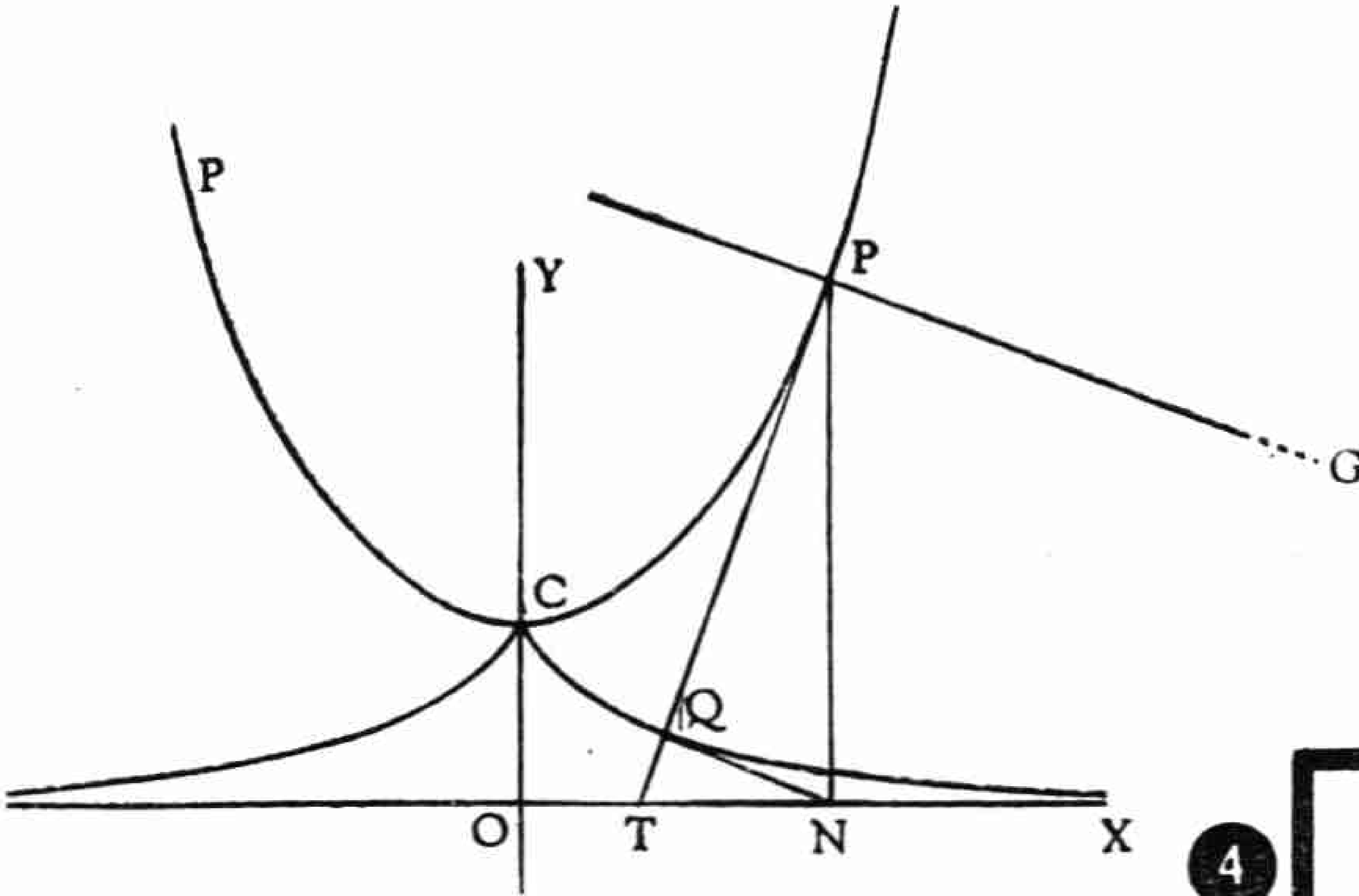
P లేదా P′ గతియొక్క తాత్కాలిక కేంద్రము Q గుండ వెళ్లు వ్యాసము యొక్క రెండవ కొన R. O గుండవెళ్లు జ్యారేఖల కొనలు P, P′ లో నుండు అభిలంబరేఖలు జనక వృత్తముపై ఖండించును. కార్డియాయిడ్‌లో ఈ రేఖలు పరస్పర లంబములు ; అచ్చటి స్పర్శరేఖలు కూడ లంబములు.

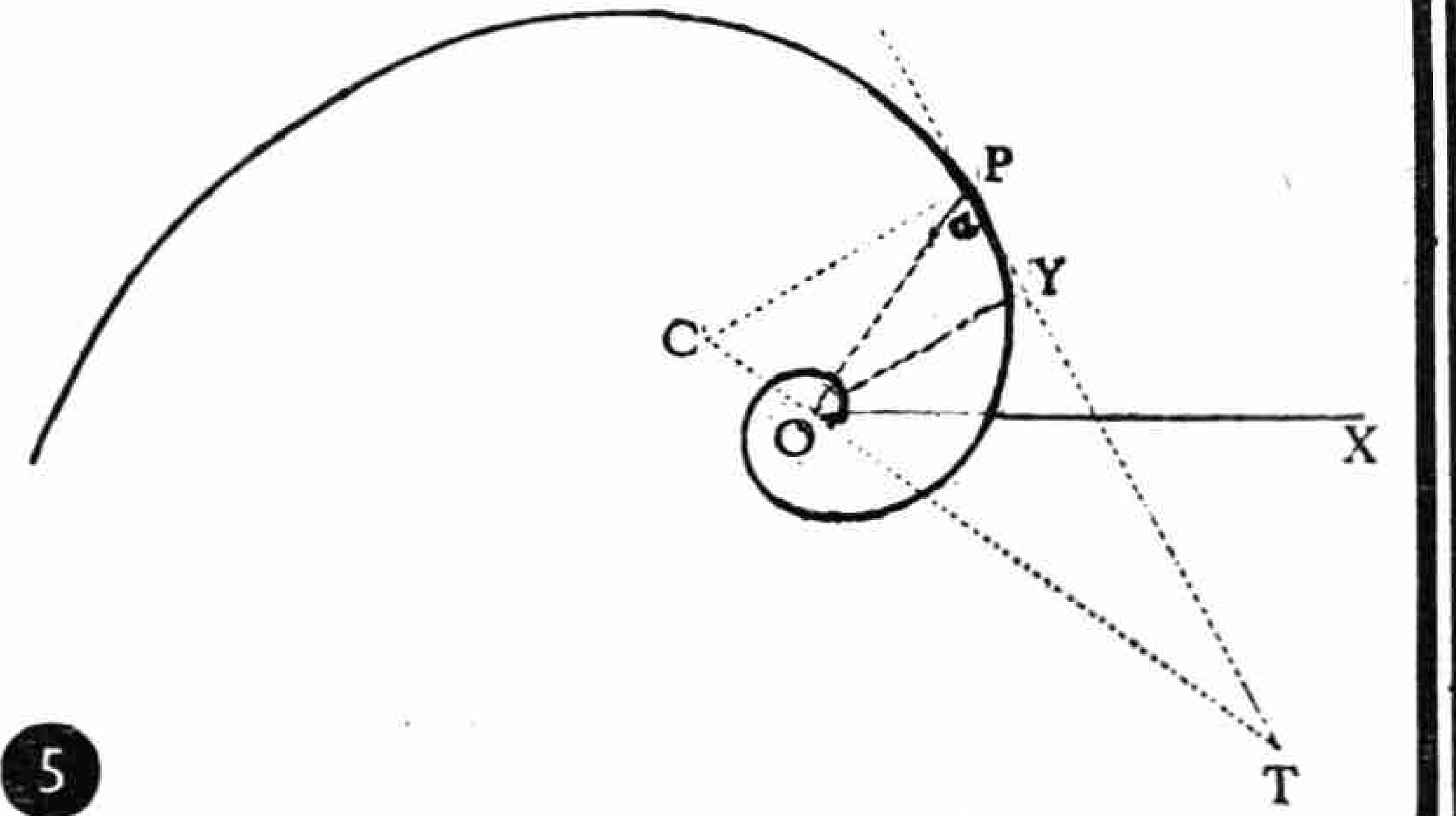
ఒక సంవృత శాంకవమునకు, ఒక నాభికి సాపేక్షముగ విలోమము లిమేసాన్ అగును. పరాస యొక్క విలోమము ఒక కార్డియాయిడ్.

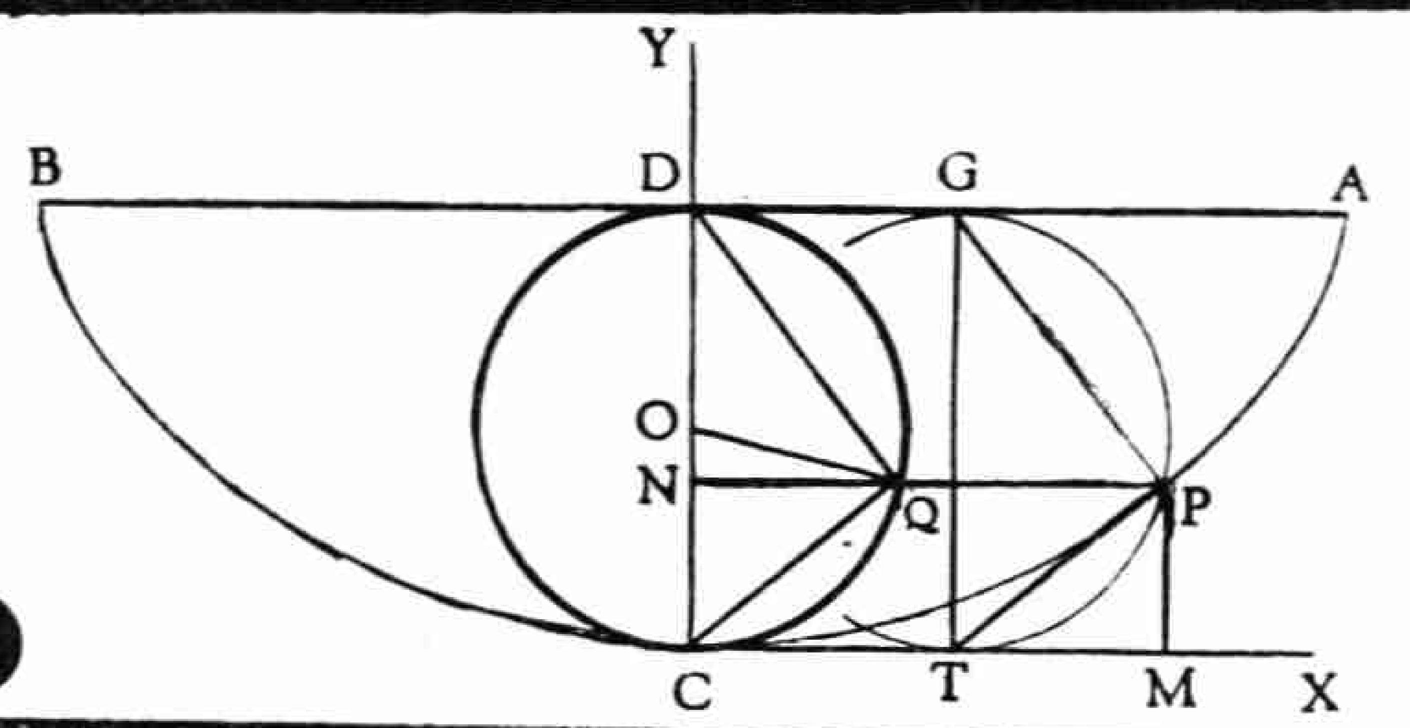


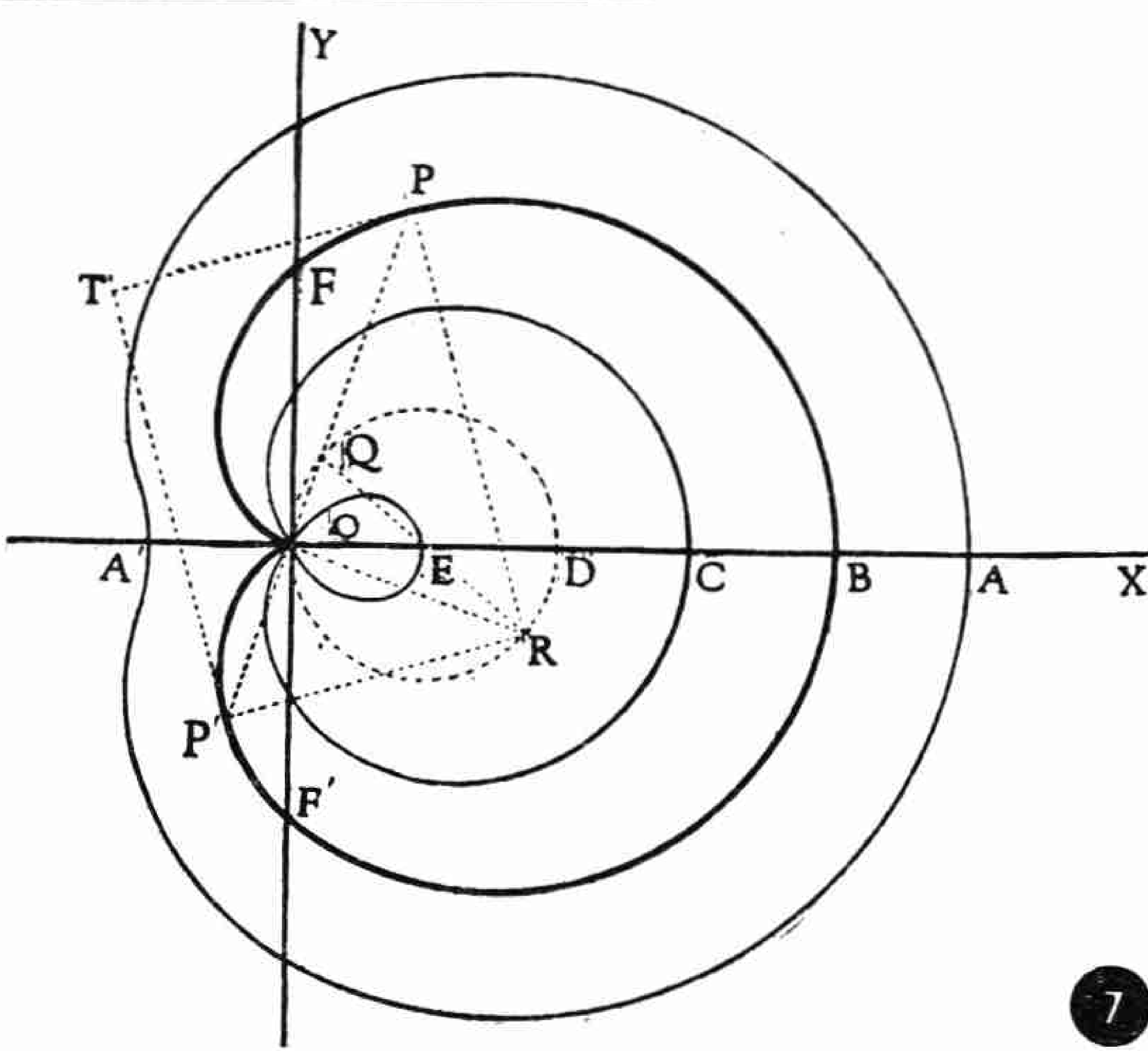












వక్రములు

1. బెర్నూలీ లెమ్నిస్కేట్
2. సిస్సాయిడ్
3. ఎపిసైక్లాయిడ్, హైపోసైక్లాయిడ్
4. కాటినెరీ, ట్రాక్ట్రిక్స్
5. సమానకోణ సర్పిలము
6. సైక్లాయిడ్
7. లిమేసాన్ - కార్డియాయిడ్

చిత్రము 339

ఒక దత్తకోణమును మూడు సమభాగములు చేయుట చారిత్రాత్మకమగు సమస్య. రూళ్లకర్ర, కంపాసు మాత్రము ఉపయోగించినచో ఈ సమస్య సాధించుట అసాధ్యము.

$r = 1 + 2 \cos \theta$ సమీకరణము గల లిమేసాన్ వలన ఆ సమస్య సాధింపవచ్చును. దీనికి త్రిభాగిని అని పేరు.

బెర్నూలీ లెమ్నిస్కేట్ : దీనికి ధ్రువీయ సమీకరణము $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. ఈ వక్రమునకు రెండు శాఖలు ధ్రువము వద్ద సంధించును. శాఖలు మూలరేఖకు 45° నతి కలవి. ధ్రువము వద్ద ఒక యుగళబిందువు, రెండు అంతర్నతములుచేరి యుండును [చూ. చిత్రము 339 (1)].

ఒక ఆయత అతిపరానకు దాని సహాయ వృత్తమునకు సాపేక్షముగ విలోమము చేసిన ఈ వక్రము లభించును. మరియు ఇది లంబకోణ అతిపరానకు కేంద్రమునకు సాపేక్షముగ పాదవక్రము. ఆయత అతిపరాన యొక్క నియతరేఖలకు కేంద్రము నుండి పాద బిందువులు X, X' అయి, P వక్రముపై ఒక బిందువు అయిన $XP \cdot X'P = \frac{1}{2} a^2$; $X'P - XP = \pm \sqrt{2}\, CP$.

సమానకోణ సర్పిలము : ఈ వక్రము యొక్క ధ్రువ సమీకరణము $r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$. ఇందు ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకును, అచ్చటి OP సదిశరేఖకును మధ్యగల కోణము α పరిమాణము కలది.

$\theta \longrightarrow -\infty$, $r \longrightarrow 0$ అయినందున ధ్రువము వక్రముపై అవధిలో నుండునట్లు తలచుకొనవలయును. చాపము s ను, ధ్రువము నుండి కొలచిన s/r = స్థిరరాశి. ρ/r = స్థిరరాశి ; ఒక బిందువు వద్ద వక్రతా వ్యాసార్ధముచే ధ్రువము వద్ద ఒక లంబకోణ మేర్పడును. దీని అంతర్లుఠి ఒక సమానకోణ సర్పిలము. α యొక్క విలువ మారదు.

చిత్రము 339 (5) లో P యందు స్పర్శరేఖ PT కును, OP రేఖకును మధ్యకోణము $\angle OPT = \alpha$. ఈ వక్రము ఒక ఋజురేఖపై దొర్లినచో O యొక్క పథము, వక్రతాకేంద్రపథము ఋజురేఖలు.

త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో వక్రములు : ఇంతవరకు చర్చించినవి తలములోని వక్రములు. ఇవికాక త్రిపరిమాణిక ఆకాశములోను వక్రములున్నవి. వీటిలో అతి సరళమైనది మూడవ తరగతి త్రిపరిమాణిక వక్రము. సమఘాత విక్షేపనిరూపకములు $X : Y : Z : W$ లో ఇటువంటి వక్రము సమీకరణము : $X : Y : Z : W = t^3 : t^2 : t : 1$ అని వ్రాయవచ్చును. ఈ వక్రము ఒక్కొక్క సమతలమును 3 బిందువులలో ఖండించును. దీనియొక్క పరిస్పర్శతలములలో 4, ఒక్కొక్క ఆకాశములోని బిందువుగుండ వెళ్లును. ఇటులనే 4, 5, 6, ... వ తరగతి వక్రములున్నవి.

మరియొక త్రిపరిమాణిక వక్రము హెలిక్స్. దీని సమీకరణము : $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $z = b\, \theta$. ఇది ఒక స్తూపముపై నుండి దాని జనక రేఖలను ఒక స్థిరకోణములో ఖండించును. దీని చిత్రము సమీక్ష - పు. 52 లో చూడవచ్చును.

సి. ఎన్. శ్రీ.

వరణస్వీకృత తత్త్వము : ఒక వస్తుసమూహము ఉన్నదనియు, అది ఖాళీయైన సమూహము కాదనియు అనుకొనెదము. అనగా దీనిలో ఒక వస్తువైన ఉన్నది. అట్లయితే, దానినుండి ఒక వస్తువును తీసికొనుట సాధ్యము కదా! అటులనే రెండు ఖాళీకాని వస్తు సమూహములు A, B ఉన్నవనుకొనెదము. అపుడు A లో నుండి ఒక వస్తువు a ను, B లో నుండి ఒక వస్తువు b ను తీసికొని ఒక జోడి (a, b) ని నిర్మించవచ్చును కదా! ఇటులనే ఒక పరిమిత సంఖ్యగల సమూహములు $A, B, C, \ldots K$ ఉండనిమ్ము ; వీటిలో ఏదియు ఖాళీగానుండకూడదు. ఒక సమూహములోని వస్తువులు మరియొక సమూహములో లేవు. ఇటువంటి పరిస్థితిలో మనము ఒక క్రొత్త సమూహము $(a, b, c, \ldots k)$ ను నిర్మించవచ్చును. దీనిలోని వస్తువులలో a అను వస్తువు A సమూహమునకు చేరినది, b వస్తువు B సమూహమునకు చేరినది, ... k వస్తువు K సమూహమునకు చేరినది. పైన వివరించినట్లు ఒక సమూహము $(a, b, c, . k)$ను - నిర్మించవచ్చుననుటయే వరణతత్త్వము. పరిమిత సంఖ్యగల సమూహ సమితి $A, B, C, \ldots K$ లో ఇది సాధ్యమని అనుగమవిధానము వలన చూపించవచ్చును.

ఇపుడు క్రాంతపరిమితసంఖ్యల సమూహ సమితిని తీసికొనెదము. ఇచ్చట సమూహముల సంఖ్య అనంతము. ఏదియు ఖాళీసమూహము కాదు. ఇపుడును " వీటిలో ఒక్కొక్క సమూహమునుండియు ఒక వస్తువును తీసికొని ఒక క్రొత్త సమూహమును నిర్మించవచ్చును " అనుటయే వరణస్వీకృత తత్త్వము (ఆక్సియమ్ ఆవ్ చాయస్). ఇది ఒప్పుకొనదగు తత్త్వముగనే గోచరించుచున్నది. అయితే దీనికి ఒక ఉపపత్తి కల్పించుట కఠినము. ఒక్కొక్క సమూహమునుండియు ఒక వస్తువును తీసికొనుటకు ఒక సూత్రము ఇచ్చినయెడల ఇది ఒక ఉపపత్తి అగును. అయితే ఇట్లు ఒక సూత్రము ఎల్లపుడును సాధ్యమా ? ఉపపత్తి సాధ్యము కానందున, దీనిని ఒక స్వీకృత తత్త్వముగా తీసికొనెదము. ఇదియే వరణ స్వీకృత తత్త్వము.

జర్మీలో స్వీకృతతత్త్వము : వరణ స్వీకృత తత్త్వమునకు తుల్యమైన ఇతర స్వీకృత తత్త్వములున్నవి. వాటిలో ఒకటి జర్మీలో ఆధారతత్త్వము. ఇది ఏమనగా ' ఒక్కొక్క

సమూహమును బాగుగా క్రమపరచవచ్చును'. ఒక సమూహము 'క్రమ సమూహము' అనగా, ఈ సమూహములోని వస్తువులు $a, b, c, \ldots$ లకు మధ్య ఒక సంబంధము ఉన్నది. దీనిని $a < b$ అని వ్రాసెదము. దీని ధర్మము లేమనగా (i) ఏ రెండు వస్తువులు a, b మధ్య $a < b$, లేదా $b < a$ సంబంధమున్నది; (ii) $a < a$ నిజముకాదు; (iii) $a < b$, $b < c$ రెండు సత్యమైతే, $a < c$ సత్యము. ఉదా: అకరణీయ సంఖ్యలు, వాస్తవ సంఖ్యలు ఇవన్నియు క్రమ సంఖ్యా సమూహములు.

ఒక క్రమ సమూహముయొక్క, ఏ ఉప సమూహము లోను ఒక మొదటి వస్తువు ఉన్నచో, అది బాగుగా క్రమ పరచబడినది (వెల్ ఆర్డర్డ్) అనెదము. ఉదాహరణమునకు 1, 2, 3, ... ఒక బాగుగ క్రమపరచిన సమూహము. ఒక ఉప సమితిలో మొదటి వస్తువు a అనగా, ఆ ఉప సమితితో ప్రతి ఒక వస్తువు x ను $a < x$ అను సంబంధమును తృప్తిపరచుచున్నదన్న మాట. p, q ధనపూర్ణాకము లైనచో, p/q సంఖ్యల (ధన అకరణీయ సంఖ్యల) సమూహమును రెండు విధములుగా క్రమపరచవచ్చును. ఒక విధము వాటి విలువలప్రకారము. ఇట్లు క్రమపరచినచో, ఇది బాగుగా క్రమపరచుట కానేరదు. ఏలన $1 < x < 2$ అను ఉపసమితిలో మొదటి సంఖ్య లేదు. a మొదటి సంఖ్య అనినచో, $1 < x < a$ సంఖ్యలున్నవి. అయితే ఇదే సంఖ్యా సమూహమును, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \ldots$ విధముగా క్రమపరిచినట్లైన, ఇది ఒక మొదటి పదముగల క్రమవరుస అగుచున్నది. x తరువాత y వచ్చినట్లైతే, $x < y$ అని వ్రాసెదము. ఇపుడు దీని ఏ ఉపసమితిలోను ఒక మొదటి పదమున్నది. కనుక ఇది ఒక బాగుగా క్రమ పరచిన వస్తు సమూహము.

జర్మిలోస్వీకృతతత్త్వమునుండి వరణస్వీకృత తత్త్వ మును పొందవచ్చును. ఏలన, అనంత సమూహ సమితు లిచ్చినచో ఒక్కొక్కటిని జర్మిలో తత్త్వము ప్రకారము బాగుగా క్రమపరచెదము. అపుడు ఒక్కొక్క సమూహములో ఒక మొదటి పదమున్నది. ఇటువంటి మొదటి పదములను మాత్రము ఒక్కొక్క సమూహమునుండి తీసికొని, ఒక క్రొత్త సమూహము కల్పించవచ్చును. కనుక వరణ స్వీకృతతత్త్వము నిజము. ఇటులనే వరణస్వీకృతతత్త్వము నుండి జర్మిలో తత్త్వమును పొందవచ్చును. కనుక ఇవి రెండు తుల్య తత్త్వములు.

వరణ స్వీకృత తత్త్వమునకు తుల్య తత్త్వము మరి యొకటి యేమనగా:

'ఏ రెండు క్రాంత పరిమిత సఖ్యలు A, B ఇచ్చినను, వాటిలో $A = B$, లేదా $A < B$, లేదా $B < A$ - ఈ మూడు సంబంధములలో ఒకటి నిజముగ నుండును'. అ. న.

వరాహమిహిరుడు: ఖగోళశాస్త్ర గ్రంథములలో కాలగణనకు క్రీ. శ. 505 వ సంవత్సరమును ప్రస్థాన ఘట్టముగ తీసికొనియుండుటచే వరాహమిహిరుడు 505 ప్రాంతమున జీవించి యుండనోపును. ఈతడు ఆదిత్య దాసుని పుత్రుడు. కపిల్లక (లేదా కపిత్థక) క్షేత్రమందు సూర్యుని అనుగ్రహము పడసి, అవంతిలో జీవించి గ్రంథ ములను రచించెను. ఈతని రచనలు పంచసిద్ధాంతిక, బృహత్సంహిత, స్వల్పసంహిత, బృహజ్జాతకము, లఘు జాతకము, బృహద్వివాహపటలము, వివాహపటలము.

వీటిలో ఖగోళ శాస్త్రగ్రంథము పంచ సిద్ధాంతిక చాల ముఖ్యమైనది. ఇది పంచ ప్రాచీన సిద్ధాంతముల సంక్షేప గ్రంథము. వీటి మూలములు కాలగర్భమందు లీనమై పోయినవి. పైతామహ లేదా బ్రహ్మ సిద్ధాంతము, వాసిష్ఠము, సౌరము, రోమకము, పౌలిశము అనునవి ఈ యైదును. మనకు నేడు విదితమైన శాకల్య సిద్ధాంత నిష్ఠ మగు బ్రహ్మ సిద్ధాంతము, వాసిష్ఠ సిద్ధాంతము, సూర్య సిద్ధాంతము, రోమక సిద్ధాంతము - వీటినుండి వరాహ మిహిరుని సంక్షిప్త సంఖ్యానములు చాల భిన్నముగ నున్నవి. భారతీయ జ్యోతిషకర్తయగు ఎస్. బి. దీక్షిత్ ఈ గ్రంథములు భారతీయ ఖగోళశాస్త్ర విజ్ఞానము యొక్క ప్రాచీనతర రూపములై యుండవచ్చునని అభి ప్రాయమును వెలిబుచ్చినారు. 'రోమక', 'పౌలిశ' యను నామములు రోమ్‌నగరమును, పాలస్ ఆలెగ్జాండ్రి నస్ అను వ్యక్తిని సూచించుచున్నవని ప్రసిద్ధి. యవనా చార్యులు పూజనీయులను వరాహమిహిరుని భావము, రాశిచక్ర భాగముల కాతడు గ్రీక్ నామములను గ్రహిం చుట అను ఈ రెండును పై ఊహను పోషించుచున్నవి. కాని కేవల ఫలజ్యోతిష విషయమైన పౌలస్ గ్రంథము పంచ సిద్ధాంతికలో సంగ్రహించబడిన పౌలిశ సిద్ధాంతము నకు మాతృకయగుటకు సంభావనలేదు. పౌలిశ సిద్ధాం తము అర్ధ వ్యాసమూల్యము 120 యూనిట్లతో గణించ బడిన జీవకోష్టకము నిచ్చినది. కొందరు పండితుల మత ములో భారతదేశమందు జీవకోష్టకముయొక్క ప్రాచీ నతమావిర్భావమిది. అర్ధ వ్యాసము 60 యూనిట్లని గ్రహించిన టాలెమీయొక్క జ్యాకోష్టకముయొక్క అనుకృత రూపమే ఇది.

అయిదు సిద్ధాంతములలోను పైతామహ, వాసిష్ఠ సిద్ధాంతములు ప్రాచీనతమములు. వాటికి శాస్త్ర

స్వభావము తక్కువ. 2850 = 19 × 5 × 30 సంవత్సరముల భారతములో వాడని యుగమొకటి రోమక సిద్ధాంతము స్వీకరించినది. మొదటి ఆర్యభటుడు, బ్రహ్మగుప్తుడు వీరిద్దరి మధ్యకాలములో వాసిష్ఠ రోమక సిద్ధాంతములు క్రమముగా విష్ణుచంద్ర, శ్రీషేణులచే త్రిప్పి వ్రాయబడి యుండవచ్చును. సరస్వతి

వరుణుడు : దూరదర్శనితో పరిశీలించునపుడు వరుణ గ్రహము హరిత వర్ణము కలిగిన చిన్న బింబముగా గోచరించును. దీని తలములో గురుతులు కానరావు. అందుచే దీని భ్రమణకాలమును గణింప వీలుకాదు. వర్ణమాలా దర్శకముతో దీని పరిభ్రమణ కాలము 15 గం. 48 ని. లని 1928 లో మూర్, మెన్సల్ కనుగొనిరి.

చిత్రము 340 వరుణుడు

వరుణుని వర్ణమాల గురు, శని, ఇంద్ర గ్రహముల వర్ణమాలలను ఇంచుమించు పోలియుండును. అందు మీతేన్ పట్టీలు కన్పట్టును. వరుణుని తాపక్రమము సుమారు −220°C. ఈ తాపక్రమములో చాల వస్తువులు గడ్డకట్టి పోవుటవలన వరుణలోక వాతావరణములో మేఘములు అంతగా కనబడవు.

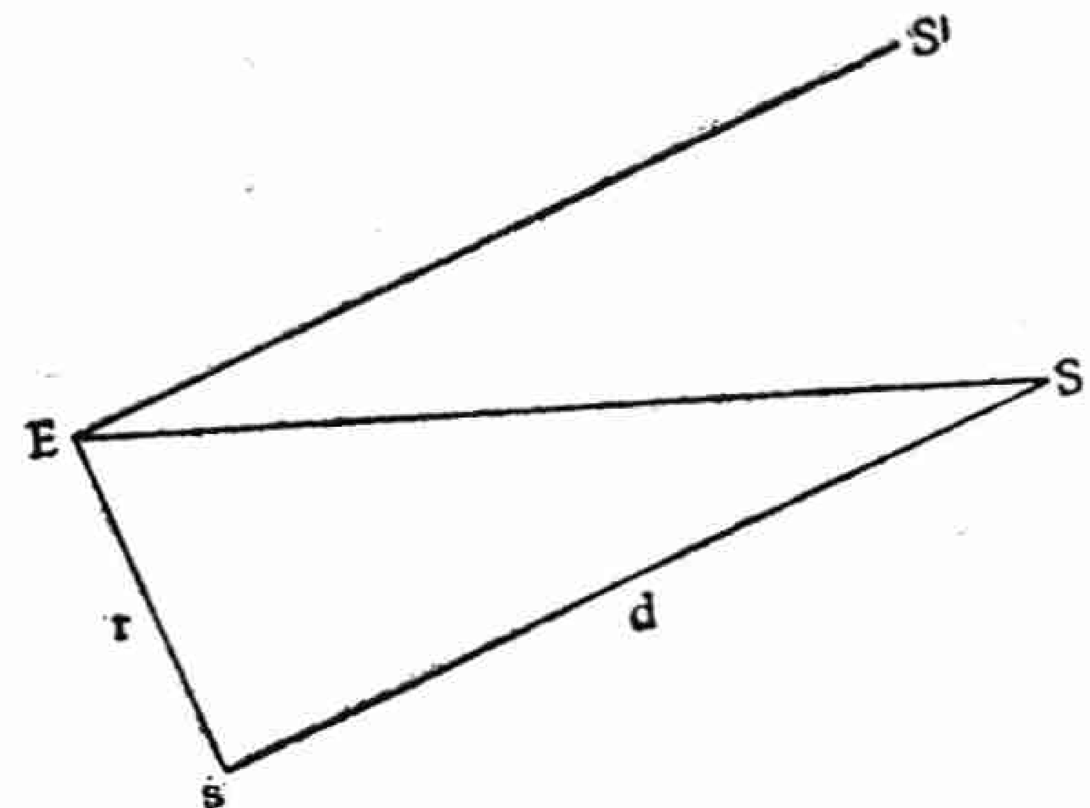
వరుణునికి రెండు ఉపగ్రహములు కలవు. వానిని గురించిన వివరములు దిగువ పేర్కొనబడినవి.

ఉపగ్రహము	ఆవిష్కరణకర్త–కాలము	వరుణుని నుండి దూరము	భ్రమణ కాలము	వ్యాసము
ట్రైటాన్	లాసల్ (1846)	354000 కి. మీ.	5 ది. 21 గం.	5150 కి. మీ.
నెరీడ్	క్యూపియర్ (1949)	?	?	321 కి. మీ.

పై రెండింటిలో ట్రైటాన్ పెద్దది. దాని భ్రమణదిశ వరుణుని భ్రమణదిశకు వ్యతిరేకముగా నుండును. నెరీడ్ భ్రమణ దిశ నేటివరకు కనుగొన వీలుచిక్కలేదు. కె. ఎస్. వి. న.

వార్షిక అతివర్తనము : ఒక నక్షత్రము (S) భూప్రేక్షకుడు E కు గోచరమగు దిశకు భూకేంద్ర దిక్కు అనియు, రవి (s) నుండి ఆ నక్షత్రము కనబడు దిశకు రవి కేంద్ర దిక్కు అనియు పేరు. ఈ రెండు దిశల మధ్య కోణము $\angle ESs$ అనగా భూకక్షీయ వ్యాసార్ధము (r) నక్షత్రమువద్ద నేర్పరచుకోణము నక్షత్ర అతివర్తనమును గుర్తించును. చిత్రము 341 నుండి $\sin ESs = \frac{r}{d} \sin SEs$, లేదా $\sin p = \frac{r}{d} \sin E$. అతివర్తనమల్పమగుటచే $p = \frac{r}{d} \sin E$. p యొక్క గరిష్ఠమానము $E = 90$ డిగ్రీలున్నప్పుడు లభించును. అప్పుడు $p = \frac{r}{d} = k$ (అనుకొనుము). భూకక్షీయ వ్యాసార్ధము నక్షత్రమువద్ద ఏర్పరచు నీ గరిష్ఠ కోణము నక్షత్రముయొక్క వార్షిక అతివర్తనమును సూచించును. కనుక $p = k \sin E$.

లభ్యములు : అవలోకన సమయమున ప్రేక్షకునికీ నక్షత్రము ES దిశయందుండును. కాని నక్షత్ర స్థిరదిశను s S కు సామ్యమగు ES′ రేఖ సూచించును. అతివర్తనము



చిత్రము 341

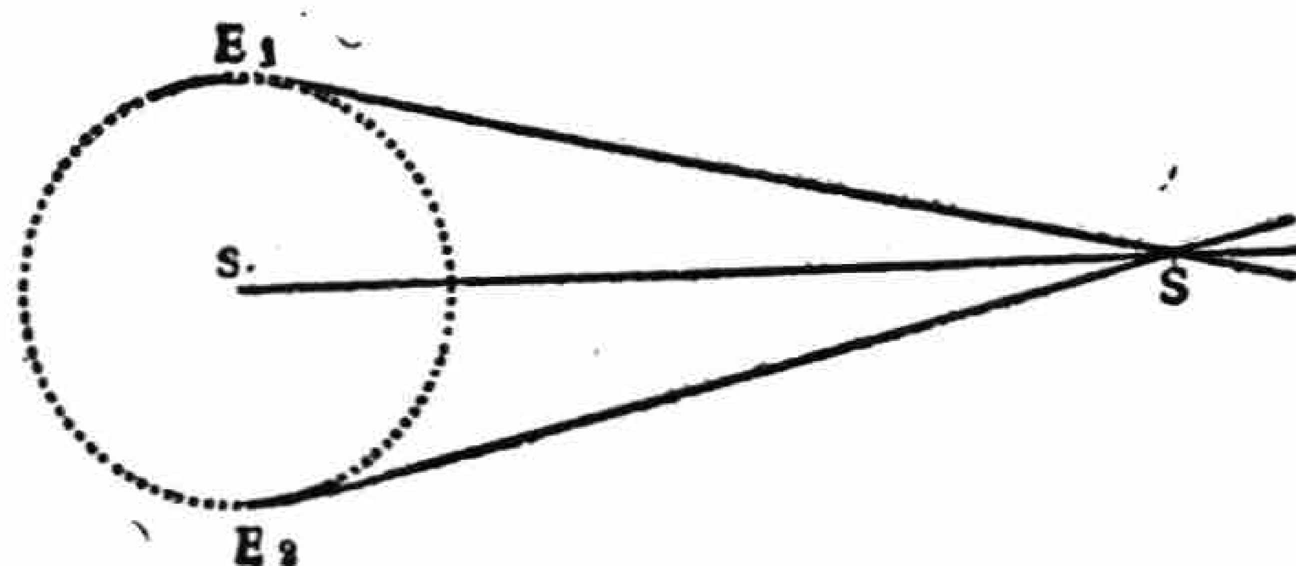
వలన నక్షత్ర దిశయందేర్పడు మార్పు Es రేఖను అనుసరించి యుండును. మరియు అతివర్తనముచే నక్షత్ర భోగ శరములలోని మార్పులు క్రమముగా $k \sin(\odot - \lambda) \sec \beta$;

$k \sin \beta \cos (\odot - \lambda)$ అనియు, నక్షత్ర స్థానాంతర తల పథ మొకవిలోపము అని, ఆ విలోప కేంద్రము నక్షత్ర నిజస్థానమున నుండుననియు, దాని దీర్ఘాక్షము (పొడవు $2k$) క్రాంతి వృత్తమునకు సామ్యతరముగను, హ్రస్వాక్షము (పొడవు $2k \sin \beta$) లంబముగ నుండుననియును చూప వచ్చును. [నక్షత్ర భోగము $= \lambda$]

దూర నిర్ణయము: 1838 వ సంవత్సరమున బెసల్ 61 సిగ్ని నక్షత్రము యొక్కయు, స్ట్రూవ్ వైరా నక్షత్రము యొక్కయు, హెండర్సన్ α సెంటారీ నక్షత్రము యొక్కయు అతివర్తనముల నిర్ణయించిరి. వారి కృషియే శాస్త్రజ్ఞులను ఇతర నక్షత్రదూర నిర్ణయమునకు పురికొల్పెను. బెసల్, స్ట్రూవ్ వీరిరువురనుసరించిన పద్ధతి యందలి ముఖ్యాంశములు నేడును వాడుకలో నున్నవి.

భూభ్రమణము వలన ప్రేక్షకుని సమీపమున నుండి ఒక నక్షత్ర స్థితిలో బహు దూరములో నుండు మరియొక అల్ప దీప్తిగల నక్షత్రమునకు సాపేక్షముగ మార్పులు కలుగుచుండును.

ఈ నక్షత్ర స్థానాంతరతను $E_1 S E_2$ కోణము సూచించును. (E_1, E_2 లు 6 నెలల వ్యవధిలో భూమి యొక్క



చిత్రము 842

స్థానములు) $E_1 E_2$, $E_1 S E_2$ ల నుండి నక్షత్ర దూరమును గణింపవచ్చును.

ప్రస్తుతము ఛాయ గ్రహణ పద్ధతి ఎక్కువగా వాడుకలో నున్నది. మొదట ఒక నక్షత్ర ఛాయా పటమును, 6 నెలల తరువాత మరియొక పటమును తీసి ఆ నక్షత్ర స్థితిని దాని పరిసరములో నుండు అల్ప దీప్తిగల నక్షత్రముల స్థానములతో మైక్రోమీటర్ సహాయమునపోల్చి, ఆ రెండు పటములలో కనబడు సాపేక్షిక స్థితి మార్పులను పరిశీలింతురు. పై మార్పులు అతివర్తనముచే ఏర్పడు స్థానాంతర

నక్షత్రము	హైందవనామము	పరిమాణము	అతివర్తనములు	వర్ణమాల
1. సిరియస్	మృగవ్యాధుడు	1.58	0.38	నీలము
2. కనోపస్	అగస్త్యుడు	0.86	0.01	పీతశ్వేతము
3. వేగా	అభిజిత్తు	0.14	0.12	నీలశ్వేతము
4. కెపెల్లా	బ్రహ్మహృదయము	0.21	0.07	పీతము
5. ఆర్క్ట్యూరస్	స్వాతి	0.24	0.09	అరుణపీతము
6. సెంటారీ		0.33	0.76	పీతము
7. రిగెల్		0.34	0.01	నీలశ్వేతము
8. ప్రోసియాన్	పూర్వశ్వానము	0.48	0.31	పీతశ్వేతము
9. α సెంటారీ	త్రిశంకువు	0.86	0.03	నీలము
10. ఆల్టైర్	శ్రవణము	0.89	0.21	పీతశ్వేతము
11. బీటల్‌గాజు	ఆరుద్ర	0.92	0.01	రక్తము
12. ఆల్డిబరాన్	రోహిణి	1.06	0.05	అరుణము
13. స్పైకా	చిత్త	1.21	0.01	నీలము
14. పోలక్స్	పునర్వసు	1.21	0.10	పీతము
15. అంటారస్	జ్యేష్ఠ	1.23	0.03	రక్తము
16. రెగ్యులస్	మఖ	1.34	0.04	నీలశ్వేతము
17. సిగ్ని	హంస	5.6	0.30	అరుణము
18. బెర్నార్డ్ స్టార్		9.7	0.55	రక్తము
19. ప్రాక్సిమా సెంటారీ	త్రిశంకువు	10.5	0.79	రక్తము
20. వాన్ మానెస్టార్		12.3	0.26	పీతశ్వేతము

తలకును, నక్షత్రముల సాపేక్షిక, నిజ గమనములకును, సంబంధపడి యుండును. మరల 6 నెలల తరువాత మరి యొక ఛాయా పటమును తీసినచో, అందు నిజ గమనము వలన కలుగు స్థానాంతరముల విలువ ముందుకన్న రెండింత లుండును. కాని అతివర్తిత స్థానాంతరతలలో మార్పు లుండవు. కనుక అతివర్తిత స్థానాంతరతల విలువలను కొలిచి వాని నుండి నక్షత్ర దూరములను గణింతురు. ఈ పద్ధతి మూలముగా నక్షత్ర దూరములను బహు శుద్ధ ముగా నిర్ణయింప శక్యమగును.

నక్షత్రముల వర్ణమాలల నుండియు, ఇపుడు నక్షత్ర అతివర్తనములు నిర్ణయింపబడుచున్నవి. నక్షత్ర వర్ణ మాలలో కొన్ని రేఖా ద్వయముల సాపేక్ష కాంతిని పరిశీలించి, అవి నక్షత్ర పరమ పరిమాణములకు అను పాతములో నుండునని కనుగొనియున్నారు. నక్షత్రముల వ్యక్త పరిమాణములు విదితమైనచో

$$M = m + 5 + 5 \log p$$

(M పరమ పరిమాణము; m వ్యక్త పరిమాణము; p నక్షత్ర అతివర్తనము) అను సూత్రము ఉపయోగించి నక్షత్ర దూరములను నిర్ణయింపవచ్చును.

కొన్ని నక్షత్రముల వివరములు 499 వ పుటలోని పట్టికలో పేర్కొనబడినవి: కె. ఎస్. వి. న.

విక్షేపజ్యామితి : విక్షేపము రెండు విధములు. అవి : (ఏ) శాంకవ విక్షేపము, (బి) లంబ విక్షేపము. మొదట శాంకవ విక్షేపము తీసికొందము. ఆదియందు శాంకవ విక్షేపభావము పెరినస్‌కు (క్రీ. శ. 450) కలిగెను. డెసార్గ్ (1593 - 1662) కాలమువరకు ఈ విషయము గమనించినవా రెవరు లేరు. ఇతడు పరాలోక త్రిభుజముల గురించి విమర్శించెను. తర్వాత వాక్‌స్టాడ్ చేతిలో ఇది లాలన పొంది పాస్కల్‌చే తరుణ స్థితికి తేబడెను.

తర్వాత కార్నో (1753 - 1823), పాన్సిలే (1788-1867), చాసల్ (1793 - 1880) దీనికి తగిన పోషణ చేసిరి. అనంత వ్యర్థీయ బిందువులు, వీనికి శాంకవ నాభులకు గల సంబంధము, ద్వైత తత్త్వము మొదలగు విషయముల నితడు విమర్శించుటచే శంకుచ్ఛేద సిద్ధాంతములకు పరస్పర సంబంధము వివరించి దానిలోనుండు ఐక్యతను ప్రతిపా దించెను.

శాంకవ విక్షేపము (నిర్వచనములు): (ఏ) ఒక సమ తలము Σ లో $P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots$ బిందువులు కలవు. బయట నుండు వేరొక బిందువు V తీసికొని, ఋజురేఖలు $VP_1, VP_2, VP_3, \ldots$ పొడిగించి మరియొక సమతలము σ ను అవి $p_1, p_2, p_3, \ldots$ బిందువులలో ఖండించిన $p_1, p_2, p_3, \ldots$ బిందువులు $P_1, P_2, P_3, \ldots$ యొక్క శాంకవ విక్షేపము అని చెప్పుదురు. బిందువు V విక్షేపశీర్షము.

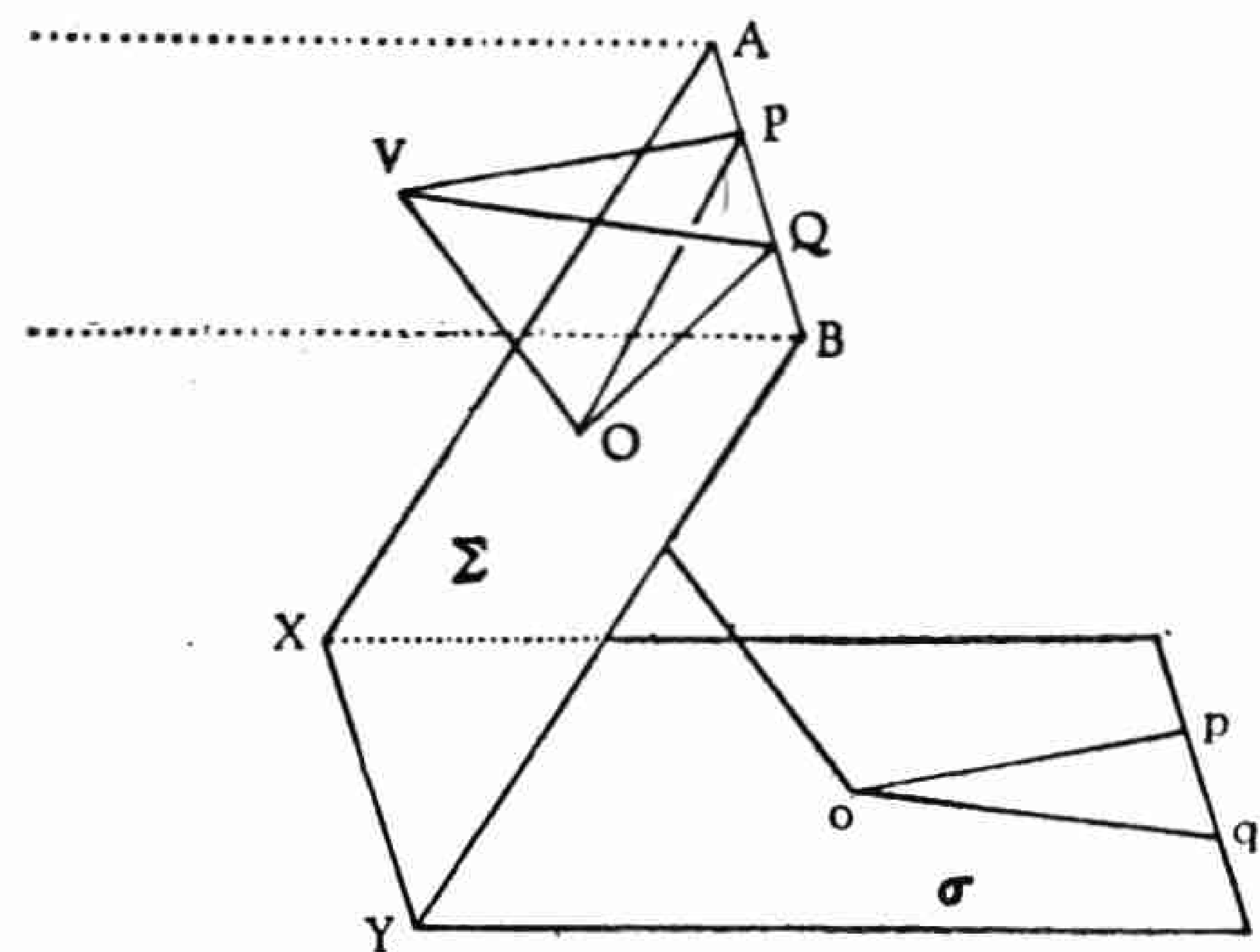
(బి) సమ తలములు Σ, σ ఖండించు ఋజురేఖకు విక్షేపాక్షము అని పేరు.

(సి) V గుండ ఒక సమతలము σ కు సామ్యముగా నుండి Σ సమతలమును ఋజురేఖ AB లో ఖండించిన, AB ఋజురేఖ Σ యొక్క అదృశ్యరేఖ యగును.

(డి) AB లో C ఒక బిందువు అయిన, VC ఋజురేఖ సమతలము σ కు సామ్యముగా నుండును.

కొన్ని ముఖ్య సిద్ధాంతములు : (ఎ) ఋజురేఖలు ఋజు రేఖలుగా విక్షేపింపబడును. (బి) Σ యందు అదృశ్య రేఖపై అనుషక్తమగు ఋజురేఖలు, σ లో సామ్యము లుగా విక్షేపింపబడును. (సి) అదృశ్యరేఖ విక్షేపములో అనంతరేఖగా మారును.

కోణముల విక్షేపము : Σ దత్త సమతలము. σ విక్షేప తలము. XY విక్షేపాక్షము. V విక్షేప శీర్షము. AB Σ తలములోని అదృశ్యరేఖ (చూ. చిత్రము 343).



చిత్రము 343

Σ సమతలమున నుండు $\angle POQ$ యొక్క భుజములు OP, OQ లు అదృశ్య రేఖ AB ని P, Q బిందువులలో సంధించును.

సమతలము VPQ, విక్షేపతలము σ కు సామ్యము. $\angle OPQ$ యొక్క విక్షేపము $\angle opq$. ఇపుడు VP, op సామ్యములు; VQ, oq సామ్యములు. కాబట్టి $\angle PVQ = \angle poq$. అందుచే $\angle POQ$ ను విక్షేపించిన, దాని విలువ $\angle PVQ$ కు సమానము.

$\angle PVQ = 90^\circ$ అయిన, $\angle POQ$ యొక్క విక్షేప కోణము ఒక సమకోణము అగును.

ఇపుడు రెండు దత్తకోణములను సమకోణములుగాను, ఒక దత్త ఋజురేఖను అనంత రేఖగాను విక్షేపము

చేయవచ్చును. Σ సమతలములో $\angle POQ$, $\angle LMN$ రెండు దత్తకోణములు, AB దత్త ఋజురేఖ. OP, OQ, ML, MN క్రమముగా AB ని P, Q, L, N బిందువులలో ఖండింపనిమ్ము. విక్షేపతలము σ కు ఒక సమతలము α సామ్యముగా AB ఋజురేఖ గుండ వెళ్లునట్లు తీసికొనుము. α తలములో V వద్ద ఖండించునట్లు PQ, LN వ్యాసములుగా అర్ధ వృత్తములు తీసికొనుము.

ఇపుడు $\angle PVQ$, $\angle LVN$ సమకోణములు. V విక్షేప శీర్షము; AB అదృశ్యరేఖ. కాబట్టి $\angle POQ$, $\angle LMN$ విక్షేపతలము σ లో సమకోణములగును. AB ఋజురేఖ అనంతరేఖ యగును.

డెసార్గ్ సిద్ధాంతము: పరాలోక త్రిభుజములు: ABC, $A'B'C'$ రెండు త్రిభుజములు. వాని అనురూప భుజములు $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ క్రమముగా L, M, N బిందువులవద్ద ఖండించును. LMN ఒక ఋజురేఖ అయిన అనురూపశీర్షములు (A, A') (B, B') (C, C') చేర్చు ఋజురేఖలు అనుషక్తములు (చూ. చిత్రము 8 - పు. 39).

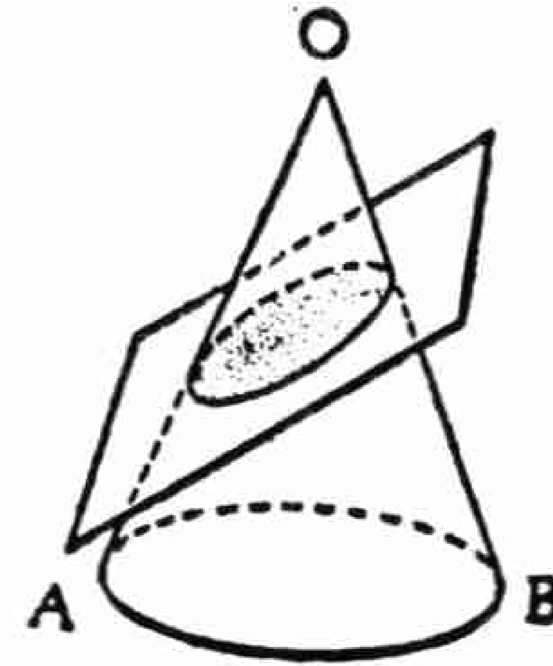
ఋజురేఖ LMN ను అనంతరేఖగా విక్షేపించిన, త్రిభుజముల అనురూప భుజములు $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ సామ్యములగును.

కాబట్టి AA', BB', CC', అనుషక్తములు. అవి O వద్ద అనుషక్తములయిన, O పరాలోకన కేంద్రము. LMN ఋజురేఖ పర్యాలోకనాక్షము.

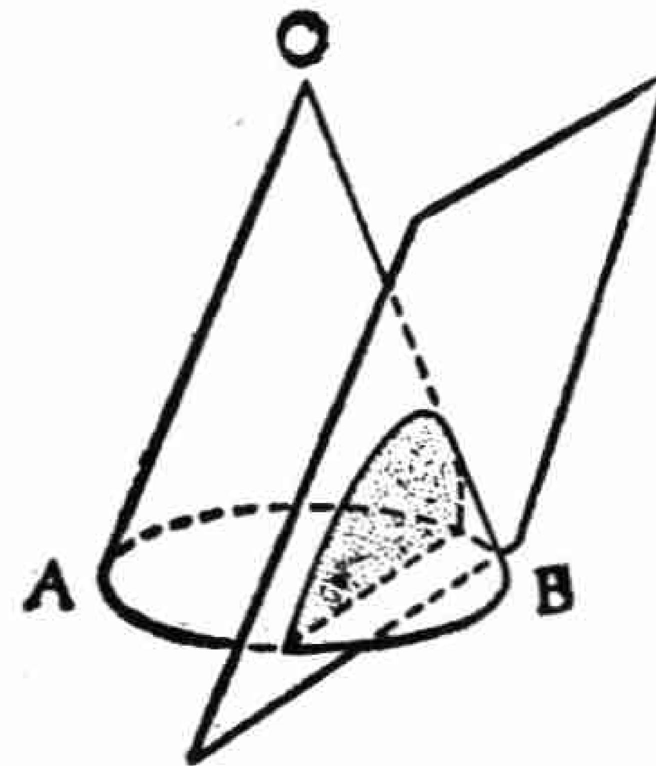
శాంకవములు: పూర్వము గ్రీస్ దేశములో ఒకచోట ఘనరూపమున నుండు బలిపీఠమును రెండింతలు ప్రమాణము గల సమఘనముగా మార్చిన, ఘనము యొక్క భుజమెంత అను సమస్య ప్రతిపాదింపబడెను. దీని సారాంశమేమన $2^{1/3}$ ఎట్లు కనుగొనుట? అప్పటికి గ్రీస్ దేశములో అంకగణితము ప్రచారములో లేదు. జ్యామితి మూలమున ఈ సమస్యను సాధింపవలయును. ఈ సమస్యకు డీలియన్ సమస్య యని పేరు.

ప్లేటో శిష్యుడు మెనియాకెమస్, (క్రీ. పూ. 375-325?) ఈ సమస్యను సాధించునపుడు శాంకవ జ్యామితి ప్రతిపాదించెను. కొన్ని సాధారణ సూత్రముల అతడు విమర్శించెను. అవి పరాన, లంబఅతిపరానలను గురించినవి. క్రీ. పూ. 320 అరిస్టాయియస్ శాంకవము, శంకుచ్ఛేదమని ఊహించిన వారిలో మొదటివాడు. శాంకవమును గురించిన యూక్లిడ్ గ్రంథము కాల గర్భమున తిరోహితమయ్యెను. అందు నాభి సంబంధరహిత ధర్మములన్నియును విమర్శింపబడినవి. అవిచ్ఛిన్నతా సూత్రము కెప్లర్ చే ప్రతిపాదింపబడి, డెసార్గ్ చే విస్తరింపబడెను. అతడు విక్షేప విధానమును ఉపయోగించి, అనంత రేఖ, సంయుగ్మ వ్యాసములు, ధ్రువము, ధ్రువరేఖ అసంపాతనములు, శాంకమునకు అనంతమువద్ద స్పర్శరేఖలు మొదలగు అనేక విషయములను వివరించెను.

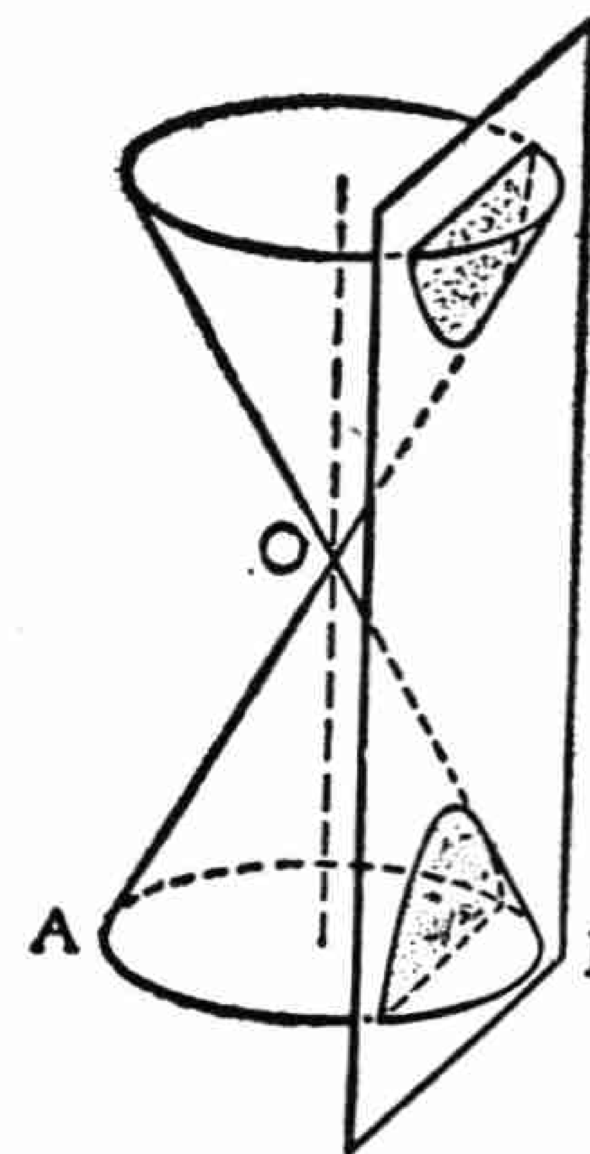
విక్షేప విధానమున వృత్తమునకు, శాంకవములకు గల సంబంధములను వివరించి, వృత్త ధర్మములనేకములను శాంకవ ధర్మములుగా మార్చుటకు అవకాశము కలిగెను. ఈ మార్గమున పరిశ్రమ చేసినవారిలో అగ్రగణ్యుడు చాసల్స్ (1793-1880).



చిత్రము 344



చిత్రము 345



చిత్రము 346

శాంకవ ఛేదములు: శాంకవములను ఒక వృత్తము యొక్క విక్షేపములుగ పరిగణించి వానికి నిర్వచనములు వివరింపబడును. AOB ఒక శంకు, దాని భూమి AB ఒక వృత్తము. ఒక సమతలము σ, శంకువును ఖండింపనిమ్ము. శీర్షము O ద్వారా σ తలమునకు సామ్యతలము Σ అనుకొనుము.

(ఎ) సమతలము Σ, వృత్తము AB ని వాస్తవిక బిందువులలో ఖండింపకయుండిన, σ తలము శంకువును ఒక విలోపములో ఖండించును (చూ. చిత్రము 344).

(బి) సమతలము σ, శంకువు యొక్క ఏదో ఒక జనకరేఖకు (OA కు) సామ్యమయిన, ఒక పరానపేర్పడును (చూ. చిత్రము 345).

(సి) సమతలము Σ, వృత్తము AB ని వాస్తవిక బిందువులలో ఖండించినచో, σ తలము శంకువును ఒక అతిపరానలో ఖండించును (చూ. చిత్రము 346).

Σ సమతలము, వృత్తము AB ని వాస్తవిక బిందువులలో ఖండించిన అతిపరాన; వృత్తమునకు స్పర్శ

తలము అయిన పరాస; వృత్తమును కల్పిత బిందువులలో ఖండించిన, విలోపము σ తలము ఛేదించుటచే లభించును.

అదియునుగాక, శాంకవములు లేదా శంకుచ్ఛేదములు, ఒక వృత్తముయొక్క విక్షేపములని తెలియుచున్నది.

శీర్షము O గుండ తలము σ కు సామ్యతలము Σ అని చెప్పితిమి. ఇది AB ని దాని అదృశ్యరేఖలో ఖండించును.

అదృశ్యరేఖ AB వృత్తమును వాస్తవిక బిందువులలో ఖండించిన అతిపరాస, స్పృశించిన పరాస కల్పిత బిందువులలో ఖండించిన విలోపము లభించును. అనగా వృత్తము అనంత రేఖను వాస్తవిక బిందువులలో ఖండించిన, విక్షేపము అతిపరాసగాను, స్పృశించిన విక్షేపము పరాసగాను, కల్పిత బిందువులలో ఖండించిన విక్షేపము విలోపముగాను ఉండును.

గమనిక: శంకువుయొక్క అక్షము AB వృత్తతలమునకు లంబముగా నుండిన శంకువునకు లంబ వృత్త శంకువని పేరు. ఛేదకముల తీసికొనుటకు లంబ వృత్త శంకువు ఆవశ్యకముకాదు. ఛేదకములలో వృత్తము లుండిన చాలును.

విక్షేపీయ ధర్మములు: (i) ఒక వృత్తమును ఒక ఋజురేఖ రెండు బిందువులలో ఖండించును. ఆ బిందువులు వాస్తవికములు, ఐక్యములు లేదా కల్పితములు; దీనికి అవిచ్ఛిన్నతా విధానమని పేరు ఈ విధానమును పాటింపని ఎడల ఒక ఋజురేఖ ఒక వృత్తమును రెండు బిందువు (వాస్తవికము) లలో ఖండించునని మాత్రము చెప్పవలసియుండును.

ఒక శాంకమును ఒక ఋజురేఖ ఎల్లపుడు రెండు బిందువులలో ఖండించును. ఆ బిందువులు వాస్తవికములు, ఐక్యములు లేదా కల్పితములుగా గాని యుండును.

(ii) ఒక వృత్తమునకు ఒక బిందువునుండి రెండు స్పర్శరేఖ లుండును. ఒక శాంకవమునకు ఒక బిందువు నుండి రెండు స్పర్శరేఖలు కలవు. అవి వాస్తవికములుగ, ఐక్యములుగ, లేదా కల్పితముగా నుండవచ్చును. బిందువు శాంకవమునకు బయట, పైన, లేదా లోపల ఉండుటను బట్టి ఈ స్థితులు క్రమముగా ఏర్పడును.

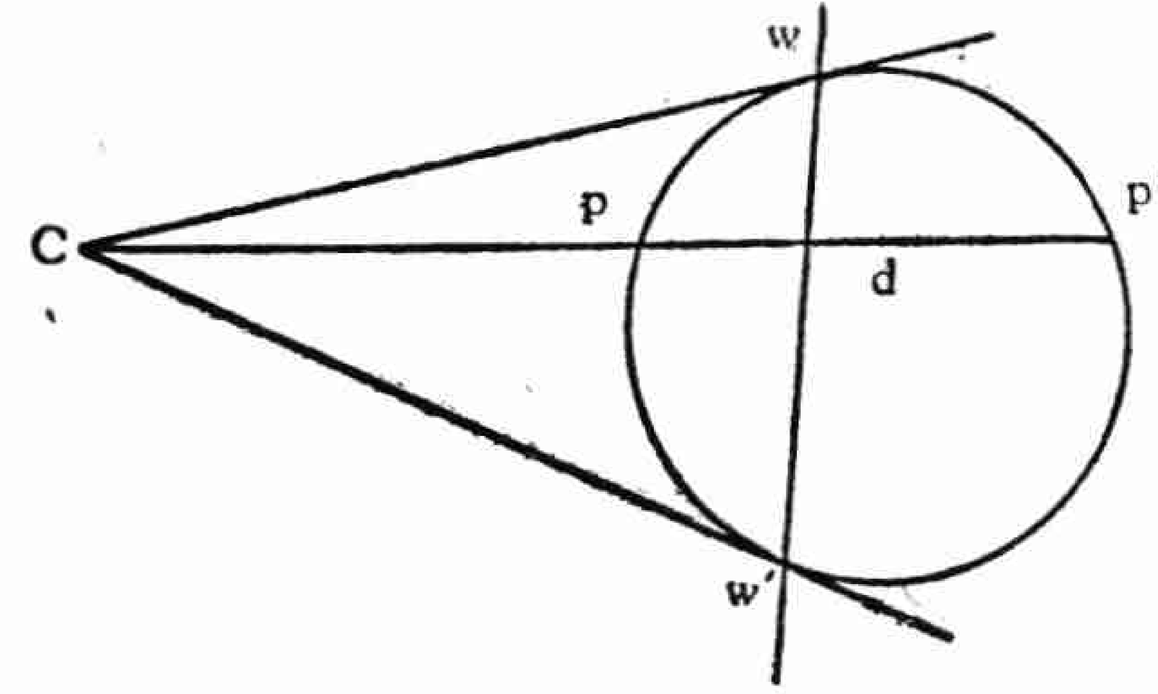
(iii) A యొక్క ధ్రువరేఖ B గుండ వెళ్ళిన, B యొక్క ధ్రువరేఖ A గుండ వెళ్లును. అపుడు A, B లు సంయుగ్మ బిందువులు.

(iv) ధ్రువము, ధ్రువరేఖయొక్క స్వరాత్మక లక్షణములు శాంకవములకు అనువర్తించును.

(v) సమన్వయత (ఇన్‌వల్యూషన్) విక్షేపములో మారదు. శాంకవము యొక్క సంయుగ్మ బిందువులు ఒక ఋజురేఖపై ఉండిన అవి సమన్వయతలో ఉండును. శాంకవమును ఋజురేఖ ఖండించు బిందువులు ఈ సమన్వయత యొక్క బిందు ద్వయములు.

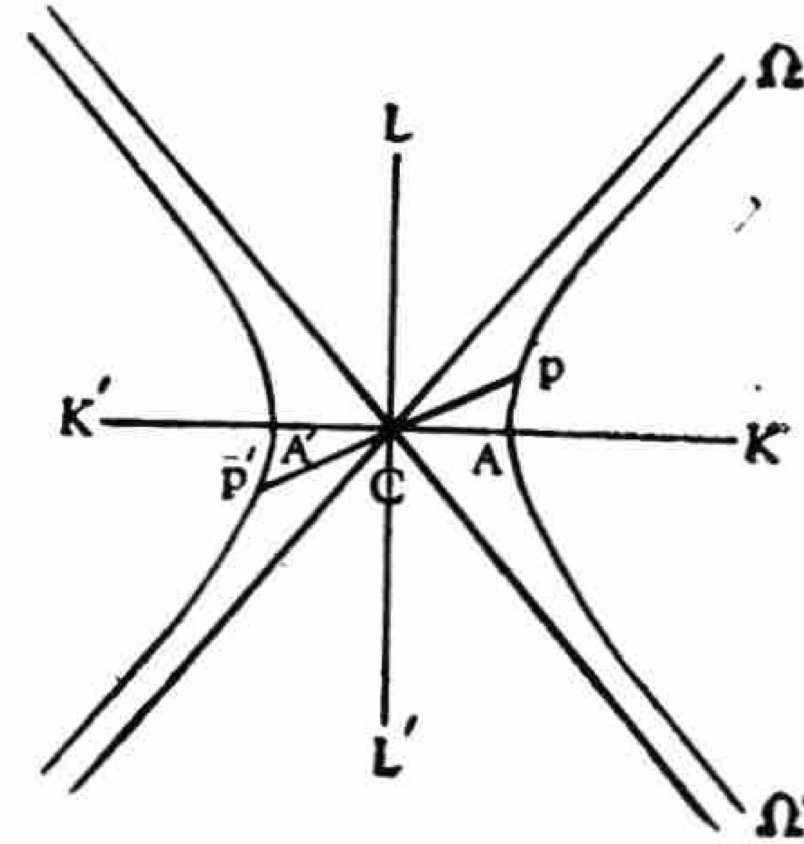
(vi) ఒక శాంకవముయొక్క అనుషక్త సంయుగ్మ రేఖలు, సమన్వయశలాకయగును. ఇందు రేఖాద్వయములు ఆ బిందువునుండి శాంకవముయొక్క స్పర్శరేఖలు.

వృత్తధర్మముల నుండి శాంకవ ధర్మములన్నిటిని విక్షేప విధానమున కనుగొనవచ్చును. ఇపుడు అతిపరాసను తీసికొందము.



చిత్రము 347

అదృశ్యరేఖ వృత్తమును వాస్తవికబిందువుల (w, w') లోను ఖండించునపుడు వృత్తముయొక్కవిక్షేపము అతిపరాసగా మారును (చూ. చిత్రములు 347, 348).



చిత్రము 348

అదృశ్యరేఖ యొక్క ధ్రువము c; జ్యా $c\,pp'$ వృత్తమును p, p' బిందువులలోను, అదృశ్యరేఖ ww' ను d లోను ఖండింపనిమ్ము. విక్షేపములో పెద్ద అక్షరము లను వ్రాయుదుము.

అదృశ్యరేఖ w, w' విక్షేపములో అనంతరేఖ $\Omega\Omega'$ గా మారును. అదృశ్యరేఖ యొక్క ధ్రువము c.

c యొక్క విక్షేపము శాంకవములో కేంద్రము C గా మారును. (cd, pp') ఒక స్మరాత్మక రాశి; అనగా $(cd, pp') = -1$; pp' యొక్క విక్షేపము PP' శాంకవ కేంద్రము C గుండ వెళ్లును. d యొక్క విక్షేపము అనంతములో నుండుటచే $PC = CP'$; C గుండ వెళ్లు ప్రతి జ్యాకును C మధ్యబిందువు. కాబట్టి C శాంకవ కేంద్రము. C గుండ వెళ్లు రేఖలకు వ్యాసములని పేరు. C గుండ వెళ్లు సంయుగ్మ రేఖ జతలలో ఒక జత మాత్రము వృత్తమును సంధించును. ఏలన సంయుగ్మ రేఖలచే ఏర్పడు సమన్వయము యొక్క రేఖాద్వయములు cw,

cw' వాస్తవికములు. మరియు C గుండ వెళ్లు సమన్వయ శలాకయొక్క రేఖాద్వయములు వాస్తవికములు. అవి cw, cw' యొక్క విక్షేపములు.

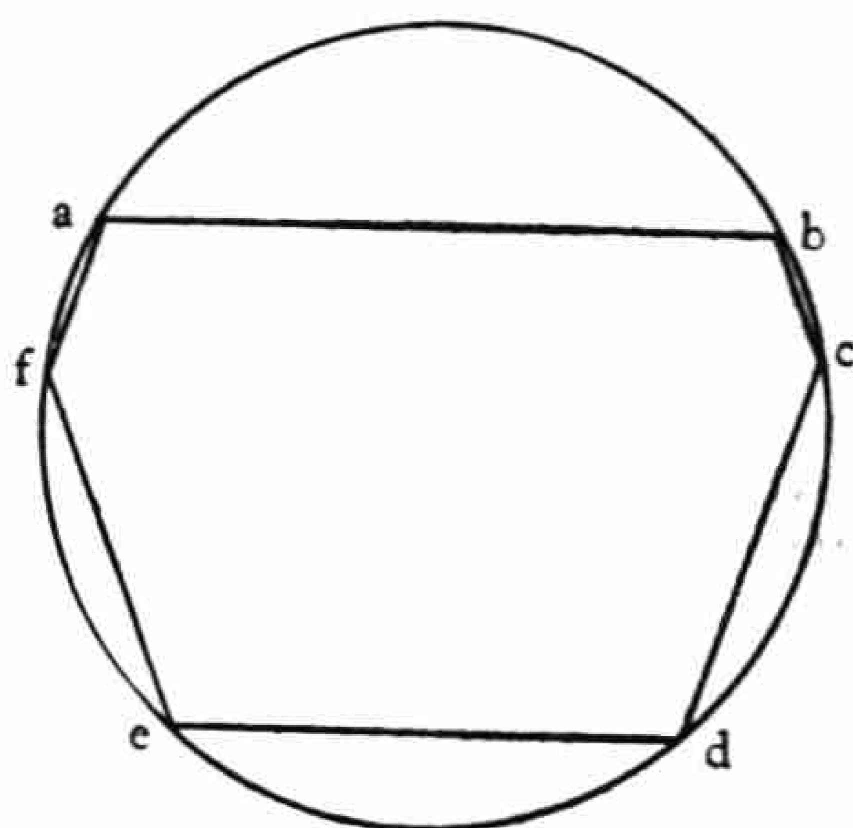
కాబట్టి C గుండ వెళ్లు సమన్వయ శలాక లంబసమన్వయము కానేరదు. వానిలో ఒక జత రేఖలు మాత్రము పరస్పర లంబములు. అందుచే C గుండ వెళ్లు సంయుగ్మ రేఖలు లేదా సంయుగ్మ వ్యాసములలో ఒక జత వ్యాసములు పరస్పర లంబములు. ఆ జతలో ఒకటి A' CA శాంకవమును ఖండించును. దానికి తిర్యగక్షము అని పేరు. దానికి లంబముగానుండు అక్షమునకు సంయుగ్మాక్షము అని పేరు. అది శాంకవమును వాస్తవిక బిందువులలో ఖండింపదు.

cw, cw'లు వృత్తముయొక్క స్పర్శరేఖలు, వాని విక్షేపములు $C\Omega$, $C\Omega'$ శాంకవమునకు సర్శరేఖలు; స్పర్శబిందువులు అనంతములో నున్నవి. C గుండ వెళ్లు సంయుగ్మ వ్యాసముల సమన్వయములో $C\Omega$, $C\Omega'$ రేఖా ద్వయములు వీనికి అసంపాతములు అని పేరు.

ఈ శాంకవము అతిపరాస; దీని ధర్మములను ఇదే విధమున అన్నిటిని సాధింపవచ్చును.

కొన్ని ముఖ్య సిద్ధాంతములు: పాస్కల్ సిద్ధాంతము: ఒక శాంకవమునందు ఒక షడ్భుజిని అంతర్నివేశనము చేసిన, ఎదుటి భుజములు ఖండించు బిందువులన్నియు ఏకరేఖీయములగును. రెండు జతల ఎదుటి భుజములు ఖండించు బిందువులు అనంతమునకు పోవునట్లు శాంకవమును వృత్తముగా విక్షేపము చేయుము.

వృత్తములో a, b, c, d, e, f అంతర్నివేశిత షడ్భుజి; భుజములు ab, ed లు సామ్యములు, fa, cd లు సామ్యములు; అవి రెండు జతలు అనంతములో ఖండించును (చూ. చిత్రము 349).



చిత్రము 349

ab, ed లు సామ్యములయినందున, ఏకాంతర కోణములు $\angle abe = \angle bed$; కాబట్టి ధనుస్సు afe = ధనుస్సు bed; అట్లే ధనుస్సు abc = ధనుస్సు def; అనగా ధనుస్సు afc + ధనుస్సు abe = ధనుస్సు bed + ధనుస్సు def.

$\therefore$ ధనుస్సు af + ధనుస్సు ab = ధనుస్సు cd + ధనుస్సు de;

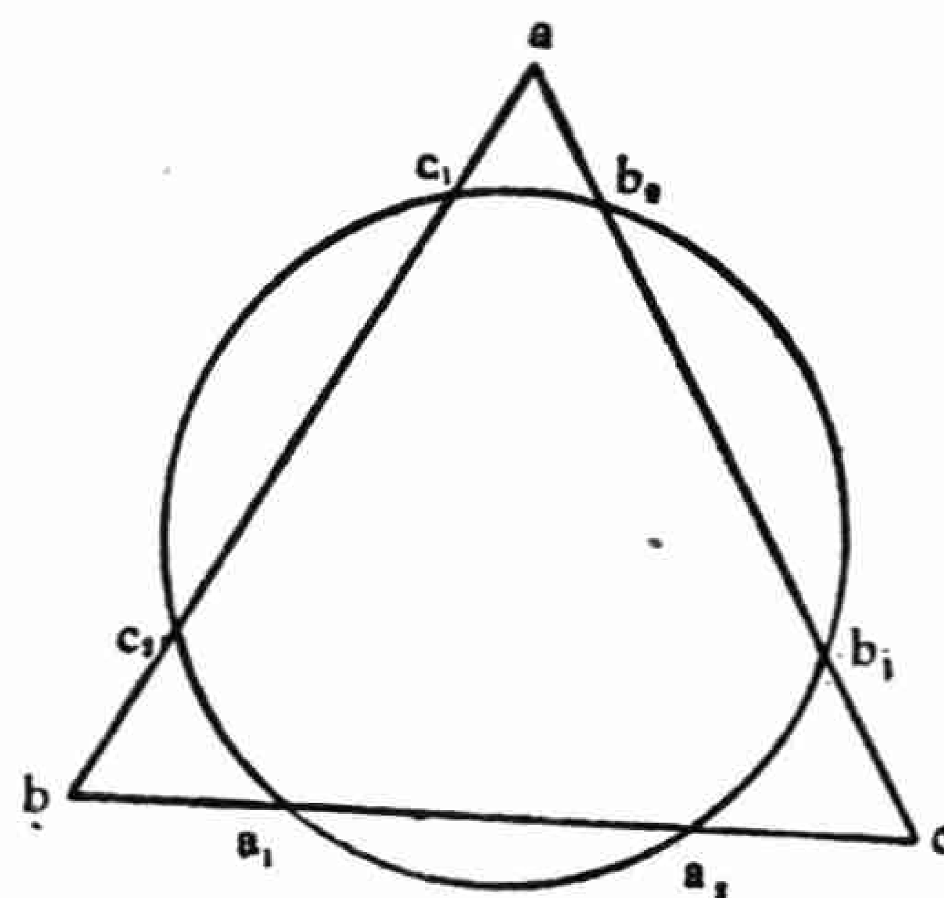
$\therefore$ ధనుస్సు fab = ధనుస్సు cde;

$\therefore \angle bcf = \angle cfe$ (ఏకాంతర కోణములు)

$\therefore ef$, bc భుజములు సామ్యములు; అవి అనంత రేఖపై సంధించును.

కాబట్టి ఒక శాంకవములో అంతర్లిఖితమగు షడ్భుజి యొక్క ఎదుట భుజములు ఒక ఋజు రేఖలో ఖండించును.

కార్నో సిద్ధాంతములు: ఒక శాంకవమును ABC అను ఒక త్రిభుజము A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 బిందువులలో ఖండించినచో $AB_1 . AB_2 . CA_1 . CA_2 . BC_1 . BC_2 = AC_1 . AC_2 . BA_1 . BA_2 . CB_1 . CB_2$.



చిత్రము 350

శాంకవమును వృత్తముగా విక్షేపించి విక్షేపాక్షరములను పొడి అక్షరములతో గుర్తించుము.

ఇపుడు $ac_1 . ac_2 = ab_1 . ab_2$; $bc_1 . bc_2 = ba_1 . ba_2$;

$$ca_1 . ca_2 = cb_1 . cb_2$$

కాబట్టి ఉపపత్తి పూర్తిఅయినది. ఆచార్య

విక్షేప విన్యాసములు: విన్యాసమనగా ఒక జ్యామితీయ సమూహము. దీనియందున్న వస్తువులు బిందువులు, ఋజురేఖలు, సమతలములు. ఈ సమూహములో p బిందువులు l ఋజురేఖలు ఒకే తలమున ఉన్నవనుకొనెదము. ఒక్కొక్క బిందువుద్వారా ఈ సమూహములోని λ ఋజురేఖలు వెళ్లుచున్నవనియు, ఒక్కొక్క ఋజురేఖమీదను ఈ సమూహములోని μ బిందువులున్నవనియు అనుకొనెదము. ఇచ్చట λ, μ స్థిరసంఖ్యలై యుండవలెను. అపుడు దీనిని ఒక విక్షేపతల విన్యాస మనెదము. విక్షేపమను పదమును వాడుటకు కారణమేమనగా ఇచ్చట రేఖలు బిందువుల గుండా వెళ్లుట, బిందువులు రేఖలపై ఉండుట, అను విక్షేపజ్యామితి భావములను మాత్రము ఉపయోగించి యున్నాము. విక్షేపము వలన మారు నిడుపుల కొలతలు, కోణముల కొలతలు, సమానాంతర రేఖలు, ఇటువంటి భావములను ఉపయోగించలేదు. కనుక ఒక తలమునుండి మరియొక తలమునకు విక్షేపమువలన ఒక విన్యాసము మరియొక విన్యాసమగును.

పైన వివరించిన విన్యాసమును (p_λ, l_μ) అను సంకేతము వలన గుర్తించెదము. దీని అర్థమేమనగా p బిందువులు, l

రేఖలు ఈ విన్యాసములో నున్నవి. ఒక్కొక్క బిందువు గుండా λ రేఖలు వెళ్లును. ఒక్కొక్క రేఖ మీదను μ బిందువులుండును అనుటయే. ఇచ్చట p, l, λ, μ ఏ పూర్ణాంకములుగను ఉండకూడదు. అవి $p\lambda = l\mu$ అను సంబంధమును అనుసరించవలెను. ఏలన, p బిందువులున్న ఒక్కొక్క బిందువు ద్వారా λ రేఖలున్నవి. కనుక రేఖల మొత్తముసంఖ్య $p \times \lambda$. అయితే ఇట్లు ఎంచుటలో ఒక్కొక్క రేఖయు μ మార్లు ఎంచబడును. కనుక ఈ సంఖ్య $l \times \mu$. అనగా $p\lambda = \mu l$.

ఇకమీద ఒక బిందువు ఒక ఋజురేఖపై ఉన్నదను విషయమును ఆ బిందువునకును ఆ ఋజురేఖకును 'ఆపాతము' కలదని వర్ణించెదము. ఇటులనే ఒక ఋజురేఖ ఒక బిందువుగుండా వెళ్లుచున్నదను పరిస్థితిని ఆ ఋజు రేఖకును ఆ బిందువునకును 'ఆపాతము' (ఇన్సిడెన్స్) కలదని వర్ణించెదము. ఇటులనే త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక బిందువునకు, ఒక తలమునకును ఆపాతమున్నదనగా ఆ బిందువు ఆ తలముమీద ఉన్నదనియు, ఒక ఋజురేఖకు ఒక తలమునకు ఆపాతమున్నదనగా ఆ ఋజురేఖ పూర్తిగా ఆ తలముమీద ఉన్నదనియు అర్థము చేసికోవలెను. త్రిపరిమాణిక ఆకాశములోని విశేష విన్యాసమునకు ఒక్కొక్క బిందువునకు ఆపాతము గల ఋజురేఖలు, తలములు, అటులనే ఒక్కొక్క ఋజురేఖకు ఆపాతము గల బిందువులు, తలములు, ఒక్కొక్క తలమునకును ఆపాతము గల బిందువులు, రేఖలు ఇవన్నియు స్థిర సంఖ్యలై యుండును.

ఇపుడు ఒక తలములోని విశేష విన్యాసములను వివరించెదము; విశేషముగా $p = l$ అగునపుడు, అనగా రేఖల సంఖ్యయు, బిందువుల సంఖ్యయు ఒకే సంఖ్య p అగునపుడు $\lambda = \mu$ అగును. అనగా విన్యాసములో p బిందువులు, p ఋజురేఖలు ఉండును. ఒక్కొక్క బిందువునకును ఆపాతము గల ఋజురేఖలు λ, ఒక్కొక్క ఋజురేఖకును ఆపాతము గల బిందువులు λ. ఇట్టి విన్యాసమును (p, λ) అను సంకేతముచే గుర్తించెదము. ఇకమీద రేఖ అనగా ఋజురేఖ అని తీసికొనవలెను. అతిసరళమైన విన్యాసము $(1, 1)$. దీనియందు 1 రేఖ, 1 బిందువు ఉన్నవి. రేఖ బిందువు ద్వారా వెళ్ళును.

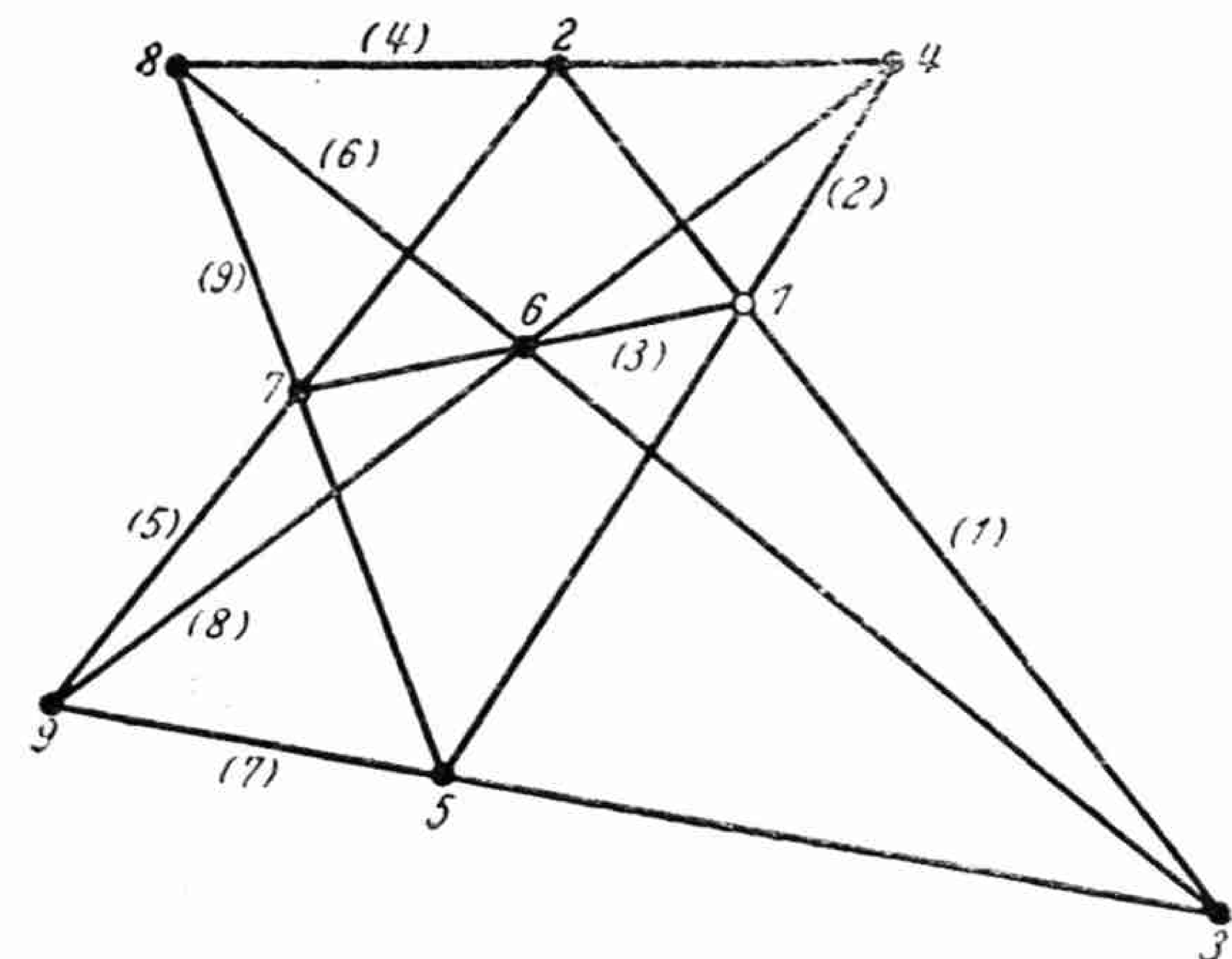
మరియొక సరళ విన్యాసము $(n, 2)$. దీనియందు n బిందువులు, n రేఖలు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క బిందువును రెండు రేఖలమీద నుండును; ఒక్కొక్క రేఖ 2 బిందువుల గుండ వెళ్ళును. ఈ విన్యాసము ఒక బహుభుజి ABC...K. ఇచ్చట n బిందువులు బహుభుజి శీర్షములు A, B, ...K. రేఖలు ఆ బహుభుజి యొక్క భుజములు AB, BC, CD, ...KA.

మరియొక సరళ విన్యాసము 4 రేఖలును వాటి ఖండన బిందువులును చేరినది. ఇచ్చట 6 బిందువులును, 4 రేఖలు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క బిందువునకును ఆపాతముగల రేఖలు 2; ఒక్కొక రేఖకును ఆపాతము గల బిందువులు 3. కనుక ఇది $(6_2, 4_3)$. ఇచ్చట $p\lambda = l\mu$, $6 \times 2 = 4 \times 3$.

ఇపుడు $(n, 3)$ విన్యాసములను తీసికొనెదము. అనగా n బిందువులును, n రేఖలు కలిగిన విన్యాసము. ఒక్కొక్క బిందువుగుండా మూడు రేఖలు వెళ్ళును. ఒక్కొక్క రేఖపై మూడు బిందువులుండును. దీనికి వాస్తవిక బిందురేఖ లుండవలెనంటే $n = 9$ కు తక్కువగా నుండకూడదు.

$(9, 3)$ విన్యాసములలో మూడు రకములున్నవి. వీనిలో ముఖ్యమైనది పాస్కల్ - బ్రయేన్‌కాన్ విన్యాసము.

విన్యాసములను వర్ణించుటకు క్రింది విధానము నుపయోగించెదము. బిందువులను 1, 2, 3, ...n సంఖ్యలవలన గుర్తించెదము. రేఖలను (1), (2), (3), ...(n) అను సంకేతములచే గుర్తించెదము. మన పట్టికలో ఒక రేఖ సంకేతము క్రింద ఏ ఏ బిందు సంకేతములున్నవో అవన్నియు ఆ రేఖపై నున్నవని అర్థముచేసికొనవలసినది. ఈ విధానము ప్రకారము పాస్కల్ - బ్రయేన్‌కాన్ విన్యాసమును క్రింద ఇచ్చిన పట్టిక వివరించును:

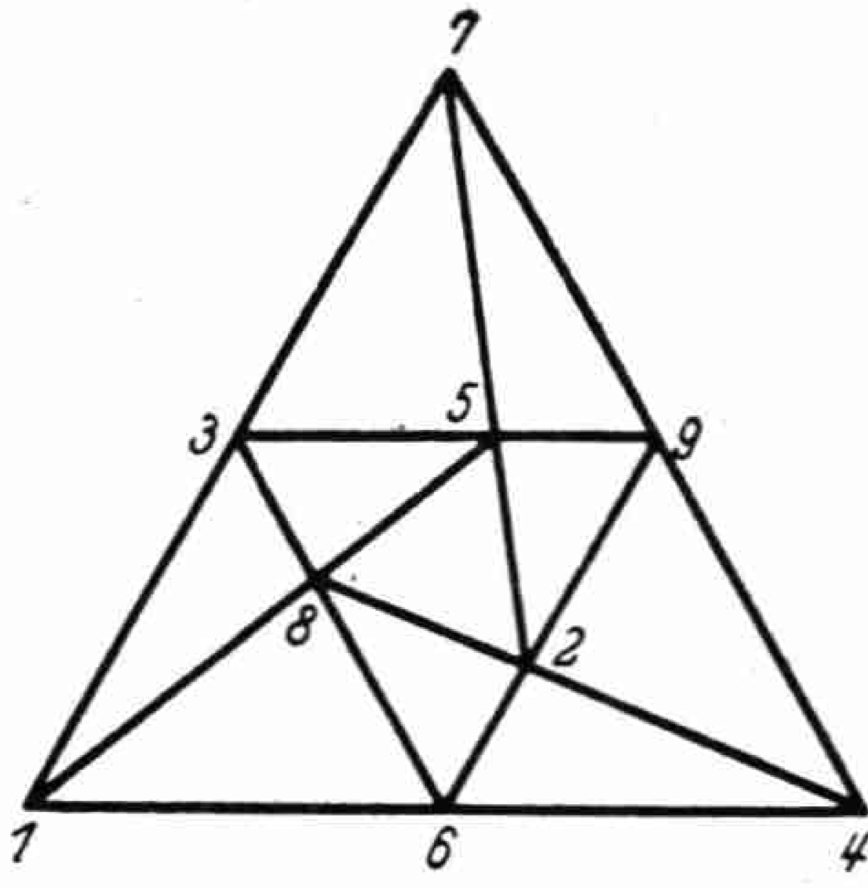


చిత్రము 351 పాస్కల్ - బ్రయేన్‌కాన్ విన్యాసము

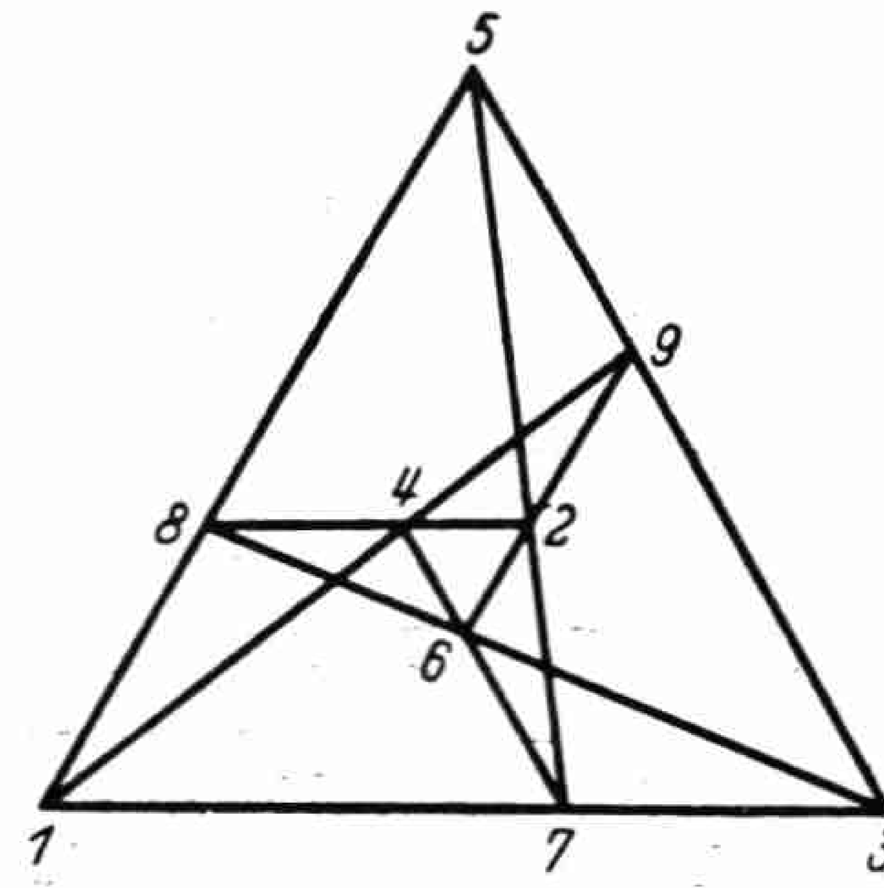
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

అనగా (8) రేఖపై ఉన్న బిందువులు 4, 6, 9. అటులనే (4) రేఖపై ఉన్న బిందువులు 2, 4, 8. బిందువు 2 గుండా వెళ్లు రేఖలు ఏవని కనిపెట్టుటకు 2 ఏ ఏ రేఖా సంకేతముల

క్రింద వచ్చుచున్నదని వెతకవలెను. పట్టికనుండి బిందువు 2 గుండ వెళ్ళు రేఖలు (1), (4), (5) అని చూచెదము. ఒక్కొక్క రేఖకును మూడు బిందువుల ఆపాతమున్నదనియు ఒక్కొక్క బిందువునకును మూడు రేఖల ఆపాతమున్నదనియు పైపట్టిక నుండి సరిచూడవచ్చును. కనుక ఇది (9, 3) విన్యాసమగుచున్నది (చూ. చిత్రము 351 - పు. 504).



చిత్రము 352



చిత్రము 353

మరి రెండు విధములైన (9, 3) విన్యాసములను 352, 353 చిత్రములలో చూడవచ్చును. ఇవి రెండును విక్షేపము వలన పైన వివరించిన విన్యాసము నుండి లభ్యము కావని చూపవచ్చును. అయితే ఇవి మునుపు వివరించిన విన్యాసమంత ముఖ్యము కావు. ఏలన వీటిని పొందుటకు బిందువులను, రేఖలను ఒక విశేష విధముగా తీసికొనవలెను.

డెసార్గ్ విన్యాసము (10, 3) : దీనియందు 10 బిందువులు, 10 రేఖలు ఉన్నవి. ఒక్కొక్క బిందువునకును 3 రేఖలతో ఆపాతమును, ఒక్కొక్క రేఖకును 3 బిందువులతో ఆపాతమును ఉండును. దీనిని నిర్మించుటకు రెండు త్రిభుజములు, (A, B, C), (A', B', C') తో ప్రారంభించెదము. ఇవి ఎటులుండవలెనంటే AA', BB', CC' చేర్చు రేఖలు ఒకే బిందువు O నందు ఖండించవలెను. త్రిభుజముల భుజములు BC, $B'C'$ ఒక బిందువు L లో ఖండించును ; CA, CA' ఒక బిందువు M లో ఖండించును ; AB, $A'B'$ ఒక బిందువు N లో ఖండించును. డెసార్గ్ సిద్ధాంతము ప్రకారను, ఈ మూడు బిందువులు L, M, N ఒకే ఋజురేఖ మీద ఉండును. ఇట్లు లభించిన 10 బిందువులు $A, B, C, A', B', C', O, L, M, N$ లు 10 రేఖలు (OAA'), (OBB'), (OCC'), (BCL), $(B'C'L)$, (CAM), $(C'A'M)$, (ABN), $(A'B'N)$, (LMN) ఒక (10, 3) విన్యాసమును నిర్మించును. దీని చిత్రమును సమీక్ష (చిత్రము 8 - పు. 39) లో చూడవచ్చును.

ఈ విన్యాసము సమతలములోనే కాక త్రిపరిమాణిక ఆకాశములోను ఉండవచ్చును. దీని నిర్మించుటకు (ABC) త్రిభుజము, $(A'B'C')$ త్రిభుజము వేర్వేరుతలములలోఉన్నవనుకొనవలయును. అయితే AA', BB', CC' రేఖలు మునుపటివలె ఒకే బిందువు O గుండ వెళ్ళవలెను. అపుడును పైన వివరించిన (10, 3) విన్యాసము దొరకును. అయితే ఇది ఒకేతలములోనుండదు. త్రిపరిమాణిక డెసార్గ్ విన్యాసమునందు 10 బిందువులు, 10 రేఖలు, 5 తలములు ఉండును. ఇచ్చట ఒక్కొక్క తలమునకు 6 బిందువులతోను, 4 రేఖలతోను ఆపాతమున్నది. ఒక్కొక్క రేఖకు 3 బిందువులతోను 2 తలములతోను ఆపాతమున్నది. ఒక్కొక్క బిందువునకు 3 రేఖలతోను, 3 తలములతోను ఆపాతమున్నది.

రయా విన్యాసము : దీనిలో 12 బిందువులు, 12 సమతలములును ఉన్నవి. దీనికి సరళమైన దృష్టాంతము ఒక ఘనము (క్యూబ్) నుండి నిర్మించవచ్చును. ఒక ఘనము $ABCDA'B'C'D'$ ను తీసికొనుము. దీని కేంద్ర బిందువు O అనుకొనెదము. A, A' ఎదురెదురు శీర్షములనుకొనెదము. అనగా AOA' ఒక ఋజురేఖమీద ఉన్నది. అటులనే B, B' ; C, C' ; D, D' ఎదురెదురు శీర్షములు. విక్షేప జ్యామితి దృష్టిలో AB అంచునకు, దానికి సమానాంతరమగు మిగిలిన 3 అంచులకును ఉమ్మడిగా అనంతములో ఒక బిందువు L ఉన్నది. అటులనే AC, AD అంచులపై అనంతములో ఉన్న బిందువులకు M, N అని పేరు పెట్టెదము.

మనము ఇప్పుడు పరిశీలించు విన్యాసముయొక్క 12 బిందువులు $A, B, C, D, A', B', C', D', O, L, M, N$. ఈ విన్యాసము యొక్క 12 తలములలో 6 ఘనముయొక్క 6 ముఖములు ; మిగిలినవి, $AB\ A'B'$ వంటి ఎదురెదురు అంచులతో ఆపాతము గల 6 తలములు. ఈ విన్యాసములో ఒక్కొక్క తలముతోను ఆపాతము గల 6 బిందువులున్నవి. ఉదా : తలము $ABCD$ లో బిందువులు A, B, C, D, L, N ఉన్నవి. అటులనే తలము $AB\ A'B'$ లో A, B, A', B', O, L ఉన్నవి. ఒక్కొక్క బిందువుతోను ఆపాతము గల 6 తలములున్నవి. ఉదా : A తో ఆపాతము గల తలములలో 3 ఘనముఖములును మరి మూడు $(AB\ A'B')$, $(AC\ A'C')$, $(AD\ A'D')$ కలవు. ఇటులనే ఒక్కొక్క బిందువునకు 6 తలముల ఆపాతమున్నది. కనుక ఈ బిందు - తల విన్యాసము (12, 6) విన్యాసము.

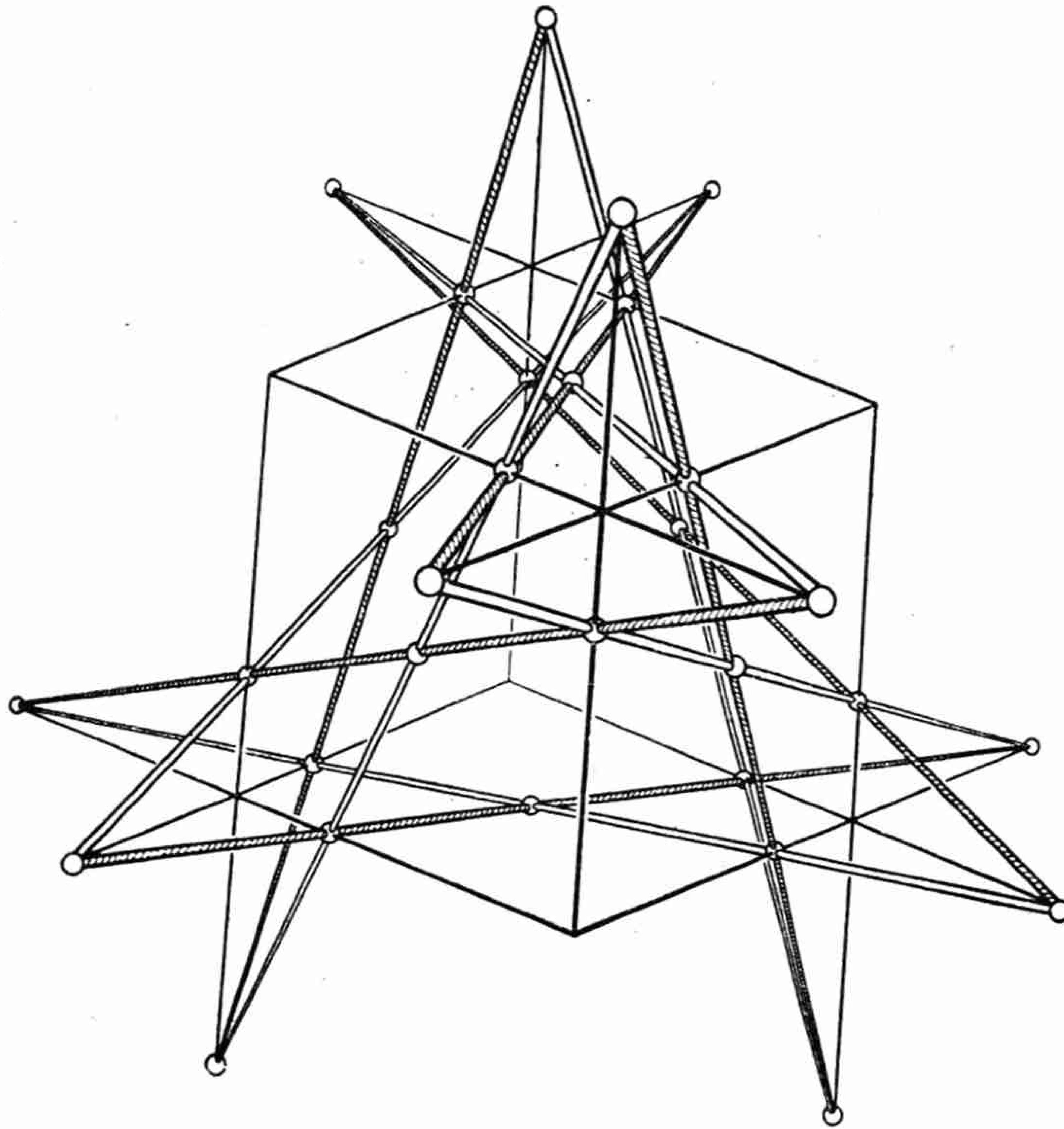
దీనినే ఋజురేఖలును బిందువులును గల విన్యాసముగా దృష్టించవచ్చును. అట్లు చేయుటకు ఘనముయొక్క 12 అంచులను, AA', BB', CC', DD' అను 4 కర్ణములను తీసికొనెదము. అపుడు ఈ విన్యాసములో 12 బిందువులును, 16 ఋజురేఖలును ఉన్నవి. ఒక్కొక్క బిందువునకును ఆపాతము గల 4 రేఖలున్నవనియు, ఒక్కొక్క రేఖకును ఆపాతముగల 3 బిందువు లున్నవనియు సులభముగా చూడవచ్చును. ఉదా : AB రేఖపై బిందువులు A, B, L ఉన్నవి. AO రేఖపై A, O, A' బిందువులున్నవి. A బిందువుతో ఆపాతము గల రేఖలు AB, AC, AD, AO ; అటులనే O బిందువుతో ఆపాతము గల రేఖలు AOA', BOB', COC', DOD'. మరియు L తో ఆపాతము గల రేఖలు 4 సమానాంతర అంచులు AB, CD, $A'B'$, $C'D'$. కనుక ఇది $(12_4, 16_3)$ బిందురేఖావిన్యాసము. $12 \times 4 = 16 \times 3$ అను సంబంధమును ఇచ్చట గుర్తించెదము.

16 ఋజురేఖలను, 12 తలములను తీసికొనినను ఇది ఒక విన్యాసమగుచున్నది. ఒక్కొక్క రేఖకు ఆపాతము గల తలములు 3. ఒక్కొక్క తలమునకును ఆపాతము గల రేఖలు 4. కనుక ఇది $(16_3, 12_4)$ రేఖా - తల విన్యాసమగుచున్నది.

అరు - అరు ఋజురేఖల విన్యాసము (డబుల్ సిక్స్ కాన్ఫిగరేషన్) : త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో 4 ఋజురేఖలిచ్చినచో, వీటినన్నిటిని ఖండించు ఋజురేఖలు సాధారణముగా రెండు ఉండును. ఇవి రెండు ఖండించుకొనవు. (చూ. ఋజురేఖాజ్యామితి పు 161). ఇపుడు ఒక ఋజురేఖ $(1')$ ను తీసికొని, దీనిని ఖండించు 5 రేఖలను తీసికొనెదము. ఈ 5 రేఖల పేళ్ళు (2), (3), (4), (5), (6) అనెదము.

ఈ 5 రేఖలలో ఏ నాలుగు-ఉదాహరణమునకు (3), (4) (5), (6) - తీసికొనను, వీటినన్నిటిని ఖండించు రేఖలు రెండు ఉండవలెనుకదా ? ఈ రెండింటిలో $(1')$ ఒకటి; ఏలన అది ఈ నాలుగు రేఖలను ఖండించుచున్నది. మరియొకటి ఉన్నదే, దానిని $(2')$ అని పిలిచెదము. $(2')$ రేఖ (2) రేఖను ఖండించదు; అయితే (3), (4), (5), (6) లను ఖండించును. అటులనే (2), (4), (5), (6) లను ఖండించు రేఖలు రెండున్నవి. వాటిలో $(1')$ ఒకటి. మరియొకదానిని $(3')$ అని గుర్తించెదము. ఇటులనే (2), (3), (5), (6) ను ఖండించు రెండు రేఖలు $(1')$, $(4')$ గా ఉండనిమ్ము. ఇటులనే (2), (3), (4), (6) ను ఖండించు రేఖలు $(1')$, $(5')$ గను, (2), (3), (4), (5) ను ఖండించు రేఖలు $(1')$ $(6')$ గను ఉండనిమ్ము. ఇట్లు $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$), $(6')$ అను అయిదు రేఖలను నిర్మించితిమి. ఈ అయిదు రేఖలను ఖండించురేఖ ఒకటి ఉన్నదని షాప్లీ అను గణితజ్ఞుడు చూపెను. దీనిని (1) అను సంకేతమువలన గుర్తించెదము. ఇది సాధారణముగ $(1')$ ను ఖండించదు.

కనుక మనకు ఒక రసవంతమైన 6 + 6 ఋజురేఖలు గల విన్యాసము దొరికినది. దీనిలో రెండు జాతులైన 6 రేఖలున్నవి. మొదటి జాతికి చేరిన రేఖలు (1), (2), (3), (4), (5), (6) రెండవజాతికి చేరిన రేఖలు $(1')$, $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$, $(6')$. వీటి ఖండన విధానమెట్లనగా, (1) అను రేఖ $(1')$ రేఖను ఖండించదు. అయితే అది $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$, $(6')$ రేఖలను ఖండించును. అటులనే (2) అను రేఖ, $(2')$ రేఖను ఖండించదు. అయితే అది $(1')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$, $(6')$ రేఖలను ఖండించును. అనగా రెండు జాతులలోను ఒకే సంఖ్య గల రేఖలు ఖండించుకొనవు అయితే ఒకజాతిలో ఒక సంఖ్యచే గుర్తింపబడిన రేఖ మరొక జాతిలో వేరు సంఖ్యచే గుర్తింపబడిన రేఖను ఖండించును. ఒకే జాతిలోని ఏ రెండు రేఖలు ఖండించుకొనవు.



చిత్రము 354

ఇటువంటి ఖండనములవలన కలుగు బిందువులు 30 ఉండును. ఈ 30 బిందువులు, 12 రేఖలు కలిగిన విన్యాసములో ఒక్కొక్క బిందువు గుండా 2 రేఖలుండును. ఒక్కొక్క రేఖమీదను 5 బిందువులుండును. కనుక ఇది $(30_2, 12_5)$ బిందు - రేఖా విన్యాసము. $30 \times 2 = 12 \times 5$ అని సరి చూచెదము.

ఈ విన్యాసములో ఏ రెండు రేఖలు ఖండించునపుడు ఒక ఖండన బిందువే కాక, ఆ రెండు రేఖలుండు ఒక సమతలమునుకూడ నిర్ణయించును. ఇట్టి తలముల సంఖ్య 30. కనుక దీనినే ఒక రేఖా - తల $(12_5, 30_2)$ విన్యాసముగా వీక్షించవచ్చును.

దీని చిత్రమును (చిత్రము 354 - పు. 506) లో చూడ వచ్చును. ఈ చిత్రములో ఒక ఘనముయొక్క ఒక్కొక్క ముఖముపైనను మొదటి జాతి రేఖలో ఒకటి, రెండవ జాతి రేఖలో ఒకటి ఉన్నవి. ఆ. న.

విపథనము : బ్రాడ్లీ 1725 లో ఆవిష్కరించిన విపథన సూత్రము ఖగోళశాస్త్ర చరిత్రలో ఒక మహత్తర సంభవము. ఇది అనుయాయి పరిశోధనలను ప్రోత్సహించి, సాపేక్షతావాదము మున్నగు తత్త్వములకు పునాదివేసెను. సూర్యునిచుట్టు భూమియే తిరుగుచున్నదను కోపర్నికస్ ప్రతిపాదనము బ్రాడ్లీ ఆవిష్కరించిన విపథనముచే రూఢియయ్యెను.

జ్యోతిర్వేగము : నభోమూర్తులు వెదజల్లు వెలుతురు తత్క్షణమే ప్రేక్షకుని చేరుటలేదు. పరిమిత వేగముతో క్రమముగ వెలుతురు ప్రసరింపబడుట 1675 లో రమ్మర్ ఆవిష్కరించెను (చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష - పు. 81). ఉపగురుగ్రహణావలోకనముచే రమ్మర్ కనుగొన్న జ్యోతిర్వేగము విలువ సరియైనదని బ్రాడ్లీ నిరూపించెను. జ్యోతిర్వేగము సెకనునకు 299337·24 కి. మీ. (1,86,285 మైళ్లు).

జ్యోతిర్వత్సరము - పరశకము : ఇవి బహుదూరస్థిత నక్షత్రముల దూరములను కొలుచుటకు తగిన రూపములు (యూనిట్లు). ఒక నక్షత్రము నుండి బయలుదేరు జ్యోతిః కిరణము మీదచెప్పిన జ్యోతిర్వేగముతో భూమిని చేరుటకు ఒక సంవత్సరము పట్టినచో, ఆ నక్షత్రము ఒక జ్యోతిర్వత్సర దూరములో ఉన్నదని వ్యవహరింతురు. అనగా

1 జ్యోతిర్వత్సరము

$$= 365\tfrac{1}{4} \times 24 \times 60 \times 60 \times 299337{\cdot}24$$

$$= 9.45 \times 10^{10} \text{ కి. మీ.}$$

ఒక నక్షత్రము యొక్క అతివర్తనము $1''$ అయినచో దాని దూరము ఒక పరశకము, లేదా సుమారు $30{\cdot}80 \times 10^{10}$ కి. మీ. కాబట్టి

1 పరశకము $= 30{\cdot}80/9{\cdot}45 = 3{\cdot}26$ జ్యోతిర్వత్సరములు. భూమి నుండి అవలోకించినపుడు ఒక నక్షత్రము యొక్క అతివర్తనము P'' అయినచో ఆ నక్షత్రము యొక్క దూరము $= 1/P$ పరశకములు.

పై రెండు విధముల నక్షత్రముల దూరములను వ్యక్త పరచుట కడు సులభము. ఇట్లుగాక భూ-సూర్యుల మధ్య దూరమును యూనిట్ (రూపము) గా చేసికొని, ఆ రూపములో నక్షత్రముల దూరములను తెలుపు విధము కూడ కలదు (చూ. సౌరాతివర్తనము).

విపథనము : నభోమూర్తుల నుండి వచ్చు వెలుతురు ప్రేక్షకుని చేరునపుడు జ్యోతిర్వేగము భూభ్రమణ వేగముతో కలియుటచే ఆ నభోమూర్తుల స్థానములలో మార్పులు కలిగినట్లు కన్పించును. దీనికి జ్యోతిర్విపథనము అని పేరు. ప్రేక్షకుని గతి వేగము వలన వస్తువు యొక్క స్థానమందు కనపడు మార్పునకు విపథనము అని పేరు.

చిత్రము 355

చిత్రము 355 లో PEQ సూర్యుని చుట్టునుండు భూభ్రమణ కక్ష్యలో కొంతభాగము. S బహుదూరములో నుండు ఒక స్థిర నక్షత్రము. ఆ నక్షత్రము నుండి 'c' వేగముతో వెలువడు జ్యోతిఃకిరణమును పరిశీలింతము. SE కలుపుము. ఒక సుకరమైన మానములో EG జ్యోతి

ర్వేగము (c) ను, EF (భూకక్ష్యకు E వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ) భూ వేగము (v) ను గుర్తింపుము. EG రేఖ సూచించు జ్యోతిర్వేగమును EF, EM అను రేఖలు సూచించు ఘటక వేగములుగ విభజింపవచ్చును. ఇప్పుడు ME రేఖను S' కు పొడిగింపుము. ప్రేక్షకుని గతివేగము వలన నక్షత్రము నుండి వెలువడు కిరణము అతనికి $S'E$ రేఖా మార్గమున వచ్చునట్లు తోచును. ఇట్లు నక్షత్రము యొక్క దిశయందు కనపడు మార్పు ($S'ES$) నకే విపథనము అని పేరు.

EF రేఖ ఖగోళమును సంధించు బిందువునకు శీర్షము అని పేరు. ఈ శీర్ష బిందువును అనుసరించి భూగమన మార్గముండును. ఇది క్రాంతివృత్తమున సూర్యునికి 90° వెనుక ఉండును. విపథనమువలన నక్షత్ర దిశయందు అగపడు మార్పు ఈ బిందువువైపు ఉండును. నాక్షత్ర యథార్థ దిశకును, భూగమన దిశకును మధ్యనుండు కోణమునకు భూపథము అని పేరు. $\angle S'EA$ భూపథము. GEM అను త్రిభుజములో

$$\frac{\sin SES'}{\sin S'EA} = \frac{MG}{EG} = \frac{v}{c} = k \text{ అని అనుకొనినచో}$$

$$\sin SES' = k. \sin S'EA$$

అనగా $SES' = k. \sin S'EA$ ($\because$ విపథనము అల్పమైనది)

విపథనము $= k.$ జీవ (భూపథము)

కనుక భూగమన వేగమువలన నాక్షత్రగతియందు అగపడు మార్పు భూగమన దిశకును, భూనక్షత్రములను కలుపు రేఖకును మధ్యనుండు కోణ జీవకు అనుపాతములో ఉండును.

అన్ని నక్షత్రములకును k యొక్క విలువ సమానము. k కు విపథన స్థిరాంకము అని పేరు.

విపథనగుణకము k = భూ వేగము / జ్యోతిర్వేగము (వర్తుల మానములో) సెకనులలో

$$k'' = \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} \cdot \frac{v}{c} = 206265 \times \frac{\text{భూ వేగము}}{\text{జ్యోతిర్వేగము}}$$

విపథన ఆవిష్కరణము: నాక్షత్ర అతివర్తనములు గణ్యమైనవేనా యను ప్రశ్నను పరిశోధించు సందర్భమున విపథనము యొక్క మూల తత్త్వము ఆవిష్కరింపబడెను. బ్రాడ్లీ ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనారంగములో ప్రవేశించినపుడు యథార్థములైన నాక్షత్ర అతివర్తనములు కనుగొనబడినవా లేదా అను సందేహము ప్రబలమైయుండినందున అతడును ఇతర శాస్త్రజ్ఞులవలె ఈ సందేహ నివారణార్థము నాక్షత్రావలోకనమునకు పూనుకొనెను. అందు అతనికి సహాయపడిన వ్యక్తి మాలినో.

వీరు లండన్ అక్షాంశములో గగనమస్తకమునుదాటు r డ్రాకోనిస్ నక్షత్రమును - అతివర్తనమునకు చేయవలసిన సవరణలు అల్పములైనందున - తీసికొనిరి ఈ నక్షత్రము యొక్క స్థానము సంవత్సరము పొడవున మారుచుండుటయు; మార్చి నెలలో గరిష్ఠ దక్షిణ స్థితిని, సెప్టెంబరులో గరిష్ఠ ఉత్తరస్థితిని పొందుటయు; దక్షిణోత్తర స్థిత్యంతరము సుమారు 40 సెకనులుగ ఉండుటయు వారు గమనించిరి. అతివర్తనముచే r డ్రాకోనిస్ గతులలో మార్పులు సంభవింపలేదని వారికి విదితమయ్యెను; ఏలన, నక్షత్రగతులలో అతివర్తనము వలన గోచరించు మార్పులు దక్షిణదిశలో డిసెంబరు నెలలోను, ఉత్తర దిశలో జూన్ నెలలోను వ్యక్తమైయుండవలయును. పై సంభవహేతువులను చర్చించునపుడు భూమి అక్షచలనమువలన పై మార్పు లేర్పడియుండునా అను సంశయము వారికి కలిగెను. అందువలన వారు ఎదుటి ధ్రువమువైపు ఉండు మరియొక నక్షత్రమును అవలోకింప పూనుకొనిరి. కాని ఆ నక్షత్రము యొక్క గతులలో వ్యక్తమైన మార్పులను r డ్రాకోనిస్ యొక్క వ్యక్తగతి మార్పులతో పోల్చిచూచినపుడు భూమ్యక్షచలనమే పై వ్యక్త మార్పులకు కారణమని చెప్ప అలవిగాకుండెను. కాని ఈ ప్రయత్నములు వ్యర్థము కాలేదు. ఈ పరిశోధనల ఫలితముగ బ్రాడ్లీ అక్షవిచలనము అను సంఘటనను ఆవిష్కరించెను. r డ్రాకోనిస్ యొక్క స్థానాంతరతలోనితత్త్వము బ్రాడ్లీకి అకస్మాత్తుగ తోచెనట!

ఒకనాడు బ్రాడ్లీ తేమ్స్‌నదిపై ఒక ఓడలో విహరించుచుండెనట. సాధారణముగ పడవ ముందుభాగమున గాలి వీచు దిశను సూచించు యంత్రమును ఒకదానిని బిగింతురు. పడవ స్థిరముగ ఉండునపుడు ఆ పరికరము సూచించిన దిశకును, పడవ ముందుకు సాగుచున్నప్పుడు చూపిన దిశకును భేదముండుటయు; పడవ వేగము అధికమైనకొలది ఆ భేదము హెచ్చుచుండుటయు బ్రాడ్లీ గమనించెను. ఆ భేదమునకు ముఖ్యకారణము గాలి స్థిరవేగము, పడవ గమన దిశలోని మార్పులు ఏకీభవించుటయే యని బ్రాడ్లీ ఊహించెను. r డ్రాకోనిస్ యొక్క స్థానాంతరతల ఆవర్తనము ఒక సంవత్సరమైయుండినందున పై మార్పులకును, భూభ్రమణమునకును సంబంధముండునా యని పరిశీలించి, పరిమిత వేగముగల జ్యోతిర్గమనము, భూభ్రమణము ఏకీభవించుటచే నభోమూర్తుల దిశయందు మార్పులు వ్యక్తమగుచున్నవని బ్రాడ్లీ ప్రతిపాదించెను. ఇతని ప్రతిపాదన జ్యోతిర్వేగము పరిమితమైనదనుటను రూఢిపరచెను. జ్యోతిర్వేగము పరిమితమైనదని రమ్మర్ కనుగొనెనని ఇదివరకే చెప్పితిమి.

ఇందుండి విపథనమువలన నక్షత్రము యొక్క క్రాంతిలో గోచరమగు మార్పు = SL =

$k \left[\cos \delta \sin \delta_0 - \sin \delta \cos \delta_0 \cdot \cos (\alpha_0 - \alpha)\right]$

విషువాంశలో గోచరమగు మార్పు =

$S'L \sec \delta = k \cos \delta_0 \sin (\alpha_0 - \alpha) \sec \delta$

అని విదితమగును. మరియు, ⊙ — సూర్యుని భోగమును, ω (= $A\gamma N$) — పరమాపక్రాంతిని సూచించిన, నక్షత్రము యొక్క క్రాంతిలో వ్యక్తమగు మార్పు =

$$-k \left[\cos \odot \cos \delta \sin \omega + \sin \delta (\cos \alpha \sin \odot - \sin \alpha \cos \omega \cos \odot)\right]$$

$$= -k \left[\cos \odot (\cos \delta \sin \omega - \sin \delta \sin \alpha \cos \omega) + \sin \odot \sin \delta \cos \alpha\right]$$

విషువాంశలో వ్యక్తమగు మార్పు =

$$-k \sec \delta \left[\cos \odot \cos \alpha \cos \omega + \sin \odot \sin \alpha\right]$$

అని చూపవచ్చును.

విపథనజన్య పరివర్తనములు : ఒక వ్యక్తి A నిలిచి యున్నప్పుడు అతనిపై పడు వర్షబిందువులు నిలువుగా పడును. వర్షమునకు భయపడి, ఆ వ్యక్తి పరుగెత్తునపుడు నిలువుగా పడు వర్షబిందువులు ఏటవాలుగ పడునట్లు కనబడును. భూమి E సూర్యునిచుట్టు భ్రమణము చేయు చున్నది. ఒక సెకనులో భూమి EA దూరము వెళ్లునను కొందము. దూరమున కల ఒక నక్షత్రము (S) నుండి వచ్చు కాంతి కిరణము E ని చేరునపుడు కొంత ఏటవాలుగా $S'E$ వైపు కనపడును. $\angle SES'$ కు విపథనము అని పేరు. $\angle S'EA$ కు భూపథమని పేరు. $\angle SES' = k \cdot \sin S'EA$ అని ఇంతకుముందు చూచితిమి.

భూమి సూర్యునిచుట్టు భ్రమణము చేయుటచే S స్థిరమై ఉన్నను $S'E$ స్థిరముగా ఉండదు. S కేంద్రముగా బిందువు S' ఒక వృత్తపరిధిపై తిరుగుచుండును. కాని మన దృష్టికి S' యొక్క బిందుపథము ఒక విలోపము (దీర్ఘ వృత్తము) గా కనబడును.

నక్షత్రము విషువృత్తముపై నుండినచో విపథన బిందు పథము ఒక ఋజురేఖగాను, ధ్రువమువద్ద నుండినచో ఒక వృత్తముగాను మారును. ఇతర స్థలములందు బిందుపథము ఒక విలోప రూపములో కనపడును.

గ్రహములకు భ్రమణము కలదు. వానికి కూడ విపథనము ఏర్పడును. దీనికి గ్రహవిపథనము అని పేరు. భూభ్రమణముచే నక్షత్రస్థితిలో విపథనము ఏర్పడును. దీనికి దైనిక విపథనము అని పేరు. కె. ఎస్. వి. న.

విపరీత గణితము : విపరీతగణితమనగా ఒక తప్పైన సిద్ధాంతమునకు ఉపపత్తిని కల్పించుట. ఇది చూపునకు సరిగానుండునుకాని, పరిశీలనలో ఆ ఉపపత్తిలోని దోషములు వెల్లడియగును. ఒక అల్ప ఉదాహరణ మిచ్చెదము. ఒక గిన్నె తీసికొని దానిని నీటితో సగము పూర్తిచేసినచో, సగము ఖాళీగనుండును. కనుక

$\frac{1}{2}$ పూర్తియయిన గిన్నె = $\frac{1}{2}$ ఖాళీయయిన గిన్నె. ఇపుడు ఇరుప్రక్కలను 2 చేత గుణకారము చేయుము. అపుడు

ఒక పూర్తియయిన గిన్నె = ఒక ఖాళీఅయిన గిన్నె అను విపరీతమైన సిద్ధాంతము దొరకుచున్నది. పై తర్కవాదములో తప్పు ఎచ్చట ప్రవేశించినది ?

పై దృష్టాంతములో $2 \times (\frac{1}{2}$ ఖాళీ గిన్నె$)$ అను దానిని $(2 \times \frac{1}{2})$ ఖాళీ గిన్నె అని తీసికొనియున్నాము. ఇది సరి కాదు. $2 \times a$ అనగా $a + a$. కనుక $2 \times (\frac{1}{2}$ ఖాళీ గిన్నె$)$ అనగా $\frac{1}{2}$ ఖాళీ గిన్నె + $\frac{1}{2}$ ఖాళీ గిన్నె. ఈ రెండు $\frac{1}{2}$ ఖాళీ గిన్నెలలోని నీళ్ళు కలిపినచో ఒక పూర్తి గిన్నె నీళ్ళు లభించును. ఖాళీ గిన్నె లభించదు.

గణిత సంబంధమైన ఇటువంటి దృష్టాంతములు ఇచ్చట ఇచ్చెదము. ఇవి అన్ని గణిత శాఖలలోను ఉన్నవి. ఇట్టి కుతర్క వాదములలో అతి ప్రాచీనమైనది జీనో అను గ్రీక్ గణితజ్ఞుడు ప్రతిపాదించినది. అతడు చలనమే సాధ్యము కాదని వాదించెను. ఏలన, ఒక వస్తువు తానున్నచోటులోనే చలించ సాధ్యముకాదు. తాను లేనిచోటులోను చలించదు. కనుక ఏ వస్తువునకును చలనము సాధ్యముకాదు! జీనో యొక్క మరియొక కుతర్కము నిచ్చెదము. అకిలిస్ అను వ్యక్తి గ్రీస్ దేశములో అతి వేగముగా పరుగిడ సమర్థుడు. అతనిముందున్న ఒక తాబేలును పరుగు పోటీలో అతడు దాటి ముందుకు పోజాలడు అని జీనో వాదించెను. ఏలన తాబేలును దాటుటకుమునుపు అతడు తాబేలు బయలు దేరిన స్థలమును చేరవలెను కదా! అతడు ఆ స్థలము చేరునంతలో తాబేలు మరియొక స్థలమును చేరియుండును. అకిలిస్ ఈ రెండవ స్థలము చేరునంతలో తాబేలు ఒక మూడవ స్థలము చేరియుండును. ఈ మూడవ స్థలము అకిలిస్ చేరునపుడు తాబేలు దానిని విడిచి ఒక నాలుగవ స్థలము చేరియుండును. ఈ వాదమునకు అంతమేలేదు. కనుక తాబేలు ఎల్లపుడును అకిలిస్ ముందరనే ఉండును!

విపరీత వాదము, లేదా కుతర్కవాదమునకు శిక్షణలో ప్రాముఖ్యమున్నది. సాధారణ గణితములో శ్రద్ధ చూపని బాలురు ఇట్టి గణిత వాదములో ఎక్కువ శ్రద్ధను చూపుదురు. సత్యమే జీవముగా గల గణితములోకూడ తప్పులు సాధ్యమా అనునది వారికి విస్మయము కలిగించును! ఆ తప్పుల ప్రవేశ స్థానమును కనిపెట్టుటలో ఉత్సాహము

చూపుదురు. ప్రాముఖ్యమునకు రెండవ కారణము ఇట్టి తప్పులు రాకుండుటకు మనము తీసికొనవలసిన జాగ్రత్తలు ఏమి అనుటయే. ఇది బాలురకేకాక, అందరికిని తెలియవలసిన విషయము!

కుతర్కవాదము ప్రవేశించుటకు పెక్కు ద్వారము లున్నవి. వీటిలో ముఖ్యమైనవి (i) మనము వాడు మాటలలోనో, భావములలోనో సందేహార్థములు; (ii) ఒక సిద్ధాంతము నిజమైతే దాని విలోమమును నిజమని అనుకొనుట; (iii) పరికర్మముల క్రమమును మార్చుట; (iv) నిషిద్ధ పరికర్మములను ఉపయోగించుట (ఉదా: శూన్యముచే భాగహారము); (v) తప్పు చిత్రము నుపయోగించుట; (vi) సాధనము లేని ప్రశ్నలకు సాధనమున్నదను కొనుట ఇత్యాది.

ఇపుడు గణితములోని వివిధ శాఖలనుండు కుతర్క వాదమునకు దృష్టాంతముల నిచ్చెదము.

అంకగణితము: (i) ఒక హోటలులో 10 గదులే ఉన్నవి. ఒకనాడు 11 గురు వ్యక్తులు వచ్చి ఒక్కొక్కరికి ఒక ప్రత్యేక గది కావలెనని అడిగిరి. హోటలు అధికారి కొంచెము ఆలోచించి, ఈ అసాధ్య ప్రశ్నను ఇట్లు సాధించెను. కడపట వచ్చినవానిని కొంతసేపు మొదటి గదిలో ఉండమని చెప్పి, ఇతరులకు ఒక్కొక్కరికి ఒక గది వరుసగా ఇచ్చెను. మొదటిగదిలో ఇద్దరున్నందువలన, మూడవ వ్యక్తికి రెండవ గదినిచ్చెను. అటులనే 4 వ వ్యక్తికి మూడవ గదిని ఇచ్చెను. 5 వ వ్యక్తికి నాలగవ గదిని, కడపట 10 వ వ్యక్తికి తొమ్మిదవ గది ఇచ్చెను. పదవ గది ఖాళీగనుండుటవలన, ఆ గదికి మొదటి గదిలో కొంతసేపు ఉండమని చెప్పిన 11 వ వ్యక్తిని పంపెను. దీనిలో తప్పేమి?

(ii) ఒక మంచి గడియారము ద్వారా మరియొక గడియారము యొక్క 6 టిక్ శబ్దములను వినుటకు 6 సెకను లయినవని కనిపెట్టబడినది. అపుడు, 12 టిక్ శబ్దములను వినుటకు ఎంత సేపగును?

ఈ ప్రశ్నకు 12 సెకనులని ఒక బాలుడు తటాలున ప్రత్యుత్తర మిచ్చెను. ఇది సరియా?

(iii) పోటీ పందెములో ఒక మనిషి 100 మీటర్ల దూరము 10 సెకనులలో పరుగెత్తగలడు. అతడు 1 గంటలో ఎంతదూరము పరుగెత్తగలడు. ఉత్తరము: $\frac{60 \times 60}{10} \times 100$

$= 36000$ మీటరులు $= 36$ కిలోమీటరులు. ఇది సరియా?

(iv) పంచవర్షప్రణాళిక ప్రకారము ఒక కర్మాగారము తన ఉత్పత్తిని 3 మార్లు హెచ్చించవలెను. ఒక్కొక్క సంవత్సరములోను ఆ సంవత్సరారంభమున ఉన్న ఉత్పత్తికంటే ఆ సంవత్సరము అంతములో ఉత్పత్తి 30% ఎక్కువగుచున్నది. ఇట్లైతే 5 సంవత్సరములలో $5 \times 30\% = 150\%$, అనగా $1\frac{1}{2}$ మార్లు మాత్రము ఎక్కువగును కదా? 3 మార్లు ఉత్పత్తి 5 సంవత్సరములలో పెరగదని చింత కలిగినది. ఈ చింతకు ఆధారమున్నదా?

(v) $2 \times 3 = 4$.

ఒకడు $2 \times 3 = 4$ అని ఇట్లు నిరూపించెను. ఒక అగ్గిపుల్లను తీసికొనుము. దానిని రెండుగా విరువుము. ఇప్పుడు ఒకసారి 2 తో గుణకారము చేసియున్నాము. ఇప్పుడు ఒక ముక్కను రెండుగా విరుచుటవలన, రెండు సార్లు రెట్టించియున్నాము. మరియొక ముక్కను విరుచుటవలన 3 సార్లు రెట్టించియున్నాము. కనుక మనకు లభించు ముక్కలు 2×3. అయితే దొరికిన ముక్కలు 4. కనుక $2 \times 3 = 4$. దీనిలో ఏమితప్పు?

(vi) ఒకనికి 14 ఆవులుండెను. అతనికి 3 కొడుకులు. మొదటి కుమారునకు $\frac{1}{2}$ భాగమును, రెండవ కుమారునకు $\frac{1}{4}$ భాగమును, మూడవ కుమారునకు $\frac{1}{8}$ భాగమును ఇవ్వవలెనని మరణశాసనము వ్రాసి అతడు చనిపోయెను. గోహత్యా మహాపాపమునకు గురికాకనే ఒక కుటుంబ స్నేహితుడు పై శాసనమును నెరవేర్చుటకు త్రోవ చూపెను. అదిఎట్లు?

బీజగణితము: (vii) $\frac{1}{4}$ రూపాయ $= 25$ పైసలు. ఇరు ప్రక్కలను వర్గమూలమును తీసికొనుము.

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ రూపాయ $= \frac{1}{2}$ రూపాయ $= \sqrt{25}$ పైసలు $=$ 5 పైసలు.

కనుక $\frac{1}{2}$ రూపాయ $= 5$ పైసలు. దీనిని ఒప్పుకుంటారా?

(viii) $12 = 6 = 0$: ఒక విద్యార్థి క్రింది సమీకరణమును ఇట్లు సాధించెను:

$$3\sqrt{x} + x + 2 = 0$$

సాధనము: $3\sqrt{x} = -x - 2$

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \therefore x = 4$, లేదా $x = 1$; $x = 4$ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినట్లైన

$$3\sqrt{4} + 4 + 2 = 12 = 0$$

$x = 1$ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినట్లైతే

$3 + 1 + 2 = 0 \quad \therefore 6 = 0$ కనుక $12 = 6 = 0$.

(ix) $x^n - a^n$ అను ద్విపదమును తీసికొనుము. ఇచ్చట n ఒక ధనపూర్ణాంకము. x, a రెండు సంఖ్యలు. $x/a = y$ అని వ్రాయుము; అప్పుడు $x = ay$.

$x^n - a^n = a^n(y^n - 1)$

$$x - a = ay - a = a\,(y-1)$$

$$\therefore a^{n-1}\,(x-a) = a^n\,(y-1)$$

$(y^n - 1)$ ను, $(y-1)$ శేషము లేకుండ విభజించును. కనుక $(x^n - a^n)$ ను, $a^{n-1}\,(x-a)$ శేషము లేకుండ విభజించును.

ఇప్పుడు $a = 2$, $x = 3$, $n = 3$ అని తీసికొనుము. $x^n - a^n = 3^3 - 2^3 = 19$, $a^{n-1}(x-a) = 2^2(3-2) = 4$ కనుక 19 ని శేషము లేకుండ 4 విభజించును అని లభించి యున్నది! ఎట్లు ఈ విపరీత సూత్రము మనకు దొరికి యున్నది?

(x) $7 = 13$:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

అను సమీకరణమును తీసికొనుము. దీని నుండి

$$\frac{x+5-5\,(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{-4x+40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$ అని లభించును.

కనుక $\dfrac{4x-40}{7-x} = \dfrac{4x-40}{13-x}$. దీని నుండి $7 = 13$ అని తీర్మానము చేసెదము ఎందుకు చేయకూడదు?

(xi) $x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots$ విలువ ఎంత? పై సమీకరణమును

$$x = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots) = 1 - x$$

అని వ్రాయవచ్చును. కనుక $2x = 1$ అనగా $x = \frac{1}{2}$ అయితే మరియొక విధముగా

$$x = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots\ \ldots$$

అనియు వ్రాయవచ్చును. కనుక

$$x = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ \ldots = 0$$

మూడవ విధముగా

$$x = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1)\ \ldots\ \ldots$$

$$= 1 - 0 - 0 - 0 - 0\ \ldots\ \ldots = 1$$ అగును

నాల్గవ విధమున, రెండు రెండుగా పదముల స్థానమును మార్చితే, $x = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ అగుచున్నది. కనుక $x = -1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = -1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = -1$

కనుక $\frac{1}{2} = 0 = 1 = -1$ అన్నియు సమములు! ఒప్పుకొంటారా?

(xii) గణితములో 'ఒక్కొక్క సమీకరణమునకును ఒక మూలమైనను ఉన్నది. అది వాస్తవ సంఖ్యగనో, సంకీర్ణ సంఖ్యగనో ఉండవచ్చును', అని ఒక సిద్ధాంతమున్నదట. అట్లయితే

$$\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x}$$

అను సమీకరణము యొక్క మూలమొకటిని కనిపెట్టెదము. ఇచ్చట ($\sqrt{a}$ అవగా a యొక్క ధన వర్గమూలము. మరియొక ఋణ వర్గమూలము $-\sqrt{a}$)

పై సమీకరణమునుండి వర్గీకరణచే

$$(5+x) + (5-x) + 2\sqrt{(5+x)\,(5-x)} = x$$

$$\therefore 4\,(5+x)\,(5-x) = (x-10)^2$$

$$\therefore 100 - 4x^2 = x^2 - 20x + 100$$

$$\therefore 5x^2 = 20x. \quad \therefore x = 0, \text{ లేదా } x = 4$$

అని లభించును. అయితే ఈ విలువలను దత్త సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన యెడల మనకు దొరుకునది

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0, \quad 3 + 1 = 2$$

ఈ తప్పు ఎచ్చటనుండి వచ్చినది?

జ్యామితి: (xiii) ఒక ట్రెపీజియమ్ యొక్క సమానాంతర భుజముల మొత్తము నిడుపు శూన్యము!

$ABCD$ ఒక ట్రెపీజియమ్. దాని క్రింది భుజమగు DC నిడుపు a అనియు, దానికి సమానాంతరమగు పై భుజము AB నిడుపు b అనియు తీసికొనెదము. DC ను కుడి ప్రక్కకు నిడుపు b దీర్ఘించుము. కనుక $CE = b$ (చూ. చిత్రము 356). అటులనే BAను ఎడమ వైపు a నిడుపు AF దీర్ఘించుము. కనుక $AF = a$. కర్ణము AC ను

చిత్రము 356

మరియొక కర్ణము BD రేఖ G బిందువందును, EF ను చేర్చు రేఖ H అందును ఖండించనిమ్ము. AG, GH, HC ఖండముల నిడుపులను z, y, x అని గుర్తించెదము.

త్రిభుజములు CDG, ABG సరూపములు. కనుక $(x+y)/z = a/b$ త్రిభుజములు AFH, CEH సరూపములు. కనుక $(y+z)/x = a/b$. వీటినుండి $(x+y)/z = (y+z)/x$ అని లభించుచున్నది. రెండవ నిష్పత్తి లవమును హారమును (-1) చేత గుణకారము చేసినచో

$$\frac{x+y}{z} = \frac{-y-z}{-x}$$

అని లభించుచున్నది. బీజగణితము ప్రకారము, $p/q = r/s$ అయితే, ఇవి రెండును $(p+r)/(q+s)$ నిష్పత్తికి సమానములు. కనుక

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+y-y-z}{z-x} = \frac{x-z}{z-x} = -1$$

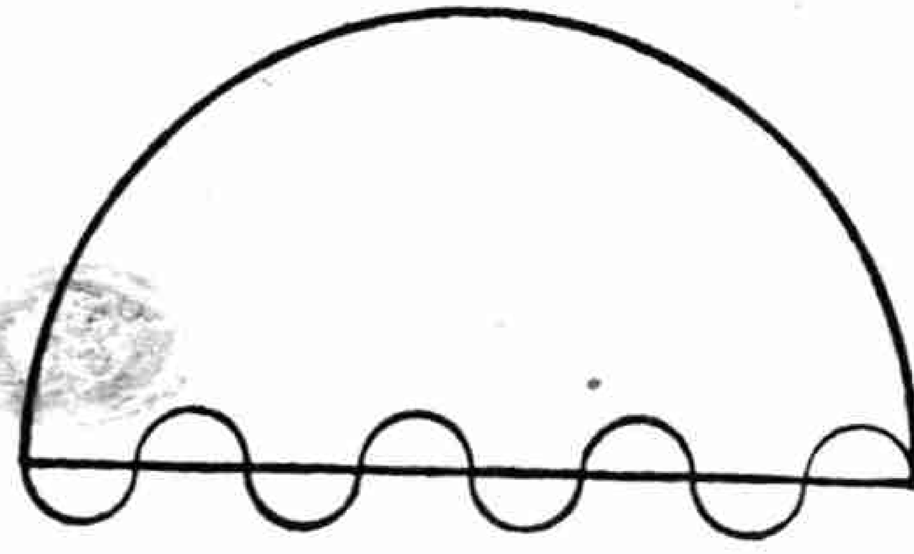
అనగా $\frac{x+y}{z} = -1$. అయితే ప్రారంభములోనే $\frac{x+y}{z} = \frac{a}{b}$ అని నిరూపించియున్నాము.

కనుక $a/b = -1$ అనగా $a + b = 0$.

తప్పు ఎచ్చట మరుగుకొని ఉన్నది?

(xiv) ఒక అర్ధ వృత్తముయొక్క పరిధి దాని వ్యాసమునకు సమానము : కనుక $\pi = 2$?

వ్యాసము $2r$ గల ఒక అర్ధ వృత్తమును తీసికొని, దాని వ్యాసమును n సమ భాగములుగా విభజించుము. ఒక్కొక్క భాగము పైనను చిన్న అర్ధ వృత్తములను ఒకటి విడిచి ఒకటి వ్యాసమునకు ఒక ప్రక్కను మరొక ప్రక్కను గీయుము (చూ. చిత్రము 357).



చిత్రము 357

ఇటునటు ఊగులాడు తరంగమువంటి వక్రము దొరకును. n ఎక్కువయి అనంతమగునపుడు ఈ వక్రముయొక్క వెడల్పు తక్కువయి, తుదకు ఒక ఋజురేఖ రూపమును పొందును. కనుక ఈ వక్రముయొక్క పొడవు L_n అయితే, $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు దాని అవధి వ్యాసము పొడవు $2r$ అగును. అయితే ఒక్కొక్క చిన్న అర్ధ వృత్తము యొక్క చాపము $\frac{\pi r}{n}$, కనుక n చాపములు గల ఆ తరంగము వంటి వక్రము పొడవు $\frac{\pi r}{n} \times n = \pi r$. ఇది n పై ఆధారపడలేదు. కనుక $n \longrightarrow \infty$ అవధిలో ఈ వక్రము పొడవు πr. కనుక $\pi r = 2r$. అనగా $\pi = 2$.

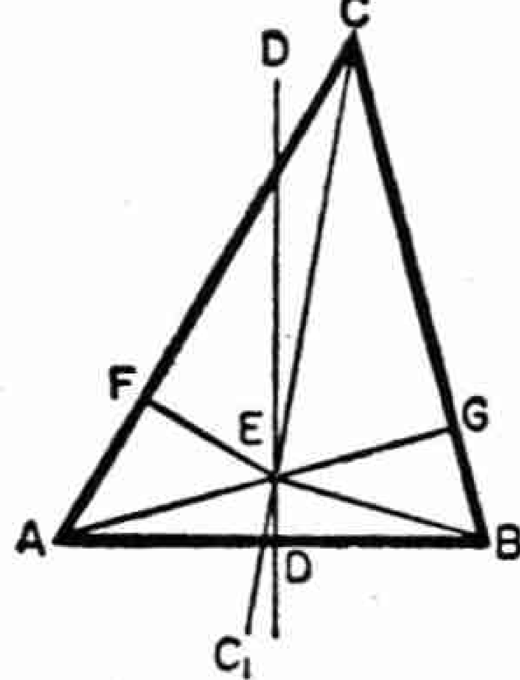
(xv) ఒక్కొక్క త్రిభుజములోను రెండు భుజములు సమమైనవి.

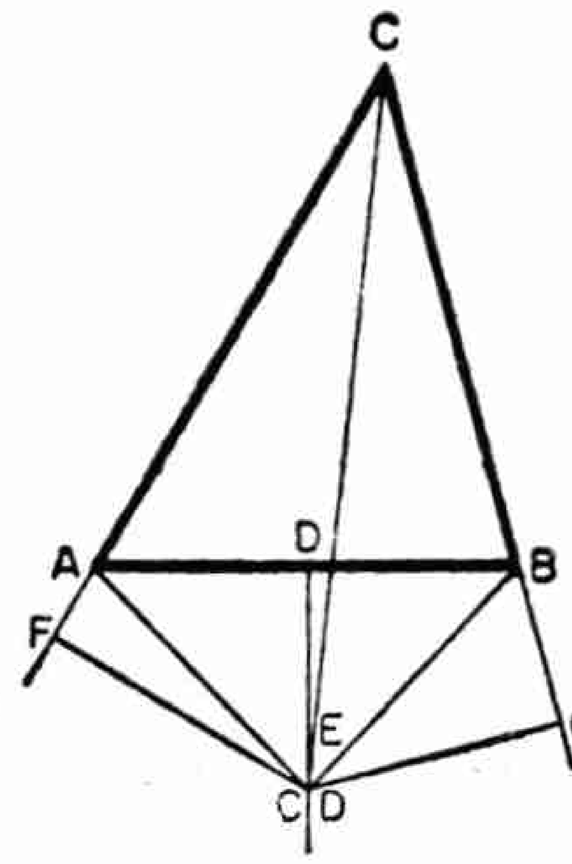
ఏదో ఒక త్రిభుజము ABC ను తీసికొనుము. దీనిలో AC > BC అనుకొనెదము. $\angle ACB$ ను సమ భాగములుగా ఖండించు రేఖ CC_1 ను గీయుము. అటులనే పీఠము AB మధ్య బిందువు D గుండా AB కు లంబరేఖ DD_1 ను గీయుము. CC_1, DD_1 రేఖలు ఖండించు బిందువునకు E అని పేరు పెట్టుము (చూ. చిత్రము 358). ఈ బిందువు E, త్రిభుజము లోపలనో (మొదటి చిత్రము) లేదా బయటనో (రెండవ చిత్రము) లేదా AB భుజము పైనో (మూడవ చిత్రము) ఉండవచ్చును.

AE, BE ను చేర్చి, E లో నుండి CA, CB కు లంబరేఖలు EF, FG గీయుము.

CEF, CEG త్రిభుజములలో CE ఉమ్మడి భుజము. $EF = EG$ (ఏలన CE అను రేఖ $\angle C$ ని రెండు సమ భాగములుగా విభజించు రేఖ) కనుక ఈ త్రిభుజములు సర్వసమములు. $\therefore CF = CG$. అటులనే EAD త్రిభుజము EBD త్రిభుజమునకు సర్వసమము. ఏలన ఇవి రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు. ED ఉమ్మడి భుజము. $AD = BD$ కనుక $AE = BE$.

తుదకు AEF త్రిభుజము BEG త్రిభుజమునకు సర్వసమము. ఏలన, $AE = BE$, $EF = EG$, $\angle F = \angle G = 90^\circ$. కనుక $AF = BG$. అయితే $CF = CG$ అని మునుపే నిరూపించియున్నాము. కనుక మొదటి చిత్రములోను, 3 వ చిత్రములోను $AF + CF = BG + CG$ అనగా $CA = CB$. రెండవ చిత్రములో $CF - AF = CG - BG$ అనగా $CA = CB$. కనుక అన్ని చిత్రముల లోను $CA = CB$.



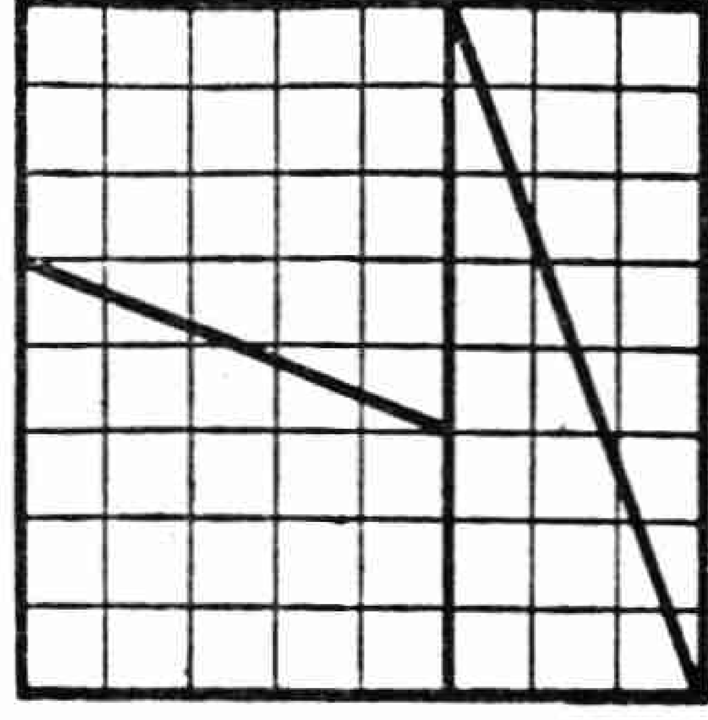


చిత్రము 358 (a, b, c)

(xvi) 64 = 65 :

ఒక చతురస్రము తీసికొనుము. దీని భుజము నిడుపు 8 సెంటిమీటరులు. దీనిని 2 ట్రెపీజియమ్‌లుగను, రెండు లంబకోణ త్రిభుజములుగను, చిత్రము 359 [a] లో చూపినట్లు కత్తిరింపుము. ఈ నాలుగు భాగములనే మరియొక విధముగా జోడించుటవలన ఒక దీర్ఘచతురస్రము 13 సెం. మీ. నిడుపు, 5 సెం. మీ.

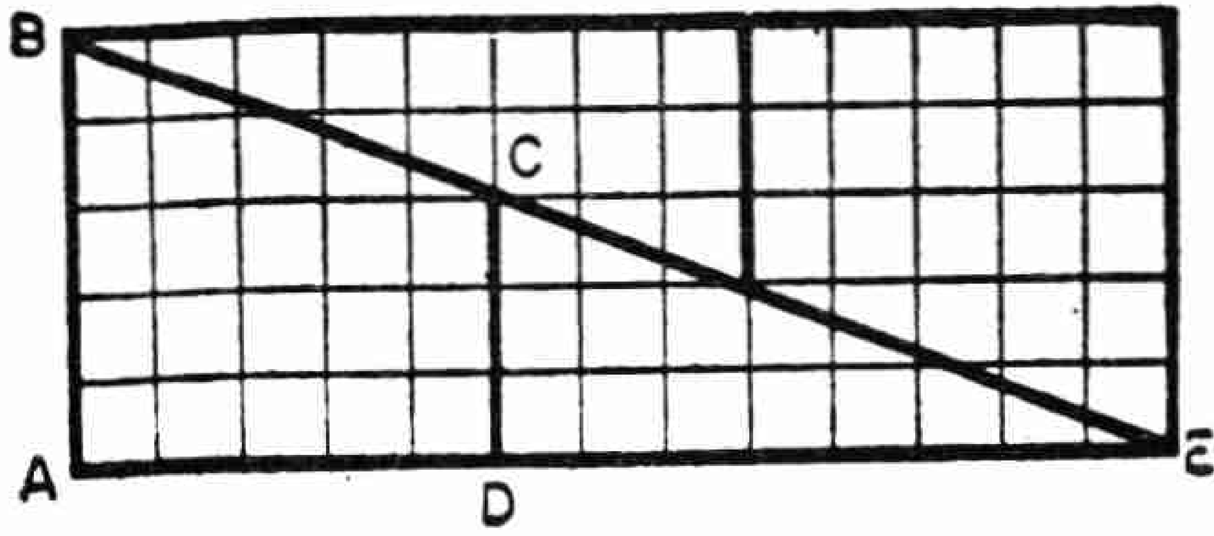
వెడల్పుగలది దొరకును (చూ. చిత్రము 359 [b]). చతురస్రము విస్తీర్ణము $8 \times 8 = 64$ చ. సెం.మీ; దీర్ఘ చతురస్రము విస్తీర్ణము $13 \times 5 = 65$ చ. సెం. మీ. 64 ఎట్లు 65 ఆయెను ?



చిత్రము 359 (a)

(xvii) అతుకు వేయుటలో ఒక ప్రశ్న.

ఒకతోలు ఒక ప్రక్కన మృదువుగను మరియొక ప్రక్క గరుకుగను ఉన్నది. ఇట్టి విలువైన తోలుతో

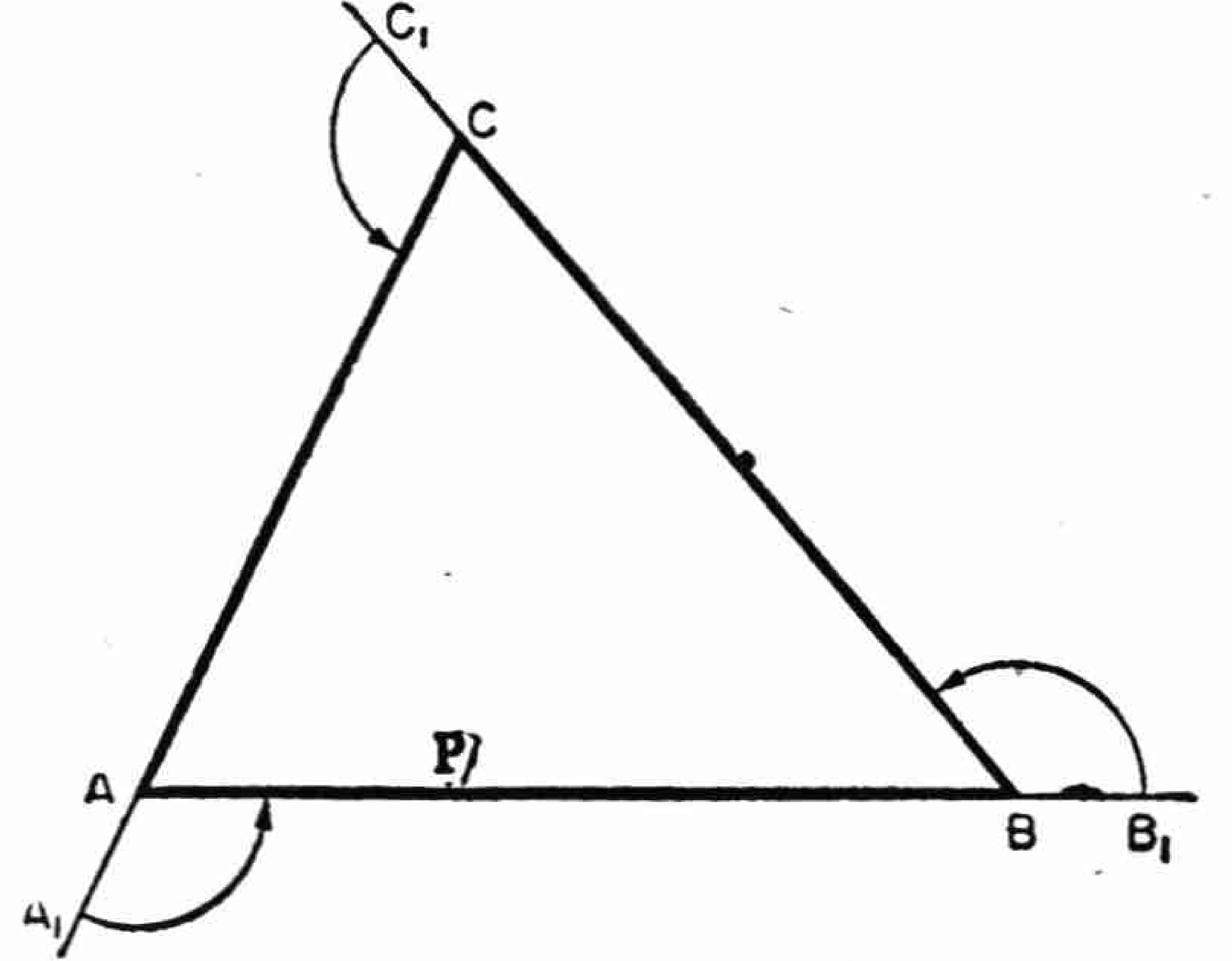


చిత్రము 359 (b)

కుట్టిన చొక్కాయలో ఒక త్రిభుజరూపముగల రంధ్రము ఏర్పడినది. దీనిని సరిచేయుటకు అదే విధమైన తోలును తీసికొని, దానిలో ఆ త్రిభుజరూపముగల ముక్కను ఒక కుట్టుపనివాడు కత్తిరించెను. త్రిభుజములో అన్ని భుజముల నిడుపులు వేర్వేరుగ (స్కలీన్ ట్రయాంగెల్). కుట్టుటకై కత్తిరించిన ముక్కను చొక్కాయ రంధ్రముపై పెట్టగా, రంధ్రమును తోలుముక్క సరిగా మూసినది; కాని, గరుకు ప్రక్క పైనను, మృదువైన ప్రక్క క్రిందను ఉండెను. ఈ ముక్క ఉపయోగము లేదని ఆ కుట్టు పనివాడు త్రోసివేయపోయెను. అయితే ఒక గణితజ్ఞుడు ఆ ముక్కనే కత్తిరించి కుట్టి ఉపయోగించుటకు దారి చూపెను. అది ఎట్లు ?

(xviii) ఒక త్రిభుజము యొక్క అన్ని కోణముల మొత్తము 2 లంబకోణములు. ఈ సిద్ధాంతమునకు సమానాంతర రేఖా స్వీకారతత్త్వ మువయోగింపకయే ఒక ఉపపత్తి క్రింద ఇచ్చియున్నాము.

ఏదో ఒక త్రిభుజము ABC తీసికొని, ABలో ఒక బిందువు P నుండి బయలుదేరి PB, BC, CA, AP భుజముల వెంట నడచి మరల P చేరుము. నడచునపుడు కుడిచేతిని చలించు దిక్కులో అనగా ముందర దిక్కులో సాగదీసి యుండనిమ్ము. P నుండి B చేరువరకు చేయి చూపు దిక్కులో ఏ మార్పును లేదు. B చేరినతరువాత చేయి అప్రదక్షిణముగ $\angle B_1BC$ తిరుగుచున్నది (చూ. చిత్రము 360). B నుండి C చేరువరకు చేయి చూపు దిక్కులో ఏ మార్పును లేదు. C చేరినతరువాత చేయి అప్రదక్షిణముగ $\angle C_1CA$



చిత్రము 360

తిరుగుచున్నది. C నుండి A చేరువరకు చేయి దిక్కులో ఏ మార్పు లేదు. కడపట A యందు చేయి ఒక కోణము $\angle A_1AB$ త్రిప్పును. మరల P చేరునపుడు బయలుదేరినపుడు చూపిన దిక్కు లభించును, అనగా PB దిక్కు చూపును. కనుక చేయి తిరిగిన మొత్తము కోణము

$$\angle B_1BC + \angle C_1CA + \angle A_1AB$$

అయితే ప్రారంభ దిక్కు దొరకినది కనుక మొత్తము చేయి తిరిగిన కోణము 360°.

కనుక $\angle B_1BC + \angle C_1CA + \angle A_1AB = 360^\circ$ అయితే $\angle B_1BC = 180^\circ - A$,

$$\angle C_1CA = 180^\circ - B, \quad \angle A_1AB = 180^\circ - C.$$

కనుక $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

ఈ అతి సులభమైన ఉపపత్తిలో జ్యామితి సిద్ధాంతమేదియును ఉపయోగపరచలేదు. యూక్లిడ్ యొక్క సమానాంతర స్వీకారతత్త్వమును (పారలల్ పాస్టులేట్) ఉపయోగపరచలేదు. కనుక ఇది యూక్లిడేతర జ్యామితులందును నిజముగ నుండవలెను. అయితే ఈ సిద్ధాంతము ఆ జ్యామితులలో నిజము కాదు. తప్పు ఎక్కడున్నది ?

త్రికోణమితి : **(xix)** $\dfrac{\pi}{4} = 0$:

$$1 + \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} \qquad \ldots \text{(i)}$$

అను నిజమైన సర్వ సమీకరణమునందుండి ప్రారంభించుము.

ఇరు ప్రక్కలను $\cos\dfrac{\pi}{4}$ తో పెంచుము.

$$\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}=$$

$$\sin\frac{\pi}{4} \qquad \cdots \text{(ii)}$$

కనుక $\cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$

$$\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4} \qquad \cdots \text{(iii)}$$

$\therefore \cos\frac{\pi}{4}=1$. కనుక $\frac{\pi}{4}=0$ లేదా 2π లేదా $4\pi, \ldots$

(xx) $\cos\theta > 1$:

$\log\cos\theta = \log\cos\theta$

$2\log\cos\theta > \log\cos\theta \qquad \cdots \cdots (1)$

అనగా $\log\cos^2\theta > \log\cos\theta$

కనుక $\cos^2\theta > \cos\theta$

ఇరుప్రక్కలను $\cos\theta$ చే భాగహారము చేయుము.

$\therefore \cos\theta > 1$.

ఇది సరియేనా ?

(xxi) $\sin(360^\circ+\alpha) < \sin\alpha$:

ఒక కోణము α తీసికొనుము, $0 < \alpha < 180^\circ$.

అపుడు $\frac{\alpha}{2}=x$ అను కోణము 0° కును 90° కును మధ్య ఉన్నది.

కనుక $\sin x > 0, \cos x > 0, 180^\circ < 180^\circ + x < 270^\circ$.

కనుక $\sin(180^\circ+x) < 0$, $\cos(180^\circ+x) < 0$.

ఋణాత్మక సంఖ్యలన్నియు ధనాత్మక సంఖ్యలకు తక్కువగుటచే

$\sin(180^\circ+x) < \sin x$; $\cos(180^\circ+x) < \cos x$.

వీటి గుణకారలబ్ధము

$\sin(180^\circ+x)\times\cos(180^\circ+x) < \sin x \times \cos x$

దీనినే $\frac{1}{2}\sin(360^\circ+2x) < \frac{1}{2}\sin 2x$ అని వ్రాయవచ్చును. కనుక

$\sin(360^\circ+x) < \sin x$ అను విపరీత సిద్ధాంతము దొరకుచున్నది. ఎచ్చటనుండి తప్పు ప్రవేశించినది ?

తప్పులప్రవేశ నిర్ణయము : అంకగణితము (i) రెండవ వ్యక్తిని విడిచి పెట్టుటవలన ఒక్కొక్కరికి ఒక గది ఇవ్వ సాధ్యమైనది.

సంఖ్యలలో రెండు విధములున్నవి. ఒకటి, రెండు, మూడు,... అను ఎంచు సంఖ్యలు (కార్డినల్ నంబర్స్) ఒక విధము. మొదటిది, రెండవది, మూడవది,... అను క్రమపరచు సంఖ్యలు (ఆర్డినల్ నంబర్స్) మరియొక విధము. ఈ ప్రశ్నలో మొదటి విధ సంఖ్యలనుండి రెండవ విధ సంఖ్యలకు తటాలున మార్చుటవలన ఒక వ్యక్తిని విడిచి పెట్టినది మన ధ్యానమును తప్పించుకొనిపోయెను. వ్యక్తులు (1, 11) మొదటి గదిలోనున్నారు. ఇద్దరు ఆ గదిలో ఉన్నారు. మూడవ వ్యక్తికి, రెండవ గది ఈయ వచ్చును, అని చెప్పుటలో వ్యక్తి 11 ని రెండవ వ్యక్తిగా భావించి నిజమైన వ్యక్తి 2 ను మరిచిపోవుచున్నాము. మాటల చమత్కారమునకు పాపము రెండవ వ్యక్తి బలి అయి గదిలేక తిరుగుచున్నాడు !

(ii) మొదటి టిక్ శబ్దమునకును ఆరవ టిక్ శబ్దము నకును 5 అవకాశములున్నవి. కనుక ఒక్కొక్క అవ కాశము 6/5 సెకనులు. మొదటి టిక్‌నకును 12వ టిక్ నకును అట్టి అవకాశములు 11 ఉండును. కనుక వీటి అంతరము $\frac{11\times 6}{5}=13{\cdot}2$ సెకనులు అగును.

(iii) స్వల్పదూరపు పోటీ పందెములో ఒకడు తన శక్తిని పూర్తిగ ఉపయోగించి అతి శీఘ్రముగ పరుగెత్త గలడు. అయితే అటులనే 1 గంటసేపు పరుగెత్తజాలడు.

నిష్పత్తి సామ్య సిద్ధాంతము (ప్రొపోర్షనల్ రూల్) ఉపయుక్తము కాని సన్నివేశములెన్నియో ఉన్నవి. ఒక కారెట్ వజ్రమువెల రూ. 500 అయితే, 4 కారట్ల వజ్రమువెల 2000 రూ. కంటే చాలా ఎక్కువగును. ఒక మోటారు నావయొక్క ఇంజన్ శక్తి రెట్టించితే, దాని వేగము రెట్టించదు. 5 పనివాండ్రు ఒక గదిని 20 రోజులలో కట్టగల్గితే. 2400 పనివాండ్రు అదే గదిని ఒక గంటసేపులో కట్టగలరా ? వారికి ఆ గదిలో నిలుచుటకు కూడా స్థలముండదే ! కనుక, ఈ విధానమును ఉపయో గించుటకు ముందు ఆయా సందర్భములందు అది అన్వ యించునా అని పరిశీలించవలెను.

(iv) ఈ చింతకు కొంచముకూడ ఆధారములేదు. ఒక్కొక్క సంవత్సరము ఉత్పత్తి 30% పెరుగుచున్నదనగా సంవత్సరారంభములో ఉన్న ఉత్పత్తి 100 అయితే ఆ సంవత్సర అంతములో ఉన్న ఉత్పత్తి 130 అగును అన్న మాట. ఇదియే రెండవ సంవత్సరారంభమున ఉత్పత్తి అగుటచే, రెండవ సంవత్సరము ముగియునపుడు అది $\frac{130}{100}\times 130 = 169$ విలువను పొందును. కనుక మరియొక అనగా 3 సంవత్సరములు ముగియునపుడు ఉత్పత్తి $\frac{130}{100}\times 169 = 219\cdot 7$. ఇటులనే 5 సంవత్సరముల తరువాత ఉత్పత్తి 371.29 అగును. సంవత్సరమునకు 24.6% పెరు

గుట ఉంచేకూడ 5 సంవత్సరములలో ఉత్పత్తి 300·32 అగుచున్నది. ఇక్కడ ఉపయోగపరచవలసిన సమాసము

$$A = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

ఇచ్చట a ప్రారంభ ఉత్పత్తి, p సాంవత్సరిక శతాంశవృద్ధి. A అనునది n సంవత్సరముల తరువాత మొత్తపు ఉత్పత్తి.

(v) 2×3 అనగా, 3 అగ్గిపుల్లలు తీసికొని ఒక్కొక్కదానిని రెండుగా విరచవలెను. దీనికి బదులు వేరొక పరికర్మమును తీసికొని దానినుండి 2×3 విలువ గణించుట అనుచితము.

(vi) కుటుంబ స్నేహితుడివద్ద 2 ఆవులు ఉండెను. వానిని 14 ఆవులతో చేర్చి, 16 ఆవులలో మొదటి కుమారునకు $\frac{1}{2}$ భాగము 8 ఆవులను, రెండవ కుమారునకు $\frac{1}{4}$ భాగము 4 ఆవులను, మూడవ కుమారునకు $\frac{1}{8}$ భాగము 2 ఆవులను ఇచ్చెను ; ఇట్లు $8+4+2=14$ ఆవుల నిచ్చిన పిదప మిగిలి యుండు తన సొంత రెండు ఆవులను అతడు తీసికొనిపోయెను.

ఇది ఎట్లు సాధ్యమైనదంటే, తండ్రి కొడుకులకు పంచిన భాగముల మొత్తము $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ మాత్రమే అగుచున్నది కనుకనే ఇట్టి సందర్భములలో పై ఉపాయము ఉపయోగించవచ్చును.

బీజగణితము : (vii) ఎట్లు 4 గజములవర్గము, 16 చతురపు గజములో అట్లే $\frac{1}{2}$ రూపాయ వర్గము $\frac{1}{4}$ చతురపు రూపాయ కావచ్చును. అయితే చతురపు రూపాయలు చతురపు పైసల భావము లేనందున, సంఖ్యలను మాత్రము వర్గపరచి, రూపాయలను, పైసలను అటులనే ఉంచుట నిషిద్ధ పరికర్మము.

(viii) దత్త సమీకరణమునకు మూలములు లేవనుట సులభముగా గ్రహించవచ్చును. $3\sqrt{x}$ అనునది ధనాత్మక సంఖ్య; $x>0$ అయిననే దీనికి అర్థమున్నది. అయితే ఈ సందర్భములో $-x-2$ ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య. కనుక $3\sqrt{x} = -x-2$ అను దత్త సమీకరణమునకు మూలములు లేవు.

$x_1=4,\ x_2=1$ అని మనకు దొరకినది

$$3\sqrt{x} - x - 2 = 0$$

సమీకరణముయొక్క మూలములు.

(ix) తర్కములోను, అనుమానములోను ఏ దోషమును లేదు. దోషము ఎచ్చట ఉన్నదనగా 'శేషము లేక విభజించును' అను వాక్యమునకు బీజగణితములోను అంకగణితములోను వేర్వేరు అర్థములుండుటయే. బీజగణితములో మన దృష్టి x పై ఉన్నది. ఒక బహుపదము $P(x)$ మరియొక బహుపదము $Q(x)$ చే విభజించ సాధ్యమనిన, $P(x)=Q(x)\ R(x)$ అనుటయే. ఇచ్చట $R(x)$ ఒక బహుపదముగా ఉండవలెను. దాని గుణకములు పూర్ణాంకములుగా ఉండనక్కరలేదు. అయితే అంకగణితములో P అను పూర్ణాంకమును, Q అను పూర్ణాంకము శేషములేక విభజించును; అనగా, $P=Q.R.$ ఇచ్చట R పూర్ణాంకము. $P(x)=Q(x).R(x)$ లో x కు ఒక విలువ ఇచ్చి, $P(x)$, $Q(x)$ పూర్ణాంకములైనను $R(x)$ ఒక పూర్ణాంకముగ ఉండనక్కరలేదు. కనుక బీజగణితీయ విభాజ్యత నుండి అంకగణిత విభాజ్యత ఊహించకూడదు. ఉదాహరణమునకు x^2-4 అను బహుపదము $2x-4$ చే విభాజ్యము; దాని ఫలము $\frac{x}{2}+1$. ఇచ్చట x యొక్క గుణకము $\frac{1}{2}$ అను భిన్నమగుటచే బీజగణితీయ విభాజ్యమునకు ఏ లోపమును లేదు. అయితే $x=3$ అని ప్రతిక్షేపించినచో $\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{x}{2}+1$ అనునది $\frac{5}{2}=\left(\frac{3}{2}+1\right)$ అను సత్యమైన సిద్ధాంతమిచ్చును. కాని అంకగణితములో 5 ను 2 నిశ్శేషముగా విభజించుచున్నది, దాని ఫలము $\frac{3}{2}+1$ అని చెప్పము.

బీజగణితములోని విభజనకును, అంకగణిత విభజనకును మరి ఒక వ్యత్యాసమున్నది. బీజగణితములో x^3-3x^2+4x+3 ని x^2-2x+1 తో భాగహారము చేసిన మనకు దొరకు భాగఫలము $x-1$ అనియు, శేషము $x+4$ అనియు చెప్పెదము. దీనిలో $x=3$ అని ప్రతిక్షేపించినచో, మనకు దొరకునది $\frac{15}{4}$. భాగహారములో, భాగఫలము 2 అనియు, శేషము 7 అనియు దొరకును. ఇచ్చట శేషము, హారముకంటె ఎక్కువగా ఉన్నది.

కనుక బీజగణితములో సరియైనది అంకగణిత దృష్టిలో తప్పుగ ఉండవచ్చును.

(x) దత్త సమీకరణముయొక్క మూలము $x=10$. దీనిని కడపటి సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించితే $\frac{0}{-3}=\frac{0}{3}$, అను సత్యమైన ఫలము దొరకును. $\frac{a}{b}=\frac{a}{d}$, అయితే, $b=d$ అని తీర్మానము చేయకూడదు. ఇది నిజమగుటకు a శూన్యముగానుండకూడదు.

(xi) ఈ పరంపర ఉపసరణ పరంపర కాదు. ఇది ఊగులాడు పరంపర. కనుక దీని విలువనుగురించి మాటలాడుటకు మనకు హక్కు లేదు.

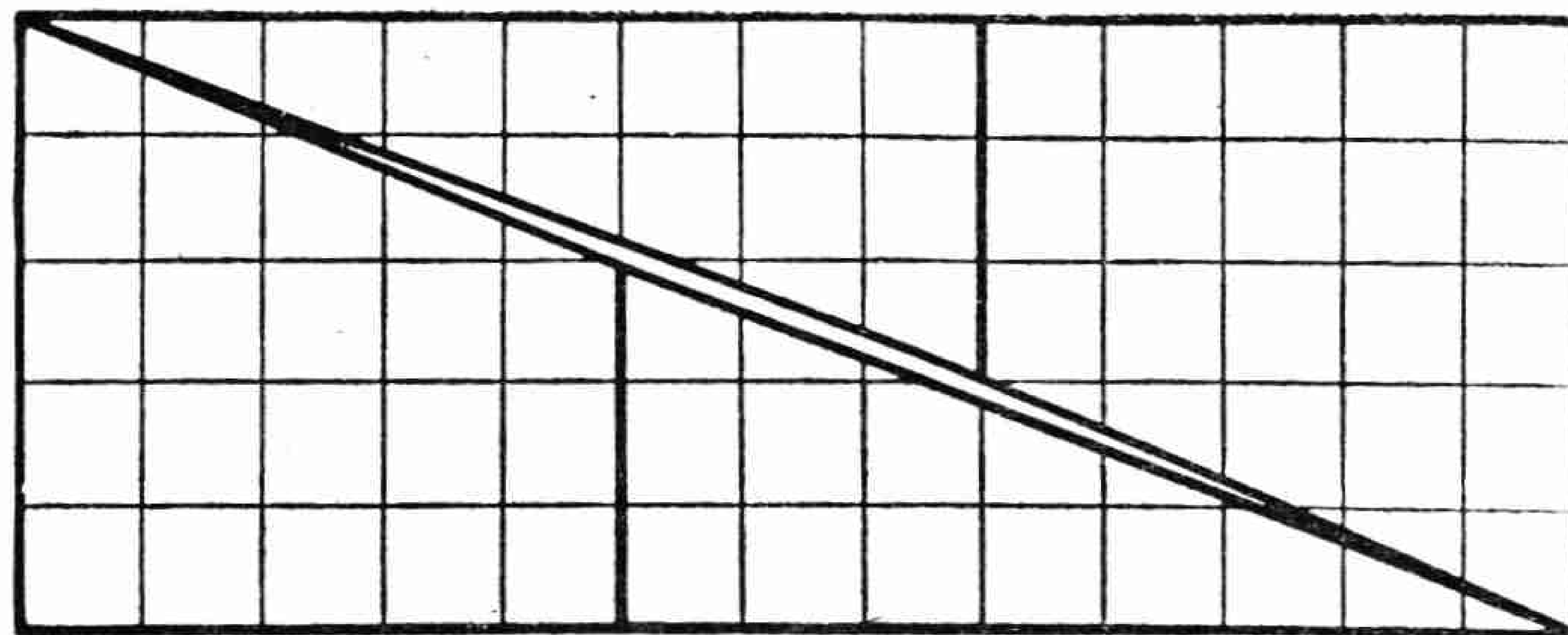
(xii) ఒక్కొక్క సమీకరణమునకు ఒక మూలమైనను ఉన్నదను సిద్ధాంతము $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$, అను బహుపదముల సమీకరణమునకు మాత్రము అన్వయించును. దత్త సమీకరణము అట్టిది కాదు. కనుక దీనికి మూలములే లేవు. మరియొక ఉదాహరణము $\sqrt{x} = -1$. దీనిని వర్గీకరించుటవలన $x = 1$ అని దొరకును. దీనిని ప్రతిక్షేపించినట్లైతే, $\sqrt{1} = -1$ అను విపరీత ఫలము దొరకును. కనుక పై సమీకరణమునకు మూలము లేదు. అదియు కాక $\sqrt{x}$ అనగా $+\sqrt{x}$ అను భావము సంకీర్ణ సంఖ్యలకు అన్వయించదు. ఇచ్చట మూలము ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య.

జ్యామితి: (xiii) తీర్మానము అసంగతమైనను, పరిశీలనలో తప్పు సులభముగా గోచరించలేదు. కనుక $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ అయితే ఒక్కొక్కటియు $\frac{p+r}{q+s}$ కు సమానమను సిద్ధాంతమును సందేహించెదము. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = t$ అని వ్రాసెదము. (ఇచ్చట $q \neq 0$, $s \neq 0$) $\therefore p = qt$, $r = st$, కనుక $(p+r) = t(q+s)$. ఇచ్చట $(q+s)$ శూన్యము కానిచో, దానిచే ఇరు ప్రక్కలు భాగహారము చేసి $\frac{p+r}{q+s} = t$ అని వ్రాయవచ్చును. అయితే $q+s$ శూన్యమైతే, ఈ భాగహారము అనుచితము. $q+s=0$ అయితే $(p+r) = t(q+s) = 0$, కనుక $\frac{p+r}{q+s}$ అనునది $\frac{0}{0}$ రూపము ధరించును. దీని విలువ ఏ సంఖ్యగనైనను ఉండవచ్చును.

దత్త ప్రశ్నలో $x = z$ అని నిరూపించవచ్చును. కనుక $\frac{x-z}{z-x}$ అనునది $\frac{0}{0}$ అగుచున్నది. దీనిని -1 అని వ్రాసినది తప్పు.

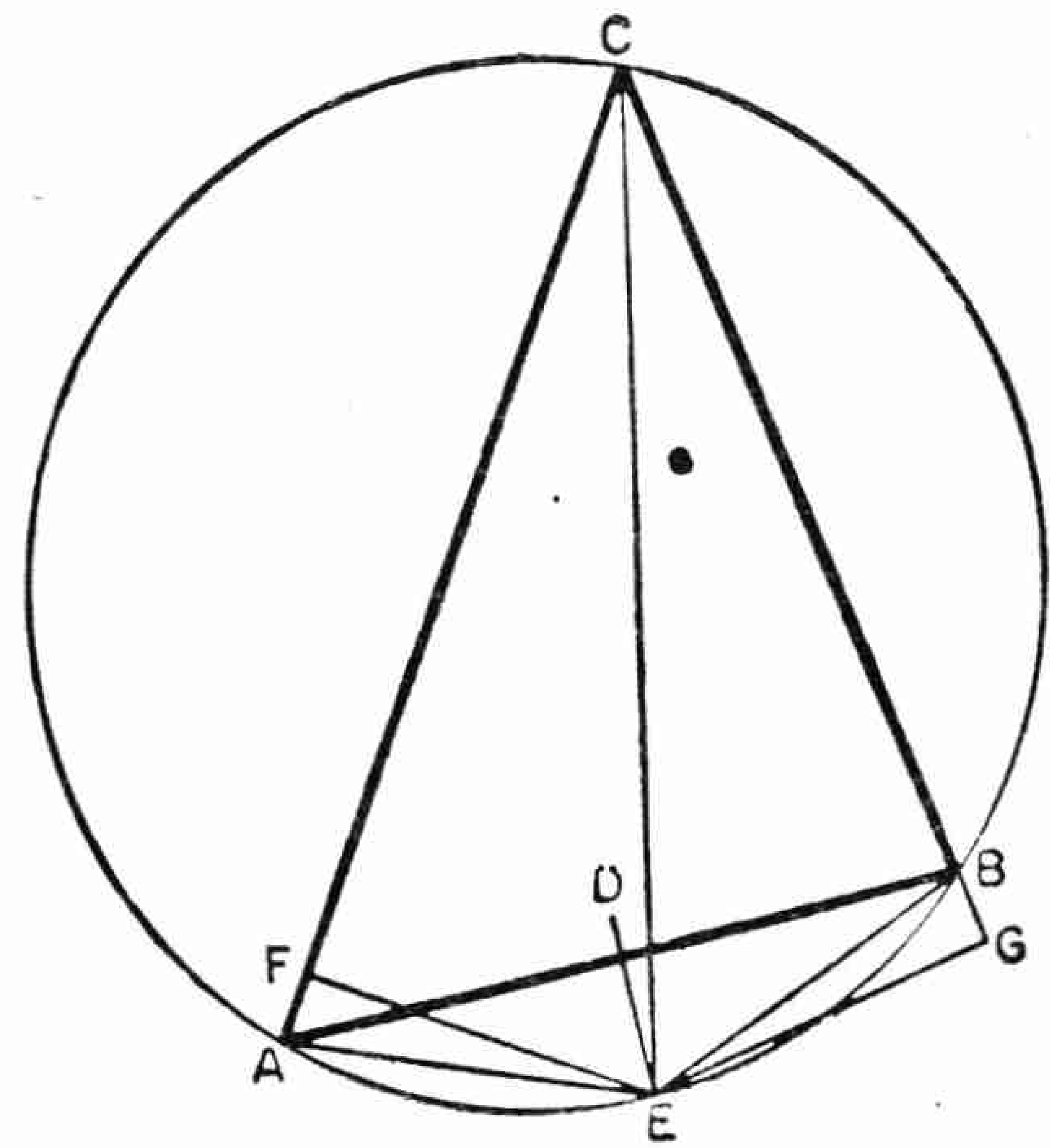
(xiv) ఈ ఉదాహరణము, ఒక వక్రము యొక్క నిడుపును నిర్వచించుటలో ఉన్న చిక్కులను స్పష్టపరచుచున్నది. ఒక వక్రము A అవధిలో మరియొక వక్రము B ని సమీపించినచో, దాని నిడుపు B యొక్క నిడుపును సమీపించునని మనము అనుకొనకూడదు. ఒక వక్రము నిడుపును ఇట్లు ఆధునిక గణితములో నిర్వచించెదము. A అను వక్రముపై P, Q రెండు బిందువులున్నచో, PQ చాపముపై n మధ్య బిందువులు $P_1, P_2, \dots P_n$ తీసికొనుము. $PP_1, P_1P_2, \dots P_{n-1}Q$ బుజురేఖ జ్యాల నిడుపును కనిపెట్టి కూర్చుము. $n \longrightarrow \infty$ అయి, చాపఖండములు $PP_1, P_1P_2, \dots P_{n-1}Q$ అన్నియు శూన్యమును సమీపించునపుడు, వాటి సంకలన అవధి ఉన్నచో దీనికే ఆ వక్రముపై PQ బిందువుల దూరమనెదము. ఇట్టి అవధి కొన్ని సమయములలో ఉండదు. అపుడు ఆ చాపమునకు నిడుపు లేదనెదము.

పై ప్రశ్నలో తరంగము వంటి వక్రము పొడవు వ్యాసము యొక్క పొడవు $2r$ కు సమమనుట సరికాదు. తరంగముల వెడల్పు తక్కువయి ఆ వక్రరూపము బుజురేఖవలె నుండును; దాని నిడుపు ఎల్లప్పుడును అర్ధవృత్తము నిడుపుకు సమమయియే యుండును.



చిత్రము 362

(xv) ఈ ప్రశ్నలో, తర్కసంబంధమైన తప్పు ఏదియు లేదు. అయితే చిత్రము సరిగ గీచినచో, F, G బిందువులలో ఒకటి భుజము లోపలను మరియొకటి భుజము బయటను ఉండును (చూ. చిత్రము 361).



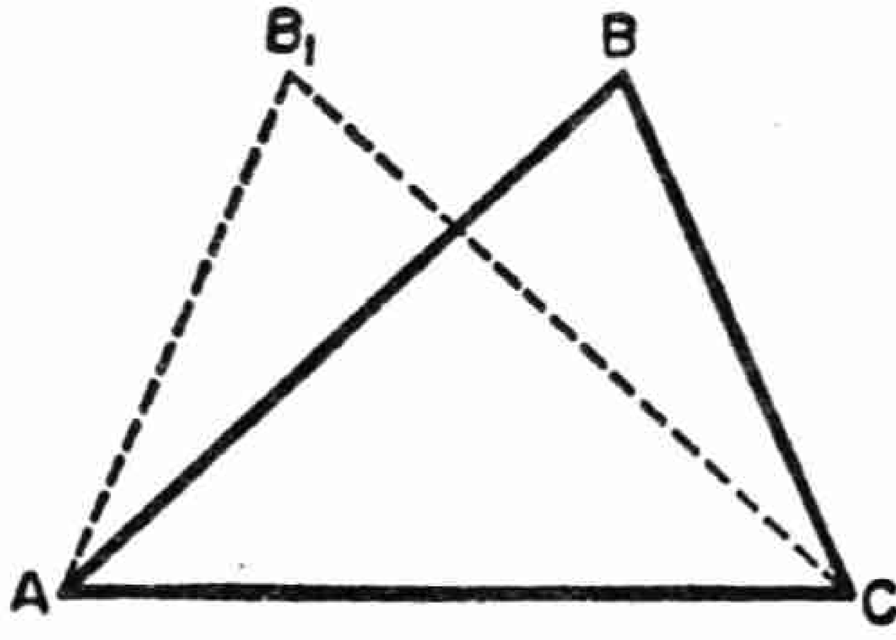
చిత్రము 361

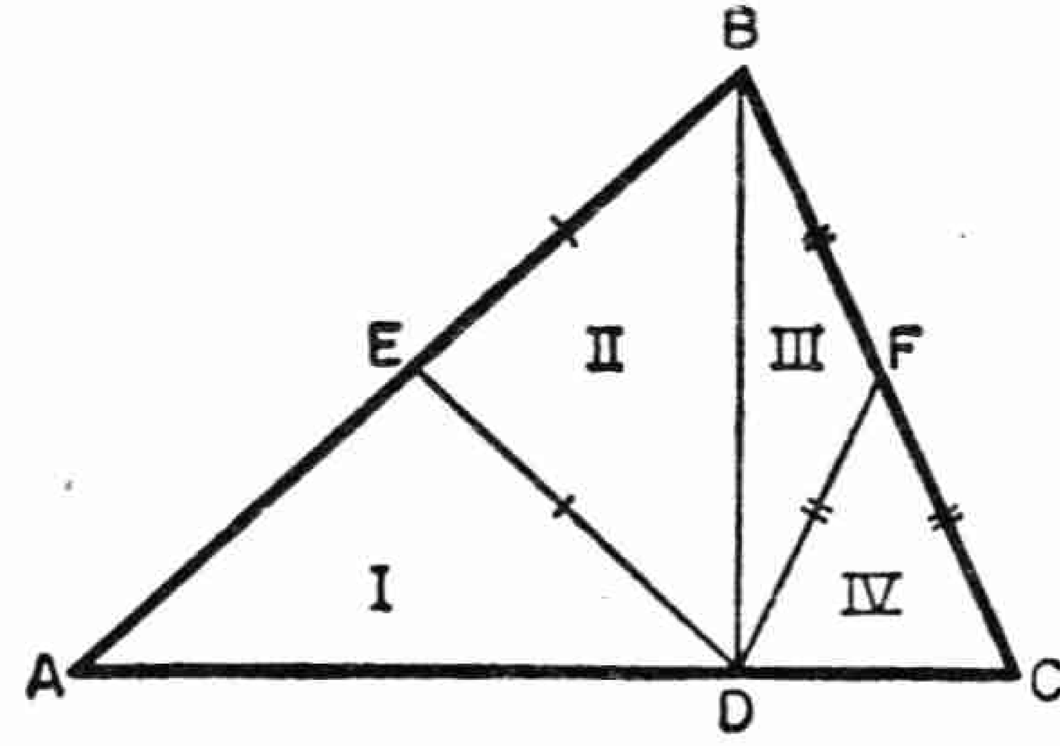
ఈ చిత్రములో F బిందువు AC మధ్యను, G బిందువు BC బయటను ఉన్నవి. కనుక $AF = BG$, $CF = CG$ నుండి $AC = BC$ అను ఫలము

దొరకదు. ఏలన $AC = AF + CF$, $BC = CG - BG$. కనుక $AC > BC$ అని లభించునుగాని $AC = BC$ అని లభించదు.

(xvi) చూపుకు BCE ఒక ఋజురేఖవలె తోచినను, జాగ్రత్తగా గీచిన చిత్రమునుండి BC, CE ఒకే ఋజురేఖలో లేవని, చిత్రము మధ్య ఒక వెడల్పులేని భాగము ఉన్నదని గోచరమగును. దీని విస్తీర్ణము 1 చతుర సెం. మీ; 65 నుండి దీనిని తీసివేసిన యెడల దొరకునది 64.

(xvii) వేర్వేరు భుజనిడుపులు గల ఒక త్రిభుజము ABC ను పైప్రక్క క్రిందకు పోవునట్లు త్రిప్పివేయగా మరియొక త్రిభుజము AB_1C దొరకును. ఇవి రెండును ఒకటిగ నుండవలెనంటే అది సమభుజ త్రిభుజముగ నుండవలెను. అట్టి సమభుజ త్రిభుజము ABC ను, $(BA = BC)$, BA భుజము BC భుజముమీద పడునట్లును, A చోటిలో C, C ఉన్నచోటులో A వచ్చునట్లు త్రిప్పినచో, క్రింది మృదు చర్మము పైకివచ్చును; పైనున్న గరుకు చర్మము క్రిందికి పోవును. కనుక దత్త త్రిభుజమును సమభుజ త్రిభుజములుగా విభజించినచో, ఈ భాగములలో నొక్కొక్కటిని త్రిప్పివేసి, భాగములనుమరల కుట్టి, దత్త చొక్కాయ రంధ్రమునకు మృదువు ప్రక్కపై నుండునట్లు అతుకు వేయవచ్చును. చిత్రము 363 లో ABC త్రిభుజమును ఎట్లు నాలుగు సమభుజ త్రిభుజములుగా విభజింపవచ్చునో చూపియున్నాము. B నుండి AC కు లంబరేఖ BD ను గీచి, BA, BC ల మధ్య బిందువులగు E, F కు D ను చేర్చుటవలన, 4 త్రిభుజములు AED, DEB, BFD, DFC దొరకినవి. వీనిలో $AE = ED$, $DE = EB$, $DF = BF$, $OF = FC$ అని సులభముగా సరిచూడవచ్చును. BD కత్తిరింపు అనావశ్యకము.





చిత్రము 363

(xviii) పై ఉపపత్తిని గోళతలము వంటి వక్రతలములకు విస్తరించుటలో పెక్కు చిక్కులున్నవి. వక్ర తలముపై ఋజురేఖలు సాధారణముగా ఉండవు. కనుక ఋజురేఖలకు బదులు ఆ తలముపై హ్రస్వతమ రేఖలను ఋజురేఖలుగా తీసికొనుట అలవాటు. పరిమిత తలములో ఏ రెండు బిందువులను చేర్చు హ్రస్వతమరేఖ ఒకటియే యుండును. ఉదా: గోళతలములో అర్ధభాగము (హెమిస్ఫియర్) కంటే తక్కువ భాగములో, ఏ రెండు బిందువులను చేర్చు మహావృత్తము ఒకటియే ఉన్నది. ఇచ్చట మహావృత్తములే ఋజురేఖలు. రెండవ చిక్కు ఏమనగా, ఒక సమ తలమందు ఋజురేఖకు అన్ని బిందువులందును ఒకే దిక్కు ఉన్నది. అయితే గోళతలము ఒక త్రిపరిమాణిక ఆకాశమందున్నదని భావించినచో, దానిమీద ఉన్న మహావృత్తము (గ్రేట్ సర్కిల్) కు ఒక్కొక్క బిందువునందును ఒక ప్రత్యేక స్పర్శరేఖ ఉన్నది. కనుక ఆ రేఖపై మనము నడవగా మనము నడుచు దిక్కు త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో మారుచునే యుండును. ఈ ఆక్షేపణను పోగొట్టుటకు మనము ఇట్లు వాదించవచ్చును. 'గోళతలమును త్రిపరిమాణిక ఆకాశముయొక్క అంశముగా మేము వీక్షించలేదు. అది ఒక ప్రత్యేక అనాధీనమైన ప్రపంచము. దానిలో రెండు బిందువులు A, B ఇచ్చినచో, A బిందువు నందున్న ఒక దిక్కుకు B బిందువునందు సమానాంతర దిక్కు ఏదనుట మన ఇష్టప్రకారము నిర్వచనము చేయవచ్చును. కనుక ఒక మహావృత్తముయొక్క దిక్కు దాని అన్ని బిందువులందును ఒకటే అనగా సమానాంతరములు అని నిర్వచనము చేసెదము. A, B రెండు బిందువులనిచ్చి A యందు ఒక దిక్కు AA_1, B యందు ఒక దిక్కు BB_1 ను ఇచ్చినచో, AB హ్రస్వతమ రేఖను చేర్చి, దానితో AA_1, BB_1 చేయు కోణములు $\angle A_1AB$, $\angle B_1BC$ సమానము అయితే, A యందు AA_1 దిక్కు B యందు BB_1 దిక్కుకు సమానాంతరమని చెప్పెదము. అయితే గోళతలమునకును, సమతలమునకు మరియొక వ్యత్యాసము ప్రవేశించును. A యందు ఒక దిక్కు AB కు సమానాంతరముగ C యందు ఒక దిక్కు CD దొరుకును. C యందు CD దిక్కుకు సమానాంతరముగ మరొక బిందువు E నుండి ఒక దిక్కు EF దొరకును. ఇపుడు A యందు AB దిక్కుకు E యందు EF దిక్కు సమానాంతరమా? అని అడిగెదము. అనగా AE చేర్చు హ్రస్వతమ రేఖతో A యందు AB దిక్కును, E యందు EF దిక్కును ఒకే కోణము చేయునా అని అడుగగా, సమతలములో అవుననియు, వక్రతలములో కాదు అనియు ప్రత్యుత్తరము దొరకును. అనగా ఒక దత్త స్థలములో ఒక

దత్తదిక్కుకు మరియొక స్థలములో సమాంతర దిక్కు ఏది అను ప్రశ్నకు అద్వితీయమైన ప్రత్యుత్తరము లేదు. కనుక బయలుదేరిన బిందువును మరల చేరునపుడు మనము సాగదీసిన చేయిదిక్కు ప్రారంభమున సాగదీసిన దిక్కులో నుండదు. కనుక మన ఉపపత్తి వక్రతలములో అసత్య మగుచున్నది.

అయితే ఒకే రేఖకు సమాంతరమైన రెండు రేఖలు పరస్పర సమాంతరములు అను ఆధారతత్వమును స్వీకరించితిమేని, (xviii) లో ఇచ్చిన ఉపపత్తి సరియగును. దానినుండి ఒక త్రిభుజకోణముల మొత్తము 180° అని చూపవచ్చును. కనుక ఒక రేఖకు ఏ బిందువునందున ఒకే సమాంతర రేఖ గీయవచ్చును, లేదా ఒకే రేఖకు రెండు సమాంతర రేఖలు పరస్పర సమాంతరములు, అను ఆధారతత్వములును, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ అను నదియు ఒకటికి బదులు మరియొకటిని ఉపయోగించ వచ్చును. ఈ ఉపపత్తిలో మొదట చెప్పిన ఆధారతత్వ మును తెలియకయే ఉపయోగించియున్నాము.

త్రికోణమితి : (xix) దీనిలో (i) (ii) (iii) సత్యమైనవి. అయితే $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = 0$ కనుక, ఇరు ప్రక్కలను దీనిచే భాగహారము చేసిన $\cos\frac{\pi}{4} = 1$ అను పదము అసత్యము. $0 \times a = 0 \times b$ నుండి $a = b$ అని నిర్ధారణ చేయకూడదు. కనుకనే 0 చేత భాగహారము చేయుట గణితములో బహిష్కరించబడిన పరికర్మము.

(xx) $a > 0$ అయితే, $2a > a$ అనునది సత్యము. ఏలన $2a - a = a > 0$. అయితే $a < 0$ అగునపుడు, $2a - a = a < 0$ కనుక $2a < a$. ఇచ్చట $\cos\theta < 1$ అగుటచే $\log\cos\theta$ ఒక ఋణాత్మక సంఖ్య. కనుక $2\log\cos\theta < \log\cos\theta$. అనగా (i) అసత్యము.

(xxi) $a < b$, $c < d$ లో $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ అయితే $a \times c < b \times d$ అని వ్రాయవచ్చును. అయితే $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$ ఉన్నపుడు $a \times c < b \times d$ అని వ్రాయకూడదు. $a \times c > b \times d$ గనో $a \times c = b \times d$ గనో ఉండవచ్చును. ఇచ్చట

$$\sin(180^\circ + x) = -\sin x;$$
$$\cos(180^\circ + x) = -\cos x$$

కనుక $\sin(180^\circ + x).\cos(180^\circ + x) = \sin x \cos x$

కనుక $\sin(360^\circ + x) = \sin x$ అని నిజమైన సమీకరణము దొరకును. కాని $\sin(360^\circ + x) < \sin x$ అని దొరకదు.

ఆ. న.

విభాజకీకరణము (ఫాక్టరింగ్) : అంకగణితములో ఒక సంఖ్యయొక్క విభాజకములను కనుగొనునప్పుడు దానిని భాజకముల గుణకార లబ్ధముగ తిరిగి వ్రాయుటయు వాడుక. ఉదా: $42 = 7 \times 6 = 7 \times 3 \times 2$; 42 ను పూర్ణాంకముల విభాజకముల గుణకారలబ్ధముగ వ్రాసితిమి. దీనికే ఒక సంఖ్యను విభాజకీకరణము చేయుట అందురు.

బీజగణిత సమస్యలను సాధించుటలో బీజ సమాసము అను విభాజకీకరణము చేయుట మిక్కిలి ఉపయోగకర మగును. గుణకార విస్తరణ ధర్మమే విభాజకీకరణము నకు ఆధారము. దీనిని $ab + ac = a(b + c)$ గా వ్రాసి 'a', '$(b + c)$' లు $ab + ac$ యొక్క విభాజకము లందుము. ఇందు $ab + ac$ అను ద్విపదసమాసము రెండు పదములకు ఉభయముగ ఉండు a విభాజకమును వేరుగా వ్రాసి దానిని విభాజకీకరణము చేసితిమి. అదే విధముగ

$$ax + ay + 5a = a(x + y + 5)$$

$$28xy - 35xz + 21x = 7x(4y - 5z + 3)$$

అందుచేత 'ఒక బహుపద సమాసమును విభాజకీకరణము చేయుట అనగా దానికన్న తక్కువ తరగతి బహుపద ములను వాటి గుణకార లబ్ధము దత్త సమాసమునకు సరిపోవునట్లు కనుగొనుట' అనవచ్చును.

(ii) రెండువర్గముల భేదము :

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ అను సూత్రసహాయముతో రెండు వర్గముల భేదమును విభాజకీకరణము చేయ వచ్చును.

ఉదా 1: $a^2b^2 - 4 = (ab)^2 - (2)^2 = (ab + 2)(ab - 2)$

ఉదా 2: $y^2 - \frac{4}{9} = y^2 - (\frac{2}{3})^2 = (y + \frac{2}{3})(y - \frac{2}{3})$.

(iii) సంపూర్ణ వర్గములగు త్రిపద సమాసములను $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$; $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ అను సూత్రముల సహాయముతో విభాజకీకరణము చేయ వచ్చును.

ఉదా. 1: $x^2 + 20xy + 100y^2 =$

$$(x)^2 + 2(x)(10y) + (10y)^2 = (x + 10y)^2$$

ఉదా. 2: $16B^2 - 8B + 1 =$

$$(4B)^2 - 2(4B)(1) + (-1)^2 = (4B - 1)^2$$

(iv) వర్గత్రిపదసమాసములు: $x^2 + qx + r$ రూపములో ఉండు వర్గత్రిపద సమాసములను

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

అను సూత్రముతోను;

$px^2 + qx + r$ రూపములో ఉండు వర్గత్రిపద సమాస ములను

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)\ (cx + a)$$

సూ[త్రముతోను విభాజకీకరణము చేయవచ్చును.

ఉదా. 1 : $x^2 + 7x + 12 =$

$$x^2 + (4 + 3)\ x + 4 \times 3 = (x + 4)\ (x + 3)$$

ఉదా. 2 : $6a^2 + 19a + 15 = 2 \times 3a^2 +$

$$(2 \times 5 + 3 \times 3)x + 3 \times 5 = (2a + 3)(3a + 5)$$

(v) రెండు ఘనముల మొత్తము లేదా భేదములను

$$x^3 + y^3 = (x + y)\ (x^2 - xy + y^2)\ ;$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)$$

అను సూ[త్రముల సహాయముతో విభాజకీకరణము చేయ వచ్చును.

ఉదా. 1 : $27a^3 + 64b^3 = (3a)^3 + (4b)^3$

$$= (3a + 4a)\ (9a^2 - 12ab + 16b^2)$$

ఉదా. 2 : $8p^3 - \dfrac{27}{q^3} = (2p)^3 - \left(\dfrac{3}{q}\right)^3$

$$= \left(2p - \frac{3}{q}\right)\left\{(2p)^2 + 2p\,\frac{3}{q} + \left(\frac{3}{q}\right)^2\right\}$$

$$= \left(2p - \frac{3}{q}\right)\left(4p^2 + 6\frac{p}{q} + \frac{9}{q^2}\right)$$

బహుపద సమాసములను కొన్ని వర్గములుగా [వాసి కొని, పై పద్ధతులను ఉపయోగించి విభాజకీకరణము చేయ వలెను.

ఉదా. 1 : $x^2 - y^2 + 2x - 2y = (x^2 - y^2) + (2x - 2y)$

$$= (x + y)\ (x - y) + 2\ (x - y) =$$

$$(x - y)\ [\ (x + y) + 2] = (x - y)\ (x + y + 2)$$

(vi) [కింది సూ[త్రముకూడ విభాజీకరణమునకు ఉప యోగపడును :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\ xyz =$$

$$(x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)\ \text{లేదా}$$

$$\tfrac{1}{2}\ (x + y + z)\ [\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

(vii) విభాజక సిద్ధాంతము : x లోని ఒక బహుపద ములో x కు బదులు a ని [ప్రతిక్షేపించగా అది శూన్యము నకు సమానమైన, దానికి $x - a$ ఒక విభాజకమగును.

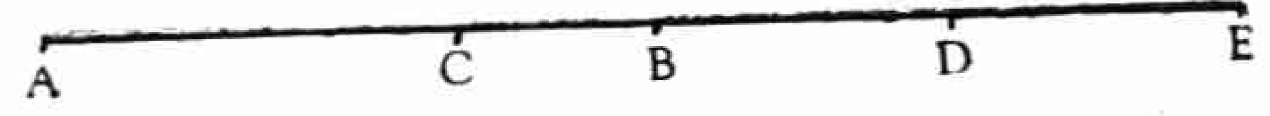
ఉదా : $x^3 + x^2 - x - 10$ అనునది $x = 2$ అయిన శూన్యమగును. అందుచేత $x - 2$ దానికి ఒక విభాజక మగును. భాగహారముచే రెండవ విభాజకము $x^2 + 3x + 5$ అని కనుగొనవచ్చును.

పొ. ల. నా.

విమా[త్రయ జ్యామితి : ఇది శుద్ధ జ్యామితి, నిరూపక జ్యామితి అని రెండు విధములు. ఇవుడు నిరూ పక విధానమున జ్యామితిని విమర్శింతము.

మొదట కొన్ని ముఖ్య సూ[త్రములను స్మరణకు తెచ్చు కొనవలయును.

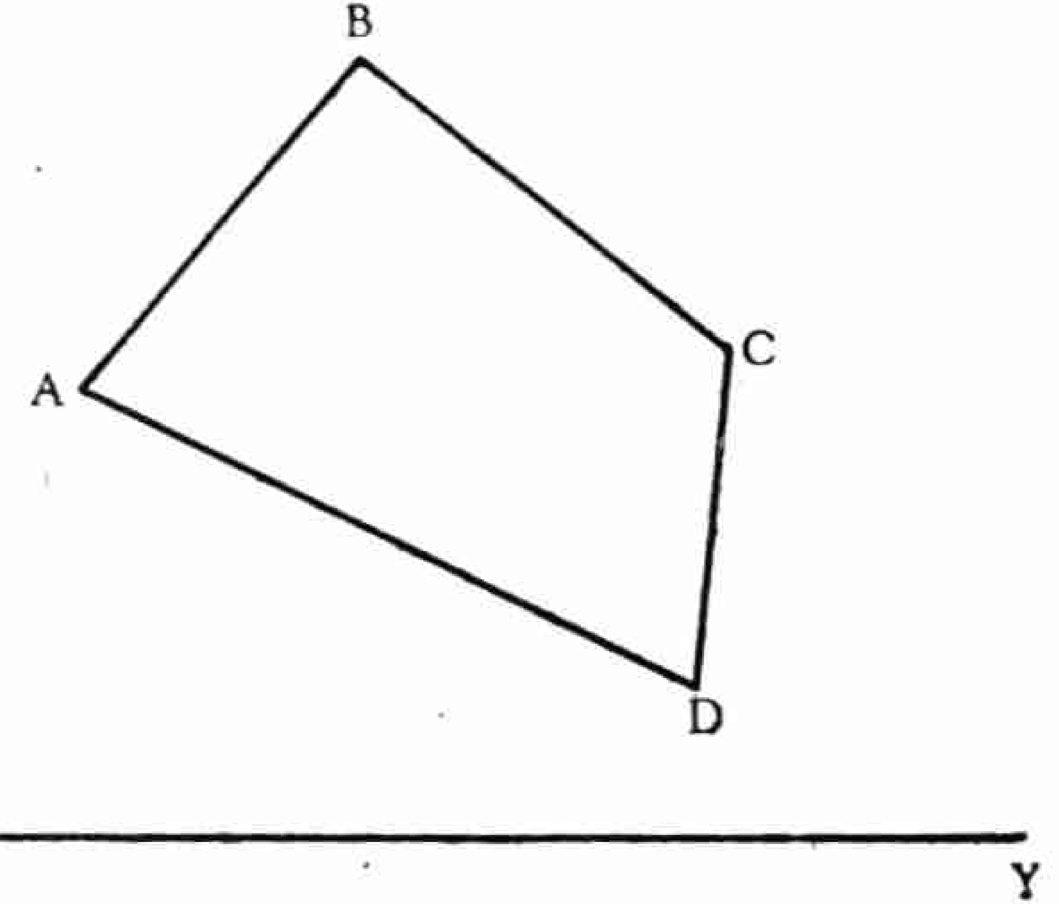
(ఏ) ఒక ఋజురేఖపై A, B, C, D, E అను బిందువులు ఏ వరుసలో ఉండినను



చి[తము 364

$$AE = AB + BC + CD + DE$$

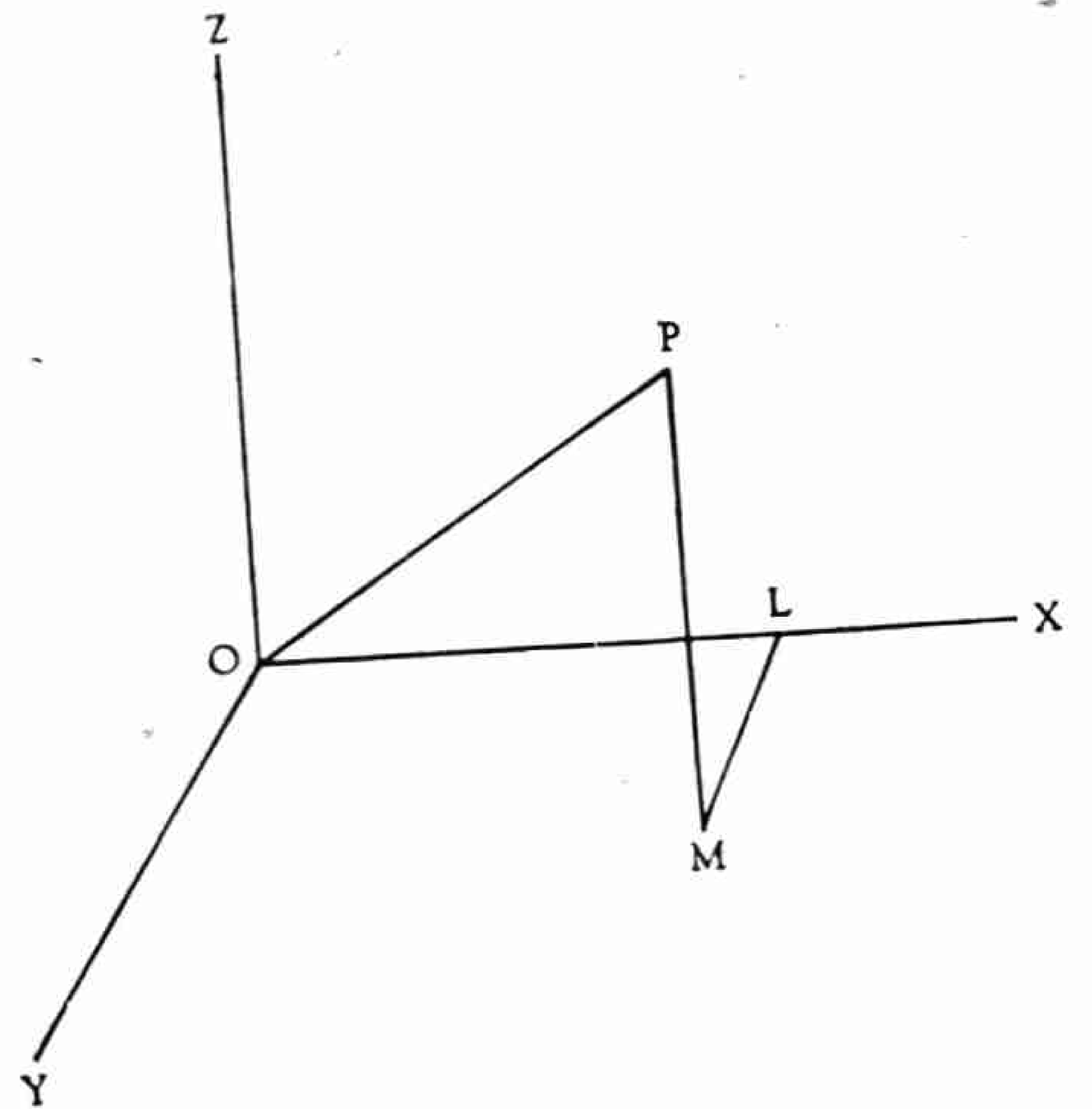
(బి) ABCD ఒక సంవృత బహుభుజి ; XY ఒక ఋజు రేఖ, XY పై AD యొక్క విక్షేపము = XY పై AB, BC, CD విక్షేపముల సంకలనము లేదా



చి[తము 365

XY పై AB యొక్క విక్షేపము = XY పై AD, DC, CB విక్షేపముల సంకలనము.

ఒక బిందువు P ని గుర్తించుటకు మూడు పరస్పర లంబ నిరూపకాక్షములు OX, OY, OZ తీసికొనవలయును.



చి[తము 366

XY తలమునకు PM లంబము ; నిరూపకాక్షము OX నకు ML లంబము. అయిన P యొక్క నిరూపకములు ;

$OL\ (=x)$, $LM\ (=y)$, $PZ\ (=z)$

నిర్దేశక కో. జీవలు (డైరెక్షన్ కోసైన్లు): $\angle POX = \alpha$, $\angle POY = \beta$, $\angle POZ = \gamma$ అయిన, OP యొక్క నిర్దేశక కో. జీవలు క్రమముగా $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; అవి l, m, n చే కూడ గుర్తింపబడును.

OL, LM, MP లను OP పై విక్షేపించిన,

$$OP = OL\cos\alpha + LM\cos\beta + MP\cos\gamma$$
$$= lx + my + nz$$

కాని $x = OP\cos\alpha = l\cdot OP$; $y = m\cdot OP$; $z = n\cdot OP$

కాబట్టి $OP = l^2\cdot OP + m^2\cdot OP + n^2\cdot OP$; అనగా

$$1 = l^2 + m^2 + n^2$$

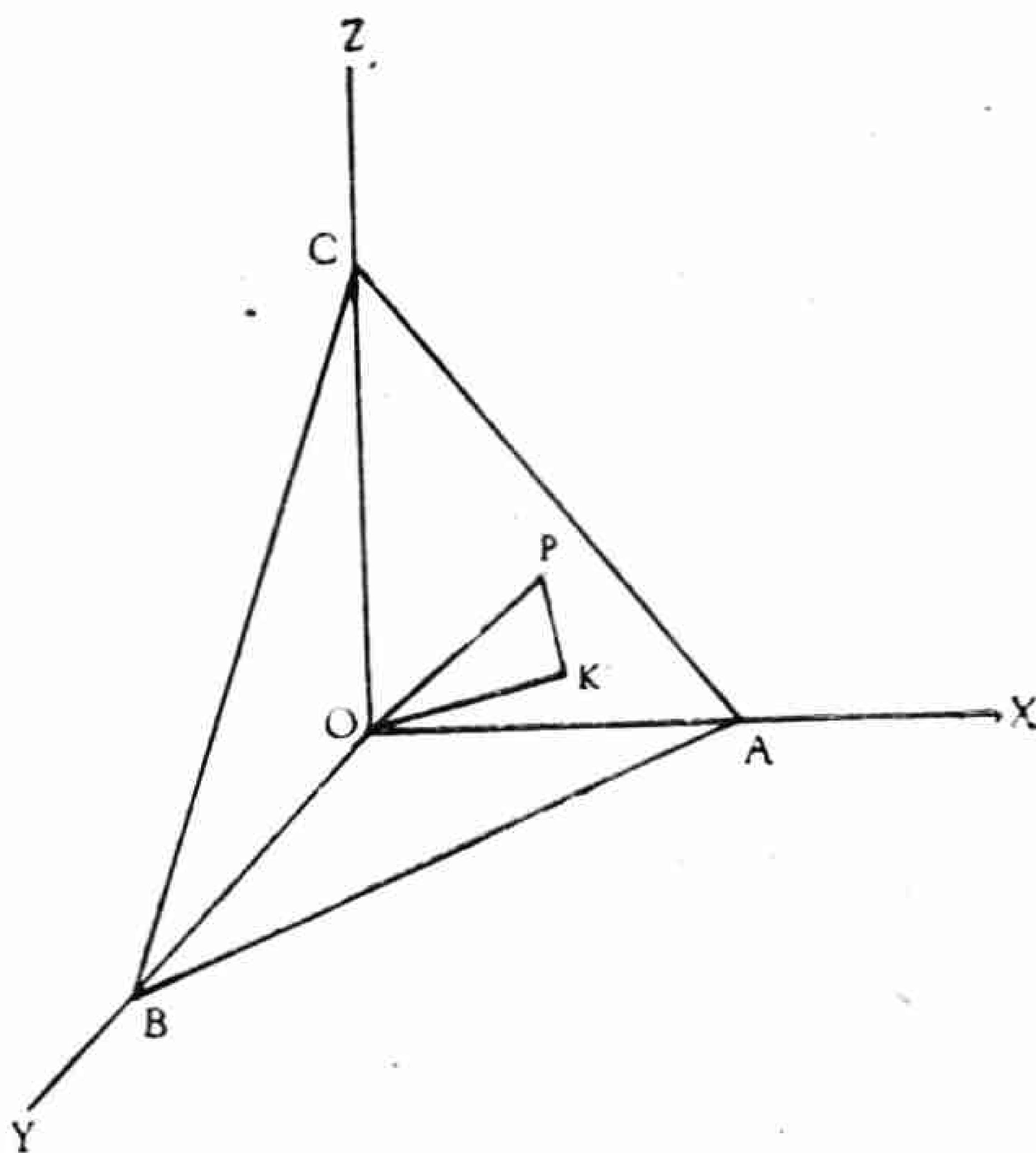
నిర్దేశక నిష్పత్తులు : l, m, n రాశులు a, b, c అనుపాతములో ఉండిన, a, b, c లకు నిర్దేశక నిష్పత్తులని పేరు. $a^2+b^2+c^2$ యొక్క విలువ 1 కాదు. a, b, c నుండి నిర్దేశక కో. జీవలను తెచ్చుటకు

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

తీసికొనవలయును.

సమతల సమీకరణము : సమతలము ABC నిరూపకాక్షములు OX, OY, OZ లను A, B, C బిందువులలో ఖండించును. ABC సమతలమునకు లంబము $OK = p$;

OK యొక్క నిర్దేశక కో. జీవలు l, m, n; ABC సమతలముపై P ఒక బిందువు నిరూపకములు x, x, z



చిత్రము 367

OK పై OP యొక్క విక్షేపము $= OK$ పై x, y, z యొక్క విక్షేపముల సంకలనము.

$\therefore p = OK = x\,l + y\,m + zn$ అనగా

$lx + my + nz = p$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ మరియొక రూపము ; దీనిచే నిరూపకాక్షములపై ఏర్పడు అంతః ఖండములు క్రమముగా a, b, c అగును. $ax + by + cz + d = 0$ మరియొక రూపము. దీనిని సామాన్యముగా వాడుదురు.

మూలబిందువునుండి దీనికి ఏర్పడు లంబముయొక్క నిర్దేశక నిష్పత్తులు a, b, c; నిర్దేశక కో. జీవలు క్రమముగా

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

మూలబిందువు నుండి ఈ సమతలమునకు లంబము $=$

$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

ఋజురేఖలు : (ఏ) రెండు సమీకరణములు

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

ఒక ఋజురేఖను గుర్తించును.

(బి) రెండు బిందువులు (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ఒక ఋజురేఖను గుర్తించును. సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} + \frac{z-z_1}{z_1-x_2}$$

l, m, n క్రమముగా x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 లకు అనుపాతములైన $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ లభించును.

రెండు ఋజురేఖలు OP_1, OP_2 ల మధ్య కోణము : మూలబిందువు O వద్ద తీసికొనుము. OP_1 యొక్క నిర్దేశక కో. జీవలు l_1, m_1, n_1; OP_2 యొక్క నిర్దేశక కో. జీవలు l_2, m_2, n_2; OP_1, OP_2 ల మధ్యకోణము θ; $OP_1 = r$;

P_1 యొక్క నిరూపకములు x, y, z; OP_2 పైన OP_1 యొక్క విక్షేపము $= r\cos\theta$.

$r\cos\theta = OP_2$ పై x, y, z విక్షేపముల సంకలనము.

$$= x\,l_2 + y\,m_2 + z\,n_2$$
$$= r\,l_1\,l_2 + r\,m_1\,m_2 + r\,n_1\,n_2$$
$$\cos\theta = l_1\,l_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2.$$

OP_1, OP_2 లు లంబములుగా ఉండిన

$$l_1\,l_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2 = 0$$

OP_1, OP_2 లంబములైన, వానికి లంబములగు సమతలములు

$$l_1\,x + m_1\,y + n_1\,z = p_1$$
$$l_2\,x + m_2\,y + n_2\,z = p_2$$ పరస్పర లంబములు.

కాబట్టి $l_1\,l_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2 = 0.$

ఋజురేఖ, సమతలము : ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r \quad \ldots (i)$$

సమతల సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$ ... (ii)

(x_1, y_1, z_1) బిందువు P, ఋజురేఖ (i) పై ఉండు బిందువు Q ను $x=x_1+lr$, $y=y_1+mr$, $z=z_1+nr$ చే గుర్తింపవచ్చును. r యొక్క విలువ మారునపుడు Q యొక్క స్థితి మారుచుండును. ఋజురేఖ (i) సమతలము (ii) ను Qలో సంధించిన,

$$r(al+bm+cn)+ax_1+by_1+cz_1+d=0 \quad \ldots (iii)$$

ఈ సమీకరణమువలన లభించు r యొక్క విలువ Q యొక్క నిరూపకములను ఇచ్చును. ఋజురేఖ (i) సమతలము (ii) నకు సామ్యమైన, ఋజురేఖ సమతలమునకు O నుండి ఏర్పడిన OP లంబరేఖకు లంబముగా ఉండవలయును. కాబట్టి

$$al+bm+cn=0 \quad \ldots (iv)$$

(x_1, y_1, z_1) సమతలముపై నుండిన

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \quad \ldots (v)$$

నిబంధనలు (iv), (v) ఏకకాలమున ఏర్పడిన ఋజురేఖ (i), సమతలము (ii) పైన ఉండును.

అనగా సమతలము (ii) ఋజురేఖ (i) గుండ వెళ్లును.

గోళసమీకరణము :

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \ldots (i)$$

ఒక గోళ సమీకరణము. దీనినుండి

$$(x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2 = u^2+v^2+w^2-d \quad \ldots (ii)$$

గోళ కేంద్రము యొక్క నిరూపకములు $(-u, -v, -w)$

వ్యాసార్ధము $=\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

$z=0$ అయిన, XY తలము వచ్చును. $z=k$ అని తీసికొనిన, XY తలమునకు సామ్యముగా ఉండు సమతలము లభించును. $z=0$ అనిగాని, $z=k$ అనిగాని తీసికొనిన, (i) నుండి ఒక వృత్తసమీకరణము ఏర్పడును. కాబట్టి ఒక సమతలము గోళమును ఛేదించినపుడు ఒక వృత్తము ఏర్పడును.

శంకు సమీకరణము : నిర్వచనము : ఒక ఋజురేఖ ఒక దత్తబిందువుగుండ వెళ్లుచు, ఒక వక్రపరిధిని సంధించిన, ఒక శంకు ఏర్పడును. ఆ ఋజురేఖపై ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకములు x, y, z అయిన, k యొక్క అన్ని విలువలకు బిందువు kx, ky, kz ఆ శంకుపైన ఉండవలయును.

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

అను సమీకరణము ఒక శంకును గుర్తించును. ఇది మూల బిందువు గుండ వెళ్లును.

ఒక శంకు యొక్క జనక రేఖ సమీకరణము $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$; శంకు యొక్క సమఘాత సమీకరణము $f(x, y, z)=0$ అయిన, $f(l, m, n)=0$.

కాబట్టి ఒక బిందువుగుండ వెళ్లు ఋజురేఖ ఎట్టి సందర్భములో ఒక శంకు యొక్క జనకరేఖయగునో తెలియుచున్నది.

కేంద్రీయ ఘనశాంకవములు (సెంట్రల్ కానికాయిడ్స్) : వీని సమీకరణములు మూడు విధములు.

(ఏ) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

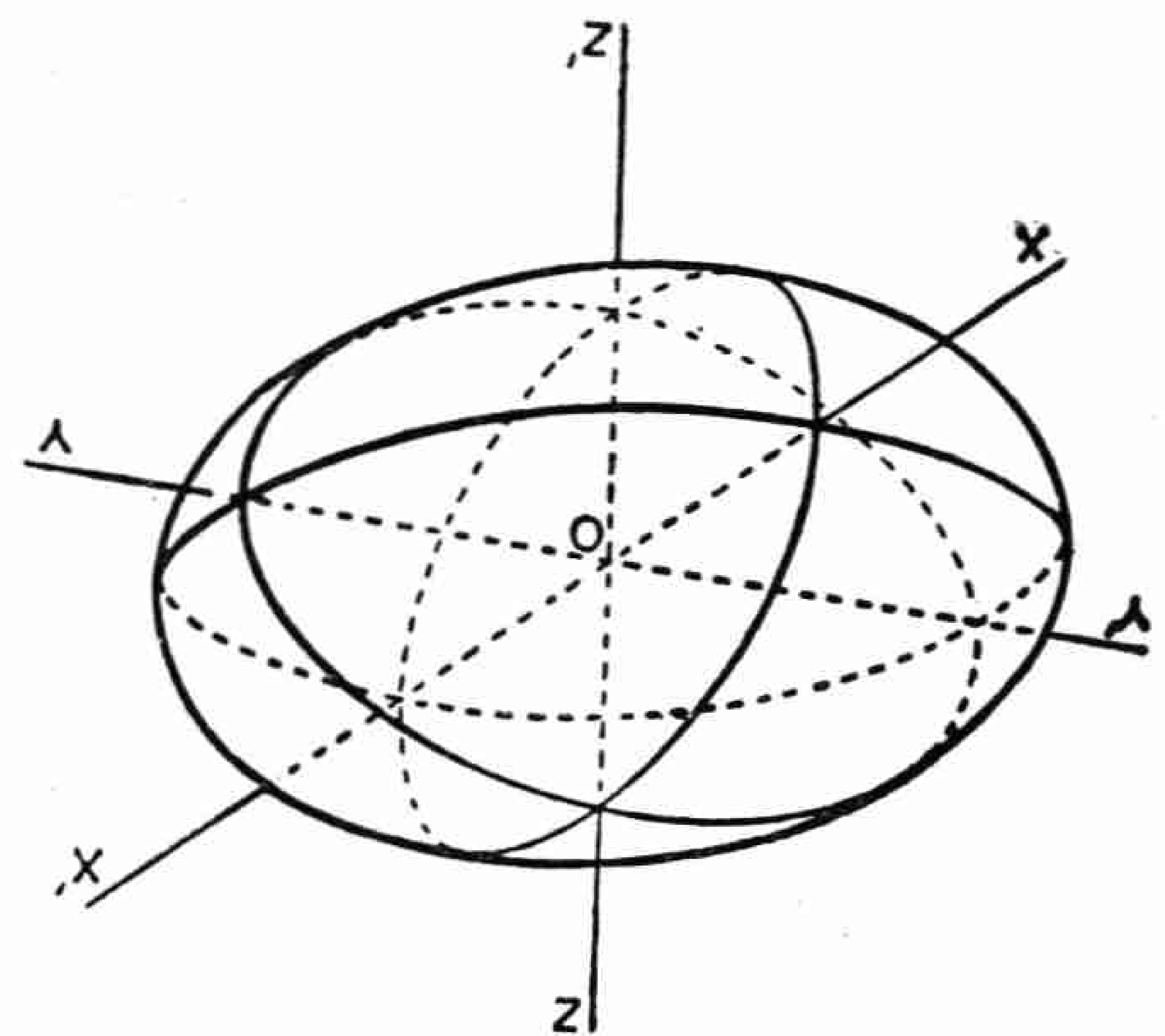
(బి) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(సి) $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(ఏ) సమీకరణము ఒక సంవృత ఘనము. దీనిని ఎలిప్సాయిడ్ (ఘనవిలోపము) అందురు. దీని వ్యాప్తి

$$-a \leq x \leq a;\ -b \leq y \leq b;\ -c \leq z \leq c.$$

సమతలము $z=k$, $(k<c)$ ఎలిప్సాయిడ్‌ను ఛేదించిన, ఛేదకము విలోపముగా ఉండును.

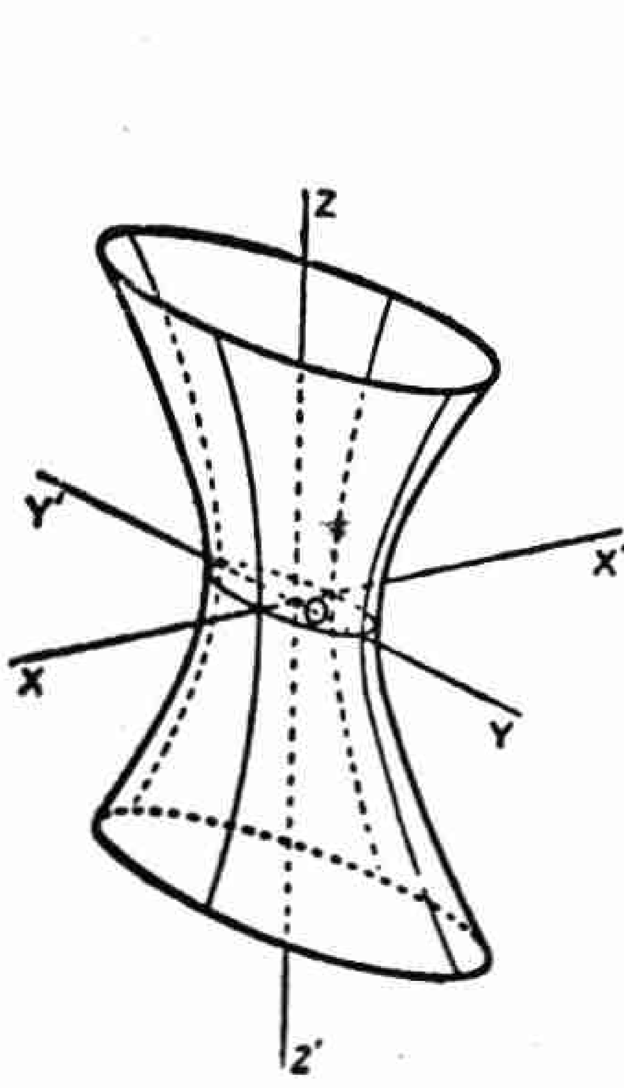


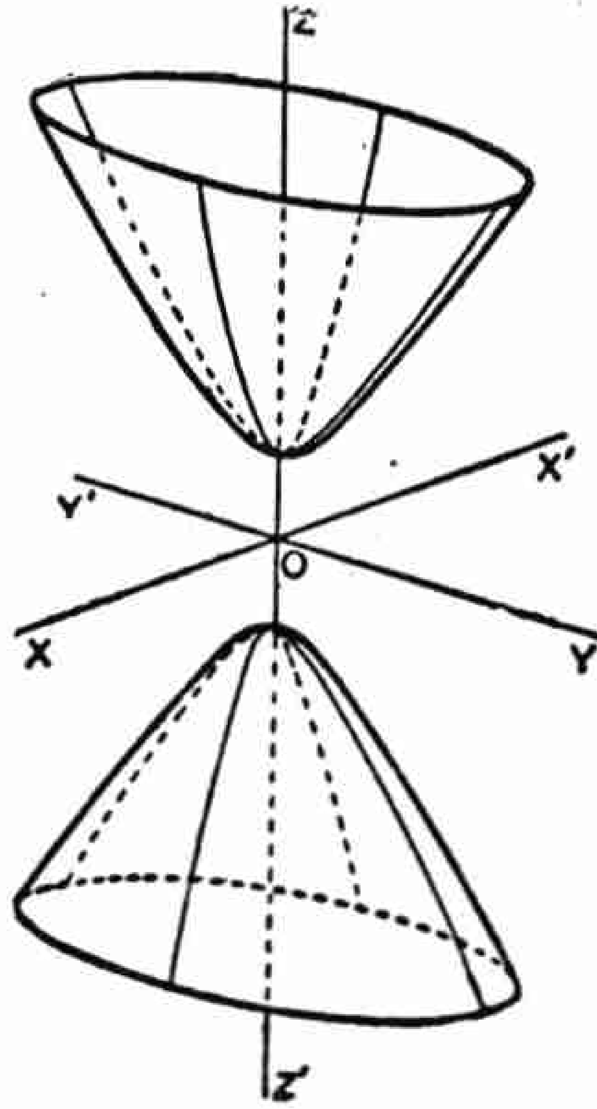
చిత్రము 368

(బి) సమీకరణము ఒక వివృతఘనము. ఇది ఒక చర విలోపము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$; $z=k$ చే ఏర్పడును.

దీనిని ఏకదళ హైపర్‌బోలాయిడ్ అని చెప్పుదురు.

XY తలమునకు సామ్యముగా ఉండు ప్రతి సమ తలము $z = k$ చే ఒక విలోపము ఏర్పడును. చిత్రము 369 గమనింపుము.





చిత్రము 369 చిత్రము 370

(సి) సమీకరణము ఒక ద్విదళ హైపర్‌బొలాయిడ్ (ఘన అతిపరాస) ను గుర్తించును. సమీకరణమును మార్చి

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

అని వ్రాయవచ్చును.

$+c \geq z \geq -c$ విలువలకు ఘనమునకు వాస్తవ రూపము లేదు. చిత్రము 370 గమనించుము.

$k > c$ అయిన $z = k$ చే ఏర్పడిన ఛేదనము ఒక విలోపము (దీర్ఘవృత్తము) ను గుర్తించును. x, y ల విలువలు అనంతమువరకు ధనాత్మకముగాను, ఋణాత్మకముగాను ఉండవచ్చును. వీని ఇతర ధర్మములను శాంకవములకువలె సులభముగా విమర్శింపవచ్చును. అట్టి ధర్మములలో ఒకటి క్రింద ఇవ్వబడినది :

ఒక ఎలిప్సాయిడ్‌నకు ఒక బిందువుగుండ ఆరు సరళములు గీయవచ్చును. ఆ సరళముల (అభిలంబరేఖల) పాదములు ఒక ఘన వక్రము ఈ ఎలిప్సాయిడ్‌ను ఖండించు బిందువులతో ఏకీభవించును.

పెరాబొలాయిడ్స్ (ఘనపరాసలు) : ఇవి రెండు విధములు.

$$(ఏ)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}\ ;\quad (బి)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

(ఏ) సమీకరణమును తీసికొనిన, సమతలము $z = k$ పెరాబొలాయిడ్‌ను విలోపములో ఖండించును.

(బి) సమీకరణమునందు $z = k$ వలన ఒక అతిపరాస ఏర్పడును. ఇతర లక్షణములను సులభముగా విమర్శింపవచ్చును.

రేఖిత తలములు (రూల్డ్ సర్ఫెసెస్):

$$(ఏ)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}\ ;\ (బి)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

రేఖిత తలములను గుర్తించును.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \text{ నుండి}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right)$$

అనగా $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \lambda\left(1 - \frac{z}{c}\right)$;

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{z}{c}\right).$$

ఇవి ఒక ఋజు రేఖను గుర్తించును;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

పూర్తిగ అమర్చబడి ఉండుటచే దీనిని జనకరేఖ (జనరేటింగ్ లైన్) అని చెప్పుదురు.

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu\left(1 + \frac{z}{c}\right);\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

మరియొక జనక రేఖను ఇచ్చును.

కాబట్టి $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$ ఒక రేఖిత తలమును గుర్తించును.

ఈ విధముగనే $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ రేఖిత తలమని చూపవచ్చును.

ఆచార్య

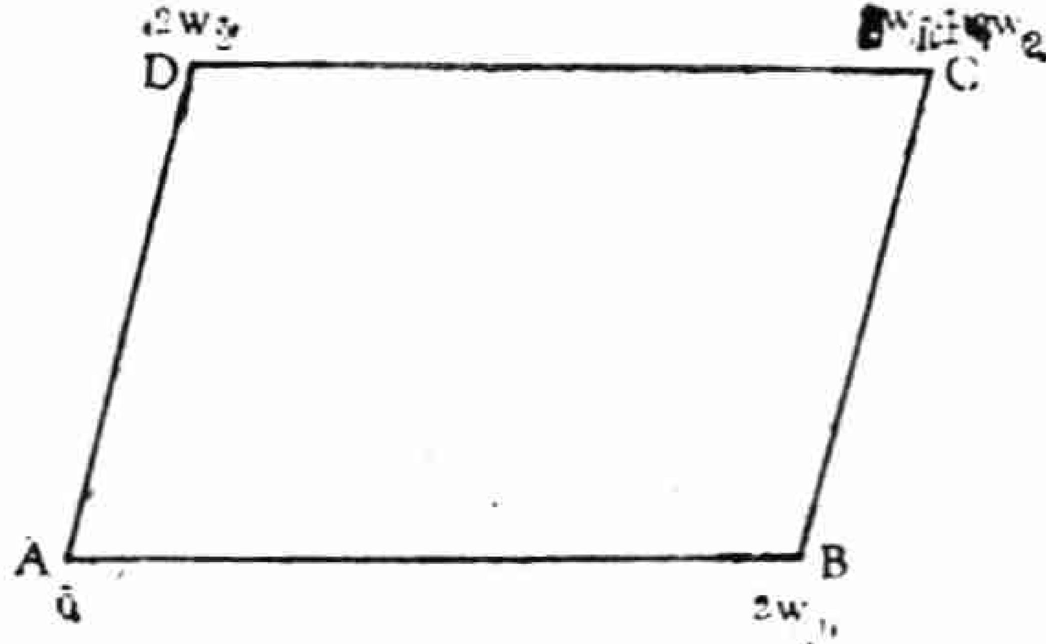
విలోపఫలములు : $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ మొదలగు త్రికోణమితీయ ఫలములు ఏకావర్తన ఫలములు. ఇపుడు ద్వైరావర్తన ఫలములను గురించి విమర్శన జరుగును. బహు ఆవర్తన ఫలములు కూడ కలవు.

$f(z + 2w_1) = f(z)$; $f(z + 2w_2) = f(z)$ అయినపుడు అది ద్వైరావర్తన ఫలమని చెప్పుదురు. ఇచట నిష్పత్తి $\frac{w_1}{w_2}$ యొక్క విలువ వాస్తవరాశిగా ఉండకూడదు. అట్లుండిన ఏకావర్తన ఫలము లభించును. దీని ఆవర్తనములు $2w_1$, $2w_2$. $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ యొక్క ఆవర్తనము $= 2\pi$.

విశ్లేషణ లక్షణముగల ఒక ద్వైరావర్తన ఫలము $f(z)$ పరిమిత సమతలములో ధ్రువములవద్దమాత్రము అద్వితీయ బిందువులు కలదై ఉండిన, ఆ ఫలమునకు విలోపఫలము (ఎలిప్టిక్ ఫంక్షన్) అని పేరు.

కొన్ని ముఖ్యలక్షణములు : బిందువులు O, $2w_1$, $2w_1 + 2w_2$, $2w_2$ క్రమముగా A, B, C, D లను గుర్తింపనిమ్ము.

ABCD ఒక సామ్యచతుర్భుజము. ఆర్గాండు సమతల మందంతట ఇట్టి బిందువులను గుర్తింపవచ్చును. వాని నిరూపకములు $2mw_1 + 2nw_2$; ఇచట m, n పూర్ణ సంఖ్యలు. అపుడు సమతలమంతయును సామ్య చతుర్భుజ రూపములో ఉండు గళ్లచే నిండునట్లు చేయవచ్చును. వీనికి ఆవర్తన సామ్య చతురుజములు అని పేరు. ABCD విలోపఫలము యొక్క ముఖ్య ఆవర్తన సామ్య చతుర్భుజము : ఒక బిందువు $z + 2mw_1 + 2nw_2$ తీసికొనిన m, n యొక్క పలు విలువలకు దీనికి అనురూప బిందువు ప్రతి గడిలోను కలదు.



చిత్రము 371

$f(z)$ యొక్క మార్పులను విమర్శింపవలయుననిన సమతలములో కలుగు మార్పులన్నిటిని ఒక గడిలో చూపవచ్చును. $f(z)$ ఫలమును విమర్శించునపుడు దానియొక్క అంతరీకరణ గుణకము, చయనీకరణము తీసికొనవలసి ఉండును. అపుడు $f(z)$ యొక్క ధ్రువములు గళ్లయొక్క భుజములపై ఉండకూడదు. $f(z)$ యొక్క శూన్య విలువలు, ధ్రువములు అన్నియు భుజములపైన ఉండకుండ ఉండునట్లు, గళ్లను కొంత జరిపిన చాలును. ఒక గడిలోని $f(z)$ యొక్క విలువలు ఇతర గళ్లలోని విలువలకు అనురూపములగును.

ఒక గడిలోని $f(z)$ యొక్క శూన్యవిలువలు, ధ్రువములు అహ్రాస్యమాన (కురుచ బెట్టుటకు వీలు లేని) ములు.

(ఏ) ఒక గడిలోని ధ్రువముల సంఖ్య పరిమితము.

(బి) ఒక గడిలోని శూన్యముల సంఖ్య పరిమితము.

(సి) ఒక గడిలోని ధ్రువములవద్ద ఒక విలోపఫలము యొక్క అవశిష్టముల సంకలనము శూన్యము.

ఒక గడియొక్క అంచులను ఒక పరివృతిగా తీసికొని, $f(z)$ యొక్క పరివృతి చయనము తీసికొనిన, చయనము శూన్యము అని చూపవచ్చును.

(డి) లూయి విల్ సిద్ధాంతము : ఒక గడిలో ధ్రువములు లేని విలోపఫలము $f(z)$ ఒక స్థిరరాశికి సమానము. $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణము గలది. అందుచే దాని విలువ మర్యాదితమైనది. కాబట్టి ధ్రువము లేనిచో ఒక గడిలో $f(z) < k$. ఈ లక్షణము $f(z)$ కు అన్ని గళ్లలోను కలుగును. కాబట్టి $f(z) = k$ ఒక స్థిరరాశి.

(ఇ) ఒక గడిలో ప్రతి విలోపఫలమునకు శూన్యముల సంఖ్య ధ్రువముల సంఖ్యకు సమము అని కోషీ చూపించినాడు.

(ఎఫ్) ఒక విలోపఫలమునకు రెండు ధ్రువములు ఉండవలయును. లేనిచో (సి) ప్రకారము అవశిష్టముల సంకలనము శూన్యము కాదు. కాబట్టి విలోప ఫలములు రెండు తరగతులు.

(i) ఒక తరగతిలో ప్రతి గడియందును, ఒక ధ్రువ ద్వయము కలదు. అచట అవశిష్టము శూన్యము.

(ii) రెండవతరగతిలో ప్రతి గడియందును రెండు ధ్రువములు కలవు. అచట అవశిష్టములు సమాన విలువలతో విరుద్ధ సంజ్ఞలు కలవై ఉండును.

విలోపఫల నిర్మాణము $\zeta(z)$:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega^2_{m,n}} \right\}$$

తీసికొనుము.

ఇందు $\Omega_{m,n} = 2mw_1 + 2nw_2$. ఇది ఒక ప్రథమ జాతి విలోప ఫలము. దీని కారకుడు వియర్ స్ట్రాస్. m, n యొక్క విలువలు $-\infty$ నుండి $+\infty$ వరకు తీసికొనవలయును ఏకకాలమున అవి శూన్యవిలువలను పొందకూడదు. దీనికి పరమ ఉపసరణత కలదు. ధ్రువములు $\Omega_{m,n}$ వద్ద తప్ప తక్కిన ప్రదేశమున ఇది విశ్లేషణ లక్షణము కలదై ఉండును. దీని ఆవర్తనములు $2w_1$, $2w_2$ అని నిరూపింపవచ్చును.

$\zeta(z)$ సరి ఫలము ; $\zeta'(z)$ బేసి ఫలము.

$y = \zeta(z)$ అయిన,

$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$ అని చూపవచ్చును.

ఇచ్చట $g_2 = 60 \Sigma \Omega^{-4}_{m,n}$; $g_3 = 140 \Sigma \Omega^{-6}_{m,n}$

సంకలన సూత్రము :

$$\zeta'(z) = A\zeta(z) + B \; ; \; \zeta' y = A\zeta(y) + B$$

సమీకరణములను తీసికొనుము.

$\zeta'(u) - A\zeta(u) - B$ ఫలమును u యొక్క ఫలముగా తీసికొనిన, దానికి $u = 0$ వద్ద ధ్రువత్రయము కలదు. కాబట్టి దీనికి శూన్య విలువలు మూడు మాత్రమే. రెండు శూన్యములు $u = z$, $u = y$; కాబట్టి మూడవ శూన్యము $u = -(z + y)$

అందుచేత $\zeta'(z) = A\,\zeta(z) + B$

$$\zeta'(y) = A\,\zeta(y) + B$$

$$\zeta'(-y-z) = A\,\zeta(-y-z) + B$$

కాబట్టి నిర్ధారక రూపమున

$$\begin{vmatrix} \zeta'(z) & \zeta(z) & 1 \\ \zeta'(y) & \zeta(y) & 1 \\ -\zeta'(y+z) & -\zeta(y+z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\zeta(z)$ ఫలము:

$\frac{d\,\zeta(z)}{dz} = -\zeta(z)$ అనియు, $\lim_{z \to 0}\left\{\zeta(z) - \frac{1}{z}\right\} = 0$

అనియు తీసికొనుము. అపుడు

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n}^{1}\left\{\frac{1}{z-\Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega^2_{m,n}}\right\}$$

ఈ ఫలము సమతలములో సాధారణ ధ్రువములు $\Omega_{m,n}$ వద్ద తప్ప తక్కిన చోట్ల విశ్లేష లక్షణము కలది.

$$\zeta(-z) = -\zeta(z)$$

$\sigma(z)$ ఫలము:

$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \zeta(z)$ అనియు,

$\lim_{z \to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1$ అనియు తీసికొనుము.

$\zeta(z)$ ఏకరూప ఉపసరణత కలది (ధ్రువములు తప్ప). కాబట్టి పద పదముగా చయనీకరణము చేసి, సూక్ష్మీకరించిన

$$\sigma(z) = z\,\Pi\left\{\left(1 - \frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{z^2}{2\,\Omega^2_{m,n}}\right)\right\}$$

$\sigma(z)$ బేసి ఫలము; దీని శూన్యములు $z = \Omega_{m,n}$ వద్ద ఉండును.

ఇది అర్థ ఆవర్తన లక్షణము కలదై యుండును.

$\zeta(z)$ కూడ అట్లే యుండును. ఆచార్య

విశాఖా నక్షత్రనామ సార్థక్యత : 'విశాఖ' యను పదమునకు విదళిత శాఖయని అర్థము. ఈ నక్షత్రమునకు సరియగు నామము 'రాధ'; తరువాతి నక్షత్రము 'అనూరాధ'.

విషు చలనమువలన కొన్ని వేల సంవత్సరములకు పూర్వము విషువృత్తము మృగశిరా విశాఖా నక్షత్రములను ఛేదించి వెళ్లుచుండెను. అప్పుడు మిథున రాశిలో రవి ప్రవేశించినపుడు సంవత్సరారంభము అగుచుండెను; వసంత బిందువు మృగశిరా నక్షత్ర తృతీయపాదాదిలో నుండెను. అందుచేత 'మృగశిరకు' వేద మంత్రములలో ప్రాధాన్యము వచ్చినది. మృగశిరను గూర్చి కీ. శే. బాల గంగాధర తిలక్ వ్రాసిన గ్రంథము పాశ్చాత్యులను ఆశ్చర్యచకితులను చేసి, భారతీయుల ప్రాచీనతనుగూర్చి వారికి నూతన జ్ఞానోదయము కలిగించినది.

ఆకాలములో 'రాధ' నక్షత్రము 'విదళిత శాఖ' అనగా విశాఖగా మారినది. ఆకాల నిర్ణయము చేయుట సులభము కాదు; అసంభవముకూడను. సుమారు 6 వేల సంవత్సరములకు పూర్వమే అది జరిగియుండవచ్చును. ఇప్పటి గణితరీత్యా విషుబిందు పరిభ్రమణకాలము 27000 ఏండ్లు. అందువలన ఈ సంభవము ఏదో ఒకానొక ఆవర్తనమునందు జరిగినట్లు తీసికొనినచో కాలనియమ సూత్రము $27000\,n + 6000$ సంవత్సరములు. ఇందు n యొక్క విలువ ఏ పూర్ణాంకమైనను కావచ్చును. ఆచార్య.

విశిష్టజాతి సంఖ్యలు : పితాగొరస్ సంఖ్యలు : ఒకపూర్ణసంఖ్య (z) యొక్క వర్గమును మరి రెండు పూర్ణ సంఖ్యల (x, y) వర్గముల మొత్తముగా వ్రాయగలిగినచో, ఆ పూర్ణసంఖ్యను పితాగొరస్ సంఖ్య యందురు. ఎందుచేతననగా, పితాగొరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము అటువంటి సంఖ్య ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణమును, మిగిలిన రెండు సంఖ్యలు (x, y) అదే త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన రెండు భుజములను తెలుపును.

n బేసి పూర్ణసంఖ్యయైన $\frac{n^2+1}{2}$ పితాగొరస్ సంఖ్య యని పితాగొరస్ రుజువు చేసెను.

మర్సిన్ సంఖ్యలు : $N = 2^p - 1$ అను రూపము కలిగిన సంఖ్యను మర్సిన్ సంఖ్య యందురు (p పూర్ణ సంఖ్య). ఎందుచేతననగా 1644 వ సంవత్సరమున ఫాదర్ మేరిన్ మర్సిన్ 258 కంటే తక్కువ సంఖ్యలలో $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ సంఖ్యలకు మాత్రమే $2^p - 1$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య యగునని ప్రకటించెను. కాని తరువాత జరిపిన పరిశోధనల మూలమున $2^{257} - 1$ ప్రధాన సంఖ్య కాదనియు, 257 కంటె తక్కువ $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$, విలువలకు మాత్రము $2^p - 1$ ప్రధాన సంఖ్యయని కనుగొనబడెను. మరియు $p = 11, 23, 29, 37, 41, 43, 47, 53; 59, 67, 71, 73, 79$ అయినప్పుడు $2^p - 1$ యొక్క భాజకములన్నియు, $p = 83, 97, 131, 151, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 197, 211, 223, 229, 233, 239, 251$ సంఖ్యలకు $2^p - 1$ యొక్క కొన్ని భాజకములు మాత్రము కనుగొనబడెను.

హెచ్. ఎస్. ఉష్లర్ (1948-1949) $p = 101, 103, 109, 137, 139, 149, 157, 193, 199, 227$ అను సంఖ్యలకు;

1934 వ సంవత్సరమున, ఆర్. ఇ. పవర్స్ $p = 241$ అను సంఖ్యకు; 1932 వ సంవత్సరమున లెహామర్ $p = 257$ అను సంఖ్యకు $2^p - 1$ ప్రధాన సంఖ్య కాదని కనుగొనిరి. ల్యూకాస్ ఈ మర్సెన్ సంఖ్యలలో అవిభాజ్యములను కనుగొనుటకుగాను రెండు పద్ధతులను ప్రకటించెను. కాని, వాటి ఉపపత్తులను మాత్రము పేర్కొనలేదు. వెస్టరన్ 1932 వ సంవత్సరమున, లెహామర్ 1940 వ సంవత్సరమున ఆ పద్ధతులను రుజువు పరచిరి. ఈ పద్ధతుల ననుసరించి 1951 వ సంవత్సరమున $2^{127}-1$ కంటె హెచ్చు విలువ గల మర్సెన్ విభాజ్యములు కొన్ని కనుగొనబడెను. 1952వ సంవత్సరమున తరువాతి మూడు మర్సెన్ అవిభాజ్యములు $2^{531}-1$, $2^{607}-1$, $2^{1279}-1$ ప్రచురించబడెను. మర్సెన్ ప్రధాన సంఖ్య పరిమితమగునో కాదో నిశ్చితము కాలేదు.

ఫర్మాసంఖ్యలు : $2^{2^n}+1$ అను రూపము కలిగిన సంఖ్యలకు ఫర్మా సంఖ్యలని పేరు. 'ఫర్మా' అను నతడు మొదటగా ఈ సంఖ్యలను గురించి తెలిసికొనుటకు ఉపక్రమించినందువలన ఈ సంఖ్యలకు ఫర్మా సంఖ్యలని పేరు వచ్చెను. మొదటి ఐదు ఫర్మా సంఖ్యలు :

$$2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}=5,\ 2^{2^2}+1=17,$$

$$2^{2^3}+1=257,\ 2^{2^4}+1=65337$$

ప్రధాన సంఖ్యలని కనుగొనిన పిమ్మట ఇట్టి తక్కిన సంఖ్యలు కూడ అవిభాజ్యములై ఉండునను అభిప్రాయమును అతడు వెలిబుచ్చెను. కాని, 1732 వ సంవత్సరమున ఆయ్‌లర్ ఆరవ ఫర్మా సంఖ్య $2^{2^5}+1 = 641 \times 6700417$ అనియు, 1880 వ సంవత్సరమున లాండీ

$$2^{2^6} = 274177 \times 6728042131672$$

అనియు కనుగొనిరి. మూర్‌హెడ్, వెస్టరన్ $2^{2^7}+1$ను $2^{2^8}+1$ను విభాజ్య సంఖ్యలని వాటి భాజకములను నిర్ణయించకనే కనుగొనిరి. ఆ తరువాత $t = 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73$ అను సంఖ్యలు $2^{2^t}+1$ ప్రధాన సంఖ్యలు అని తెలిసినది.

ఫర్మా సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలుగా నుండుటకు ప్రత్యేక కారణము లేమియు లేవనియు, అంతేకాక ఫర్మా ప్రధాన సంఖ్యలు పరిమితముగా నుండునను మాట నమ్మదగినదిగా నున్నదనియు కొన్ని వాదములు బయలుదేరినవి. కాని ఫర్మా సంఖ్యలలో ఏ రెండు సంఖ్యలకు కూడ 1 తప్ప, ఇతర ఉమ్మడి భాజకము లేమియు లేవని నిరూపింపబడినది.

ఈ ఫర్మా సంఖ్యల ప్రయోగము క్రమ బహుభుజుల నిర్మాణములో కన్పడుచున్నది. పురాతన గ్రీకులు రూళ్లకర్ర, కంపాసుల సహాయమున $2^h. m$, $m = 3, 5$ భుజములు కలిగిన క్రమ బహుభుజులను నిర్మించుట కనుగొనిరి. గాస్ తన 17వ ఏట 'm' వేర్వేరు ఫర్మా ప్రధాన సంఖ్యల గుణకారలబ్ధమైనప్పుడు మాత్రము $2^h . m$ భుజములు కలిగిన క్రమ బహుభుజులను రూళ్లకర్ర, కంపాసుల సహాయమున నిర్మించుట వీలగునని దీని విలోమ సిద్ధాంతమును నిరూపించెను.

సాధారణముగా a^n+1 $(a>1)$ అను రూపము కలిగిన సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అయినచో a సరిసంఖ్యగను, n, 2 యొక్క ఘాతముగను ఉండవలయును. ఎందుకనగా a బేసి సంఖ్యయైనచో $a>1$, కాన $a+1$, 2 కంటె హెచ్చు విలువగల సరిసంఖ్య యగును; కనుక ప్రధాన సంఖ్య కానేరదు. కావున a సరిసంఖ్యగా నుండవలెను. $n = 2^m k$. k ఒకటి కంటె హెచ్చు విలువగల బేసి సంఖ్యయైనచో, a^n+1 సంఖ్య $a^{n/k}+1$ను భాజకముగా కలిగిన విభాజ్యమగును. కాన n సంఖ్య 2 యొక్క ఘాతముగా నుండవలెను.

సమగ్ర సంఖ్యలు (పర్ఫెక్ట్ నంబర్స్): ఒక సంఖ్య యొక్క భాజకముల (ఆ సంఖ్యను మాత్రము వదలి) మొత్తము ఆ సంఖ్యకు సమానమైన ఆ సంఖ్యను సమగ్ర సంఖ్య యందురు. ఉదా : $6 = 1+2+3$. 2^a+1 ప్రధాన సంఖ్య అయినచో $2^a(2^{a+1}-1)$ సమగ్ర సంఖ్యయని యూక్లిడ్ నిరూపించెను. ఆ తరువాత ఆయ్‌లర్ ప్రతి సరి సమగ్ర సంఖ్యయు పై రూపమును కలిగియుండునని రుజువు పరచెను. కావున ప్రతి మర్సెన్ సంఖ్యకు అనురూపముగా ఒక సమగ్ర సంఖ్యను, ప్రతి సమగ్ర సంఖ్యకు అనురూపముగా ఒక మర్సెన్ సంఖ్యను నిర్మించవచ్చును. మొదటి ఐదు సమగ్ర సంఖ్యలు $2(2^2-1)=6$, $2^2(2^3-1)=28$, $2^4(2^5-1)=496$, $2^6(2^7-1)=8128$, $2^{12}(2^{13}-1)=33550336$. బేసి సమగ్ర సంఖ్యలు ఇంతవరకు కనుగొనబడలేదు.

ఇటీవల, 6 ను తప్ప తక్కిన ఏ సమ సమగ్ర సంఖ్యను కూడ మూడుసంఖ్యల వర్గముల మొత్తముగా వ్రాయుటకు వీలులేదనియు, నాలుగు సంఖ్యల వర్గముల మొత్తముగా మాత్రమే వ్రాయుటకు వీలగుననియు, ప్రతి బేసి సమగ్ర సంఖ్య (అటువంటి సంఖ్యలు ఉన్నట్లైన)ను రెండు సంఖ్యలవర్గముల మొత్తముగా వ్రాయుటకు వీలగుననియు

నిరూపింపబడెను. ఈ శాఖకు చెందిన మరియొక సంఖ్యా సముదాయము గుణిజ సమగ్ర సంఖ్యాసముదాయము. ఒక సంఖ్యయొక్క భాజకముల (ఒకటిని, ఆ సంఖ్యను కలుపుకొని) మొత్తము $= k \cdot n$, $k > 2$ అయిన ఆ సంఖ్యను గుణిజ సమగ్ర సంఖ్య యందురు. 1631 వ సంవత్సరమున మర్సిన్ ఈ సమస్యను ప్రవేశ పెట్టెను. 120 భాజకముల మొత్తము 3×120 కావున 120 ఒక గుణిజ సమగ్ర సంఖ్య. ఇటులనే 672; 523,776; 1,476,304,896 గుణిజ సమగ్ర సంఖ్యలు. పి. పౌలే, 1929 లో 334 గుణిజ సమగ్ర సంఖ్యల జాబితా నొకదానిని తయారు చేసెను. ఈ సంఖ్యలలో భాజకముల (1 ని, ఆ సంఖ్యను కలుపుకొని) మొత్తము ఏడింతలు సంఖ్యలుగా కల కొన్ని సంఖ్యలున్నవి.

మిత్రసంఖ్యలు (ఎమికబల్ నంబర్స్): m అను సంఖ్య భాజకముల (1 ని, ఆ సంఖ్యను కలుపుకొని) మొత్తము $m+n$ గను, n అను సంఖ్య భాజకముల మొత్తము $n+m$ గను ఉన్నచో m, n అను రెండు సంఖ్యలను మిత్ర సంఖ్యలందురు. పురాతన సంఖ్యా గణితమున (220), (284) అను మిత్ర సంఖ్యల జత ఒకటి మాత్రమే పేర్కొనబడినది. మునుపు ఈ జతతప్ప మరి యే ఇతర మిత్ర సంఖ్యల జత కనుగొన్న సూచనలులేవు. ఫర్మా ఇటువంటి సంఖ్యలను కనుగొనుటకు ఒక సూత్రమును కనుగొని, దానిద్వారా (17296, 18416) అను మిత్ర సంఖ్యల జతను కనిపెట్టెను. కాని, ఇతడు కనుగొనిన ఈ సూత్రమును 9 వ శతాబ్దపు ప్రాంతముననే అబు-ఐ-హసన్ తేబిట్ బెన్‌కొరా అను అరబ్బు గణితజ్ఞుడు కనుగొన్నట్లు తెలియుచున్నది. 1638లో డేకార్ట్ ఈ సూత్రము ననుసరించి మరియొక మిత్ర సంఖ్యల జత (9,363,584), (9,437,056)ను కనుగొనెను. ఆయ్‌లర్ మరికొన్ని పద్ధతులను కనిపెట్టి 60 జతల మిత్ర సంఖ్యలు కలపట్టికను తయారు చేసెను. వాటిలో కొన్ని:

$(2 \times 5 \times 7 \times 19 \times 107)$, $(2 \times 5 \times 47 \times 359)$
$(2^4 \times 23 \times 479)$, $(2^4 \times 89 \times 127)$
$(2^4 \times 47 \times 89)$, $(2^4 \times 53 \times 79)$
$(2^5 \times 5 \times 251)$, $(2^2 \times 13 \times 107)$
$(2^3 \times 19 \times 41)$, $(2^5 \times 199)$
$(2^3 \times 17 \times 79)$, $(2^3 \times 23 \times 59)$

అతి విభాజ్య సంఖ్యలు (హైలీ కాంపొసిట్ నంబర్స్): N యొక్క విభాజకముల సంఖ్య, N కంటె చిన్న సంఖ్యల విభాజకముల సంఖ్యకంటె ఎక్కువ అయిన, N అతి విభాజ్య సంఖ్య అనబడును (విభాజకములలో 1, N రెండును చేరియుండును). N ఒక అతి విభాజ్య సంఖ్య, మరియొక సంఖ్య N' యొక్క విభాజకముల సంఖ్య N యొక్క విభాజకముల సంఖ్య కంటె ఎక్కువ అయినచో, $N < M \leq N'$ అను సంబంధము సరియగునట్లు మరియొక అతి విభాజ్య సంఖ్య M ఉండును. $2N$ యొక్క విభాజకములు N విభాజకముల కంటె ఎక్కువ. కనుక N ఒక అతి విభాజ్య సంఖ్య అయితే, N కును $2N$ కును మధ్య ఒక అతి విభాజ్య సంఖ్య ఉన్నది.

అతి విభాజ్య సంఖ్యలను క్రమముగా కనుగొనుటకు సూత్రములేదు. కాని, రామానుజమ్ 1915లో 103 క్రమాగత అతివిభాజ్య సంఖ్యలు ప్రచురించెను. వానిలో పెద్దది 6,746,328,388,800. దీనియొక్క విభాజకముల సంఖ్య 10080; వీనిలో 1 యును, ఆ సంఖ్యయును చేరియున్నవి. కొన్ని అతి విభాజ్య సంఖ్యలు క్రింద నీయబడినవి:

2; 4; 6; 12; 60; 720; 1680; 7560; 50400; 665,280; 8,648,640; 61,261,200; 551,350,800; 5,587,021,440; 97,772,875,200; 642,507,465,600; 4,497,552,259,200;

ఒకొక్క అతి విభాజ్య సంఖ్య

$$2^{a_2}\, 3^{a_3}\, 5^{a_5}\, 7^{a_7} \ldots p^{a_p}$$

రూపములో నుండునని రామానుజమ్ చూపెను. ఇందు

$$a_2 \geq a_3 \geq a_5 \geq \cdots \geq a_p;$$

4, 36 ఈ రెండు తప్ప ఇతర అతి విభాజ్య సంఖ్యల విషయములలో కడపటి ఘాతము $a_p = 1$ గనే ఉండును.

ఈ సంఖ్యలయొక్క అనేక లక్షణములను రామానుజమ్ వివరించియున్నాడు. మొట్టమొదట ఘాతములు $a_2, a_3, a_5, \ldots$ తగ్గుచు నేయుండును. అనగా

$$a_2 > a_3 > a_5 > a_7 > \ \ldots\ \ldots\ > a_p$$

తరువాత సమ విలువగల ఘాతములు వచ్చును.

అత్యంత అతి విభాజ్య సంఖ్యలు: $N > N'$ అయినపుడు

$$\frac{N \text{ యొక్క విభాజకముల సంఖ్య}}{N^t} \geq \frac{N' \text{ యొక్క విభాజకముల సంఖ్య}}{N'^t}$$

మరియు $N > N'$ అగునపుడు

$$\frac{N \text{ యొక్క విభాజకముల సంఖ్య}}{N^t} > \frac{N' \text{ యొక్క విభాజకముల సంఖ్య}}{N'^t}$$

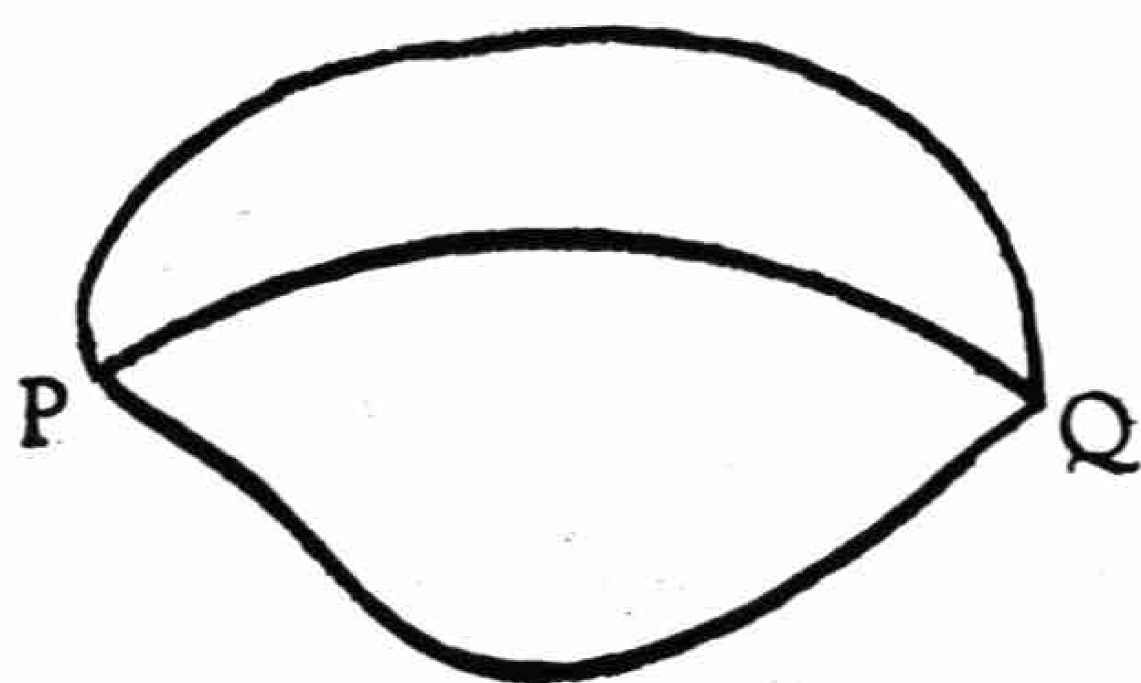
ఇట్టి గుణములుగల సంఖ్యలే అత్యంత అతి విభాజ్య సంఖ్యలు. ఇచ్చట t ఏదో ఒక ధన స్థిర సంఖ్య, ప్రతి అత్యంత అతి విభాజ్య సంఖ్యయు ఒక అతి విభాజ్య సంఖ్యయని తెలియుచున్నది.

రామానుజమ్ 18 అత్యంత అతి విభాజ్య సంఖ్యలను ఇచ్చినాడు. వాటిలో కొన్ని : 2, 6; 12; 60; 120; 360; 2,520; 5,040; 55,440; 720,720; 1,441,440; 4,324,320; 21,621,600;

ఎమ్. వి. సు.

విశ్లేషణ ఫలములు : z^2; e^z, $\log z$, $\sin z$ మొదలగు సంకీర్ణ ఫలములు సాధారణ ఫలములు. x^2, e^x, $\log x$, $\sin x$, ... మొదలగునవి వాస్తవిక ఫలములలో వాని జతలు.

P బిందువు z, Q బిందువు z_1 అయిన, z లో నుండి z_1 చేరుటకు అనేక మార్గములు కలవు. ఇందుకు కారణము z సంకీర్ణ రాశి; పరస్పర స్వతంత్రములగు రెండు వాస్తవిక రాశులు x, y లపై ఆధారపడి యుండుటచే, P నుండి Q కు పోవుటకు అనేక మార్గములు కలవు (చూ. చిత్రము 372).



చిత్రము 372

సంకీర్ణరాశి ఫలము $f(z)$ లకు ఒక ప్రత్యేక లక్షణము కలదు. h ఒక సంకీర్ణరాశి అయిన $h \longrightarrow 0$ అగునపుడు $\frac{1}{h}\left\{f(z+h)-f(z)\right\}$ యొక్క అవధికి అవకాశము కలదు. ఆ అవధి $h \longrightarrow 0$ చెందు విధానముపై ఆధారపడి యుండదు; కాని కొన్ని సమయములందు దీనికి విరుద్ధముగా జరుగును. ఉదా :

$f(z) = \frac{1}{z-a}$. అయితే $z = a$ వద్ద $f(z)$ కు అవధి లేదు. $z = 0$ వద్ద $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$; $\log z$ ఫలములకు విలువలు లేవు.

ఇట్టి బిందువులకు అద్వితీయబిందువుల (సింగ్యులర్ పాయింట్స్)ని పేరు. ఇతర బిందువుల వద్ద $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణముకలదై యుండునని చెప్పుదురు.

నిర్వచనము : విశ్లేషణ లక్షణమునకు కోషీ ఒక నిర్వచనము ఒసగెను. z తలములో ఒక విమాద్యాకాశ ప్రదేశము ఇవ్వబడినది; ఆ ప్రదేశములో ప్రతిచోట $u = f(z)$ నిర్వచింపబడినది. చలరాశి z యొక్క విలువలు రెండుచోట్ల z, $z + \delta z$ అని తీసికొనుము. వానిని అనుసరించిన u యొక్క విలువలు u, $u + \delta u$. ఆ ప్రదేశములో ఇష్టము వచ్చిన బిందువు z వద్ద $\delta x \longrightarrow 0$, $\delta y \longrightarrow 0$ అయినపుడు $\frac{\delta u}{\delta z} \longrightarrow 0$ అయిన, u ఫలము ఆ బిందువు వద్ద విశ్లేషణ లక్షణము కలదని చెప్పుదురు. ఇచట $\delta z = \delta x + i\,\delta y$; δx, δy లు వేరు వేరు అవధులలో శూన్యమగును.

ఫలము u ప్రతిబిందువు వద్దను విశ్లేషణ లక్షణము ఏక మూల్యము కలదిగాను ఉండిన, ఆ ప్రదేశమంతటను u విశ్లేషణ లక్షణము కలదని చెప్పుదురు. ఇప్పుడు ఫలము అనగా విశ్లేషణ లక్షణముగల ఫలమని తెలిసికొనవలయును. నిశితమగు నిర్వచనము ఇప్పుడు ఇవ్వబడును : బిందువు z వద్ద $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణము కలది; ε ఒక దత్త ధనరాశి. ε పై ఆధారపడియుండు ఒక రాశి δ; మరియొక రాశి l మనము తీసికొని, $|z - z'| < \delta$ అయినపుడు $\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z} - l\right| < \varepsilon$ అగునట్లు చేయవచ్చును. $f(z)$ అన్నిచోట్ల విశ్లేషణ లక్షణము కలదయిన ఎడల l యొక్క విలువ z పై ఆధారపడియుండును. కాబట్టి $l = f'(z)$ అని తీసికొనుము.

ఇపుడు $f(z') = f(z) + (z'-z)\,f'(z) + v\,(z'-z)$ ఇచట v యొక్క విలువ z, z' ల పై ఆధారపడియుండును. $|z - z'| < \delta$ అయినపుడు $|v| < \varepsilon$ అగును.

$z = x + iy$, $f(z) = u + iv$ వాస్తవికరాశులు. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ అయిన, $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణము గల ఒక సంకీర్ణరాశి ఫలమని రీమాన్ చూపియున్నాడు.

కోషీ సిద్ధాంతము : వక్రము C చే ఆవరింపబడియున్న ప్రతి బిందువు వద్దను, సరిహద్దు C పైనను $f(z)$ విశ్లేషణ లక్షణము కలదై యుండిన $\int_{(C)} f(z)\,dz$ అనగా వక్రము వెంబడి $f(z)$ యొక్క చయనము '0' విలువను ఇచ్చును.

$\int_{(C)} f(z)\,dz = 0$ దీనికి ఉపపత్తి ఇచ్చట ఇవ్వబడదు.

ఒక ప్రదేశము యొక్క సరిహద్దు వెంబడి తీసికొనిన ఒక ఫలము యొక్క చయనీకరణమును పరివృతి చయనీకరణము (కాంటూర్ ఇంటిగ్రేషన్) అని చెప్పవచ్చును.

సిద్ధాంతము : ఒక బిందువు వద్ద ఒక విశ్లేషణ లక్షణము గల ఫలము యొక్క విలువ ఆ బిందువు చుట్టుచేసిన పరివృతి చయనము మూలముగా గుర్తించును.

C ఒక పరివృతి; దాని లోపలను, పైనను $f(z)$ ఫలము విశ్లేషణ లక్షణము గలది. పరివృతి లోపల a ఒక

బిందువైన, z యొక్క ఫలము $\frac{f(z)}{z-a}$ పరివృతి C లో a బిందువు తప్ప తక్కిన బిందువుల వద్ద విశ్లేషణ లక్షణము గలది.

రాశులు ε, δ లను ఇచ్చిన ఎడల $|z-a|<\delta$ అయినప్పుడు

$$|f(z)-f(a)-(z-a)f'(a)| \le \varepsilon\, |z-a|$$

బిందువు a కేంద్రముతో, వ్యాసార్ధము $r<\delta$ గ ఒక వృత్తము S ను, పరివృతి C లో ఇమిడియుండునట్లు గీయుము.

S, C ల మధ్య ప్రదేశములో $f(z)/(z-a)$ విశ్లేషణ లక్షణము కలది కాబట్టి

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_S \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

ఇచట $\int_C$, $\int_S$ రెండును C, S వక్రముల వెంబడి అపసవ్యముగా తీసికొనిన చయనములను గుర్తించును.

S పై $|z-a| < \delta$ అయినందున

$$\int_S \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_S \frac{f(a)+(z-a)f'(a)+v(z-a)}{z-a}\, dz$$

ఇచట $v<\varepsilon$. కాబట్టి

$$\int_S \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)\int_S \frac{dz}{z-a} + f'(a)\int_S dz + \int_S v\, dz$$

$z-a=re^{i\theta}$ అని ప్రతిక్షేపించిన, మన చయనీకరణము వృత్తపరిధి S వెంబడి చేయుటవలన r ఒక స్థిరరాశి, θ ఒక చలరాశి: $dz = i\,re^{i\theta}\, d\theta$. కాబట్టి

$$\int_s \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,re^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$$\int_s dz = 0;\quad \int_s v\,dz < \varepsilon\, 2\pi r$$ కాబట్టి

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$ అని తెలియుచున్నది.

అవశిష్టతలు (రెసిడ్యూస్): బిందువు $z=a$ వద్ద $f(z)$ ఫలమునకు m తర ధ్రువము ఉండిన

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \phi(z)$$

అని వ్రాయవచ్చును. $\phi(z)$ ఫలము బిందువు $z=a$ వద్ద విశ్లేషణ లక్షణము కలది.

a_{-1} గుణకమునకు అవశిష్టత అని పేరు. చయనీకరణము యొక్క మార్గము ఒక వృత్తము C వెంబడి తీసికొనుము. వృత్తకేంద్రము బిందువు a. వృత్తములోపల $\phi(z)$ విశ్లేషణ ఫలముగా నుండునట్లు వృత్తవ్యాసార్ధము P తీసికొనుము.

$$\int_s \phi(z)\, dz = 0;\quad \int_s \frac{a_{-1}}{z-a}\, dz = 2\pi i a_{-1}.$$

తక్కిన పదముల చయనీకరణము శూన్యము. కాబట్టి

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}$$

పరివృతి లోపల ఇతర ధ్రువములు $a, b, c, \ldots\ldots\ldots$లు ఉండిన వానివద్ద అవశిష్టములు a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} అయిన

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \Sigma a_{-1}.$$

కఠినములగు చయనములను సాధించుటకు అవశిష్టతా విధానము అనగా పరివృతి చయనీకరణము చాల ఉపయోగకరము. ఒక ఉదాహరణము తీసికొందము:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8}\pi$$ అని చూపుము.

ఇచ్చట $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$ సమతల పై భాగములో $z=i$ వద్ద ఒక ధ్రువము కలదు. అవశిష్టత $= -\frac{3i}{16}$

కాబట్టి మూలబిందువు కేంద్రముగా తీసికొని అర్ధవృత్తము X — అక్షముపై వ్యాసార్ధము ρ తో గీయుము. వృత్తపరిధి X — అక్షము వెంబడి

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i. \left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

X అక్షము వెంబడి $\int f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$

పరిధి వెంబడి చయనమునకు $z=re^{i\theta}$ అని ప్రతిక్షేపించిన, $r \longrightarrow \infty$ అయినపుడు చయనము యొక్క విలువ శూన్యము అని చూపవచ్చును. కాబట్టి

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

సంపూర్ణఫలములు: $z=\infty$ కాక అద్వితీయ బిందువులు లేనట్టివియు, విశ్లేషణ లక్షణములు గలిగినట్టివియు అగు ఫలములకు సంపూర్ణ ఫలములు అని పేరు. ఉదా:

ax^2+bx+c, $\sin x$, e^x మొదలగునవి సంపూర్ణ ఫలములు. $\tan x$, $\log x$ సంపూర్ణఫలములు కావు.

$\tan \frac{\pi}{2} = \infty$; $\log 0 = -\infty$. ఆచార్య

విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతము : కెప్లర్ నిర్వచించిన మూడు గ్రహగతి సూత్రములు ఒకదానినుండి మరియొకటి సాధించుటకు వీలులేనివి. అంతేకాక ఆ మూడు సూత్రముల కేదైన పరస్పర సంబంధమున్నట్లు గూడ నాడు తెలియలేదు. అందుచే న్యూటన్ తాను నిర్వచించిన మూడు చలన సూత్రముల నాధారముగా చేసికొని కెప్లర్ సూత్రములను వివరించుటకు ప్రయత్నము చేసెను; ఆ వివరణను సాధించుటలో విశ్వ గురుత్వసూత్రము అను నొక ముఖ్య సూత్రమును ప్రతిపాదించెను. విశ్వములోని ప్రతి అణువుయొక్క చలనము ఈ సూత్రముపై ఆధారపడి యుండుటచే దానిని గురించి వివరముగా తెలిసికొనుట ముఖ్యమని వేరుగా చెప్పనక్కరలేదు.

విశ్వగురుత్వ సూత్రము : విశ్వములోని ప్రతి అణువు ప్రతి ఇతర అణువును ఆకర్షించుచున్నది. ఆ ఆకర్షణశక్తి ఆ రెండు అణువుల ద్రవ్యరాశుల లబ్ధమునకు సమ సంబంధమును, ఆ రెండు అణువుల మధ్యదూరము యొక్క వర్గమునకు విలోమ సంబంధమును కలిగియుండుననియు, ఆ శక్తియొక్క దిశ ఆ రెండు అణువులను కలుపు ఋజురేఖ అనియు విశ్వగురుత్వ సూత్రము నిర్వచించుచున్నది. దీనిని వివరముగా ఈ క్రింది విధముగా చెప్పవచ్చును.

A, B లు క్రమముగా m_1, m_2 లు ద్రవ్యరాశులుగా గల రెండు అణువు లనుకొందము. ఆ రెండింటి మధ్య నుండు ఆకర్షణ శక్తియొక్క విలువ F అనుకొందము. న్యూటన్ 3వ గతి సూత్రము ప్రకారము B పైని A యొక్క ఆకర్షణశక్తి A పైని B యొక్క ఆకర్షణ శక్తికి విలువలో సమానముగా నుండును. కాని, A పైని B యొక్క ఆకర్షణశక్తి AB దిశగాను, B పైని A యొక్క ఆకర్షణశక్తి BA దిశగాను ప్రవర్తించుచుండును. విశ్వగురుత్వ సూత్రము ప్రకారము

$$F \propto m_1 m_2 \; ; \; F \propto \frac{1}{d^2}$$

అయిన $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$ అని వ్రాయవచ్చును.

G ఒక స్థిరరాశి. దీనికి m_1, m_2 లతో గాని d తో గాని ఏ విధమైన సంబంధము లేదు. దీనిని గురుత్వ స్థిరాంకము అని యందురు. దీనిని, రెండు యూనిట్ ద్రవ్యరాశులు యూనిట్ దూరములో ఉన్న ఎడల వాని మధ్యనుండు ఆకర్షణ శక్తియొక యూనిట్ అని చెప్పవచ్చును. ఏలన, పై సూత్రములో $m_1=1$, $m_2=1$, $d=1$ అని ప్రతిక్షేపించిన $F=G$ అని తెలియుచున్నది. గురుత్వ స్థిరాంకము యొక్క విలువ ప్రదేశములబట్టిగాని, ఆకర్షించబడు ద్రవ్యముల భౌతిక లక్షణములబట్టిగాని, పరిసర ప్రాంతముల పరిస్థితులనుబట్టిగాని మారదని తలచుచున్నారు.

ద్రవ్యములను గ్రాములలో కొలచి, దూరమును సెంటీమీటరులలో కొలచినఎడల G విలువ 6.673×10^{-8} అని తెలియుచున్నది. దీనిని కనుగొను పద్ధతి తరువాత వివరింపబడును.

విశ్వగురుత్వ సూత్రమును ఉపయోగించి వివిధ వస్తువుల ఆకర్షణశక్తి పరిమాణమును కనుగొనవచ్చును. ఒక గోళముయొక్క ఆకర్షణశక్తి ఆ గోళమునకు వెలుపల ఉన్న ఒక బిందువువద్ద ఆ గోళ ద్రవ్యమునకు సమాన ద్రవ్యము గల అణువు నొకదానిని ఆ గోళ కేంద్రమువద్ద ఉంచిన ఎడల ఆ బిందువువద్ద అణువుయొక్క ఆకర్షణ శక్తికి సమానమని నిరూపించియున్నారు. అనగా O కేంద్రముగా M ద్రవ్యముగ గల ఒక గోళమున్నదనుకొందము. P అను ఒక బిందువు గోళమునకు వెలుపల ఉన్నదనుకొందము. OP దూరము గోళ వ్యాసార్ధముకంటె ఎక్కువ. ఈ గోళముయొక్క ఆకర్షణశక్తి P వద్ద గల యూనిట్ ద్రవ్యరాశిపై $\frac{GM}{d^2}$ అని నిరూపించియున్నారు. అందుచే గోళాకారమున ఉన్న ఏ వస్తువైనను, దానికి సమాన ద్రవ్యరాశిగల అణువును గోళ కేంద్రమువద్ద నుంచి ఆకర్షణశక్తిని కనుగొనవచ్చును.

ముఖ్యముగా నభోమూర్తులన్నియు స్థూలముగా గోళాకారముగా ఉన్నవని తెలియుటచే అవి యన్నియు బిందువులుగా భావించి వాటియొక్క ఆకర్షణశక్తి కనుగొనవీలగును.

సూర్యుడు - గ్రహములు, వాటి ద్రవ్యరాశుల తారతమ్య గణనము : 'గ్రహములయొక్క ఆవర్తన కాలముల వర్గములు వాటి మాధ్యమిక దూరముల ఘనములకు అనుపాతములో ఉండును' అని కెప్లర్ మూడవ సూత్రము నిర్వచించుచున్నది. ఈ సూత్రమును న్యూటన్ గురుత్వ సూత్రము ప్రకారము కొద్ది మార్పు చేసినచో సరియైన సూత్రము వచ్చును. ఆ సూత్రమునకు ఇది స్థూలముగా సరిపోవును. కాగా, న్యూటన్ సవరించగా వచ్చిన కెప్లర్ మూడవ సూత్రమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును. రెండు గ్రహముల ద్రవ్యరాశులు m_1, m_2; వాని మార్గముల మాధ్యమిక దూరములు a_1, a_2; వాటి ఆవర్తన కాలములు T_1, T_2 అని క్రమముగా తలచినచో, సూర్యుని ద్రవ్యరాశి M అయిన ఎడల

$$\frac{(M+m_1)\,T_1^2}{(M+m_2)\,T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

ఇందు రెండవ గ్రహమును భూమిగా తీసికొని, (m_2+M)ను ద్రవ్యరాశికి యూనిట్‌గా తీసికొని, T_2 ఒక నాక్షత్ర సంవత్సరముగా గ్రహించి a_2 ను భూమి యొక్క మాధ్యమిక దూరముగా తలచినచో, పై సూత్రమును $(m_1+M) = \frac{a_2^3}{T_1^2}$ అని వ్రాయవచ్చును.

a_2 = భూమి యొక్క మాధ్యమిక దూరము = 149508000 కి. మీ. (92,900,000 మైళ్లు). దీనిని ఖగోళ దూర యూనిట్ అందురు. పై సూత్రము వలన a విలువ ఖగోళ యూనిట్‌లలోను, T_1 విలువ నాక్షత్ర సంవత్సరములలోను, (m_1+M) విలువ (m_2+M) యొక్క విలువలోని భాగముగాను తెలియును. ఈ సూత్రమును అనుసరించి గ్రహముల ద్రవ్యరాశుల తారతమ్యములు గణించవచ్చును.

ఉపగ్రహములు గల గ్రహముల ద్రవ్యరాశుల కనుగొను పద్ధతి : ఉపగ్రహములు గల ఒక గ్రహము యొక్క ద్రవ్యరాశి, మాధ్యమిక దూరము, ఆవర్తనకాలములు క్రమముగా m, a, T లనుకొందము. ఆ గ్రహమునకు గల ఒక ఉపగ్రహము యొక్క ద్రవ్యరాశి, దాని మాధ్యమిక దూరము (గ్రహమునుండి), దాని ఆవర్తన కాలములు క్రమముగా m_1, a_1, T_1 అనుకొందము. M సూర్యుని ద్రవ్యరాశి అనుకొందము. గ్రహము, ఉపగ్రహములకు గల సంబంధము సూర్యునకు, గ్రహములకు అనువర్తించుటచే కెప్లర్ **మూడవ** సూత్రము ఇచ్చటగూడ వర్తించును. సవరించబడిన కెప్లర్ మూడవ సూత్రము ప్రకారము

$$\frac{4\pi a_1^3}{T_1^2} = G(m_1+m) \qquad \cdots (1)$$

$$\frac{4\pi a^3}{T^2} = G(m+M) \qquad \cdots (2)$$

G = గురుత్వస్థిరాంకము. పై (1), (2) సమీకరణములనుండి

$$\frac{m+m_1}{m+M} = \left(\frac{a_1^3}{T_1^2}\right) \bigg/ \left(\frac{a^3}{T^2}\right)$$

$$\therefore \frac{m}{m+M} + \frac{m_1}{m+M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

అని గ్రహించవచ్చును.

m, M లతో పోల్చినపుడు m_1 చాలా చిన్నగుదటచే $\frac{m_1}{m+M}$ చాల స్వల్పముగా నుండును. అందుచే పై సమీకరణమును స్థూలముగా $\frac{m}{m+M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T}\right)^2$ అని వ్రాయవచ్చును. లేదా

$$1 + \frac{M}{m} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \times \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 \text{ అని వ్రాయవచ్చును.}$$

$\frac{M}{m}$ నిష్పత్తి పెద్దదగుటచే $1+\frac{M}{m}$ కు బదులుగా $\frac{M}{m}$ వ్రాయవచ్చును.

$$\text{కాబట్టి } \frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \text{ అన వచ్చును.}$$

కాబట్టి $\frac{m}{M}$ విలువ తెలిసికొన వచ్చును.

ఈ క్రింద నీయబడిన పట్టికలో సూర్యగ్రహకూటమిలోని గ్రహముల ద్రవ్యరాశులు, మాధ్యమిక దూరములు, ఆవర్తన కాలములు ఈయబడి యున్నవి :

వరుస నెంబరు	గ్రహము పేరు	మాధ్యమిక దూరము	ఆవర్తనకాలము	ద్రవ్యరాశి	సాంద్రత భూసాంద్రతలో	గురుత్వ త్వరణము (భూమితో)
1	బుధుడు	0.387	87.97 దినములు	0.04	0.69	0.27
2	శుక్రుడు	0.723	224.7 దినములు	0.82	0.89	0.86
3	భూమి	1.000	365.26 దినములు	1.00	1.00	1.00
4	కుజుడు	1.524	687.00 దినములు	0.11	0.70	0.37
5	బృహస్పతి	5 203	11.86 సంవత్సరములు	318.3	0.24	2 64
6	శని	9.539	29.46 సంవత్సరములు	95.3	0.13	1.17
7	యురేనస్	19 19	84.02 సంవత్సరములు	14.7	0.23	0.92
8	నెప్ట్యూన్	30.07	164.8 సంవత్సరములు	17.3	0.29	1.44
9	ప్లూటో	39.46	247.7 సంవత్సరములు	1.0	?	?

పై పట్టికలోని ప్రశ్నార్థకముల వివరములు పూర్తిగా తెలియవు అని గ్రహించవలయును.

	ఆవర్తన కాలము	ద్రవ్యరాశి	సాంద్రత	గురుత్వ త్వరణము
సూర్యుడు	...	333·420	1·41	27·9
చంద్రుడు	27·32 ది.	0·012	0·61	0·165

భూమియొక్క ద్రవ్యరాశి, సాంద్రతల నిర్ణయించుట : భూమి స్థూలముగా గోళాకారమున ఉన్నదని తలచుదము. ఆ గోళము యొక్క వ్యాసార్థము R అనుకొందము. ρ భూమి యొక్క సగటు సాంద్రత అనుకొందము. భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి M అనుకొనినచో గోళము యొక్క ఘన పరిమాణము $\frac{4}{3}\pi R^3$ కావున $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

భూమి యొక్క తలముపై ఉన్న ఒక ప్రదేశమువద్ద గురుత్వ త్వరణము g అయినచో, న్యూటన్ విశ్వ గురుత్వ సిద్ధాంతము ప్రకారము $g = G\frac{M}{R^2}$;

(g = ఒక యూనిట్ ద్రవ్యరాశిపై భూమి ఆకర్షణ శక్తి)

$$\therefore g = G\,\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = G\,\frac{4}{3}\pi \rho R;$$

$$\therefore \rho = \frac{3g}{4\pi RG}$$

కాబట్టి G విలువ తెలిసినచో ρ ని నిర్ధారణచేయవచ్చును. కావున G విలువ కనుగొనుట చాల ముఖ్యము. దానిని కనుగొనుటకు మొట్టమొదట ప్రయోగము జరిపినవాడు హెన్రీ కావెండిష్ (1793). ఈ ప్రయోగమువలన రెండు గోళముల మధ్య నుండు ఆకర్షణశక్తి విలువను కనుగొన గలము.

సరియైన ప్రయోగమువలన G యొక్క విలువ $6.6/3 \times 10^{-8}$ సి. జి. ఎస్. యూనిట్‌లు అని శాస్త్రజ్ఞులు నిర్ణయించియున్నారు. పై విలువను ఉపయోగించి భూమి యొక్క సాంద్రత ఘ. సెం. మీ. కు 5·4934 గ్రాములని నిర్ణయించిరి. భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి 5.98×10^{27} గ్రాములు, (6.6×10^{21} టన్నులు) అని నిర్ణయించి ఉన్నారు.

ప్రస్తుతకాలమున గురుత్వ తులా యంత్రము G విలువను సరిగా నిర్ణయించుటకు ఉపకరించుచున్నది. దీనివలన ఏ ప్రదేశమునందైనను g విలువ సరిగా నిర్ణయించ వచ్చును. తద్వారా G విలువ కనుగొనవచ్చును.

సూర్యుడు - గ్రహముల పైతలముల సాంద్రత - గురుత్వ త్వరణముల నిర్ణయించుట : స్థూలముగా సూర్యుడు, గ్రహములు అన్నియు గోళాకారమున ఉన్నవని తలచవచ్చును. వాటియొక్క వ్యాసములను అతివర్తనముల వలన నిర్ణయించుటకు వీలగును. ఉపగ్రహములున్న గ్రహముల ద్రవ్యరాశులను, భూమియొక్క ద్రవ్యరాశిని యూనిట్‌గా తీసికొని తెలియ చెప్పవచ్చును. ఒక గ్రహముయొక్క వ్యాసార్థము r, ద్రవ్యరాశి m, ρ సాంద్రత అయినచో $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. కావున ρ ని నిర్ణయించవచ్చును.

అదియునుగాక g అచ్చటి గురుత్వ త్వరణమైనచో $g = \frac{Gm}{r^2}$; G తెలియుటచే అచ్చటి g గూడ కనుగొన వచ్చును. గ్రహములపై వీటి విలువలు పు. 530 లో ఈయ బడిన పట్టికలో చూడవచ్చును.

చంద్రపథము యొక్క నతోదరత్వము : చంద్రుడు భూమికి ఉపగ్రహమనియు, మాసమునకొక పర్యాయము భూమిచుట్టు తిరుగుచుండుననియు మనకు తెలియును. భూమి సూర్యుని చుట్టు సంవత్సరమునకొక పర్యాయము సూర్యుడు నాభిగాగల యొక విలోపమున తిరుగుచుండు ననియు తెలియును. భూ, చంద్రుల గురుత్వ కేంద్రము

E ——— G ——— M
భూ గు. కే. చం

G అనుకొనినచో అది భూమికి దగ్గరగా ఉండును.

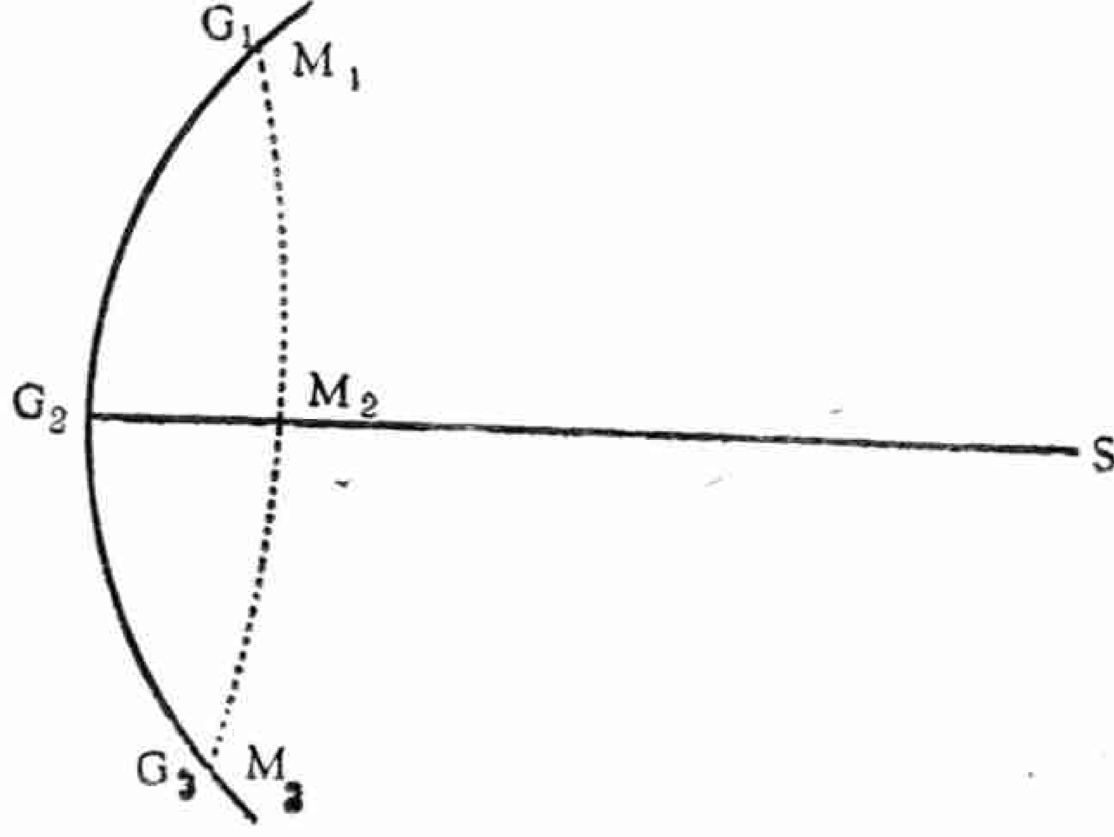
సూర్యుని చుట్టు భూమి, దానితోపాటు చంద్రుడు తిరుగుచుండుటచే భూమి యొక్క మార్గము భూ, చంద్రుల గురుత్వకేంద్రమార్గముగా తలచవచ్చును. భూమి సూర్యుని చుట్టు తిరుగుచున్నపుడు చంద్రుడు భూమి చుట్టు తిరుగు చుండుటచే సూర్యుని చుట్టు చంద్రుని మార్గ మెట్లుండునో ఆలోచించవచ్చును.

ఈ చంద్ర మార్గము పైన చెప్పబడిన విలోపమునకు కొంతకాలము వెలుపలగను, కొంతకాలము లోపలగ నుండి యొక విధమైన తరంగరేఖగా నుండును. ఈ రేఖ సూర్యునికి ఎల్లప్పుడు నతోదరముగా నుండునని ఈ క్రింద సూచించిన విధముగా తెలియగలదు.

చంద్రుడు భూమిచుట్టు తిరుగు కోణీయ వేగము n, భూమి సూర్యుని చుట్టు తిరుగు కోణీయ వేగము n' అను కొందము.

G_1, G_2, G_3 భూ, చంద్రుల గురుత్వకేంద్ర మార్గ మనుకొందము. అమావాస్య దినమున (M_2 స్థానమున) G_2 కు సాపేక్షముగా చంద్రుని (G_2 దిశగా) త్వరణము విలువ $n^2 M_2G_2$. కాని G_2 కు S దిశగా $n'^2 G_2S$ త్వరణము

కలిగియున్నది. కావున సూర్యుని దిశగా చంద్రునియొక్క త్వరణము $n'^2 G_2S - n^2 M_2 S$ (చూ. చిత్రము 373).



చిత్రము 373

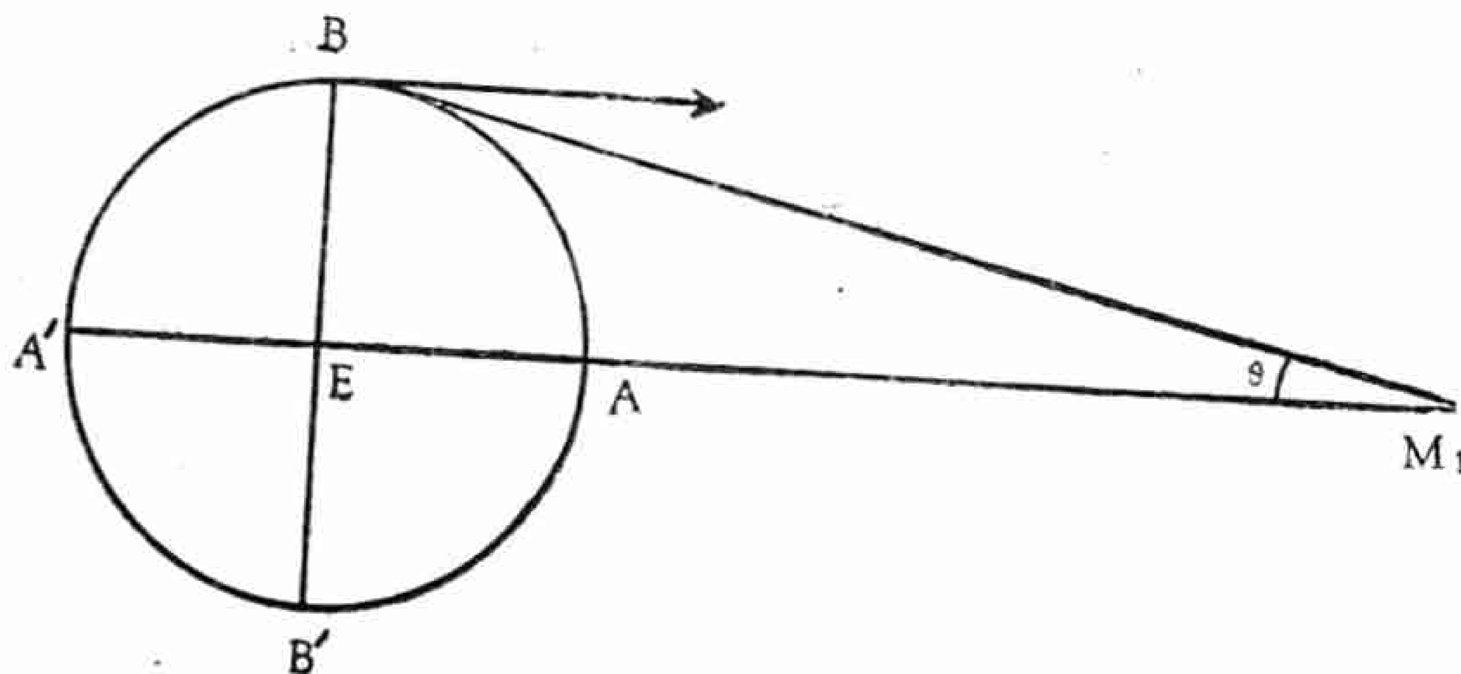
సుమారు 13.5 నాక్షత్రమానములు ఒక సంవత్సరమగుటచే $n = 13.5\ n'$ అని గ్రహించవచ్చును. అదియు గాక $\frac{E_2 S}{E_2 M_2} = 400$ (సుమారు) అని తెలియును. కావున $\frac{G_2 S}{G_2 M_2} = 400$ (సుమారు) అని తీసికొనినచో

$$\frac{n'^2\ G_2\ S}{n^2\ M_2\ G_2} = \left(\frac{2}{27}\right)^2 400 = \frac{1600}{729}\ (\text{స్థూలముగా})$$

అనగా $n'^2 G_2 S - n^2 M_2 G_2 > 0$

అనగా చంద్రునిపై సూర్యుని త్వరణము సూర్యుని దిశగానే యుండునని తెలియుచున్నది. అమావాస్య దినముననే M_2 పై G_2 యొక్క త్వరణము G_2 దిశగా అధికతమము. ఆ రోజుననే సంయోగ త్వరణము సూర్యుని దిశగా నుండుటచే మిగిలిన దినములలో సూర్యుని దిశగా నుండుననుట నిర్వివాదము. కావున చంద్రుడెల్లప్పుడు సూర్యుని దిశగా నుండుటచే చంద్రపథ మెల్లప్పుడు సూర్యునికి నతోదరమని తెలియుచున్నది.

సూర్య, చంద్రుల సంక్షోభకశక్తి పరిమాణము : చిత్రము 374 లో E భూమి ; M_1 చంద్రుడు, AA', BB' భూవ్యాసములు అనుకొందము. భూమియొక్క ద్రవ్యరాశి M,



చిత్రము 374

చంద్రునియొక్క ద్రవ్యరాశి m అనుకొందము. భూమిపై చంద్రునియొక్క ఆకర్షణశక్తి పరిమాణము గురుత్వ సిద్ధాంత ప్రకారము GMm/EM^2 అని మనకు తెలియును. కావున భూమియొక్క త్వరణము GM/EM^2. ఇది E నుండి E, M ల గురుత్వ కేంద్ర దిశగా నుండును. కాని A వద్ద M యొక్క ఆకర్షణశక్తి GM/AM^2. ఈ విలువ E వద్ద ఉన్న ఆకర్షణశక్తి విలువకంటె ఎక్కువ (AM, EM కంటె తక్కువ కాబట్టి). కాగా చంద్రునివద్ద ఉన్న ద్రవ్యరాశులను E కి సాపేక్షముగా

$$F = Gm\left\{\frac{1}{AM^2} - \frac{1}{EM^2}\right\} = Gm\frac{2\,EA}{EM^3}\ (\text{స్థూలముగా})$$

పరిమాణము గల శక్తితో భూమినుండి దూరము చేయుచుండును.

ఇట్లే A' వద్ద ఉన్న ద్రవ్యరాశులపైని చంద్రుని గురుత్వాకర్షణశక్తి E వద్ద ఉన్న శక్తికంటె తక్కువగుటచే అచ్చటి ద్రవ్యరాశులు E కి సాపేక్షముగా $F = Gm.\ \frac{2\,EA'}{EM^3}$. పరిమాణము గల శక్తితో భూమినుండి వేరు చేయబడుచున్నవి.

ఇప్పుడు AA' కు లంబముగా ఉన్న వ్యాసముపై ఉన్న B, B' ల వద్ద గల ద్రవ్యరాశులపై చంద్రుని ఆకర్షణశక్తి ప్రభావము గమనింతము. B వద్ద చంద్రుని ఆకర్షణశక్తి పరిమాణము $= GM/BM^2$.

ఇది BM దిశగా ఉండును. ఈ శక్తియొక్క ఘటకములు (i) BE దిశగా $\frac{Gm}{BM^2}\sin\theta$, (ii) EMకు సామ్యముగా $\frac{Gm}{BM^2}\cos\theta$ అని మనకు తెలియును. 'θ' సూక్ష్మమగుటచే, $\cos\theta = 1$ అని స్థూలముగా తలచినచో (ii) వ ఘటకము యొక్క పరిమాణము $\frac{Gm}{BM^2} = \frac{Gm}{EM^2}$ (స్థూలముగా) అని తలచవచ్చును. అనగా దీని పరిమాణము E వద్ద ఆకర్షణ శక్తి పరిమాణమునకు సమానమని తెలియుచున్నది. అందుచే ఈ ఘటకము భూమికి సాపేక్షముగా త్వరణమును కలుగచేయదు. కాగా చంద్రుడు B వద్ద నుండు ద్రవ్యరాశులను భూకేంద్ర దిశగా, (i) వ ఘటకముయొక్క పరిమాణమునకు సమానమగు సాపేక్ష త్వరణముతో కదల్చునట్లు చేయును. ఈ త్వరణము విలువ $f = Gm\frac{BE}{BM^3}$.

ఇట్లే B' వద్ద ద్రవ్యరాశులు కూడ E వైపుకు లాగబడుచుండును.

ఇట్లే చంద్రుని ఆకర్షణ శక్తివలన భూమిపై ఉన్న ఏ ఇతర బిందువు 'O' వద్ద ఉన్న ద్రవ్యరాశులనైనను, భూమికి సాపేక్షముగా త్వరణముండునట్లు చేయును. ఈ త్వరణ జనకశక్తి ఆ బిందువువద్ద గురుత్వాకర్షణశక్తి, భూకేంద్రమువద్ద నుండు ఆకర్షణశక్తి, వీటి భేదముపై ఆధారపడియుండును. ఈ శక్తిని చంద్రుని యొక్క సంక్షోభకశక్తి అందురు.

ఇక్కడ ఒక విషయమును మనసునందుంచుకొనవలెను. ఈ పై సమాలోచన ధోరణిలో గణనలోనికి తీసికొని రాబడినవి త్వరణములు కాని, బలములు కావు. భూమిపై సూర్యుడు ప్రవర్తింపజేయు ఆకర్షణశక్తి చంద్రునిపై ప్రవర్తింపజేయు దానికన్న 80 ఇంత లెక్కువ. ఏలన భూ, చంద్రుల ద్రవ్యరాశులు 80 : 1 నిష్పత్తిలో నుండును. ఖగోళ యాంత్రిక శాస్త్రములో 'త్వరణము' వంతు 'బలము' వాడుట పరిపాటి.

ఇదేవిధముగా సూర్యునియొక్క సంక్షోభక శక్తిని కనుగొనవచ్చును. ఈ శక్తులే సముద్రమునందు స్రోతస్సులు కలుగుటకు కారణము (చూ. స్రోతస్సులు). పి. సూ. నా.

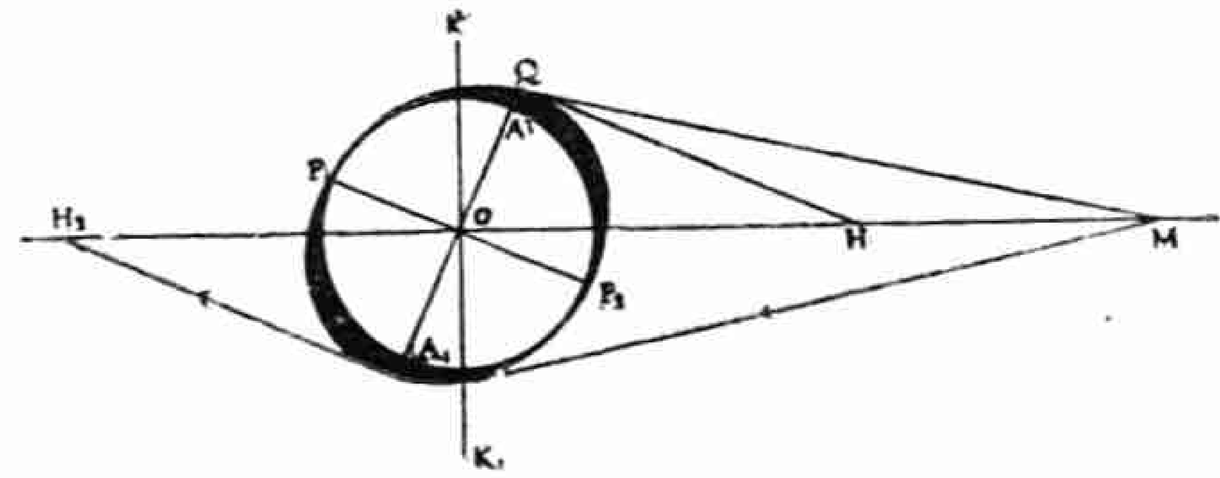
విషుచలనము : ఇది యొక అద్భుత సంఘటన ; మన ఋషులు దీనినే అగస్త్యచారము అనియు, సప్తర్షి చారము అనియు వాడి ఉన్నారు.

ఈ విషుచలనమునకు కారణములను కనుగొందము. నభోమూర్తులు పరస్పరాకర్షణ శక్తిచే తమ తమ నిర్ణీత కక్షలందు తిరుగుచున్నవని అందరికి విశదమయిన విషయమే. భూమి తన్నుతాను చుట్టి తిరుగుటచే, దబ్బపండువలె నిరక్ష ప్రదేశములందు ఉబ్బియు, ధ్రువ ప్రదేశము లందు లోనికి దిగబడియు ఉన్నది.

భూమి యొక్క కక్ష రవి నిరక్షతలమునకు $23\frac{1}{2}^\circ$ వాలి ఉండుటచేతను, చంద్రకక్ష భూకక్షకు 5° వాలి ఉండుటచేతను పరస్పరాకర్షణ శక్తివలన విషుచలనము కలుగుచున్నది. రెండుమూర్తుల మధ్య నుండు ఆకర్షణ బలమునకు న్యూటన్ క్రింది సూత్రము ఇచ్చియున్నాడు :

$$\text{ఆకర్షణ బలము} = K. \frac{M_1 M_2}{r^2}.$$

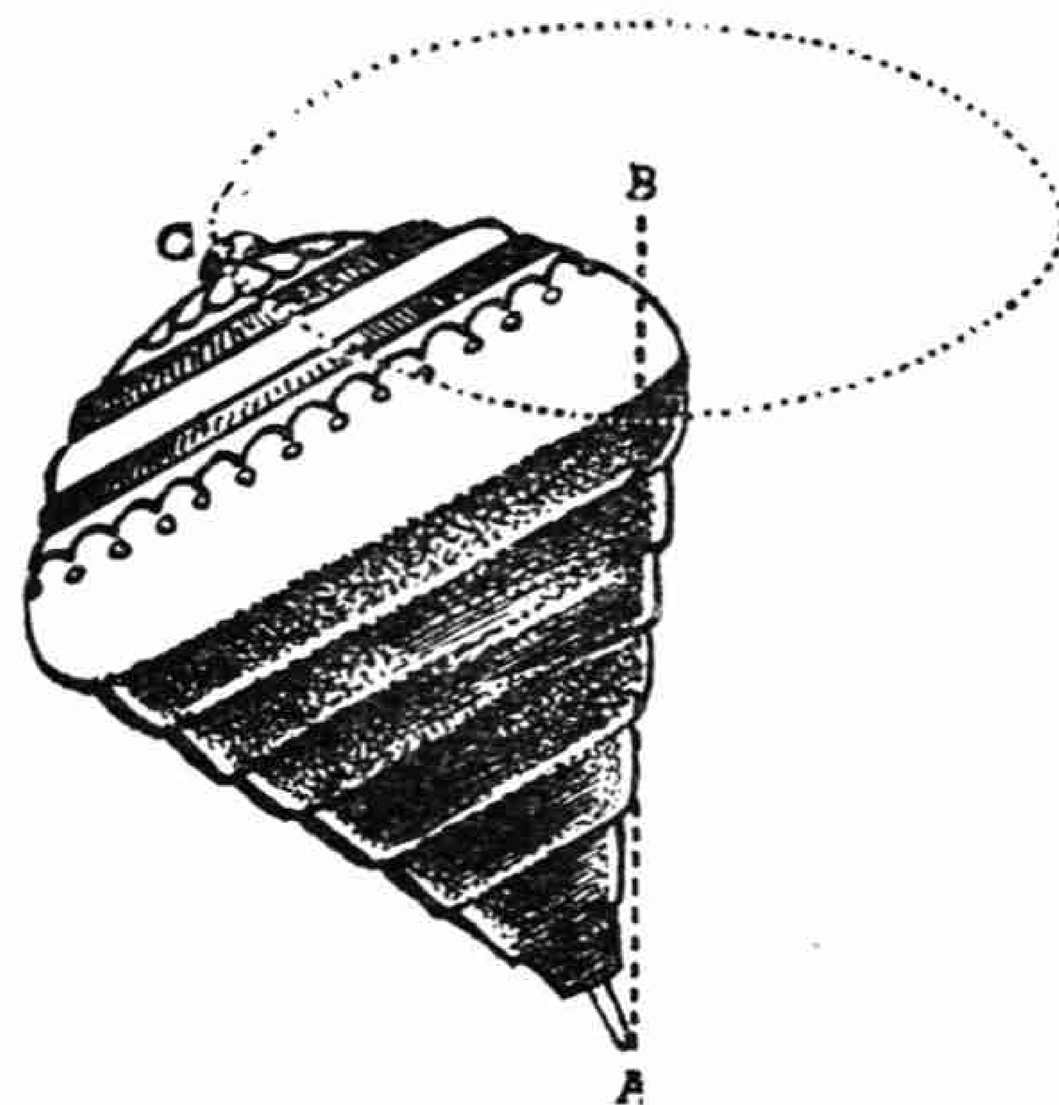
ఇందు M_1, M_2 మూర్తుల ద్రవ్యరాశులు; r = ఆ మూర్తుల మధ్యదూరము ; K ఒక స్థిరాంకము. ఈ ఆకర్షణ శక్తి రెండు మూర్తుల ప్రతిభాగమునకు పరస్పరము ప్రవర్తించు చుండును. చిత్రము 375 లో M చంద్రుడు, C భూమి, P, P′ భూధ్రువములు. అచ్చట భూమి లోపలికి దిగి నిరక్ష భాగము QR వద్ద ఉబికి యుండును. ఉబ్బిన భాగములు గాఢమైన నలుపు రంగు గలవి. భూమిలో PAP′A′ భాగము (గోళరూపము) తెల్లగ చూపబడినది.



చిత్రము 375

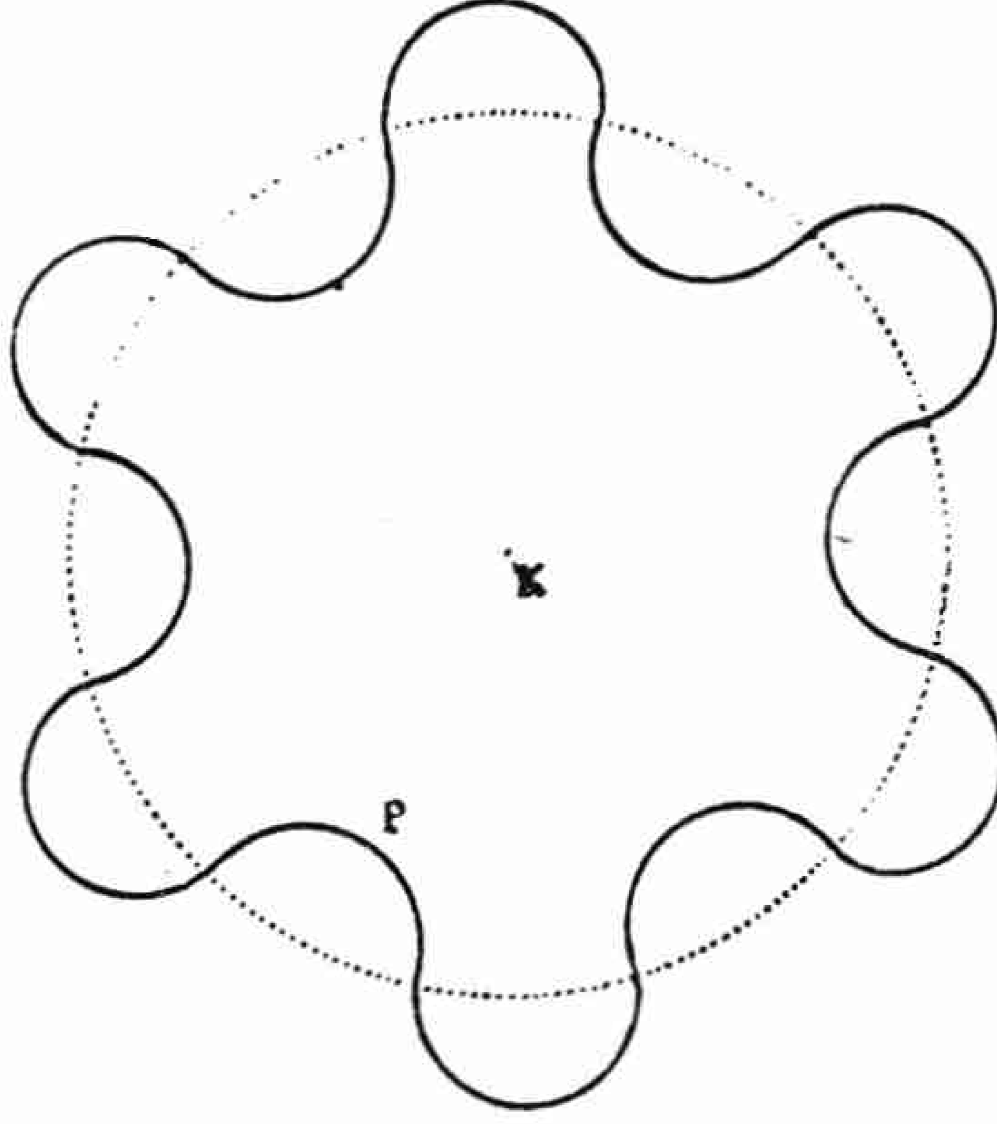
గోళాకారముగా ఉండు తెల్లని భూభాగమును ఆకర్షించు చంద్రబలములు అన్నియు ఏకీభవించి భూకేంద్ర గత మగును. నలుపు భాగముల ఆకర్షించు చంద్ర బలములు ఒక యుగ్మముగా మారును. రవి మండలాకర్షణచే కూడ ఒక యుగ్మము ఏర్పడును. ఈ రెండును చేరి విషువృత్తమును క్రాంతి వృత్తమువైపు లాగును. అనగా ధ్రువాక్షము PP′ క్రాంతి వృత్తమునకు లంబముగా లాగబడును. కాని భూమి PP′ చుట్టు పరిభ్రమణము చేయుటచే P కదంబ బిందువు K చుట్టు తిరుగును. వసంత విషువు (♈) క్రాంతివృత్తముపై పశ్చిమగతితో జరుగు చున్నది. ఈ సంఘటనకు విషుచలనమని పేరు.

పిల్లలు బొంగరము ఆడుటను మనము చూచు చున్నాము. దాని అక్షము AC నిలువుగా ఉండక AB లంబమున (నిలువురేఖ) కు చిత్రము 376 లో ఉండునట్లు ఏటవాలుగా నుండును. భూమ్యాకర్షణముచే బొంగరము క్రింద పడునట్లు లాగబడును. కాని వేగముగా పరిభ్రమణము చేయుట వలన అది క్రిందికి పడక, నిలువు రేఖ AB చుట్టు తిరుగుచుండును. పిల్లలపుడు బొంగరము 'నిద్రపోవు' నట్లు చెప్పుదురు. AC అనగా బొంగరపు అక్షము పరిభ్రమణము వలన AB ని అక్షముగా గల ఒక శంకువును రచించును. భూమి తిరుగునపుడుకూడ ఇదే జరుగును.



చిత్రము 376

అక్షవిచలనము: చిత్రము 377లో K కదంబము; P ఉత్తర ధ్రువము. విషు చలనము ఏర్పరచు యుగ్మము సమాన బలముతో లేనందున P వృత్త రూపమున పోవుటకు బదులు చిత్రములో చూపిన తరంగ రేఖా రూపమున K ను చుట్టి తిరుగును. దీనికి అక్ష విచలనము అని పేరు. ఆవర్తన కాలము (18.6) సంవత్సరములు.



చిత్రము 377

విషుగతి విలువ: ధ్రువమువద్ద అక్షవిచలన సంఘటన వలన విషువృత్తము క్రాంతివృత్తముపై మెల్లగా ముందు వెనుకకు ఊగుచు వెనుకకు జరుగును. ఇది సూర్య చంద్రుల ఆకర్షణ బలములవలన జరుగును. సంవత్సరమునకు సూర్యుని వలన కలుగు విషుగతి 16″.0; చంద్రునివలన ఏర్పడు విషుగతి 34″.4; మొత్తము 50″.4.

దీనికి స్థిరమగు విలువ లేదు. విషుగతి = 50″.2564 + 0″.0222 T (ఇందు క్రీ. శ. 1900 తర్వాత సాయన సంవత్సర శతాబ్దమును T గుర్తించును) అను సూత్రము ప్రకారము మారుచుండును. దీనిచే ప్రతి సంవత్సరము యొక్క విషుగతి కనుగొనవచ్చును.

వేదములందు సూచన; పాశ్చాత్యులు మన పూర్వులకు విషుగతిజ్ఞానము లేదను వాదమును ప్రచారమునకు తెచ్చిరి. దానిని మనవారందరు పూర్తిగా విశ్వసించుచున్నారు. కాని కొందరు విద్వాంసులు వేదములలోని కొన్ని మంత్రములనుండి మన పూర్వులకు విషుగతి జ్ఞానము కలదని చూపుచున్నారు. వారిలో కీర్తిశేషులైన కృష్ణమూర్తిగారు ఒకరు. వారి వాదము సమంజసమని తోచుటవలన కొన్ని ఋగ్వేద మంత్రములు క్రింద సేకరింపబడినవి.

మూ ॥ ఇయానః కృష్ణే దశభిః సహస్రైః ఆవత మింద్రః

ఇంద్రుడు 15 × 10 × 1000 సారులు తిరుగుచున్నాడు. ఇచ్చట 'కల్పము' అను పదము అధ్యాహార్యము. అపుడు అర్థము విశదము అగును. ఇంద్రుడు (విషుబిందువు) ఒక కల్పము (4,320,000,000 సం) లో 150,000 సారులు తిరుగును. ఇందువలన ఒక కలియుగమునకు 15 సారులును, ఒక చతుర్యుగములో 150 సారులును విషుబిందువు భ్రమణము చేయునని తెలియుచున్నది.

ఇదియే సూర్యసిద్ధాంతమునందు క్రింది శ్లోకములో మూడవ అధ్యాయములో వివరింపబడియున్నది.

శ్లో ॥ త్రింశత్కృత్యోయుగే భానాం చక్రంప్రాక్పరి లంబతే

30 × 20 = 600 సమకోణములు, లేదా 150 సారులు విషువృత్తము వెనుకకు తిరుగుచుండును.

వేదమునందు వసంతవిషువునకు అగ్ని అనియు, శరద్విషువునకు ఇంద్రుడనియు, కటకాయనమునకు మిత్ర అనియు, మకరాయనమునకు వరుణ అనియు పర్యాయ పదములు కలవు. వేదమునందు క్రాంతి వృత్తము స్థిరమని, విషువృత్తము చలించి, డోలనము చేయుచు వెనుకకు క్రాంతివృత్తము వెంబడి జరుగుచుండునని చెప్పబడినది. సిద్ధాంత గ్రంథములు ఆ వాదమునే అనుసరించి వ్రాయబడినవి. వేదకాలమునందు విషుగతి విలువ 46″ అని తెలియుచున్నది.

విషుగతి = 50″.2564 + 0″.0222 T. అను సూత్రమునుండి క్రీ. శ. 1900 పూర్వము 191 శతాబ్దములకు విషుగతి 46″ ఉండియుండును. అగస్త్యచారమునుండియు ఇంత ప్రాచీనత ఊహింపవలసియున్నది. ఇది సమంజసమాయని ప్రాజ్ఞులు పరిశోధింపవలసిన విషయము.

విషుచలనము - పాశ్చాత్యుల పరిశోధన: కాల్డియన్‌లు ప్రాచీనతమ జ్యోతిష్కులు. వారి వ్రాతలు పాశ్చాత్యుల జ్యోతిష జ్ఞానమునకు మూలాధారము. వానిని క్రోడీకరించి, శాస్త్రముగా మార్చిన వారిలో ముఖ్య పురుషుడు హిపార్కస్. ఇతడు గ్రీస్ దేశస్థుడు; మొదటిసారి ఖగోళమునకు ప్రతిని నిర్మించెను.

బాబిలోనియన్‌లు వసంతవిషుబిందువు మేషము 15°, 10°, 8° లో ఉండినట్లు గుర్తించియుండిరి. దాని రహస్యము కాల్డియన్‌లకు విశదము కాలేదు. హిపార్కస్ దాని రహస్యమును గుర్తించి, విషుబిందువు వెనుకు జరుగునట్లు సిద్ధాంతము చేసెను. క్రీ. పూ. 250 లో జీవించిన అతని పూర్వుడు టమోకేరిస్ గుర్తించిన చిత్తా నక్షత్రము 2° వెనుకకు జరిగినట్లు హిపార్కస్ కనుగొనెను. దీనికి కారణము విషుచలనము; ఇది జ్యోతిషము నందెంత ఆవశ్యకమో కొన్ని శతాబ్దములకు తర్వాత జ్యోతిష్కులు గ్రహించిరి. విషుగతి సంవత్సరమునకు 50″.25 అని నక్షత్రావలోకనమువలన తర్వాత జ్యోతిష్కులు తెలిసికొనిరి. పాశ్చాత్యుల విలువ ప్రకారము విషుబిందువు 26,000 సంవత్సరములలో ఒకసారి పూర్తి భ్రమణము

చేయును. మన పూర్వుల అభిప్రాయము ప్రకారము ఆ భ్రమణ కాలము 23,800 సంవత్సరములు.

విషుబిందువుయొక్క ప్రాక్ (వెనుక) గమనమువలన ప్రతి సావన సంవత్సరములో రవి భ్రమణ మార్గమునందు 50″.25 తగ్గుచుండును. ఒక సావన సంవత్సరములో రవి 360° పోవుటకు బదులు 360′ — 50″.25 = 359° 59′ 9″.75 పోవును. కాబట్టి ఒక సావన సంవత్సర కాలమానము = 365.2422 మధ్యమ సౌరదినములు. ఒక నాక్షత్ర సంవత్సర కాలమానము = 365.2564 మధ్యమ సౌరదినములు. హిపార్కస్ కాలములో మేషము 8° యందుండిన విషుబిందువు మేషము 5° లకు జరిగినట్లు టాలెమీ కనుగొని విషుగతి 36″ అని వ్రాసెను. అతని తర్వాత జ్యోతిష్కులు విషుచలనమును గురించి వ్రాయలేదు. క్రీ. శ. 370 లో నుండిన తియాన్ సిద్ధాంతి విషుబిందువు లేదా విషుబిందువుయొక్క చలనము స్పందనరూపము అను వాదము ప్రచారమునకు తెచ్చెను. అతని కాలమునందు విషుబిందువు హిపార్కస్ అవలోకన స్థలమునుండి 8° వెనుకకు జరిగి యుండెను. విషుచలనమువలన జ్యోతిషములో రాశిలక్షణములు మారుటచే జ్యోతిష్కులకు గొప్ప చిక్కు తటస్థించినది. ఫలభాగమునందేమియు చిక్కు రాకుండుటకై తియాన్ స్పందన వాదమును ప్రచారమునకు తెచ్చెను.

గ్రీకులలో మేటి సిద్ధాంతి ప్రోక్లోస్ (క్రీ. శ. 410 - 485) విషుచలనమేలేదని వాదించెను. తర్వాత గ్రీకులు కాలగతిచే అజ్ఞానాంధకార సముద్రమున ఓలలాడి జ్ఞానశూన్యులైరి. అట్టి విషమస్థితిలో జ్ఞానదీపమును కాలవాతము నుండి కాపాడిన అరబ్బులు చిరస్మరణీయులు.

బాగ్దాద్ నగరములో వసించిన తాబిత్ ఇబిన్ (క్రీ. శ. 826 - 901) టాలెమీ గ్రంథములను అరబ్బీ భాషలో వ్రాసెను. విషుచలనమును గుర్తించి, స్పందన వాదమును నెలకొల్పెను. అతని తర్వాతి జ్యోతిర్గణిత వేత్తలు అల్ ఫార్గాని (861 —), అల్ బట్టాని (858 —), అబ్దుల్ రహిమాన్ (903 - 986), ఇబిల్ యూనస్ (1009) విషుచలనమును గుర్తించి స్పందనవాదమును నిరాకరించిరి. మహమ్మదీయ మతము దక్షిణ యూరపులో వ్యాపించినపుడు దానితో వారి శాస్త్రవిజ్ఞాన మచట నెలకొల్పబడెను. యూరపియన్లు అజ్ఞాన నిద్రామోహము నుండి మెల్లగ లేవనారంభించిరి; విజ్ఞాన సంపత్తి సేకరించునపుడు మహమ్మదీయ విజ్ఞాన భండారమునందుండి దొరికినదంతయు శ్రద్ధతో ఏరుకొనిరి. జోహాన్ వెర్నర్ (1522), కోపర్నికస్ (1543) మొదలగు పండితులు స్పందన వాదము అంగీకరించిరి. టైకో బ్రాహి, కెప్లర్ మొదలగు వారికి అందు సందేహ మంకురించెను. న్యూటన్ తన గతి శాస్త్రరీత్యా విషుచలన కారణము నిరూపించిన తర్వాత (1687) స్పందనవాదము నిరాకరింపబడెను.

ఆర్యుల నిపుణత : ఆర్యుల విషుచలన జ్ఞానము అనాదియైనది. (చూ. అగస్త్యచారము - పు. 128) *నక్షత్రేష్టి యందు 'కృత్తిక' మొదటి నక్షత్రముగాను, 'భరణి' కడపటి నక్షత్రముగాను చెప్పబడియున్నది. వాయుపురాణమునందును, మత్స్యపురాణమందును రవి కృత్తికా నక్షత్రమందుండునపుడును, చంద్రుడు విశాఖయందుండునపుడును విషు పుణ్యకాలము కలుగునని వివరింపబడినది. విశాఖా నక్షత్రము విషువృత్తముచే రెండు భాగములయినందున దానికి విశాఖ (విదళితశాఖ) అని పేరు వచ్చెను. అంతకు పూర్వము దానికి 'రాధ' అని పేరుండెను. మృగశిరకు ఆగ్రహాయనము పర్యాయ నామము కలదని అమరసింహుడు వ్రాసినాడు. ఇందువలన మృగశిరా నక్షత్రము అయనమునకు అగ్రమునందుండినట్లు తోచుచున్నది. అనగా విషుబిందువు మృగశిరయందుండి యుండవలయునని తోచుచున్నది. కాబట్టి కటకాయనము మఘయందును, మకరాయనము ధనిష్ఠయందును, శరద్విషువు జ్యేష్ఠయందును ఉండెను. అపుడు ఈజిప్టుదేశము ఫారోల పరిపాలనము క్రింద మహదైశ్వర్య సంపత్తితో తులతూగుచుండెను. అది భారత కాలము; భీష్ముడు భారత యుద్ధానంతరము మాఘమాస శుక్లాష్టమి యందు స్వచ్ఛందమరణమును పొందెను. అతని సంకల్పము దక్షిణాయనమునందు మరణింపగూడదని ఉండుటచే మాఘమాస సప్తమియందు ఉత్తరాయణ ప్రవేశము వరకు శరతల్పగతుడై అరువది దినములు వేచి ఉండెను. మాఘమాస సప్తమి రథ సప్తమియని ఇపుడు కూడ కొందరిచే ఉత్తరాయణ పుణ్యకాలముగా పరిగణింపబడును. ఆ దినము (సప్తమి) సూర్యుని రథము ఉత్తరము తిరుగుటచే దానికి రథసప్తమి యను పేరు కలిగెను.

ఈ విషయమును భారత కాలపు గర్గఋషి క్రింది శ్లోకములో చెప్పియున్నారు.

శ్లో॥ యదా నివర్తతే ప్రాప్తః శ్రవిష్ఠా ముత్తరాయణే।
ఆశ్లేషాం దక్షిణే ప్రాప్తః తదా వింద్యాన్మహద్భయం॥

బృహత్సంహిత, III - 1 లో వరాహమిహిరుడు,

శ్లో॥ ఆశ్లేషార్ధాత్ దక్షిణం ఉత్తరమయనం రవేర్ధనిష్ఠాద్యం
నూనం కదాచి దాసీత్ యేనోక్తం పూర్వశాస్త్రేషు॥

'పూర్వశాస్త్రము లందు దక్షిణాయనము అశ్లేషార్ధము

* ఒక గ్రంథము.

నుండియు, ఉత్తరాయణము ధనిష్ఠాదియందుండియు ఒకప్పుడు జరిగియుండవలయును అని చెప్పబడియున్నది'.

వరాహమిహిరుడు తన కాలమునందు అయనాంశము నిరంశయై నందున దాని విలువ ఈయలేదు. ఆతని కాలము శకము 427, అనగా క్రీ. పూ. 123. ఆర్యభటుడు మొదలగువారు అయనాంశను పేర్కొనలేదు. దానికి బలమగు కారణములున్నవి. కాని, వాని గూర్చి విమర్శించుట అనవసరము. ముంజులభట్టు లఘుమానసమునందు విషుచలనము గురించి వ్రాసియున్నాడు.

శ్లో॥ తద్భగణాః కల్పేస్యుః గోరసరస గోంక చంద్ర మితః

'ఒక కల్పము నందయన భగణములు 199669' అతని కాలమునందు సూర్య సిద్ధాంతరీత్యా అయనాంశ 6°. భట్టోత్పలుడు వరాహమిహిరుని వ్యాఖ్యాత. అతని కాలమునందు అయనాంశ $6\frac{1}{2}°$. సార్ధషట్కాంశలు. పృధూకస్వామి బ్రహగుప్త సిద్ధాంత వ్యాఖ్యానములో అయన భగణములు 189411 అని వ్రాయుచు, దానికి అయన యుగమని పేరిడెను.

భాస్కరాచార్యుని సిద్ధాంత శిరోమణియందు అయన భగణములు 199669 అని యున్నది. ఆతని కాలమునందు అయనాంశము 11°. అయనాంశపు విలువను ప్రత్యక్షావలోకనముచే సవరింపవలయును.

శ్లో॥ అథచ ఏవతేఽవాభగణాః భవంతు యదా యేంశాః
నిపుణై రుపలభ్యంతే తదా సఏవ క్రాంతి పాతః॥

అయనాంశశూన్యసంవత్సరము శకములో ఐదవ శతాబ్దమని వ్రాసినారు కాన, శక నిర్ణయము చేయుట అత్యావశ్యకము.

అయన శూన్య సంవత్సరము.

వరాహమిహిరుడు	427 శకము
కాళిదాసు	445 శకము
భాస్కరాచార్య-II	412 శకము
సూర్యదైవజ్ఞ	421 శకము

వరాహమిహిర, కాళిదాసులు సమకాలికులు. వారి శకము భట్టోత్పలుని శకము ఒకటే. కాలము క్రీ. పూ. 551. కాల వైపరీత్యమువలన ఈశకము తరువాతి గణితజ్ఞుల స్మృతి పథ బాహ్యమయ్యెను. అయనబిందువు విషుబిందువు అదృశ్యములు. వరాహమిహిరుని కాలములో ఆ బిందు వెచ్చట ఆకసమునందుండెనో దానిని స్థిరపరుచుటకు దాని ప్రక్కన నక్షత్ర మేదియులేదు. గణిత విద్యా పారంగతుడగు భాస్కరాచార్యునికి కూడ ఇతమిత్థమని చెప్పుటకు వీలులేకపోయెను. అతని కాలమునందు శాలివాహన శకము ప్రచారమునందుండెను. విషుగతి విలువను సమర్థించెనేగాని, వేరేమియు జేయుటకు అతనికి వీలులేకపోయెను.

సూర్య దైవజ్ఞుడు అయనాంశను గురించి :

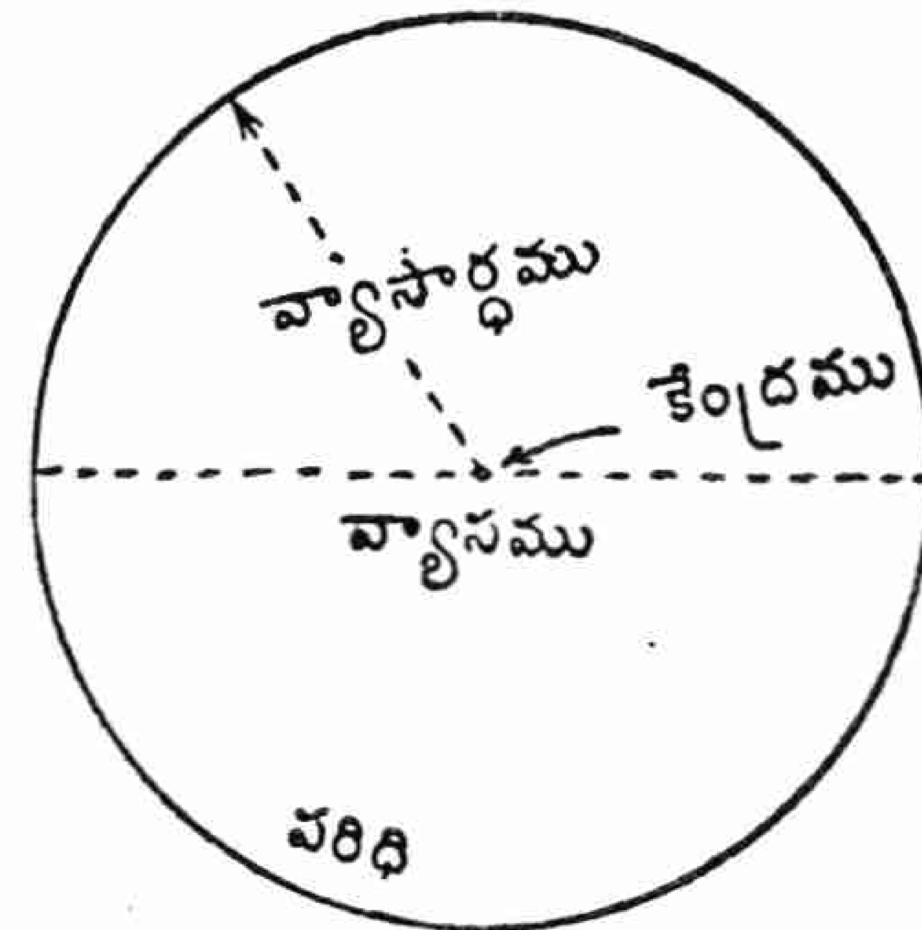
శ్లో॥ అయనాంశాః కృతేంద్వగ్ని మహీకమలబాంధవాః
(14° 13′ 12″) స్వాశాంశోన ధ్రువా ద్యబ్ద
లిప్తాభిః సంస్కృతే ధ్రువే॥

మరియు ఇప్పటి జ్యోతిష గ్రంథములు ప్రాచీన గ్రంథముల ప్రతులు కావు. అచ్చటచ్చట మార్పులు కలవు. దృష్టాంతమునకు సుధాకర ద్వివేదీ పండితుడు ఖగోళశాస్త్ర సామాన్యసూత్రములను అనుసరించి మూలము విశదముగా లేనిచోట్ల దానిని సవరించెను అని టీకా వ్రాసెను.

ఇట్టి గ్రంథములనుండి మన ప్రాచీన గ్రంథముల ప్రాచీనతనుగాని, ఉత్కృష్టతనుగాని నిర్ణయించుట దుస్సాధ్యము కదా !

ఆచార్య

వృత్తము : సమతలములో ఒక స్థిరబిందువుకు స్థిర దూరములో ఉండు బిందువులనన్నిటిని చేర్చినపుడు ఏర్పడు సంవృత వక్రరేఖను వృత్తము అందురు. కాని కొన్ని సందర్భములలో అట్టి వక్ర రేఖచే ఏర్పడు సమతల చిత్రమును వృత్తమందురు. ఆ స్థిర బిందువును కేంద్రముఅని, ఆస్థిరదూరమును వ్యాసార్ధము (రేడియస్) అని, ఆ వక్రమార్గమును పరిధి అని అందురు. వృత్తమునకు సంకేతము ⊙.



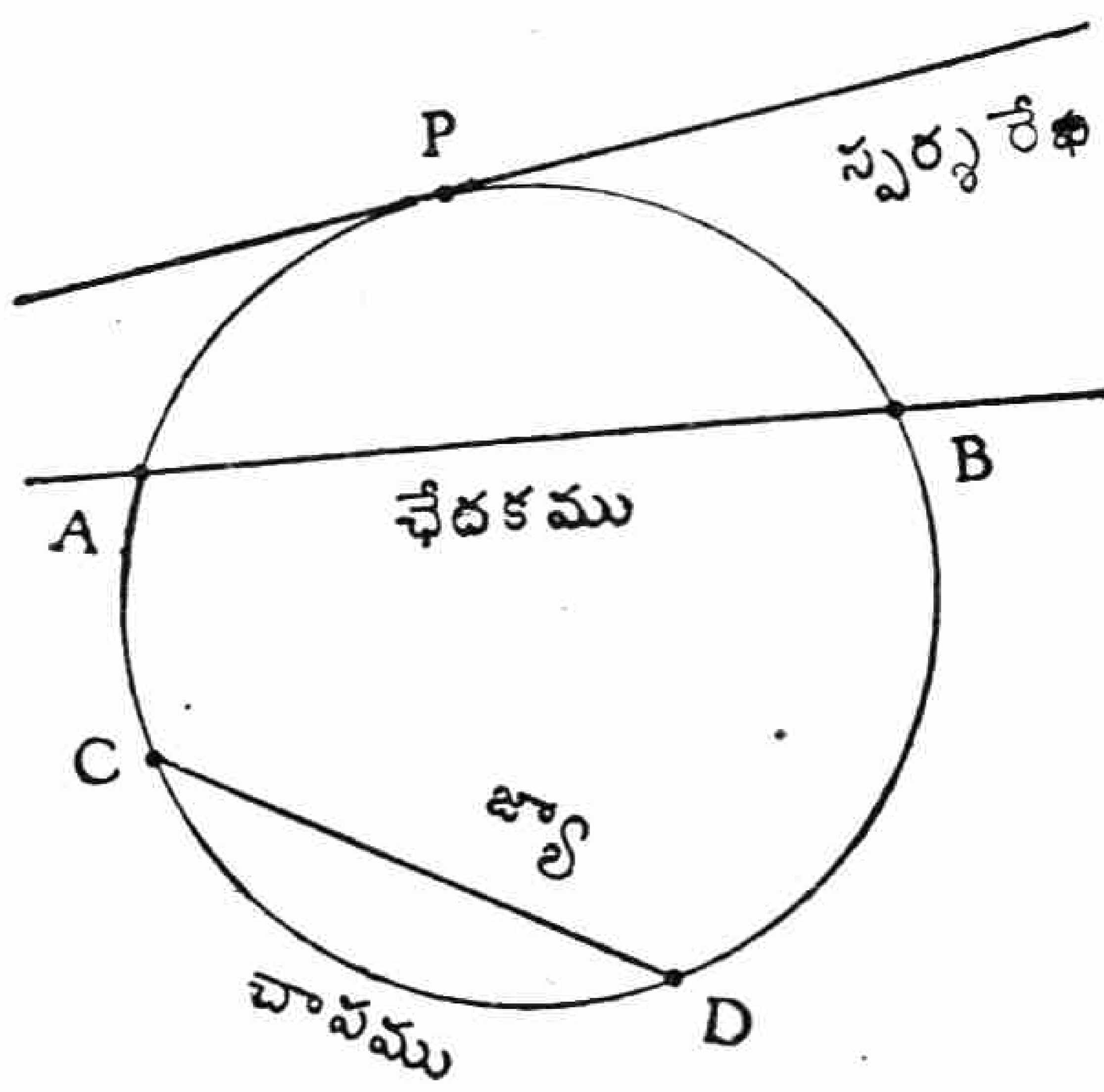
చిత్రము 378

వృత్తపరిధిపై అంతిమ బిందువులు గల ఋజురేఖా ఖండమును జ్యా (కార్డ్) అని అందురు. కేంద్రము గుండ పోవు జ్యా, ఆ వృత్త జ్యా లన్నిటికన్న పెద్దది. దానిని వ్యాసము అందురు. వ్యాసము వ్యాసార్ధమునకు రెండింతలుండును. వృత్తము యొక్క ఏ వ్యాసమైనను, దానిని రెండు సమభాగములుగ (అర్ధవృత్తములు) ఖండించును. లంబముగ ఉండు రెండు వ్యాసములు వృత్తమును నాలుగు సమభాగములుగ విభజించును. వ్యాసము కానట్టి జ్యా వృత్తమును రెండు అసమాన వృత్తఖండములు (సెగ్మంట్స్) గ విభజించును.

వృత్తము యొక్క నిడివిని పరిధి అందురు. వృత్త పరిధిలోని ఏ భాగమునైనను చాపము అందురు. అర్ధ

అర్ధవృత్తముకన్న పెద్ద చాపమును గురుచాపము అని, చిన్న చాపమును లఘుచాపము అని అందురు.

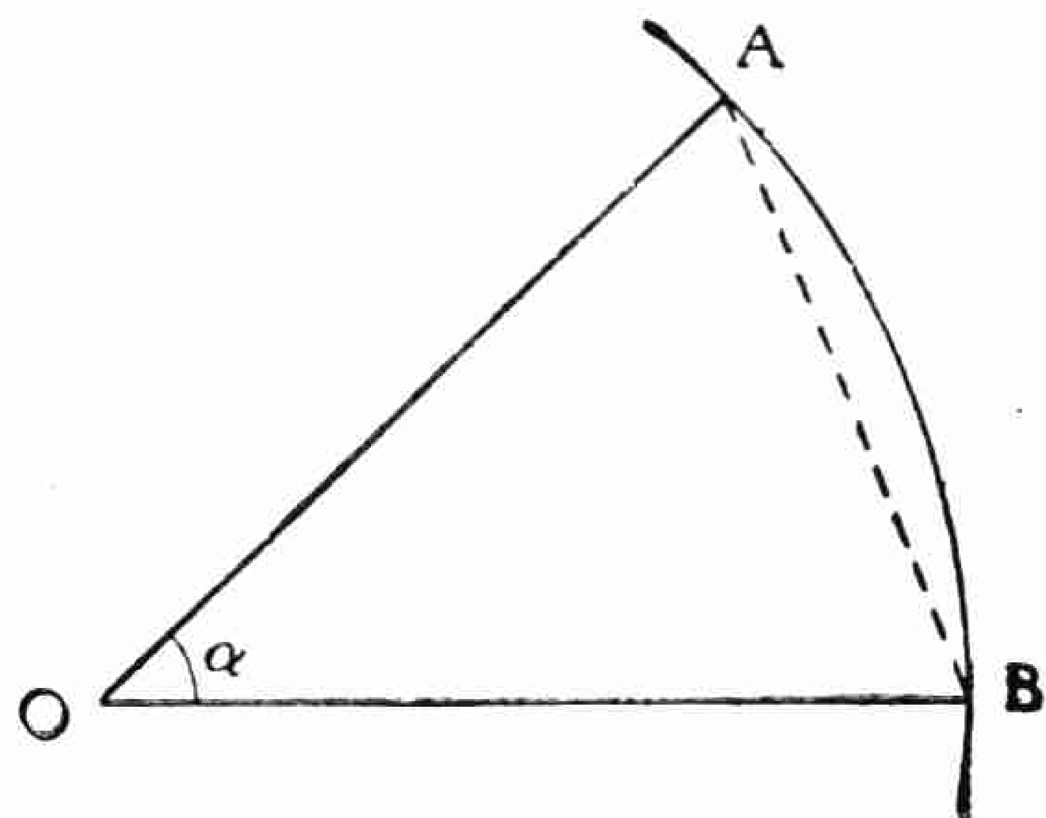
వృత్తమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకు ఋజురేఖను స్పర్శరేఖఅందురు. వృత్తమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించు ఋజురేఖను ఛేదకము (సీకంట్) అందురు.



చిత్రము 379

రెండు వ్యాసార్ధములు, వృత్త చాపము హద్దులుగ గల వృత్త భాగమును సెక్టర్ అందురు.

వృత్తకేంద్రము శీర్షముగను, రెండు వృత్త వ్యాసార్ధములు బాహువులుగను గల కోణమును కేంద్రకోణము (సెంట్రల్ ఆంగెల్) అందురు. ఉదాహరణకు చిత్రము 381 లో α కేంద్రకోణము. అయితే ఇచ్చట జ్యా AB, చాపము AB లు α కేంద్రకోణము కలిగి యున్నవని అందురు. చాపము AB ని దాని కేంద్ర కోణముతో కొలుతురు. ఉదా: $\alpha = 60°$ అను కొనిన, $AB = 60°$ యొక్క చాపము అందురు. వృత్తము $360°$ యొక్క చాపము; అర్ధ వృత్తము $180°$ యొక్క చాపము; చతుర్ధము (క్వాడ్రెంట్) $90°$ యొక్క చాపము.



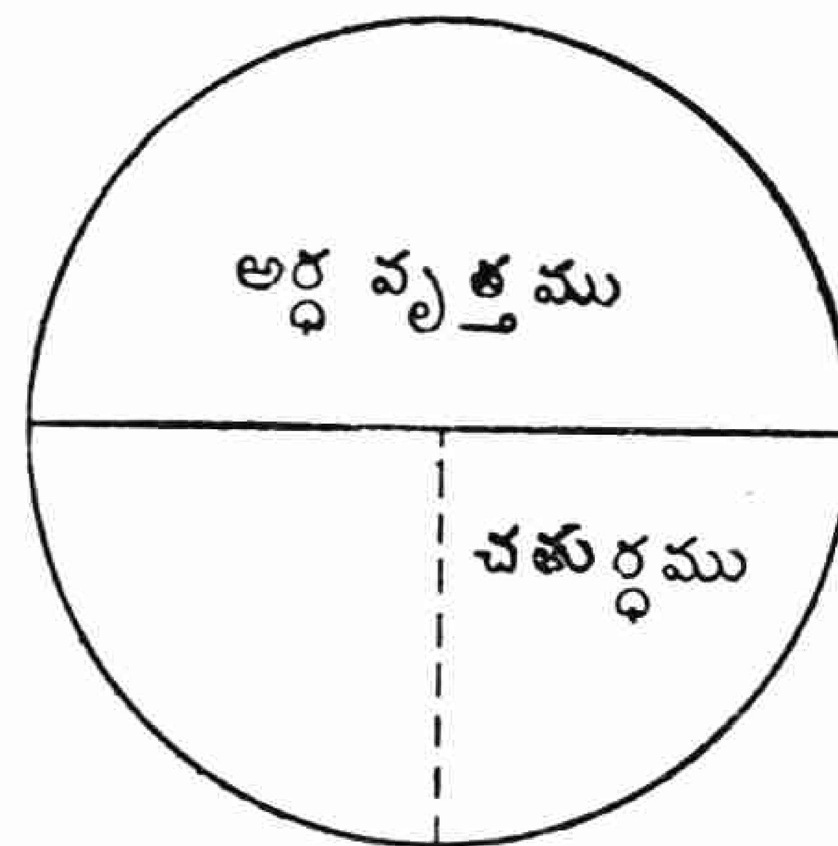
కేంద్రకోణము

చిత్రము 381

ముఖ్య సూత్రములు: వృత్త పరిమాణముతో ప్రమేయము లేకుండ ఏ వృత్తములోనైనను దాని పరిధి నిడివికి, దాని వ్యాసమునకు గల నిష్పత్తి స్థిరముగ ఉండును. దీనిని π (పై) అను గ్రీక్ అక్షరముచే గుర్తింతురు. ఇది ఒక అబీజీయ సంఖ్య. దీని విలువ ఐదు దశాంశస్థానములకు 3.14159 (చూ. పై వగైరా విలువ పు. 383). వృత్త పరిధి $= 2\pi R$ లేదా, πD.

వృత్త వైశాల్యము $= \pi R^2$, లేదా $\frac{\pi}{4} D^2$; ఇచ్చట $R =$ వ్యాసార్ధము, $D =$ వ్యాసము. కేంద్రకోణము $n°$ చేయు చాపరేఖ పొడవు: $\frac{n}{360} \times 2\pi R$.

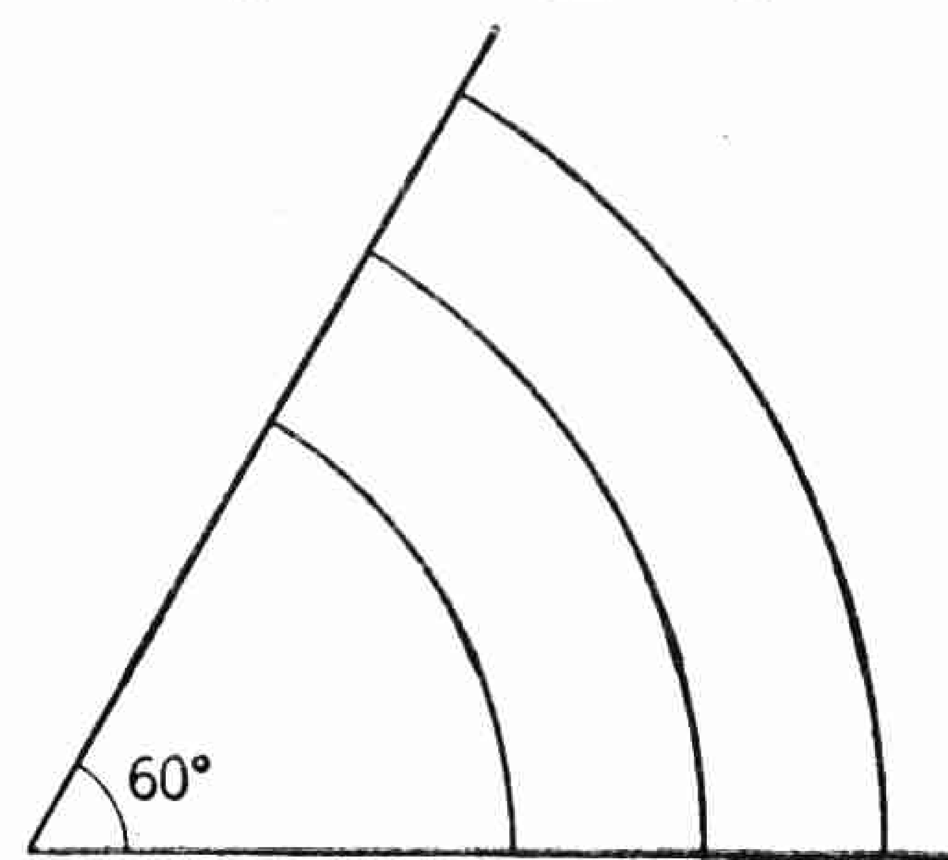
కేంద్రకోణము $n°$ గల సెక్టర్ వైశాల్యము: $\frac{n}{360} \times \pi R^2$.



చిత్రము 380

చాపరేఖ పొడవు l, వ్యాసార్ధము R గల సెక్టర్ వైశాల్యము: $\frac{1}{2} lR$.

వృత్తఖండ వైశాల్యము: వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యము సంబంధ సెక్టర్ వైశాల్యము నుండి, దాని జ్యా చేతను, దాని చివరలకు గీయబడిన వ్యాసార్ధములచే ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యమును తీసివేసిన లభించును. ఉదా: చిత్రము 383 లో ACB వృత్తఖండ వైశాల్యము $= OAB$ సెక్టర్ వైశాల్యము $- \triangle OAB$ వైశాల్యము.



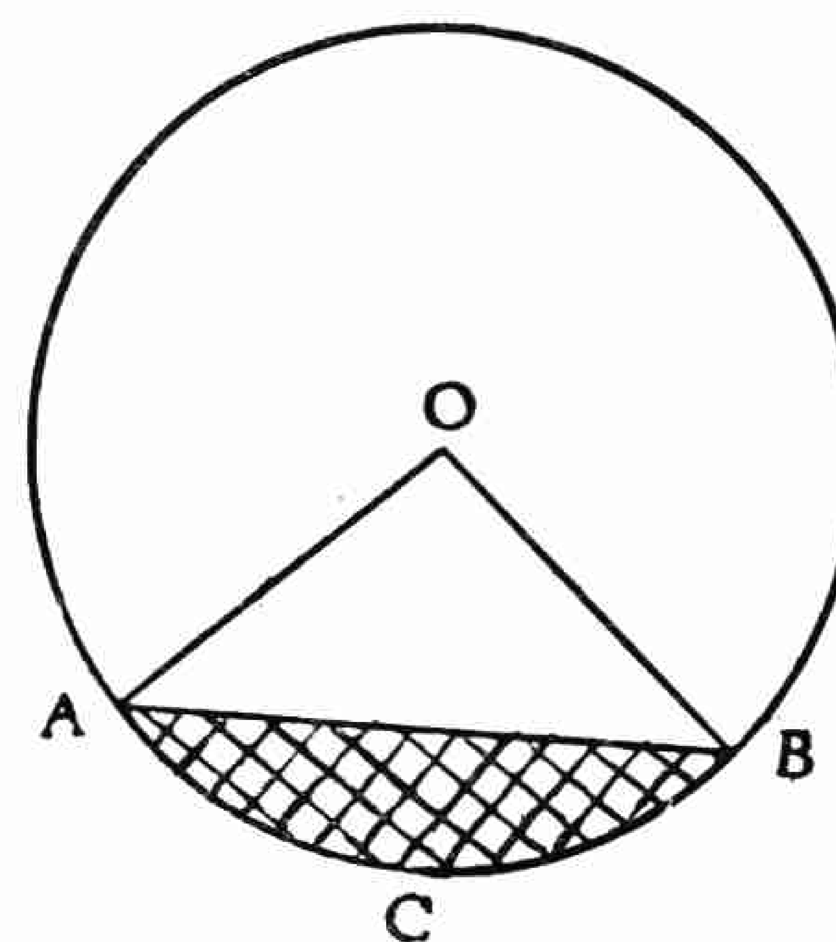
60° ల చాపములు

చిత్రము 382

వృత్త సిద్ధాంతములు: 1. ఒకే వృత్తములో, లేదా సమాన వృత్తముల లో సమాన చాపములు సమాన కేంద్ర కోణములు చేయును. అట్టి వృత్తములలో రెండు కేంద్రకోణములు అసమానములయిన పెద్ద కోణమునకు ఎదురుగ పెద్ద చాపముండును.

2. ఒకే వృత్తము నందు, లేదా సమాన వృత్తములలో, సమాన జ్యాలు సమాన చాపములు చేయును.

3. జ్యాకు లంబముగ ఉండు వ్యాసము ఆ జ్యాను, దాని రెండు చాపములను సమద్విఖండనము చేయును.



చిత్రము 383

4. ఒకే వృత్తములోని, లేదా సమాన వృత్తములలోని సమాన జ్యాలు వృత్తకేంద్రము నుండి సమానదూరములో ఉండును.

5. వృత్త స్పర్శరేఖ స్పర్శబిందువునకు గీచిన వ్యాసార్ధమునకు లంబముగ ఉండును.

6. వృత్తమునకు వెలుపల ఉన్న ఏదైనా ఒక బిందువు నుండి గీయబడు రెండు స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానములు. వృత్తకేంద్రమును, ఆ బిందువును కలుపు ఋజు రేఖ ఆ స్పర్శరేఖల మధ్యకోణమును సమద్విఖండనము చేయును.

7. అర్ధవృత్తములోని కోణము లంబకోణము.

8. వృత్తములో అంతర్లిఖింపబడు చతుర్భుజమును చక్రీయ చతుర్భుజము అందురు. చక్రీయ చతుర్భుజములో ఎదురెదురు కోణములు సంపూరకములు.

9. ఒకే చాపము కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము పరిధి వద్ద చేయు కోణమునకు రెట్టింపు ఉండును.

10. ఒకే వృత్తఖండములోని కోణములు సమానములు.

11. రెండు వృత్తములు స్పర్శించుకొనుచుండిన, వాటి కేంద్రములు, స్పర్శబిందువు ఒకే ఋజురేఖపై ఉండును.

12. వృత్త స్పర్శరేఖకు, స్పర్శబిందువు నుండి గీయబడిన జ్యాకు మధ్యగలకోణము ఏకాంతర వృత్తఖండము నందలి కోణమునకు సమానము.

విశిష్ట లక్షణములు : వక్రరేఖలలో ఒకటి అయిన వృత్తము కొన్ని విశిష్ట లక్షణములను కలిగి ఉన్నది : (1) సమాన నిడివి గల వక్రరేఖలన్నిటికన్న గరిష్ఠ విస్తీర్ణమును వృత్తము ఆక్రమించును. (2) వృత్తముపై గల ప్రతి బిందువు యొక్క వక్రత సమానము. పా. ల. నా.

వృత్తీయ అలంకారములు : గ్రీకులు సౌందర్య ప్రియులు. పాశ్చాత్య దేశముల ఆధునిక విద్యల, కళల పునాదిని స్థాపించినవారు.

గ్రీకుల దృష్టిలో అన్ని రూపములలోను సుందరతమమైనది వృత్తరూపము. ఈ అభిప్రాయమునకు గణిత సంబంధమైన ఆధారముకలదు. సౌష్ఠవాక్షములు, భ్రమణాక్షములు కలిగియుండుటవలన ఒక రూపమునకు సౌందర్యము హెచ్చగును. ఒక చతురస్రమునకు 4 సౌష్ఠవాక్షములు (సిమెట్రికల్ ఆక్సిస్) కలవు. దీనికేంద్రముచుట్టు 90°, 180°, 270°, 360° భ్రమణములు దానిని మునుపున్న స్థలమునకు కొనిపోవును. ఇవన్నియు చేరి ఒక పరిమిత పరికర్మ కూర్పు (ఫైనైట్ గ్రూప్) ను నిర్మించును. అయితే ఒక వృత్తమునకు అపరిమిత సౌష్ఠవాక్షములున్నవి. ఒక్కొక్క వ్యాసమును ఆ వృత్తమునకు సౌష్ఠవాక్షమగుచున్నది. అటులనే కేంద్రముచుట్టు ఏ కోణము ద్వారా భ్రమణమిచ్చినను ఒక వృత్తముయొక్క రూపము మారదు. కనుక దీని భ్రమణ సౌష్ఠవ కూర్పు అనంత పరికర్మములు గలది. తలములోని అన్ని రూపములందును ఈ గుణము కలది ఇది ఒక్కటే. కనుక ఒక వృత్తము అన్ని రూపములకంటె అతి సుందరమైనదనుటకు గణిత ఆధారమున్నది.

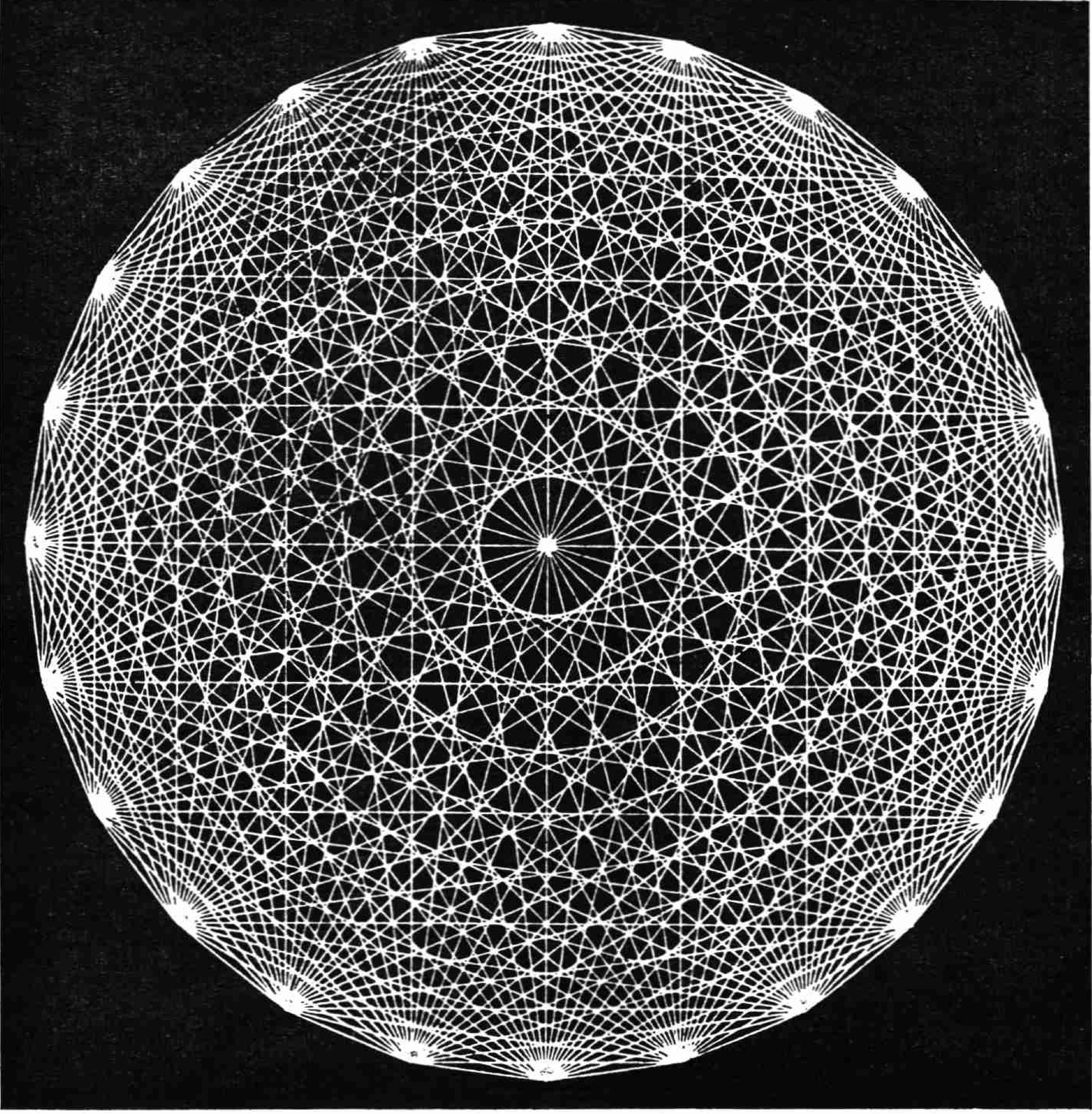
కనుక అలంకారచిత్రములలో వృత్తములను యథేష్టముగ చిత్రకారులు ఉపయోగించుటలో ఆశ్చర్యము ఏమియు లేదు.

ఒక · వృత్తముయొక్క పరిధియందు ఏ బిందువు A_1 నైనను తీసికొని, దానినుండి వ్యాసార్ధము నిడుపు గల జ్యా $A_1 A_2$, అటులనే $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, ... వృత్తమునందు ప్రవేశపెట్టినచో, ఆరవ జ్యా చివర బిందువు A_1 అగును. కనుక $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ఒక వృత్తమునందు అంతర్లిఖిత క్రమషడ్భుజి అగుచున్నది. కనుక కాంపస్‌ను ఉపయోగించి ఒక వృత్తమును ఖచ్చితముగ 6 సమభాగములుగా విభజింపవచ్చును. ఈ ఒక్కొక్క భాగమును కాంపస్‌తో సమముగా ఖండించుటవలన ఒక వృత్తమును 12, లేదా 24, లేదా 48, ... 6×2^n భాగములుగా ఖండించవచ్చును.

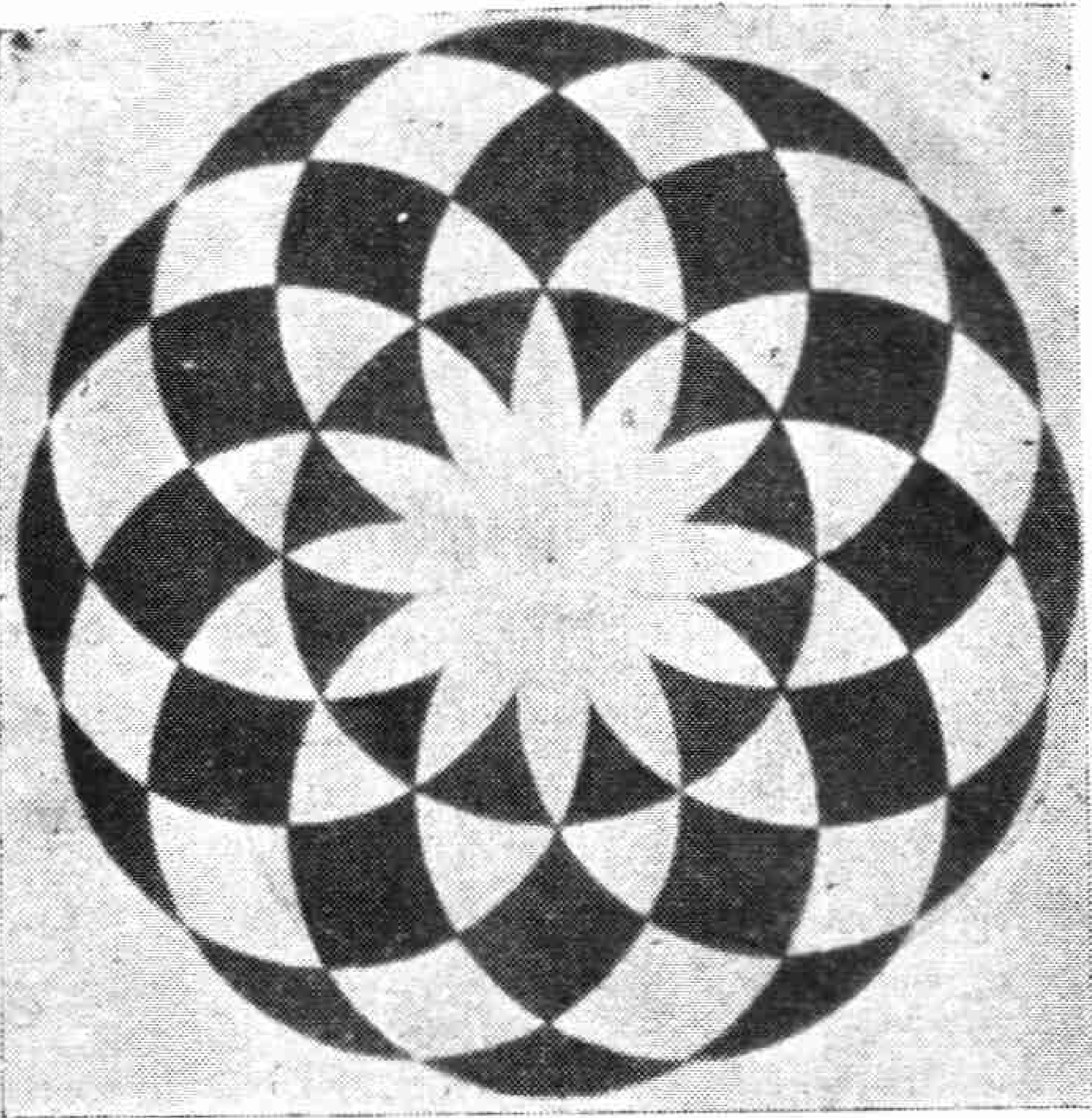
ఒక వృత్తపరిధిని 24 సమభాగములుగా విభజించి, ఈ 24 బిందువులను అన్ని విధములుగను ఋజురేఖల ద్వారా చేర్చుటవలన ఒక సొగసైన చిత్రము లభించును. దీనిని చిత్రము 384 (పు. 539) లో చూడవచ్చును. బయటను, లోపలను వృత్తములవలె తోచు రూపములు వృత్తములు కావు. ఇవి కేంద్రబిందువునకు సమ దూరములో నుండు అనేక ఋజురేఖలచే నిర్మింపబడిన భ్రాంతి చిత్రము. ఈ చిత్రము నందు ఏ వృత్తములును లేవు. ఋజురేఖలు మాత్రమున్నవి. వాటి సంఖ్య 276.

అంతర్లిఖిత షడ్భుజి శీర్షములను కేంద్రములుగను, వృత్త వ్యాసార్ధమే వ్యాసార్ధముగను చాపములను గీచి, ఒక 6 దళములుగల కమలమును పొందవచ్చును. ఈ కమలమునుండి ఇతర కమలములను, కొన్ని రేఖలను చెరిపి అనేక సుందరరూపములను పొందవచ్చును. వీటిలో కొన్నిటిని చిత్రములు 385, 386 (పు. 539) లో చూడవచ్చును. ఇవన్నియు వృత్తచాపములను ఉపయోగించియేదొరికినవి.

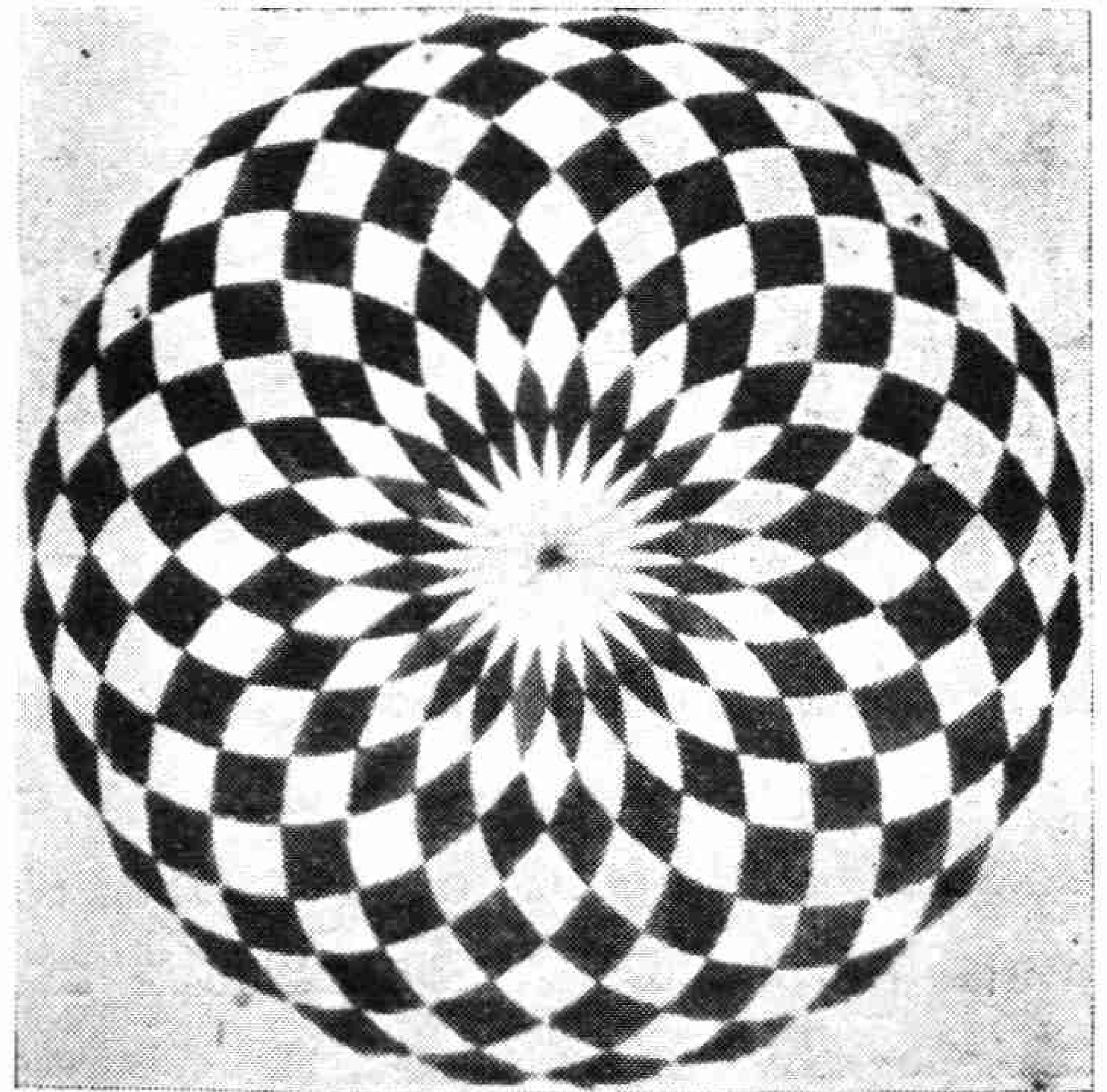
మరియొక విధమైన అలంకార చిత్రము : ఇచ్చట సకేంద్ర వృత్తములను, ఈ వృత్తముల సమానాంతర స్పర్శరేఖలను ఉపయోగించి, బయటి వృత్తవైశాల్యము విభజింపబడియున్నది. ఈ విభజించిన వైశాల్యములను నలుపుగను, తెలుపుగను వర్ణమిచ్చుటవలన ఈ చిత్రము



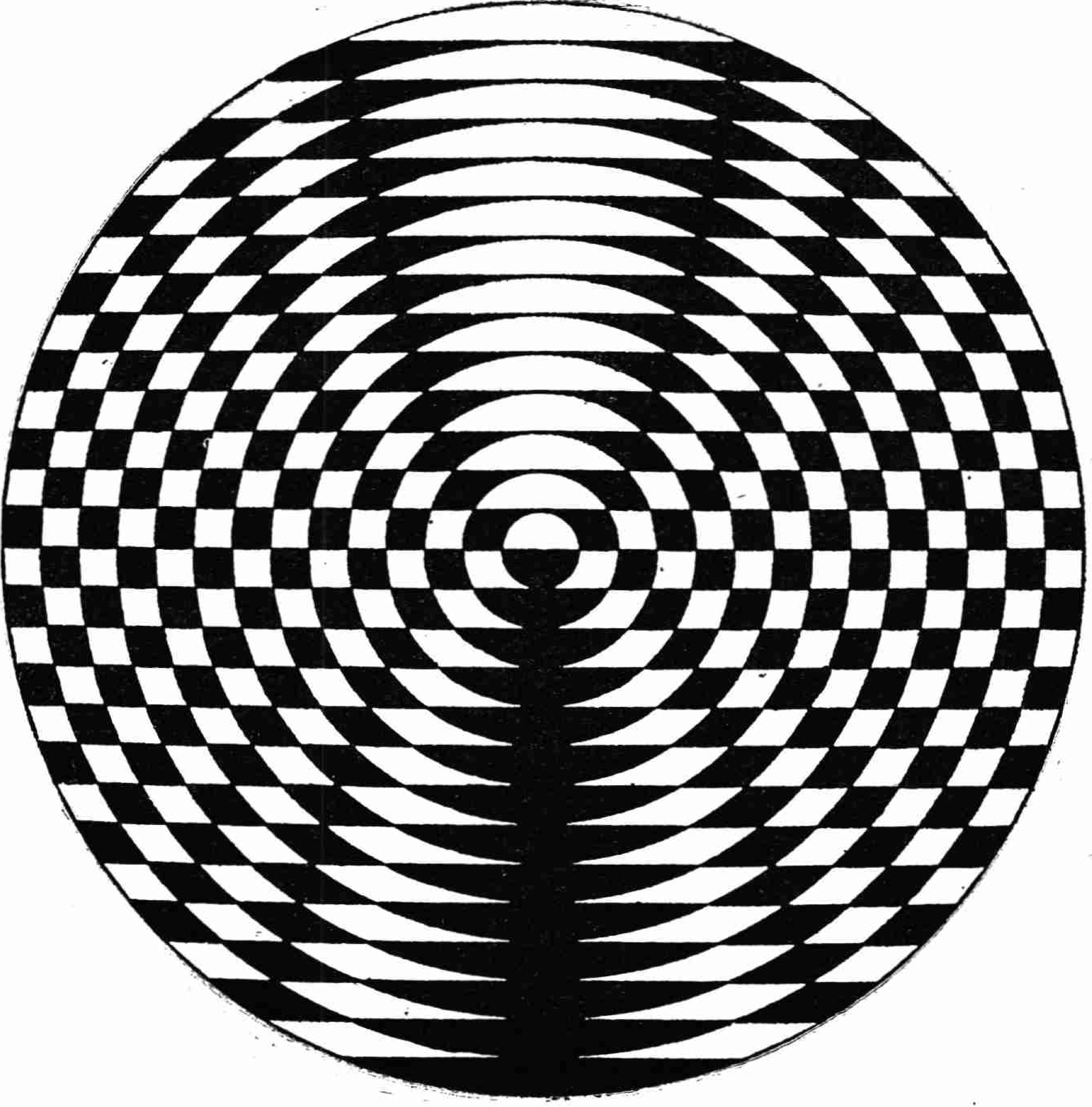
చిత్రము 384



చిత్రము 385



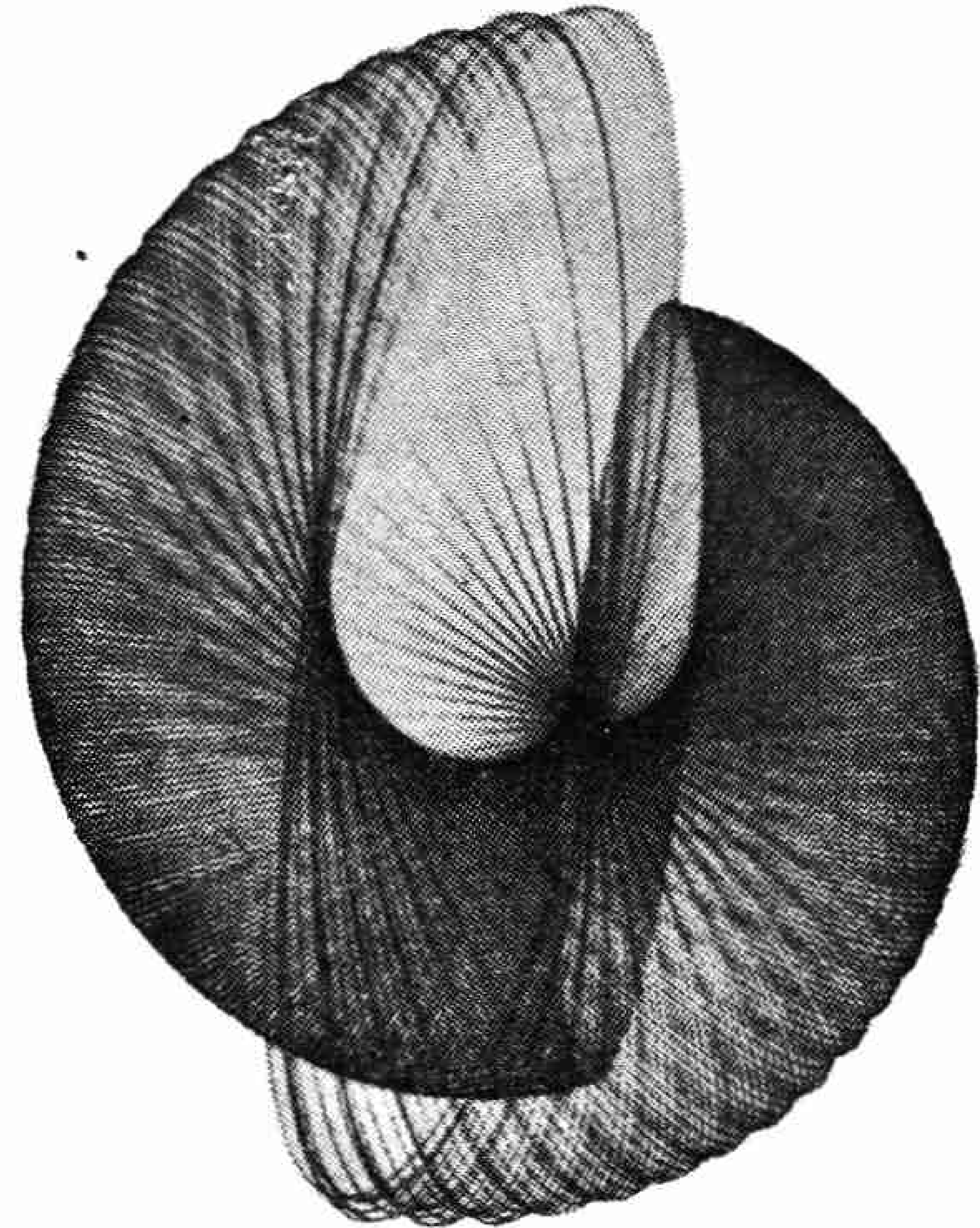
చిత్రము 386



చిత్రము 387

లభించినది. ఇచ్చట పరాస రూపమున ఉన్న రూపము లన్నియు భ్రాంతిరూపములు. ఈ చిత్రము (387) లో ఏ పరాసను గీయలేదు.

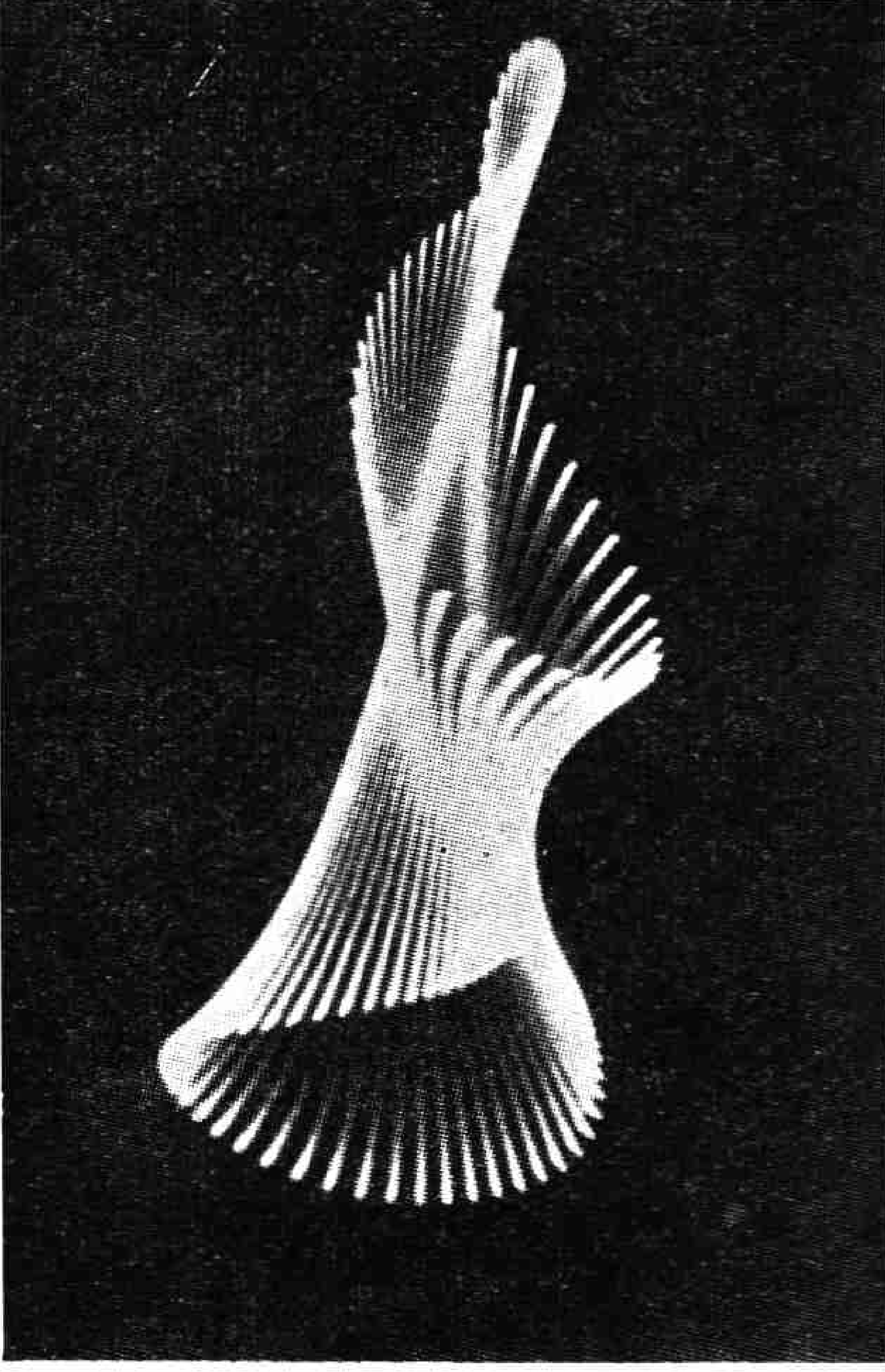
కంపన చిత్రములు : సౌష్ఠవము, భ్రమణము ద్వారా ఆవర్తనమును - అనగా ఒకే రూపమును - తిరిగి తిరిగి పొందుటసంగీతములోను, అలంకారరూపనిర్మాణములోను ఒక ముఖ్యపద్ధతి. ఈ క్రమము నుపయోగించియే కెలీడాస్కోప్ అను ఒక ఆటవస్తువు నిర్మింపబడి యున్నది. దీని యందు ఒక తలములో జరుగునట్లు కొన్ని రంగు గాజు ముక్కలును, లంబతలములలో మూడు అద్దములును ఉన్నవి. గాజుముక్కలు ఎటులున్నను అద్దములలో వాటి ప్రతిబింబములు, ఈ ప్రతిబింబముల ప్రతిబింబములును, మరియు ఈ ప్రతిబింబముల ప్రతిబింబములును - ఇట్టి ఆవర్తనము లన్నియు చేరి ఒక సౌష్ఠవరూపమును నిర్మించును. మూల గాజుముక్కల ఏర్పాటు ఎటులుండినను, పెక్కు ప్రతిబింబములచేత ఆవర్తనమును, సౌష్ఠమును నిర్మింపబడుచున్నవి. బట్టలకు క్రొత్త కల్పనా చిత్రములను అచ్చువేయుట యందు ఈ ఆటవస్తువును ఉపయోగించెదరట.



చిత్రము 388

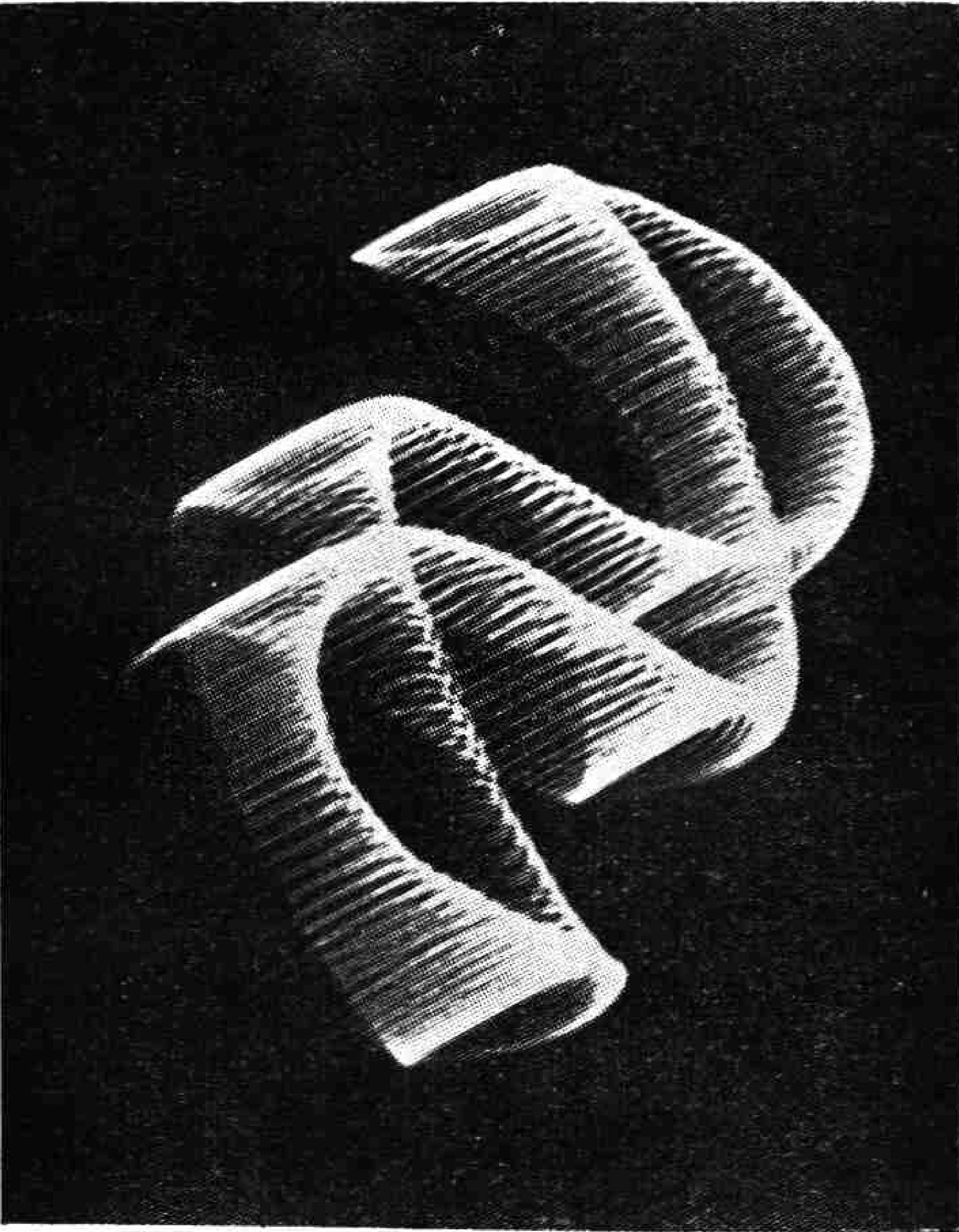
ఆధునిక విజ్ఞానములో ఒక వస్తు

కంపనలను చర్చించుట ఒక ముఖ్య అంశము. ఇటువంటి కంపనలు తరంగ రూపముగ ఉండును. ఈ తరంగముల



చిత్రము 389

అంశములు క్రమముగ మారుచునే ఉండవచ్చును. ఇట్టి తరంగ రూపములను కాథోడ్ రే ఆసిలాస్కోప్ అను



చిత్రము 390

సాధనమునుపయోగించి, ఒక వెలుతురు బిందువు ద్వారాయు దృశ్యముగా చేయవచ్చును. ఈ దృశ్యమున కెదురుగా ఒక ఛాయా గ్రహణయంత్రమును తెరచిపెట్టి నిడుపు కాలపు చిత్రమును తీసినచో, ఈ కంపన మార్పులన్నియు దాని యందు అంకితములగును. ఇట్లు లభించిన చిత్రములు కొన్ని సమయములందు అతి మనోహరములై యుండును. ఇచ్చట ముఖ్య అంశము కొంచెము కొంచెముగా మారుచున్న ఆవర్తనము. ఇది భౌతిక - గణితశాస్త్ర సంబంధమైన నవీన అలంకార నిర్మాణ పద్ధతి. ఇట్లు నిర్మించిన కంపన చిత్రములను 388, 389, 390 చిత్రములలో చూడ వచ్చును.

అ. న.

వృత్తీయ జ్యామితి : యూక్లిడ్ జ్యామితిలో బిందువునకు విశేషమైన ప్రాముఖ్యమున్నది. అది మూల వస్తువు. వక్రములు, తలములు, ఇతర వస్తువులన్నియు బిందు సమూహములుగా పరిగణింపబడును. ఇటులుకాక, ఋజురేఖను కాని, వృత్తమును కాని, తలమును కాని, మూలవస్తువుగా తీసికొని మరొక జ్యామితిని నిర్మించవచ్చును (చూ. ఋజురేఖా జ్యామితి - పు. 161).

ఇప్పుడు వృత్తమును, తరువాత గోళమును మూల వస్తువుగా తీసుకొని క్రొత్త జ్యామితులను నిర్మించెదము.

ఒక సమతలమును బిందుసమూహముగా వీక్షించిన, అది ద్విపరిమాణిక ఆకాశమగుచున్నది. ఏలన ఒక తలములోని బిందువును నిర్ణయించుటకు రెండు నిరూపకములు, లేదా కొలతలు కావలెను. అయితే అదే తలమును ఒక వృత్తీయ సమూహముగ వీక్షించిన అది త్రిపరిమాణిక ఆకాశమగుచున్నది. ఏలన దాని కేంద్ర బిందువును నిర్ణయించుటకు రెండు కొలతలు, వ్యాసమను మూడవ కొలత వృత్తమును నిర్ణయించుటకు కావలెను. నిరూపక జ్యామితియందు లంబాక్షములు ఉపయోగించినచో, ఒక వృత్తము యొక్క సమీకరణము :

$$a\left(x^2+y^2\right)+2gx+2fy+c=0$$

ఇచ్చట a, g, f, c అన్నియు ఏకకాలమునందు శూన్యము కాకూడదు; అదియుకాక $(a,\ g,\ f,\ c)$ వృత్తమును, $(ka,\ kg,\ kf,\ kc)$ వృత్తమును ఒకటే $(k\neq 0)$. కనుక తలములోని ఒక్కొక్క వృత్తమును త్రిపరిమాణిక విశేష ఆకాశము యొక్క ఒక బిందువుచే గుర్తింపవచ్చును. ఇది ఒకటి కొకటి అనురూపత. ఈ అనురూపతలో రెండు బిందువులు గుండ వెళ్లు అన్ని వృత్తములును ఒక ఋజురేఖ యొక్క బిందువులకు అనురూపములుగా నుండును.

ఒక వృత్తము $(a,\ g,\ f,\ c)$ యొక్క వ్యాసము శూన్యమైనచో, అది ఒక బిందువగుచున్నది. దీనికి నిబంధన $g^2+f^2-ac=0$. కనుక వృత్తీయతలములోని

బిందువులకు (శూన్యవ్యాసము గల వృత్తములకు) అను రూపముగా త్రిపరిమాణిక ఆకాశములో ఒక రెండవ తరగతి వక్రతలము Q ఉన్నది.

ఏ ఋజురేఖయైనను Q ను రెండు బిందువులలో ఖండించును. ఈ సిద్ధాంతమును వృత్తీయతలములో భాషాంతరము చేసినచో మనకు లభించు సిద్ధాంతమేమనగా, 'రెండు దత్తబిందువుల గుండ వెళ్లు వృత్త సమూహాములో శూన్యవ్యాసము గల రెండు బిందువులున్నవి' అనుటయే.

ఇటులనే త్రిపరిమాణిక విశేష ఆకాశము (దీనిని [3] అను సంకేతముచే గుర్తించెదము) లోని సిద్ధాంతములన్నిటికిని వృత్తీయ తలము (దీనిని (2) అను సంకేతముచే గుర్తించెదము) లో ఒక సిద్ధాంతముగా భాషాంతరము చేయవచ్చును. ఈ భాషాంతరములో [3] లో కొన్ని ముఖ్యపదములను, సిద్ధాంతములను వాటికి అనుగుణములైన (2) లోని అర్థములను, సిద్ధాంతములను క్రింద వివరించెదము :

వృత్తీయతలము (2)	త్రిపరిమాణిక విశేష ఆకాశము [3]
వృత్తము	బిందువు
బిందువు (శూన్యవ్యాస వృత్తము).	Q కు చేరిన బిందువు.
ఋజురేఖ (వ్యాసము = ∞).	ఒక విశిష్టతలము. దీని సమీకరణము $a = 0$.
రెండు బిందువుల గుండ వెళ్లువృత్తసమూహాము.	ఒక ఋజురేఖ.
పై సమూహాములో 2 శూన్యవ్యాస వృత్తములున్నవి.	ఒక ఋజురేఖ Q ను 2 బిందువులలో ఛేదించును.
పై సమూహాములో ఒక ఋజురేఖ ఉన్నది.	ఒక ఋజురేఖ $a = 0$ తలమును 1 బిందువులో ఖండించును.
రెండు లంబముగా ఖండించు వృత్తములు.	Q అపేక్షయా, రెండు కాంజుగేట్ బిందువులు.
మూడు దత్త వృత్తములను లంబముగా ఛేదించు వృత్తము ఒకటే.	మూడు బిందువులకు కాంజుగేట్ బిందువు ఒకటే.
ఒక దత్త వృత్తము అపేక్షయా ఒక విలోమ పరికర్మము (ఇన్వర్షన్) ఉన్నది. ఇది బిందువులను బిందువులుగా మార్చును.	ఒక దత్తబిందువుచే నిర్ణయింపబడిన విశేష మార్పు ఉన్నది. ఇది Q కు చేరిన బిందువులను, Q కు చేరిన బిందువులుగా మార్చును.
రెండు స్పర్శించు వృత్తములు.	Q ను స్పర్శించు ఋజురేఖపై రెండు బిందువులు.
రెండు వృత్తములు ఛేదించు కోణము.	రెండు బిందువుల మధ్య ఉన్న యూక్లిడేతర దూరము (దీనికి Q ను ఆబ్సొల్యూట్ గా తీసికొనవలెను).

పై వివరణలో రెండు కాంజుగేట్ బిందువులనగా Q అపేక్షయా ప్రతి బిందువు యొక్క ధృవీయతలము (పోలార్ ప్లేన్) మరియొక బిందువు గుండా వెళ్లునని అర్థము. ఒక దత్త వృత్తము అపేక్షయా ఒక విలోమ పరికర్మమనగా వృత్తీయ జ్యామితిలో ఒక మార్పు. AB అను రెండు బిందువులు దత్త వృత్తమునకు ఒకే వ్యాసముపై నుండి, $OA \times OB = r^2$ అయినచో, A యొక్క మార్పు B అనియు, B యొక్క మార్పు A అనియు చెప్పెదము. ఇచ్చట O దత్త వృత్తము యొక్క కేంద్రము ; $2r$ దాని వ్యాసము.

వృత్తీయతలములో రెండు వృత్తములు ఖండించు కోణము అను కొలతను వృత్తీయ తలములో ప్రవేశపెట్టినచో, ఆ తలము ఒక యూక్లిడేతర ఎలిప్టిక్ తలమగుచున్నది. విలోప (ఎలిప్టిక్) జ్యామితిలో రెండు బిందువుల మధ్యదూరమునకు ఒక పరిమితి ఉన్నది. అటులనే రెండు వృత్తములు ఛేదించు కోణమునకు ఒక పరిమితి π ఉన్నది.

గోళీయ జ్యామితి : ఇచ్చట త్రిపరిమాణిక యూక్లిడ్ ఆకాశమును ఒక గోళ సమూహాముగ భావించెదము. అనగా గోళములే మూలవస్తువులు. ఇతర వస్తువులు అనగా రేఖలు, తలములు, బిందువులు గోళసమూహాములుగా పరిగణించబడును.

ఒక గోళముయొక్క సమీకరణము

$$a(x^2+y^2+z^2)+2ux+2vy+2wz+d=0$$

ఇచ్చట a, u, v, w, d అన్నియు ఏకకాలములో శూన్యము కాకూడదు. (a, u, v, w, d) గుర్తించు గోళము (ka, ku, kv, kw, kd) గుర్తించు గోళము ఒకటే $(k \neq 0)$. కనుక త్రిపరిమాణిక ఆకాశములోని పైన వివరించిన గోళమును 5 పరిమాణిక విశేష ఆకాశము $[5]$ లోని బిందువు (a, u, v, w, d) చే గుర్తింపవచ్చును.

గోళ వ్యాసము శూన్యమగుటకు నిబంధన $u^2+v^2+w^2-ac=0$. ఇది $[5]$ లో ఒక రెండవ తరగతి సమీకరణము. కనుక అది $[5]$ లో ఒక చతుః పరిమాణిక వక్రతలము $[Q]$ ను నిర్ణయించును. కనుక (3) లోని బిందువులకును $[5]$ లో Q కు చేరిన బిందువులకును ఒకటికొకటి అనురూపత ఉన్నది.

ఇటులనే, 4 తలములో ఉన్నట్లు త్రిపరిమాణిక గోళీయ జ్యామితికిని, $[5]$ లో బిందు జ్యామితికిని ఒక భాషాంతర అనురూపతను సృజించి, ఒక జ్యామితిలోనున్న భావముల సిద్ధాంతముల నుండి మరొక జ్యామితిలోని భావముల సిద్ధాంతములను పొందవచ్చును. ఆ. న.

వృత్తీయ బిందువులు : ఈ బిందువులు అనంత రేఖపై నుండును. ఇవి కల్పితములు. వీనిగుండ ప్రతి వృత్తము వెళ్లును.

ఒక శాంకవమునకు సంయుగ్మత పొందిన అనుషక్త రేఖా ద్వయములు సమన్వయతను చెందును. వానిలో అనుషక్తబిందువు గుండ వెడలు శాంకవస్పర్శరేఖలు రేఖా ద్వయములు.

ఒక శాంకవముయొక్క సంయుగ్మ వ్యాసములు సమన్వయము (ఇన్‌వల్యూషన్) లో నుండును. వాని రేఖాద్వయములు అసంపాతములు (చూ. విశేష జ్యామితి పు. 500).

వృత్తముయొక్క సంయుగ్మ వ్యాసములు సమకోణీయములు. కాబట్టి వృత్తముయొక్క అసంపాతములు కేంద్రమువద్ద నుండు సమకోణీయ సమన్వయముయొక్క కల్పిత రేఖాద్వయములు.

కాని, ఒక బిందువువద్ద నుండు సమకోణీయ సమన్వయము యొక్క రేఖా ద్వయములు మరియొక బిందువు వద్ద నుండు సమకోణీయ సమన్వయము యొక్క రేఖా ద్వయములకు సామ్యములుగ నుండును. భ్రమణముచేయక, జరుపుటచే ఒకదానిని మరియొక దానితో ఏకీభవింపజేయ వచ్చును.

ఒక వృత్తముయొక్క అసంపాతములు మరియొక వృత్తము యొక్క అసంపాతములతో సరికి సరికి సామ్యములు.

ఒక వృత్తము C యొక్క అసంపాతములు a, a' ; మరియొక వృత్తము C_1 యొక్క అసంపాతములు b, b'. ఇపుడు a, b సామ్యములు ; a', b' సామ్యములు. a, b ఋజురేఖలు అనంతరేఖపై సంధించును.

a', b' ఋజు రేఖలు అనంతరేఖపై మరియొకచోట సంధించును. అవి రెండు కల్పిత బిందువులు. వానిగుండ వృత్తములు C, C_1 వెళ్లును. వానికి వృత్తీయ బిందువులని పేరు. అవి w, w_1 చే గుర్తింపబడును.

ప్రతివృత్తము వృత్తీయ బిందువులగుండ వెళ్లును. వానిగుండ వెళ్లే ప్రతి శాంకవము వృత్తముగా నుండవలయును. ఒక శాంకవముపై నుండు రెండు బిందువులను వృత్తీయ బిందువులుగా విశేషించిన అది వృత్తముగా మారును. సకేంద్ర వృత్తములు w, w_1 గుండ వెళ్లును. కేంద్రము నుండి వెడలు అసంపాతములు వానిని w, w_1 వద్ద స్పర్శించును. కాబట్టి సకేంద్ర వృత్తములు వృత్తీయ బిందువులవద్ద స్పర్శ ద్వయము చెందును.

శాంకవ నాభులు : ఒక నాభిగుండ వెళ్లు సంయుగ్మ రేఖలచే ఒక సమకోణీయ సమవాయత ఏర్పడును.

ఒక బిందువుగుండ వెళ్లు స్పర్శరేఖలు, దానిగుండ వెళ్లు సంయుగ్మ రేఖలచే నేర్పడు సమకోణీయ సమవాయత యొక్క రేఖా ద్వయములు.

కాబట్టి ఒక నాభిగుండ వెళ్లు వృత్తీయ రేఖలు శాంకవమునకు స్పర్శరేఖలు. ఈ స్పర్శరేఖలు వృత్తీయ బిందువుల గుండ వెళ్లును. కాబట్టి వృత్తీయ బిందువులగుండ వెళ్లు స్పర్శరేఖలు శాంకవ నాభులవద్ద సంధించును. శాంకవ నాభులను కనుగొనుటకు వృత్తీయ బిందువులు w, w_1 నుండి శాంకవమునకు స్పర్శరేఖలు గీయుము. అవి నాలుగు బిందువులవద్ద ఖండించును. రెండు బిందువులు వాస్తవికములు; రెండు కల్పితములు. ఇవి నాలుగును శాంకవనాభులు.

విశ్లేషణ విధానము : ఒక వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=a^2$ అయిన, దాని అసంపాతముల సమీకరణము $x^2+y^2=0$, అనగా $(x+iy)(x-iy)=0$.

$x+iy=0; x-iy=0$ వృత్తీయ రేఖలు. ఇవి వృత్తీయ బిందువులగుండ వెళ్లును.

$x+iy=0$ ను, $y=ix$ అని వ్రాయవచ్చును. దీనికిని ఒక ఋజురేఖకును మధ్యకోణము ఎల్లపుడును మారక ఉండును. ఉదాహరణమునకు $y=mx$ తీసికొనుము. వాని మధ్యకోణము θ అయిన,

$\theta = \tan^{-1}\frac{m-i}{1+mi} = \tan^{-1}(-i)$. ఇందు m లేదు కాబట్టి $y = mx$ లో m యొక్క అన్ని విలువలకు $y = mx$, $y = ix$ ఋజురేఖల మధ్యకోణము మారదు.

అనంతరేఖయొక్క సమీకరణము : మూడవ చలరాశి z ను వాడిన $y = m_1 x + c_1 z$; $y = m_1 x + c_2 z$ సామ్య రేఖల సమీకరణము ఏర్పడును. అవి ఖండించునపుడు $(c_1 - c_2)z = 0$ లభించును.

కాబట్టి $z = 0$ను అనంత రేఖ యొక్క సమీకరణముగా తీసికొనవచ్చును. ఇందు మనము సమఘాత నిరూపకములు (x, y, z) వాడుచున్నాము; లేనిచో $c_1 - c_2 = 0$ అనగా ఒక స్థిరరాశి $= 0$, అని అనంత రేఖ యొక్క సమీకరణము ఏర్పడును.

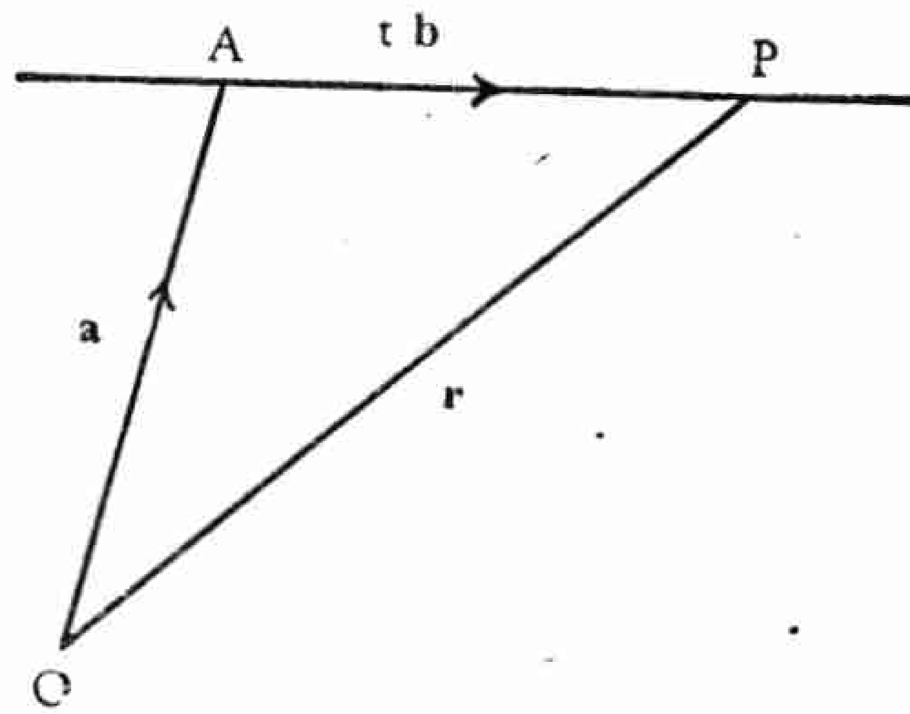
ప్రతి వృత్తము అనంతరేఖను అనగా $z = 0$ ను వృత్తీయ బిందువులలో ఖండించును. వాని నిరూపకము లను $x^2 + y^2 = 0$; $z = 0$ అనగా $y = \pm ix$, $z = 0$ గుర్తించును.

ఆచార్య

వెక్టర్ గణితము : వెక్టర్ గణితము చాల ఉపయోగకరమయినది. దాని ప్రయోగము కొంతవరకు గతి శాస్త్రమునందు ఇదివరలో గమనించితిమి. ప్రౌఢసమస్యలు దాని ప్రయోగముచే సులభమగును. ఇపుడు జ్యామితి యందు వెక్టర్ విధానము అవలంబింతము.

ఋజురేఖకు వెక్టర్ సమీకరణము : దత్తవెక్టర్‌నకు సామ్యముగ ఒక బిందువుగుండ వెళ్లు ఋజురేఖకు వెక్టర్ సమీకరణము :

దత్త బిందువు A గుండ వెళ్లు ఋజురేఖ **AP** పై P బిందువు తీసికొనుము. **b** వెక్టర్‌నకు AP సామ్యముగా నుండును. t ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన AP $= t\mathbf{b}$



చిత్రము 391

అగును. A బిందువునకు ఒక వైపున t ధనాత్మకముగాను, వ్యతిరేక దిశతో ఋణాత్మకముగాను ఉండును. $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ అయిన

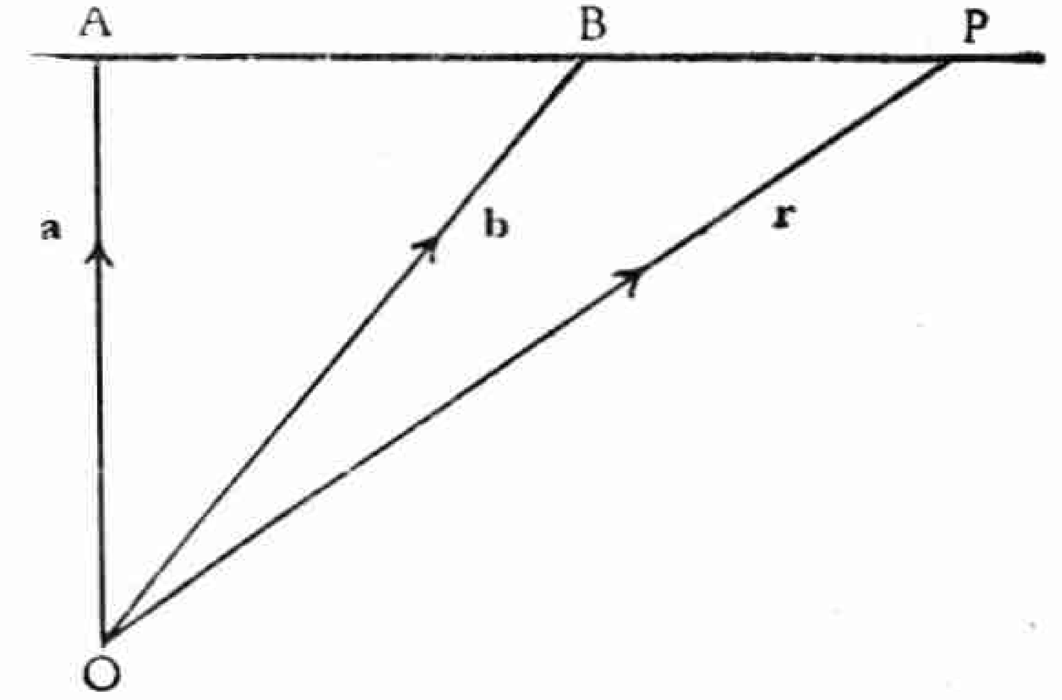
$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$$

ఋజురేఖ AP పై బిందువు ఇష్టము వచ్చినచోట తీసికొనవచ్చును. కాబట్టి సమీకరణము

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ఒక ఋజురేఖను గుర్తించును.

ఋజురేఖ AP, బిందువు O గుండ వెళ్లిన సమీకరణము $\mathbf{r} = t\mathbf{b}$ లభించును.

మామూలు కార్టీసియన్ నిరూపకాక్షములు బిందువు 'O' గుండ తీసికొని, P ని (x, y, z) నిరూపకముల చేతను, A బిందువును (a_1, a_2, a_3) చేతను, (b ని b_1, b_2, b_3) చేతను గుర్తించినచో $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t\,(b_1, b_2, b_3)$ లభించును.



చిత్రము 392

రెండువైపులనుండు అనురూప భాగములను సమీకరణము చేసిన $\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} = t$ లభించును.

రెండు బిందువులు A, B గుండ వెళ్లు ఋజురేఖ యొక్క సమీకరణము : O మూలబిందువు. $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ అయిన $\mathbf{AB}$ పై P బిందువు ఇష్టము వచ్చినచోట తీసికొనుము. $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ అని తీసికొనుము.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a};\ \mathbf{AP} = t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

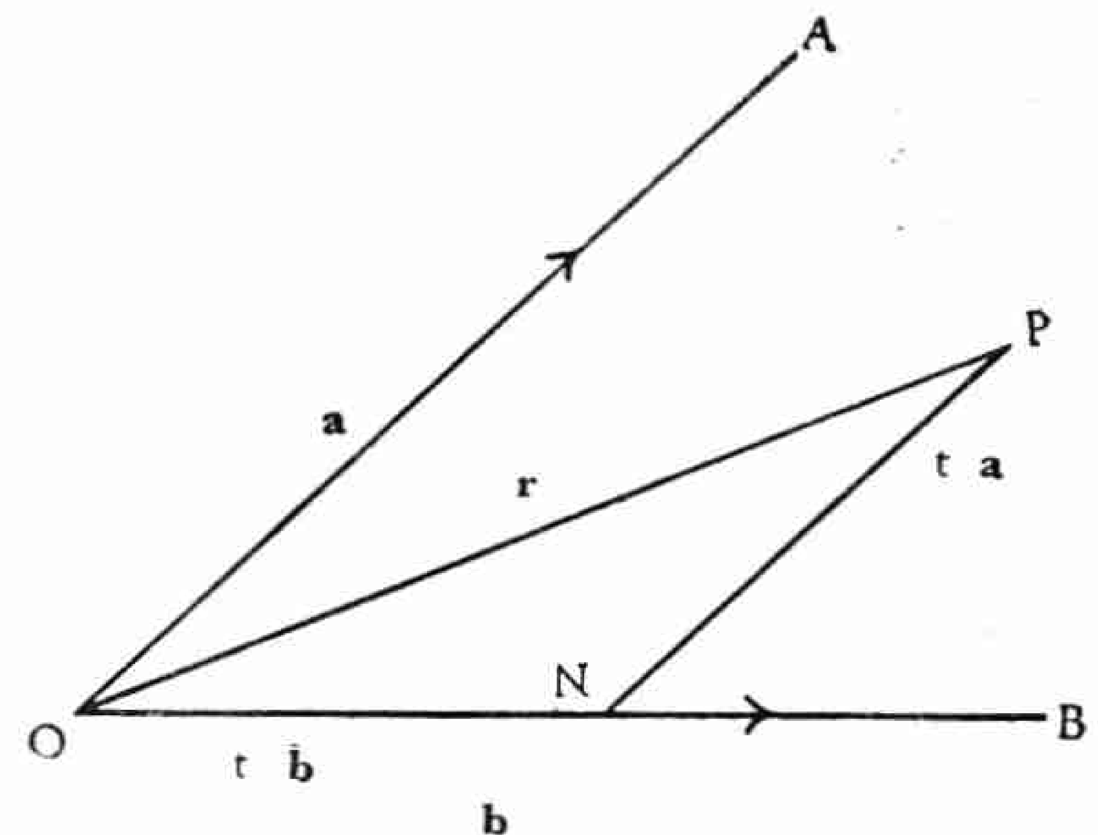
$$\therefore \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\,\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

మూడు బిందువులు A, B, P లు ఒక ఋజురేఖపై నుండిన $(1-t)\,\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{r} = 0$. ఈ నిబంధన ఆవశ్యకము, పర్యాప్తము.

రెండు ఋజురేఖల మధ్యనుండు విదళన రేఖ : ఋజురేఖలు OA, OB మధ్యకోణ విదళనరేఖ OP; $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$; $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$; $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ అని గుర్తించుము.

PN ఋజురేఖ OA ఋజురేఖకు సామ్యముగా నుండి OB ని N లో ఖండించును. ఇపుడు $\angle$ PON $= \angle$ OPN.

$\therefore$ ON $=$ PN. ఇవి $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ వెక్టర్‌లకు సామ్యముగా నుండుటచే



చిత్రము 393

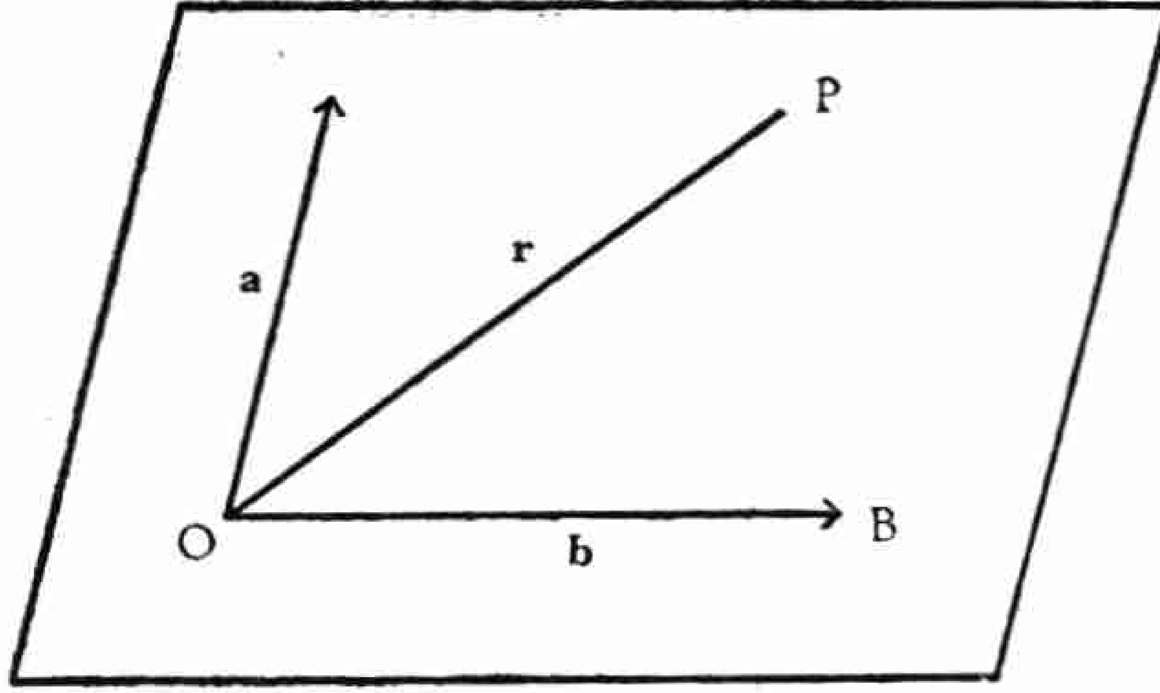
$$\mathbf{ON} = t\,\mathbf{a};\ \mathbf{PN} = t\,\mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{r} = \mathbf{OP} = t\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

సంపూరకకోణవిదళనరేఖ యొక్క సమీకరణము :

$$r = t(a - b)$$

సమతల సమీకరణము - I : a, b లు రెండు వెక్టర్‌లు. వానికి సామ్యముగా బిందువు O గుండ వెళ్లు సమతలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనవలయును.



చిత్రము 394

O గుండ OA, OB భుజరేఖలను క్రమముగా a, b వెక్టర్‌లకు సామ్యముగా తీసికొనుము.

$$OA = s\,a\ ;\ OB = t\,b.$$

సమతలము AOB తీసికొనుము. దానిలో బిందువు O గుండ OP భుజరేఖ గీయుము.

$OP = r$ అయిన, $r = OP = s\,.\,a + t\cdot b.$ ఇదియే సమతల సమీకరణము.

ఒక త్రిభుజముయొక్క శీర్షములనుండి ఎదుటి భుజములకు గీయు లంబరేఖలు అనుషక్తములు.

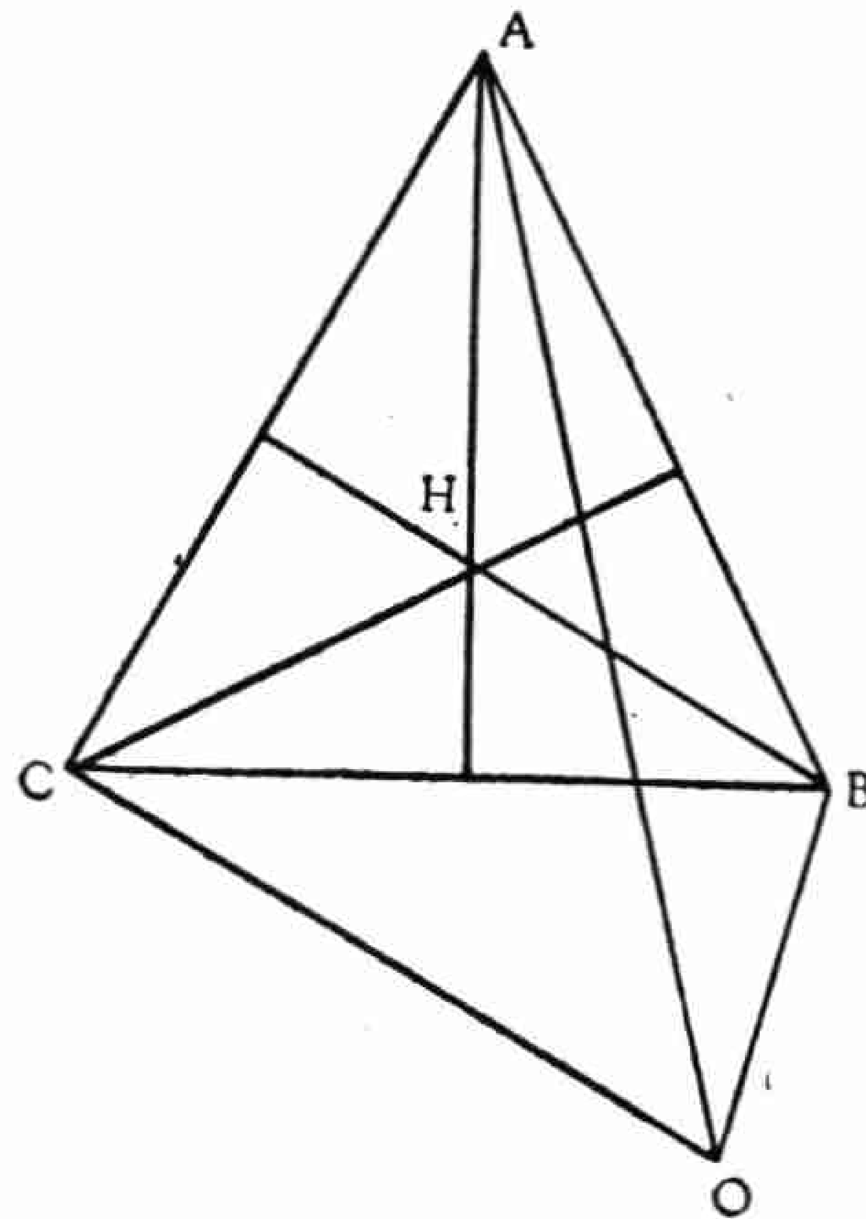
a, b అను రెండు వెక్టర్‌లు పరస్పర లంబములైన వాని బిందు గుణకార రాశి శూన్యము. అనగా $a\,.\,b = 0$.

త్రిభుజముABCలో A, B శీర్షములనుండి భుజరేఖలు AH, BH ఎదుటి భుజములకు లంబములు

$OA = a$;

$OB = b$; $OC = c$;

$OH = h$ అని వెక్టర్ రూపములో గుర్తించుము.



చిత్రము 395

$BC = c - b$;

$AH = h - a.$

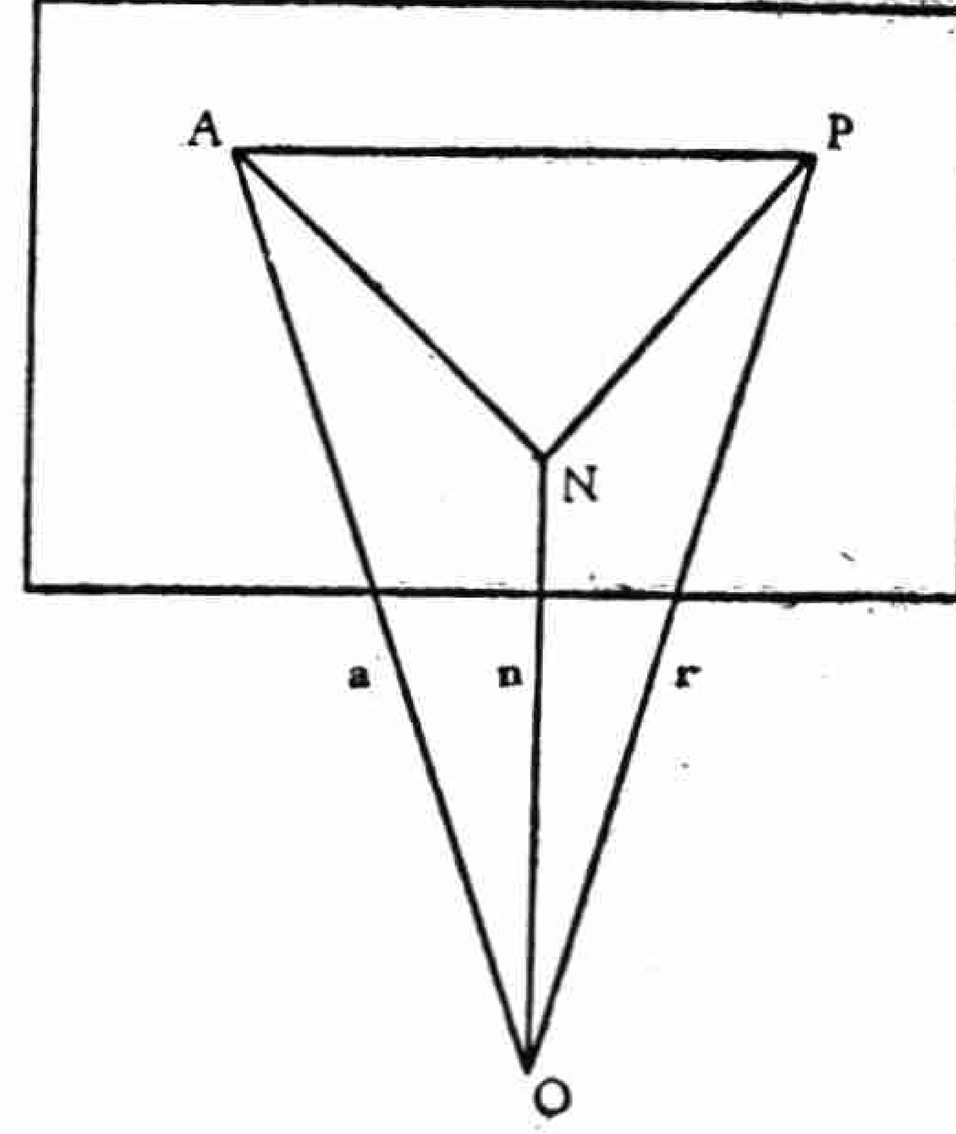
$$\therefore (c - b)\cdot(h - a) = 0.$$

అట్లే $(a - c)\cdot(h - b) = 0$

వీనిని కూడిన $(a - b)\cdot(\ \ - c) = 0$ అని ఏర్పడును.

కాబట్టి భుజరేఖలు AB, CH పరస్పర లంబములు.

సమతల సమీకరణము - II : ANP సమతలము బిందువు A గుండ వెళ్లును. O మూలబిందువు. ANP సమతలమునకు ON లంబము.



చిత్రము 396

$OA = a$, $ON = n$, $OP = r$ అని గుర్తించుము.

ఇపుడు $AP = r -$; a ; $ON = n$ పరస్పర లంబములు.

కాబట్టి వాని బిందు గుణకార రాశి శూన్యము.

$$\therefore (r - a)\cdot n = 0$$

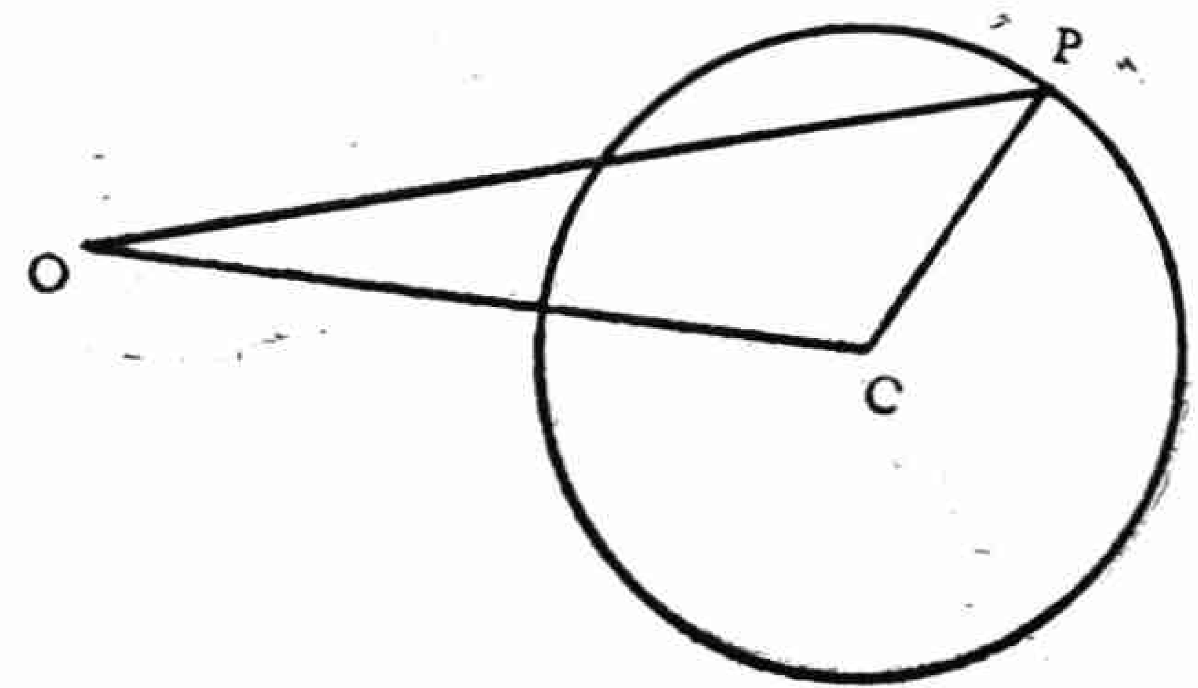
ON పై OA యొక్క విక్షేపము $= ON = p$ అని తీసికొందము. వెక్టర్ విధానములో $OA\,.\,ON = a\,.\,n = p.$

$(r\,.\,a)\,.\,n = 0$ అయినందున $r\,.\,n = a\,.\,n$; అనగా $r\,.\,n = p$;

రెండు సమతలములు $p - r.\ n = 0$, $p' - r.\ n' = 0$ మధ్యకోణము వాని లంబకోణముల మధ్య కోణమునకు సమానము.

కాబట్టి $n\,.\,n' = \cos\,\theta$ (లంబముల మధ్య కోణము $= \theta$)

గోళ సమీకరణము : ఒక గోళముయొక్క కేంద్రము C. దానిపై P ఒక బిందువు. O మూల బిందువు.



చిత్రము 397

$OP = r$, $OC = c$, $CP = a$ (గోళ వ్యాసార్థము) అయిన వెక్టర్ గణితములో $CP = r - c.$

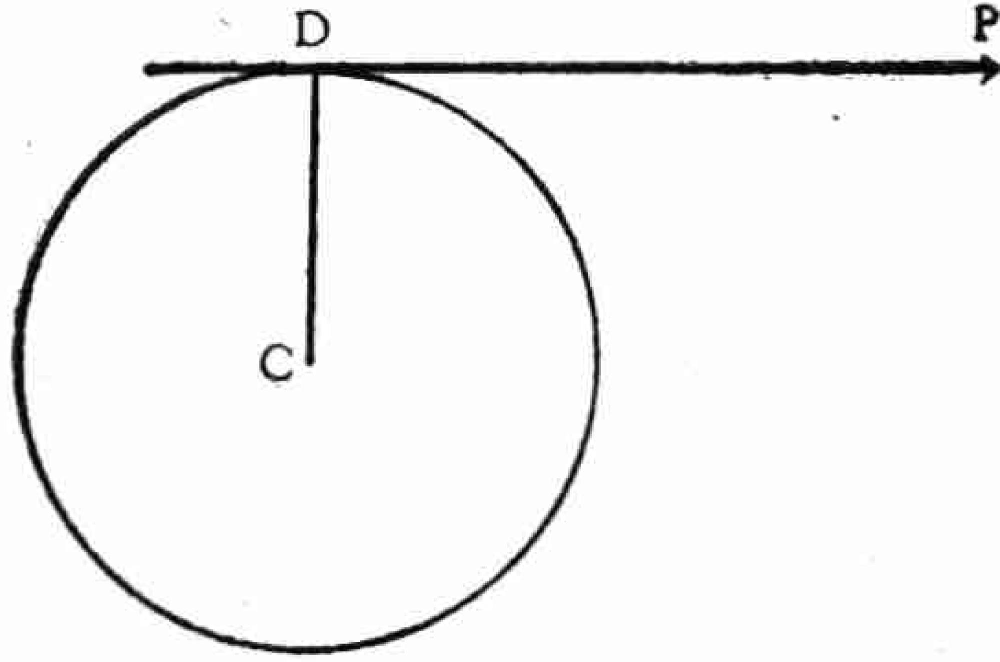
$$\therefore (r - c)^2 = a^2$$

అనగా $r^2 - 2\,r\,.\,c + c^2 - a^2 = 0$

ఇందు $c^2 - a^2 = k.$ ఇది ఒక గోళ సమీకరణము.

గోళమునకు స్పర్శతల సమీకరణము : ఒక గోళము యొక్క కేంద్రము C. దానిపై D బిందువుగుండ DP ఒక స్పర్శరేఖ. మూల బిందువు O అని తీసికొని

$$OC = c, \; OD = d, \; OP = r$$



చిత్రము ३९८

వెక్టర్‌లుగా తీసికొనుము. గోళవ్యాసార్ధము CD యొక్క వెక్టర్ $= d - c$.

$$DP = r - d \; ;$$

CD, DP పరస్పర లంబములు. కాబట్టి

$$(d - c) \cdot (r - d) = 0$$

DP ఇష్ట స్పర్శరేఖ అయినందున, DP యొక్క స్థితిని CD కి లంబముగా నుంచి మార్చుటచే గోళమునకు D బిందువువద్ద స్పర్శ తలము ఏర్పడును.

కాబట్టి D వద్ద గోళమునకు స్పర్శతలముయొక్క సమీకరణము $(d - c) \cdot (r - d) = 0$. ఆచార్య.

వెక్టర్ బీజగణితము : వెక్టర్ (సదిశరాశి) బీజగణితము సాధారణ బీజగణితము యొక్క విస్తృత భాగము అని చెప్పవచ్చును. సాధారణ బీజగణితమునకు స్కేలార్ బీజగణితమని పేరు. సదిశరాశులకు పరిమాణము, దిక్కు రెండును కలవు. వేగము, త్వరణము గుర్తించు రాశులు సదిశరాశులు. పొడవు, వైశాల్యము, భారము మొదలగునవి స్కేలార్ (అదిశ) రాశులు.

ఒకరాశి పరిమాణము OA నిడుపుతో గుర్తించిన దానిని సదిశరాశిగా తీసికొనినపుడు OA లేదా **A** (లావగు అక్షరము) చే అది గుర్తించబడును.

రోమన్ అక్షరములతో **A** ఒక సదిశరాశిని గుర్తించిన *a* (చిన్న అక్షరము) దాని ప్రమాణము చే గుర్తించెదము.

OA, AO యొక్క పరిమాణములు సమానములు. కాని అవి వ్యతిరేక దిశలు, లేదా సంజ్ఞలు కలవై యుండును అనగా $OA = -AO$; OA, O యందు ఆరంభించి A వద్ద ముగియును. AO, A యందు ఆరంభించి O వద్ద ముగియును.

ప్రారంభ బిందువులు ఎచట ఉండినను రెండు సదిశ రాశుల పరిమాణములు సమముగను వాటి దిశలు సమాంతరములుగను ఉన్నచో అవి సమానములనబడును.

సంకలన, వ్యవకలనములు : సమాంతర చతుర్భుజ సూత్రము ఉపయోగించి, సదిశరాశులు సంకలనము చేయబడును.

మొదట **A** ను గుర్తించు రేఖ **OA** గీయుము. A నుండి **B** గుర్తించు రేఖ **AB** గీయుము. సమాంతర చతుర్భుజము OABC నిర్మించినచో దాని కర్ణము **OB** సదిశరాశి **A + B** ను గుర్తించు రేఖ.

$A - B$ కనుగొనుటకు **A** తో కూడ $-B$, అనగా **B** కు వ్యతిరిక్త సదిశరాశిని సంకలనము చేసెదము.

$OC = (A + B) + C$ అనుకొనుము. $A + B = OB$

$\therefore (A + B) + C = OB + BC = OC$;

$B + C = AB + BC = AC$;

$\therefore A + (B + C) = OA + AC = OC$;

కాబట్టి $(A + B) + C = A + (B + C)$. దీనికే సమాంతర సంయోజక న్యాయమని పేరు.

గుణకారము : *n* ఒక స్కేలార్ రాశి అయిన *n***A** యొక్క దిక్కు **A** యొక్క దిక్కును అనుసరించును. కాని దాని పరిమాణము **A** యొక్క పరిమాణమునకు *n* రెట్లు ఉండును.

సదిశరాశుల స్కేలార్ గుణకారము, లేదా బిందు గుణకారము : **A, B** ల ప్రమాణము *a, b* అయి వాని మధ్య కోణము θ అయినచో $A . B = ab \cos \theta$ అనెదము.

ఇందు **A, B** ల మధ్య ఒక బిందువు ఉంచబడును.

మరియు $A . B = B . A$ అనియు

$$A . (B + C) = A . B + A . C$$

$$(B + C) . A = B . A + C . A$$

అని సులభముగా చూపవచ్చును.

సదిశరాశుల క్రాస్ గుణకారము : **A, B** సదిశరాశుల పరిమాణము *a, b*, వాని మధ్యకోణము θ అనుకొనెదము. ఈ రెండు సదిశరాశుల తలమునకు లంబముగా ఒక యూనిట్ పరిమాణము గల ఒక సదిశరాశి **T** తీసికొనుము. ఇపుడు

$A \times B = (ab \sin \theta) \; T$ అనెదము.

దీనికి క్రాస్ గుణకారమని పేరు.

$A \times B$, $B \times A$ రెండును వ్యతిరేక దిశలు కలవి. పరిమాణములు సమము. ఈ లబ్ధముల గుర్తించునపుడు మొదటిదానినుండి రెండవదానిని చేరు భ్రమణము అప్రదక్షిణమైన θ ధన కోణమనియు, ప్రదక్షిణమయిన అది

ఋణ కోణమనియు తీసికొనవలెను. అనగా **A** నుండి **B** కి పోవు గతిని గమనించి సంజ్ఞా నిర్ణయము చేయవలయును

నిర్వచనముల ననుసరించి, క్రింది సూత్రములను సులభముగా సమర్థింపవచ్చును.

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$
$$(B + C) \times A = (B \times A) + C \times A$$

లంబాక్ష దిక్కులలో యూనిట్ సదిశరాశులు : x, y, z లంబాక్షమును ఉపయోగించి ఈదిక్కులలో యూనిట్ సదిశ రాశులు తీసికొనినచో, వీటిని క్రమముగా I, J, K సంకేతములవలన గుర్తించెదము. అపుడు (x, y, z) ఒక బిందువు P యొక్క నిరూపకములైనచో, $OP = Ix + Jy + Kz$ అగును. దీని పరిమాణము $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

వీటి గుణకార న్యాయములను క్రింద ఇచ్చియున్నాము:

$I . I = J . J = K . K = 1$;

$I . J = J . K = K . I = 0$;

$J . I = K . J = I . K = 0$;

$I \times I = 0$; $J \times J = 0$; $K \times K = 0$;

$I \times J = K$; $J \times K = I$; $K \times I = J$;

$I \times K = -J$; $J \times I = -K$; $K \times J = -I$.

రెండు సదిశరాశులను క్రింది విధముగా తీసికొనుము.

$$A = Ia_1 + j . a_2 + K . a_3$$
$$B = Ib_1 + j . b_2 + K . b_3$$

ఇచ్చట a_1, a_2, a_3 నిరూపకాక్షములపై క్రమముగా **A** యొక్క విక్షేపములు. b_1, b_2, b_3 నిరూపకాక్షములపై క్రమముగా **B** యొక్క విక్షేపములు. వీనియొక్క బిందు గుణకారము, క్రాస్ గుణకారముల విమర్శింతము.

$$A . B = (I\, a_1 + Ja_2 + Ka_3) . (I_1 + Jb_2 + Kb_3)$$
$$= a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$
$$A \times B = (Ia_1 + Ja_2 + Ka_3) \times (I\, b_1 + J\, b_2 + Kb_3)$$
$$= I\,(a_2\, b_3 - a_3\, b_2) + J\,(a_3\, b_1 - a_1\, b_3) + K\,(a_1\, b_3 - a_2\, b_1)$$

$$= \begin{vmatrix} I & J & K \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$A . B = 0$ అయిన A, B పరస్పర లంబములు.

$A \times B = 0$ అయిన A, B సమాంతర దిశలు కలవి. మరియొక విశేష మేమన,

$A . A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$;

$A \times A = 0$.

ప్రయోగములు (బలముచేయు పని) : ఒక బలము F ప్రయోగముచే P బిందువు P_1 వరకు జరుగనిమ్ము. F కును PP_1 రేఖకును మధ్య కోణము θ అయిన ఈ బలము చేసిన కర్మ విలువ $(PP_1) . F \cos\theta = F . PP_1$ అగును (చూ. సమీక్ష పు. 58).

ధృఢ భ్రమణ వస్తువునందు బిందువుల వేగము : ఒక ధృఢ వస్తువునకు ఒక అక్షము OA చుట్టు భ్రమణము కలదనుకొనెదము. దాని కోణీయవేగము ఒక సెకనుకు w రేడియన్‌లు అనుకొనెదము. అపుడు ఆ భ్రమణమును OA రేఖపై, w నిడుపు గల సదిశ రాశిచే గుర్తింపవచ్చును. ఆ వస్తువుయొక్క స్థిర బిందువు ఒకటి P అయినచో P యొక్క వేగము $OA \times OP$ అగునని సులభముగా చూడవచ్చును. ఉదాహరణమునకు P బిందువు అక్షము OA పై ఉన్నచో, ఈ వేగము శూన్యమగుచున్నది. $OP \perp OA$, అయినచో బిందువేగము $w . OP$.

మూడు సదిశరాశుల గుణకారము: **A B C** మూడు సదిశ రాశులను తీసికొనెదము. $B \times C$ ఒక సదిశ రాశి. **A** ను దీనితో రెండు విధములుగా గుణకారము చేయవచ్చును. మొదటి విధము బిందు గుణకారము. దీని లబ్ధము $A . (B \times C)$. ఇట్లు దొరకు లబ్ధము విలువ

$$A . (B \times C) = B . (C \times A) = C . (A \times B)$$

అని చూపవచ్చును. అయితే $(B \times C) = -(C \times B)$ అయినందువలన $A . (B \times C) = -A . (C \times B) = -B . (A \times C) = -C . (B \times A)$ ఈ బీజగణితములో $A . (B \times C) = (A \times B) . C$ను (ABC) అను సంజ్ఞచే గుర్తించుట వాడుక. కనుక =

$$(ABC) = (BCA) = (CAB) =$$
$$-(ACB) = -(BAC) = -(CBA)$$
$$A = I\,a_1 + J\,a_2 + k\,a_3$$
$$B = I\,b_1 + J\,b_2 + k\,b_3$$
$$C = I\,c_1 + J\,c_2 + kc_3$$

అను రూపములో వ్రాసినచో,

$$A. (B \times C) = (ABC) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

మూడు సదిశరాశులు **A, B, C** లను మరియొక విధముగా $A \times (B \times C)$ అని గుణకారము చేయవచ్చును. దీని విలువ $(A. C)\, B - (A . B)\, C$ అగుచున్నది. కనుక $A \times (B \times C)$ యు $(A \times B) \times C$ యు వేర్వేరు సదిశ

రాశులు. ఏ రెండు సదిశ రాశులను మొదట గుణకారము చేయవలెనో తెలిసికొనవలెను. ఎస్. ఎస్. సు.

వేగము : ఈ వస్తువు స్థిరముగా ఉన్నదా ? చలించు చున్నదా ? దాని ఇప్పటి వేగమేమి ? ఇటువంటి ప్రశ్నలను మనము పలుమారు వినెదముకదా ! కాని గణితశాస్త్ర దృష్టిలో ఇవి అర్థములేని ప్రశ్నలు ! ఒక వస్తువేగము ఆ వస్తువుయొక్క నికరమైన గుణముకాదు. ఆ వస్తువునకు మరియొక వస్తువునకో, లేదా దత్త నిరూపకాక్షములకో ఉన్న సంబంధము. వేరు నిరూపకాక్షములు తీసికొనినచో ఆ వస్తు వేగము మారును. ఉదా : ఒక రైలుబండిలో ఒక బిడ్డ నడచు వేగము ఒక గంటకు 1 కిలోమీటరు అనగా, మనము ఆ రైలుబండికి సాపేక్షముగా వేగమును చెప్పుచున్నామని విశదమగుచున్నది. భూతలమునకు సాపేక్షముగా ఆ బిడ్డ వేగమును గణించుటకు రైలు వేగమును, బిడ్డ వేగమును సంకలనము చేయవలెను. భూ కేంద్రముగుండ వెళ్ళు అక్షములను తీసికొనినచో, మూడు వేగములను సమానాంతర చతుర్భుజ న్యాయమును ఉపయోగించి కనిపెట్టవలెను. ఇవి రైలు బండిపై బిడ్డ వేగము, భూమిపై రైలు వేగము, భూ కేంద్రము చుట్టు ఆ భూతలము యొక్క భ్రమణవేగము.

కనుక వేగ విమర్శన సందర్భములందు ఒక దత్త ఆయత నిరూపకాక్షములున్నవనియే తీసికొనెదము.

కాలము t అగునపుడు ఒక బిందువుయొక్క నిరూపకములు $x = f(t)$; $y = g(t)$, $z = h(t)$ అయితే, ఆ బిందువు యొక్క తాత్కాలిక వేగమును 3 అంశములుగా వివరించ వచ్చును. x దిక్కులో దాని వేగము $dx/dt = f'(t)$; y దిక్కులో దాని వేగము $dy/dt = g'(t)$; z దిక్కులో దాని వేగము $dz/dt = h'(t)$; ఈ మూడు అంశములు స్థిరముగానున్నచో దాని గతి ఋజురేఖపై ఏకరూప చలనమనెదము. ఈ అంశములు స్థిరములుగా లేనిచో ఆ బిందువునకు త్వరణమున్నదని చెప్పెదము.

కోణీయ వేగము : ఒక బిందువుయొక్క ధ్రువ నిరూపకములు (r, θ) అనుకొనెదము. కాలము మారగా r, θ ఇవి రెండును మారును. dr/dt అనునది r దిక్కున వేగమనియు, $d\theta/dt$ ను కోణీయ వేగమనియు చెప్పెదము. అపుడు ఆ బిందువు P యొక్క వేగము OP దిక్కులో dr/dt యును, OP కి లంబ దిక్కులో $r\frac{d\theta}{dt}$ యు అగును. ఇచ్చట O ధ్రువకేంద్రము.

ఒక దృఢ వస్తువు ఒక అక్షము చుట్టు భ్రమణము చేయునపుడు, ఆ అక్షముగుండ వెళ్ళు వస్తువులో స్థిరముగా ఉన్న ఒక తలము, t సెకనులలో θ రేడియన్లు భ్రమణము చేసినచో, దాని తాత్కాలిక కోణీయవేగము $d\theta/dt$ అనెదము. అప్పుడు భ్రమణాక్షమునకు r దూరములో ఉన్న ఒక్కొక్క బిందువును ఒక వృత్తమున కక్షముగా కలిగియుండును. ఈ వృత్తముపై దాని వేగము $r\frac{d\theta}{dt}$ అగును. ఈ సూత్రములలో అన్నిటిలోను θ కోణమును రేడియన్లలో కొలువవలెను.

అటులనే గోళీయధ్రువ నిరూపకములను ఉపయోగించునపుడు, నిరూపకములు r, θ, ϕ అయితే,

r మాత్రము వృద్ధిఅగు దిక్కులోని వేగాంశము dr/dt ;

θ మాత్రము వృద్ధిఅగు దిక్కులోని వేగాంశము $r\frac{d\theta}{dt}$;

ϕ మాత్రము వృద్ధిఅగు దిక్కులోని వేగాంశము $r \sin\theta \frac{d\phi}{dt}$ అగును.

వేగము ఒక సదిశరాశి. కనుక దానిని దిక్కుగల ఋజురేఖ ఖండముల ద్వారా గుర్తించి, సమానాంతర చతుర్భుజ న్యాయము ద్వారా సంకలనము చేయవలెను. అ. స.

వేదాంగ జ్యోతిషము - I : సూర్య సిద్ధాంతము లోని ముఖ్యాంశములు వేదములందు కలవని నిరూపింప బడినది. సంస్కృత వాఙ్మయమునందు ఉత్సాహము పుట్టిన తర్వాత పాశ్చాత్యులు మన దేశములోని ప్రాచీన వ్రాత ప్రతులను సంగ్రహించిరి. అట్టివారిలో ముఖ్యులు జర్మనులు.

అప్పుడు పలురకములగు వ్రాతప్రతులు దొరికినవి. కాని వానికన్నిటికి సామాన్య ప్రామాణ్యము ఇవ్వలేదు. కలియుగ రాజవృత్తాంతమను గ్రంథము పూర్తిగా అచ్చులోనికి రాలేదు. అందుండి అచ్చుపడిన భాగములను చరిత్రకారులు నిరాదరించిరి.

వారి పరిపూర్ణ ఆదరణకు పాత్రములయిన జ్యోతిష గ్రంథములు పంచసిద్ధాంతిక, వేదాంగజ్యోతిషము. ఈ రెండు గ్రంథములు శిథిలావస్థలో దొరికినవి. శిథిల భాగములను సరిజేయుటకు ఇతర ప్రతులు దొరకలేదు. కొన్ని చోట్ల కల లోపములను తామే పూర్తిచేసిరి. ఈ రెండు గ్రంథములు సూర్యసిద్ధాంతములోని కొన్ని అభిప్రాయములకు విరుద్ధముగా నుండుటచే పాశ్చాత్యులకును, వారి యనుచరులగు భారతీయులకు వీని విమర్శన యందత్యుత్సాహము కలిగినది.

సూర్యసిద్ధాంతము సర్వజనాదరణీయముగ మనదేశము నందుండుటచే ఇతర గ్రంథములు ప్రచారములోనికి రాకుండెను. అహర్గణనముకు కలియుగమును సిద్ధాంతులు

వాడుటచే గొప్ప జ్యోతిషవిద్వాంసుడగు వరాహమిహిరుని శకమును కాలక్రమేణ అందరు మరచిపోయిరి.

ఇప్పుడు ప్రచురింపబడి ప్రచారములో నున్న వేదాంగ జ్యోతిషమను గ్రంథములోని ముఖ్యాంశములు క్రింద వివరింప బడినవి.

వేదాంగ జ్యోతిషములో మూడు విభాగములు కలవు. మొదటిది ఋగ్జ్యోతిషము. ఇందు 36 శ్లోకములు కలవు. గ్రంథకర్త లగధఋషి. ఇతని గురించి మన కేమియు తెలియదు.

రెండవది యాజుష జ్యోతిషము. ఇందు 43 శ్లోకములు కలవు. మూడవది సోమాకరుని వేదాంగ జ్యోతిషము. ఇతడు వేదములకు వ్యాఖ్యాత.

ఈ మూడు గ్రంథములలో నున్న విషయ మొక్కటే. కాని శ్లోకములు తారుమారుగా ఉన్నవి. శుద్ధములైన మూలగ్రంథములు కానరావు. మూడు గ్రంథముల నొక్కటిగా వ్రాసిన 49 శ్లోకములు అగును. అందు కొన్ని శ్లోకములకు అర్థము స్పష్టముగా లేదు.

వేదాంగజ్యోతిషమును పైతామహ సిద్ధాంతముతో చాల వరకు సరిపోల్చవచ్చును. 'పైతామహ' పదము ఆసిద్ధాంతము యొక్క అతిపురాతనత్వమును తెలియజేయుచున్నది. కాని ఈ సిద్ధాంతము సరికాదనియు, తప్పులతో గూడియున్నదనియు వరాహమిహిరుడు తీవ్రముగా పంచసిద్ధాంతికలో ఖండించినాడు.

వేదాంగ జ్యోతిషము ప్రకారము ఒక యుగము 5 సంవత్సరముల కాలము. ఒక యుగములో 1830 సావన దినములు, 1860 తిథులును కలవు. ఒక యుగములో 62 చాంద్రమాన మాసములు, 60 సౌరమాసములు కలవు. కాబట్టి ఒక యుగములో అనగా 5 సంవత్సరములలో 2 అధికమాసములు కలవు. తిథి క్షయములు 30. యుగమునందు చంద్రుడు 67 సారులు నక్షత్రమండలమును భ్రమణము చేయును; అనగా ఒక నక్షత్రము 67 సారులు వచ్చును.

ధనిష్ఠలో అమావాస్య వచ్చునపుడు యుగప్రారంభము అగును.

ఈ సూత్రముల ననుసరించి వేదాంగ జ్యోతిష పంచాంగము గణింపబడెను. శంకుచ్ఛాయ సహాయమున దిన విభజన సూచింపబడినది.

ఇందు రవిచంద్ర మధ్యగతులను వాడిరే కాని, శీఘ్రోచ్చ, మందోచ్చల నుపయోగించి సంస్కరణ చేయలేదు. దివియందు చంద్ర పథమును 27 సమభాగములుచేసి నక్షత్రములని వాడబడినవే కాని, వీనికిని తారామండలమునకును ఉండు సంబంధము వివరింప బడలేదు. రాశులు, వారములు, తారాగ్రహములు ఇందు కనబడవు. ఈ సూత్రముల తత్త్వమును గణితమూలముగా విమర్శింతము :

5 సౌర సంవత్సరములు =

$365.2422 \times 5 = 1826.2110$ దినములు

62 చాంద్రమాసములు =

$29.53059 \times 62 = 1830.8965$ దినములు

67 నాక్షత్ర మాసములు =

$27.32166 \times 67 = 1830.5512$ దినములు

వైదికయుగమునకు 5 సౌర సంవత్సరములు. ఒక యుగము ప్రారంభించునపుడు ధనిష్ఠాసహిత అమావాస్యతో ప్రారంభించిన, మరుచటి యుగము ప్రారంభించునపుడు ధనిష్ఠలో అమావాస్యరాదు; $1830.896 - 1826.211 = 4.685$ దినముల తర్వాత అమావాస్య వచ్చును. విమర్శకులకందరికి ఇది చాల చిక్కు కలిగించెను. వారు యుక్తులచే సమాధానమిచ్చిరి. కాని ఆ సమాధానము లన్నియు లెక్కలు తెలిసినవారికి ఎక్కసక్కెములుగ ఉండును. వీనికి తగిన సమాధానము ఒక్కటే కలదు. గణితము రాని వేదపండితుడు సులభముగా తిథులను కనుగొనుటకు కొన్ని సూత్రములను వ్రాసి యుంచుకొనెను. దాని కెవరు వేదాంగజ్యోతిషమను పేరు పెట్టిరో దేవుని కెరుక? అది గణితజ్ఞులకు నిరుపయోగమని చెప్పుటయే తగిన సమాధానము. నిజమగు వేదాంగ జ్యోతిషము సూర్యసిద్ధాంతము, దాని ననుసరించిన గ్రంథములు.

పాశ్చాత్య విమర్శకుల చర్చకు ఇట్టి పుస్తకములు తగిన అవకాశము ఇచ్చినవి. కాబట్టి వీనికి ప్రమాదమగు గౌరవము లభించినది. వీనికంటె ప్రశస్తములగు అనేక రహస్యగ్రంథములు ఎన్నియో బయటకు రాకపోయినవి.

తిథులు : వేదాంగజ్యోతిషము యొక్క ముఖ్యోపయోగము సులభముగా వైదిక కర్మలకు తిథి నిర్ణయము చేయుట; గ్రహముల గురించిన జ్ఞానము అనవసరము; నక్షత్రములు ఆవశ్యకము. అవి నిర్ణయింపబడుటకు తగిన సూత్రములందు కలవు.

ఒక తిథి యనగా ఒక చాంద్రమాన మాసములో 1/30 భాగము. కాబట్టి ఒక తిథి $= \frac{29.530588}{30} = 0.984353$ దినములు; వేదాంగ జ్యోతిషము ప్రకారము ఇట్లు వచ్చును.

ఒక తిథి = $\frac{61}{62}$ = 0·983871 దినములు ; ఇది సరియగు విలువకు 0·000428 దినము తక్కువ. అందుచే 2075 దినములలో ఒక తిథి పొరబాటు వచ్చును.

2075 దినములు = $5\frac{2}{3}$ సంవత్సరములు. దీనినే వేరు విధముగ చెప్పవచ్చును.

5 సంవత్సరములు = 1830 సావన దినములు.

62 అమావాస్యలు = 62 × 29·53059 = 1830.8965 దినములు.

0·8965 దినమును ఒక్క తిథిగా తీసికొనిన, ఒక యుగములో ఇంచుమించుగా ఒక తిథి ఎక్కువ యగును. తిథులను సరిపుచ్చుటకు ఒక యుగమునకు ఒకదినము చేర్చవలయును.

నక్షత్రములు : ఒక నాక్షత్ర దినము. $\frac{27·32166}{27}$ = 1·011913 దినములు; కాని వేదాంగ జ్యోతిషము ప్రకారము ఒక నాక్షత్ర దినము = $\frac{1830}{1809}$ = 1·011608 దినములు.

ఇందుచే 9 సంవత్సరములలో ఒక నక్షత్రము వ్యత్యాసము కలుగును.

ఇందుచే గణితజ్ఞులకు ఒక ముఖ్య విషయము విశదమగుచున్నది. వైదికులకు తిథి నక్షత్రము లావశ్యకములు. వైదిక కర్మలందు నిమగ్నులగుటచే వారికి సిద్ధాంత రీత్యా తిథి నక్షత్ర సాధన చేయుట సాధ్యపడదు. అప్పుడు అచ్చు పంచాంగములు లేవు. కాబట్టి ప్రతి దిన వైదిక కర్మలకు తగినట్లు సూత్రములు కొందరు వ్రాసి పెట్టుకొనిరి. వేదాంగ జ్యోతిషములో సవరణలకు కావలసిన సూత్రములు కానరావు. కావలసినప్పుడు వారు సిద్ధాంతులను కలిసికొని తగిన సవరణలను తెలిసికొనుచుండెడివారని తలచుట సమంజసము. వేదాంగజ్యోతిషమును ఒక సిద్ధాంత గ్రంథముగా తీసికొనకూడదు. అట్లు తలచుట భారతదేశ విద్యాప్రతిష్ఠకు గొప్ప కళంకము.

పంచాంగ రచన : 1. 60 సౌరమాసముల (ఒక యుగము)లో 62 అమావాస్యలు వచ్చును. కాబట్టి మూడవ సంవత్సరములో ఆషాఢమాసము తర్వాత అధిక శ్రావణము చేర్చిరి. ఐదవ సంవత్సరమున అధిక మాఘము చేర్చిరి.

2. ఒక యుగములో సావన దినములు 1830 ; తిథులు 1860. అనగా 30 తిథులు ఎక్కువ. 61 సావన దినములలో 62 తిథులు వచ్చుటచే, 61 దినముల తర్వాత ఒక క్షయ తిథిని చేర్చిరి.

3. ఒక యుగములో 1830 దినములలో 1809 నక్షత్రములు వచ్చును. అనగా $87\frac{1}{7}$ దినములలో $86\frac{1}{7}$ నక్షత్రము లేర్పడుటచే, పంచాంగములో ఒక దినమునకు ఒక నక్షత్రము వంతున 87 దినములకు లెక్కపెట్టి తర్వాత రెండు దినములకు ఒకే నక్షత్రమును వాడుదురు.

4. యుగములోని సంవత్సరముల పేర్లు : సంవత్సరము, పరివత్సరము, ఇడావత్సరము, అనువత్సరము, ఇద్వత్సరము.

పంచాంగముయొక్క నమూనా

	సంవత్సరము	పరివత్సరము	ఇడావత్సరము	అనువత్సరము	ఇద్వత్సరము
మాఘము	30	29	29	29	29
ఫాల్గుణము	30	30	30	30	30
చైత్రము	29	29	29	29	29
వైశాఖము	30	30	30	30	30
జ్యేష్ఠము	29	29	29	29	29
ఆషాఢము	30	30	30	30	29
శ్రావణము (అధికము)	—	—	29	—	—
శ్రావణము (నిజ)	29	29	30	29	29
భాద్రపదము	30	30	30	30	30
ఆశ్వియుజము	29	29	29	29	29
కార్తికము	30	30	30	30	30
మార్గశిరము	29	29	29	29	29
పుష్యము	30	30	30	30	30
మాఘము (అధికము)	—	—	—	—	29 లేదా 30 దినములు
సం॥ల లోని దినముల మొత్తము	355	354	384	354	383, 334

వేదాంగ జ్యోతిష గ్రంథముయొక్క కాలము, దేశము కనుగొనుటకు అవకాశమున్నది. ఆ గ్రంథము ప్రకారము కటకాయనమునాడు రాత్రి పగటిలో $\frac{2}{3}$ భాగము. ఇది గాంధార కాశ్మీర దేశములందు సంభవించును. గాంధారము వేదములకు జన్మభూమి యను విషయము సర్వజన సమ్మతము.

కాలమును గురించి చెప్పు శ్లోకము ఒకటి కలదు.

శ్లో॥ ప్రపద్యేతే శ్రవిష్ఠాదౌ, సూర్యచంద్రమసావుదక్ ।
సార్పార్ధే దక్షిణార్కస్థౌ, మాఘ శ్రావణయో సదా ॥

'ధనిష్ఠయందు అమావాస్య మొదలు సూర్యుడు ఉత్తరము నందును, అశ్లేషార్ధములో అమావాస్యమొదలు రవి దక్షిణమునందును ఉండును. ఇవి మాఘ, శ్రావణమాసములలో సంభవించును'.

మకరాయనము ధనిష్ఠాద్యమందు సంభవించుననపుడు గణితమూలముగ ఇది సుమారు 3500 ఏండ్లకు పూర్వము జరిగి యుండవలయునని తోచుచున్నది. ఆచార్య.

వేదాంగజ్యోతిషము - II : ఆరు వేదాంగములలో ఒకటైన వేదాంగ జ్యోతిషమునకు తొలిని ప్రామాణిక గ్రంథము ఉండియుండవచ్చును. ఇప్పుడున్నవి ఋగ్యజురథర్వ వేదములకు అనుషంగములుగా చేర్చబడినవి మూడు శకలములు. ఋగ్వేద జ్యోతిషము లగధునిచే విరచింపబడెనందురు. ఇది బహుశః వాటిలోకెల్ల ప్రాచీనతమము కావచ్చును. ఈ మూడు గ్రంథముల విషయసంపదలును ఇంచుమించు సమానములే. ఇందలి విషయములు క్రమబద్ధములుగా లేవు. వేదాంగ జ్యోతిషమందలి కొన్ని భాగములు ఇంకను వివరణరహితములుగనే మిగిలి యున్నవి. అందు పొందుపరుపబడిన గణిత పద్ధతులు, ఖగోళీయ పథకములు, పంచాంగ గణనములు 'సూర్యప్రజ్ఞప్తి, జ్యోతిష్కరండక' వంటి ప్రాచీన జైనవైదిక గ్రంథము లందలి విషయములను చాల పోలి యుండును.

5 సంవత్సరముల పరిమితిగల యుగమొకటి పంచాంగ గణనమున కంగీకరింపబడినది. సౌర, చాంద్ర, నాక్షత్ర, సావన దినములు వేరువేరుగ గుర్తించబడినవి. పంచాంగము చాంద్రమాన తంత్రము; కాని అది సూర్య, నక్షత్ర చారములతో ముడివేయబడియున్నది. అహోరాత్ర కాలముల నిష్పత్తి ఉత్తరాయణ, దక్షిణాయన దినములందు క్రమముగా 3 : 2, 2 : 3 గా గ్రహింపబడినది. రాశిచక్రము 27 నక్షత్రములక్రింద విభజింపబడినది. కాని ఆనాడు 12 రాశుల జ్ఞానము లేదు. 12 అంగుళముల (30·48 సెం. మీ.) శంకువు (కొయ్య), జలఘటీయంత్రము వాడుకలోనుండినట్లున్నది. కాని, క్రమానుసారమైనందిన ప్రత్యవేక్షణలను 'ఆధారముగా గొనినట్లు ప్రమాణము లెవ్వియు లేవు. పూర్ణాంక, భిన్నాంకముల కన్వయించు నాలుగు అంకగణిత మూలపరికర్మల పరిచయమున్నట్లు ఆనాటివారు నిర్వహించిన గణితమువలన తెలియుచున్నది.

ఖగోళ ప్రత్యవేక్షణలను ఆధారముగా గొనియే వేదాంగ జ్యోతిష కాలము నిర్ణయింపబడవలెను. వేదాంగ జ్యోతిషముయొక్క మూడు పాఠాంతరములును ఉత్తరాయణము శ్రవిష్ఠా (ధనిష్ఠ) రాశిలోనుండగా వేదాంగ జ్యోతిషయుగారంభము సంభవించినదని లిఖించినవి. ఈ ఆరంభము క్రీ. పూ. సుమారు 15 శతాబ్దములముందర జరిగియుండునని ఆ మూడు పాఠాంతరములు సూచించుచున్నవి. అనివార్య ప్రత్యవేక్షణ ప్రమాదములు ఉన్నవనుకొనినను ఈ కాలము క్రీ. పూ. 8 వ శతాబ్దముకన్న పశ్చాత్కాలీనము కానేరదు. సరస్వతి

వేధశాల - I : ఖగోళమందు సంచరించుచున్న గ్రహనక్షత్రాదుల స్థితిగతులను వేధించి, అవియన్నియు ఏ స్థానమునందున్నవో, ఏ వేగముతో ఎటుల పయనించుచున్నవో తెలిసికొనుటకు శాస్త్రజ్ఞులు యంత్రములను నిర్మించుచు వచ్చిరి. ఆ యంత్రశాలకు వేధశాలయని పేరు. ప్రస్తుతము ప్రతి దేశమునందు ఇట్టి వేధశాలలు పెక్కులు కలవు. బ్రిటన్‌లో గ్రీనిచ్ నగరమున బ్రిటిష్ గవర్నమెంటువారు రాజకీయ వేధశాల నొకదానిని నిర్మించిరి. ఆ వేధశాలాధికారులు గ్రహనక్షత్రాదుల స్థితిగతులను, గ్రహణాదుల కాలములను, తదితర ఖగోళీయ విషయములను గూర్చి గణితములతో కూడిన నావిక పంచాంగమును ఏటేట తయారుచేయుదురు. ఫ్రాన్స్‌దేశపు రాజధానియగు పారిస్ నగరమున గల వేధశాలలోకూడ మరియొక నావిక పంచాంగము తయారుచేయబడును. యునైటెడ్ స్టేట్స్‌లో విల్సన్ పర్వతముమీద ఒక వేధశాలయు, పాలమార్ పర్వతముమీద మరియొక వేధశాలయు నిర్మింపబడినవి. విల్సన్ వేధశాలలో నూరంగుళముల వ్యాసముకల దూరదర్శనియు, పాలమార్ వేధశాలలో 200 అంగుళముల వ్యాసముకల దూరదర్శనియు ప్రతిష్ఠింపబడినవి. తన్మూలమున ఖగోళీయ విషయ రహస్యములెన్నియో బయటపడినవి.

ప్రాచీన భారతములో ఎట్టి గగనవేధయంత్రములుండినవో మనకు సంపూర్ణముగ తెలియదు. కాని నేడు మనకు ఉపలబ్ధములయిన సంస్కృత సిద్ధాంత గ్రంథముల నుండి కొంతవరకు ఆనాటి వేధక్రమము తెలియవచ్చినది. జయసింహుడను ప్రభువు ఢిల్లీలో 17 వ శతాబ్దమున నిర్మించిన జంతర్ మంతర్ వేధశాల శిథిలమైనను నేటికిని నిలిచియున్నది. ఇప్పుడు వేధశాలలో గల కొన్ని సాధనములను వివరింతుము.

నాక్షత్రఘటీయంత్రము : ఇది మామూలు గడియారము వంటిదే. దీని సహాయమున ఒక నభోమూర్తియొక్క

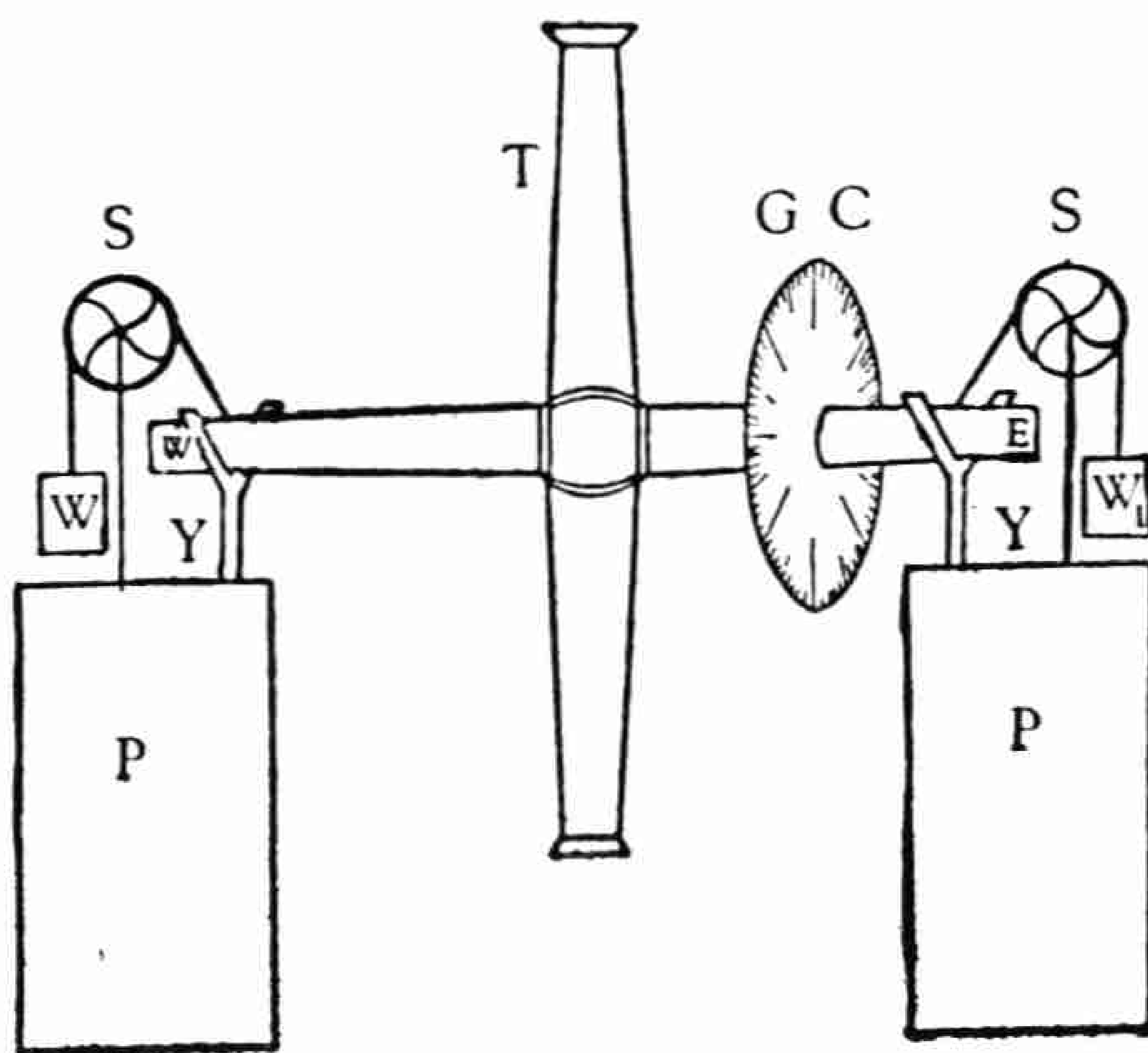
యామ్యోత్తరవృత్తతరణ కాలమును గమనించి విషువాంశ కనుగొనవచ్చును.

కాలమానము-ఘటికాయంత్రము : ఇది ప్రతి ఓడయందు ఉండును, గ్రీనిచ్ కాలమును చూపును. దేశాంతరము కనుగొనుటకు ఉపయోగపడును. రేడియో ప్రసారముల వలన దీని ఉపయోగ మిప్పుడు తగ్గిపోయినది.

దూరదర్శని : చూ. భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు పు. 374.

యామ్యోత్తర వృత్తీయము (ప్రతరణ యంత్రము): ఇది గ్రహనక్షత్రాదులు యామ్యోత్తర వృత్తలగ్నము లగునపుడు వాటిని వేధించుటకు ఉపయోగించు యంత్రము (చూ. చిత్రము 399).

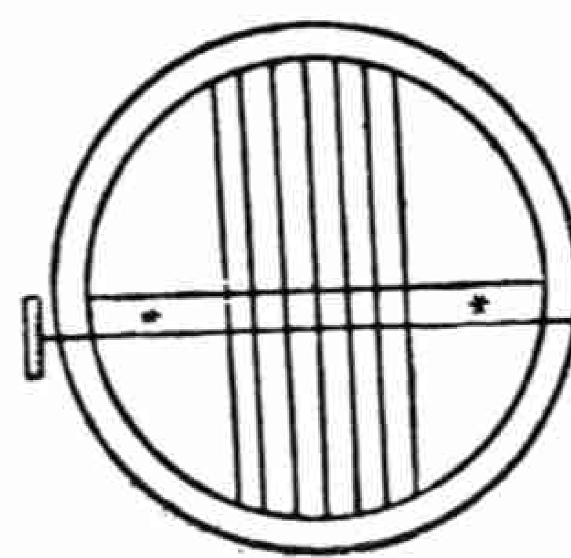
T అనునది దూరదర్శని. అది తూర్పు పడమరలుగా వ్యాపించియుండు EW అను ఇరుసు మీద మధ్యలో లంబముగా నమర్చబడియుండును. P, P దిమ్మలపై నిలువుగా అమర్చబడిన Y ఆకారము గల ఆధారములమీద ఆ ఇరుసు అమర్చబడియుండును.



చిత్రము 399

ఆధారములు రెండును సమోన్నతములుగా నుండును. ఇరుసుయొక్క బరువును చాలవరకు W, W_1 అను భారములు వహించి, S, S అను చక్రములమీద వ్యాపించియున్న త్రాళ్ళచేత వ్రేలాడుచుండును. అందుచేత EW ఆధారము Y ఆధారములమీద తేలికగా తిరుగుచుండును. ఆ ఆధారములను సమోన్నతములను చేయుటకును, తూర్పుగ, పశ్చిమముగ జరుపుటకును అవకాశము కలదు. ఇరుసు తిరుగుచుండగా దూరదర్శని ఎప్పుడును యామ్యోత్తరవృత్తమందే తిరుగుచుండును. E, W బిందువులవద్ద నుండు రెండు దీపములచేత దూరదర్శని యొక్క చతుర్దర్పణము ప్రకాశించునట్లు ఏర్పాటు చేయబడియుండును. చతుర్దర్పణమందు బేసి సంఖ్య గలిగి సమానాంతర స్థితిలో ఉన్న కొన్ని లోహ సూత్రములు దక్షిణోత్తరముగా ఉండును. రెండు లోహ సూత్రములు తూర్పు పడమరలుగ నుండును. దక్షిణోత్తర సూత్రములలో మధ్య సూత్రము సాక్షాత్ యామ్యోత్తర వృత్తముతో ఏకీభవించును.

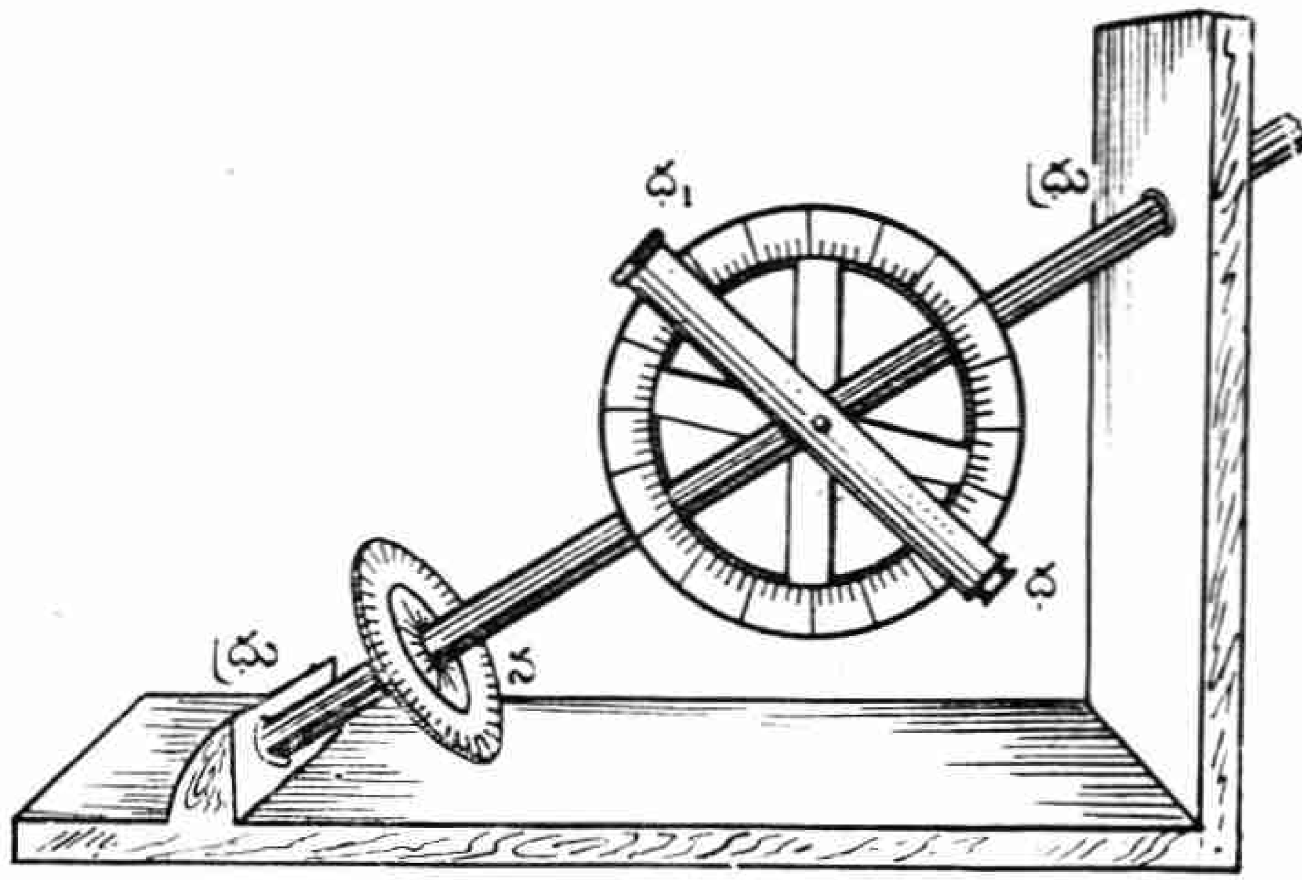
కాలగ్రాహియను ఒక చిన్న యంత్రము వికలావయవ పర్యంత కాలమును తెలిసికొనుటకు ఉపయోగించును. ఒక విద్యుదయస్కాంతమును ఒక ఘటీయంత్రముతో సంబంధింపజేసి, ఒక విద్యుత్ప్రవాహమందుంచబడును. విద్యుత్ప్రవాహమున్నప్పుడు విద్యుదయస్కాంత శక్తిచేత తత్సంబద్ధమయిన ఒక లేఖని స్తంభమునకు చుట్టబడిన ఒక శ్వేత పత్రముమీద రేఖలు గీయుచుండును. ప్రతి వికలారంభమందు విద్యుత్ప్రవాహము ఒక త్రుటికాలము నిలిచిపోవును. అప్పుడు అయస్కాంతము లేఖనిని విడుచుటచే ఆ పత్రముమీద ఆ లేఖని ఆ త్రుటికాలము వ్రాయుట మానును. ప్రతి వికలము ఆ రేఖ లిట్లు విచ్ఛిన్నములగుచుండును. అట్లు గీయబడిన ఒక రేఖయొక్క పొడవును కొలుచుటచేత ఎంత వికలాభాగము గతించినదో తెలిసికొనుట సాధ్యమగును.



యామ్యోత్తర వృత్తచక్రము : ఈ యంత్రము యామ్యోత్తర వృత్తీయము వంటిదే. కాని, దీనివలన గ్రహనక్షత్రాదుల యొక్క యామ్యోత్తర వృత్తలగ్న కాలమే కాక, వాటియొక్క క్రాంతిని, నతాంశమును కూడ తెలిసికొనవచ్చును. దూరదర్శనికి ఆధారభూతమయిన ఇరుసునకు భాగాది విభాగాంకితమై, క్షితిజమునకు లంబముగా నుండి దానితోపాటు తిరుగునట్టి ఒక చక్రమమర్చబడి యుండును. ఇరుసుతోపాటు దూరదర్శనియొక్క భాగాంకిత చక్రము తిరుగుచుండగా చక్రగత భాగాది విభాగములు గుర్తింపవచ్చును. దూరదర్శనిని మస్తకాభిముఖముగా జేసికొని, కన్పట్టిన భాగాది విభాగములను గుర్తించుకొనవలయును. అట్లే దూరదర్శనిని ధ్రువాభిముఖముగా జేసికొని చక్రగత భాగాదికమును దానికి అమర్చిన సూక్ష్మదర్శని సాహాయ్యముచేత తెలిసికొనవలయును. యామ్యోత్తర వృత్తలగ్న సమయమున వేద్ధవ్య నక్షత్రము చక్రగత భాగాదికమును తెలిసికొనవలయును. మస్తకీయ భాగాదికము నుండి నక్షత్రీయ భాగాదికమును తీసివేసినచో నక్షత్రము యొక్క నతాంశము లభించును. ధ్రువీయ భాగాదికము నుండి నక్షత్రీయ భాగాది శోధనముచేత నక్షత్రము యొక్క ధ్రువాంతరము తెలియును. కాలగ్రాహి సాహాయ్యమువలన వెనుక చెప్పినరీతిని యామ్యోత్తర వృత్తలగ్న కాలము స్ఫుటముగా తెలియగలదు.

నాడీవలయ యంత్రము : ఈ యంత్రమందు ధధ$_1$ అను ధ్రువయష్టి ధ్రువాభిముఖముగ నుండును. ఇది తిరుగుటకు వీలుగా నుండును.

ఈ యష్టికి లంబముగా క్రాంత్యక్షమను ఒక చిన్న ఇరుసు సంబద్ధముగనుండి, తత్కేంద్రముగాను, తల్లంబము గాను 'క' అను క్రాంతి చక్రము భాగుగా దివి భాగాంకితమై యుండును. క్రాంత్యక్షమునకు రెండవ చివర ఒక

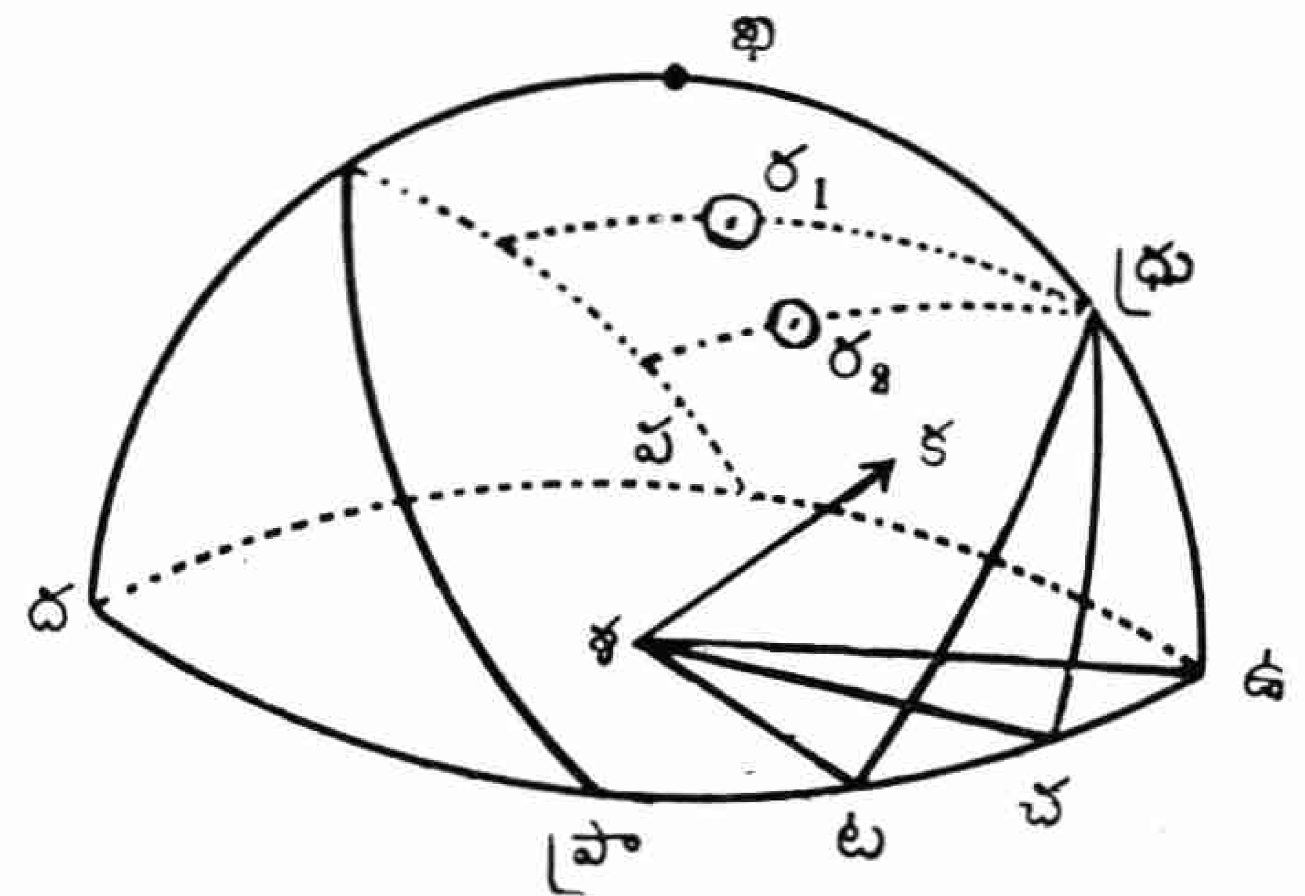


చిత్రము 400 నాడీవలయ యంత్రము

దూరదర్శని తిరుగుటకు వీలుగా కట్టబడియుండును. ధ్రువయష్టికి అధోభాగమందు న అను నతకాల చక్రమొకటి భాగాంకితమై యుండును. తలము ధ్రువయష్టికి లంబముగానుండును. క్రాంతి చక్రతలము ధ్రువయష్టికి సామ్యముగా నుండును. ధ్రువయష్టితోపాటు నతకాల చక్రము, క్రాంతి చక్రము, దూరదర్శని అన్నియు తిరుగుచుండును. నతకాలచక్రముమీద భాగాధికమును తదుపరిన్యస్తమయిన ఒక సూక్ష్మదర్శని చేత సుసూక్ష్మముగా వికలాపర్యంతము గుర్తింపవచ్చును. దూరదర్శని యామ్యోత్తర వృత్తతలమందుండగా నతకాలచక్రము శూన్యాంకమును సూచించును. అపుడు నతకాలము శూన్యమని భావము. ధ్రువయష్టిని త్రిప్పుటచేత క్రాంతి చక్రము ఏ ధ్రువ ప్రోతవృత్తముతోనైనను ఏకీభవించునట్లు చేయవచ్చును. క్రాంతి చక్రమును ఈ ప్రకారముగా ఇచ్చవచ్చిన ధ్రువప్రోతముతో ఏకీభవింపజేసి, అచ్చట దానిని స్థిరీకరించి దూరదర్శనిని త్రిప్పి, ఏ నక్షత్రమునకైనను అభిముఖముగా చేయవచ్చును. ఈ ప్రకారము దూరదర్శనికి ధ్రువయష్టితోపాటు ప్రాక్పశ్చిమములందును, తదుపరి దక్షిణోత్తరములందును దిశాద్వయ భ్రమణార్హత కలదు. కావున ఖగోళమందు ఏ నక్షత్రమునైనను చూడవచ్చును. దూరదర్శనియందు ఏ నక్షత్రము లగ్నమగునో దాని నతకాలమును నతకాల చక్రము సూచించును. క్రాంతి చక్రము దాని క్రాంతిని సూచించును.

ఈనాడీవలయముచేత గ్రహముల వ్యాసములు, నక్షత్రయుగళముల మధ్య దూరములు మొదలగు అల్పమయిన కొలతలు కూడ సాధింపవచ్చును.

స్పష్టసావన కాలమానము : ఈ యంత్రముచేత స్పష్టసావనకాలము కొలువబడును. భారతీయులకు జాతక ముహూర్తాదులందు ఈ స్పష్టసావన కాలమానమే ప్రధానము. ధ్రువాభిముఖముగ శకయనునది శంకువు. దాని ఛాయ క్షితిజతలములో తిరుగాడుచుండగా దాని అగ్ర తెలియనగును. భారతీయ సిద్ధాంతులు అగ్రను ప్రాగ్బిందువు మొదలు క్షితిజవృత్తీయ చాపముగా కొలుతురు.



చిత్రము 401

పాశ్చాత్య సిద్ధాంతములో అగ్రను ఉదగ్బిందువుమొదలు క్షితిజవృత్తీయ చాపముగా కొలుతురు. దీనిని ఇంగ్లీషులో అజిమత్ అని అందురు. చిత్రము 401 లో ర$_1$, ర$_2$ అనునవి రవియొక్క రెండు స్థానములు. ర$_1$ ధ్రు చ, ర$_2$ ధ్రు ట రవియొక్క ధ్రువప్రోత వృత్తములు. శచ, శట రెండును శంకుచ్ఛాయలు. ర$_1$ ధ్రుఖ, ర$_2$ ధ్రుఖ రవియొక్క నతకాలములు.

ర$_1$ ధ్రు ఖ = ఉ ధ్రు చ కోణ తుల్యము

ర$_2$ ధ్రు ఖ = ఉ ధ్రు ట కోణ తుల్యము

ఉ ధ్రు చ, ఉ ధ్రు ట లు సమకోణత్రిభుజములు. కావున

ఉధ్రుచాపజ్యా = ఉధ్రుచాప స్పర్శజ్యా × ఉధ్రుచకోణ స్పర్శకోటి జ్యా

ఉధ్రుచాపము = అక్షాంశము. ఈ సూత్రమువలన ఉచ చాపము తెలియగా ఉధ్రుచకోణము తెలియనగును. ఈ కోణము రవియొక్క నతకాలము కావున స్పష్టరవికాలము నిచ్చును.

షష్ఠకము (సెక్స్టంట్) : పరస్పరము 60° కోణములో ఉన్న రెండు వ్యాసార్ధముల మధ్య ఉన్న వర్తులచాపమునకు షష్ఠకము అని పేరు. ఇది ఖగోళముల మధ్య ఉన్న కోణీయ దూరమును డిగ్రీలలో కనుగొనుటకై ఉపయోగించు పరికరము. డి. ఏ. సో.

వేధశాల II : ప్రపంచము మొత్తముమీద, భారత దేశములోను ఉన్న ప్రసిద్ధమైన కొన్ని గొప్ప వేధశాలలను గురించి ఈ వ్యాసములో సంక్షిప్తముగ వ్రాయబడినది.

మౌంట్ విల్సన్ వేధశాల : కాలిఫోర్నియా యందలి మౌంట్ విల్సన్ పర్వతముపైన సముద్ర మట్టమునకు 5800 అడుగుల (1767 మీ.) ఎత్తున ఈ వేధశాల 1904లో జి. ఇ. హేల్‌చే వ్యవస్థాపితమైనది. ఇచ్చటకు 16 కి. మీ. దూరమున ఉన్న పాసడేనాలో ఈ వేధశాల కార్యాలయములు, లేబొరేటరీలు, వర్క్‌షాప్‌లు ఉన్నవి. ఈ వేధశాల వాషింగ్‌టన్ కార్నేజీ ఇనిస్టిట్యూట్ ఖగోళభౌతిక శాస్త్ర డిపార్ట్‌మెంట్.

పెక్కు సంవత్సరములు ప్రపంచములోకెల్ల గొప్ప దూరదర్శనిగా పేరు పొందిన 100 అంగుళముల (254 సెం. మీ.) పరావర్తన దూరదర్శని ఇచ్చట 1919లో స్థాపితమైనది. దీని చలనభాగములే 101·6 మెట్రిక్ టన్నుల బరువుండును. అతి దూరస్థ నక్షత్రములపై, నెబ్యులాలపై పరిశీలనలకు ఇది ఉపయోగించబడినది. ఈ పరిశోధనలలో ఏ. ఏ. మైకేల్‌సన్ నక్షత్ర వ్యాసముల నిర్ణయము, ఇ హబ్లె - ఎమ్. ఎచ్. హూమ్సన్‌ల అతి దూరస్థ మందాకినుల వ్యాకోచ చలనముల పరిశీలనలు, డబ్ల్యు. ఎస్. ఆడమ్స్ నాక్షత్ర దూరముల నిర్ణయమునకై స్పెక్ట్రోగ్రాఫిక్ పద్ధతి కల్పన ఇమిడియున్నవి.

సూర్యునిపై ఖగోళభౌతిక పరిశీలనలు సల్పుటలోను, సౌర కళంకముల అయస్కాంతిక ధర్మములను నిత్యము రికార్డు చేయుటలో కూడ ఈ వేధశాల ప్రత్యేక కృషి చేసినది. ఇచ్చట ఒక 60 అంగుళముల (152·4 సెం. మీ.) పరావర్తన దూరదర్శని, పెక్కు గోపుర దూరదర్శనులు కూడ కలవు.

మౌంట్ పాలమార్ వేధశాల : పాసడేనాకు ఆగ్నేయముగా 200 కి. మీ. దూరములో శాన్‌జాసింటో పర్వతముల పైన సముద్ర మట్టమునకు 5600 అడుగుల (1606 మీ.) ఎత్తున 1948లో ఈ వేధశాల వ్యవస్థాపితమైనది. ప్రపంచములోకెల్ల గొప్పది అయిన 200 అంగుళముల (508 సెం. మీ.) పరావర్తన దూరదర్శని ఇచ్చట కలదు. కాలిఫోర్నియా ఇనిస్టిట్యూట్ ఆవ్ టెక్నాలజీ, వాషింగ్‌టన్ కార్నేజీ ఇన్‌స్టిట్యూట్‌ల సంయుక్త అధికారము క్రింద ఈ వేధశాల నడుపబడుచున్నది.

ఈ దూరదర్శనికి 360,000 మానవ నేత్రములు సేకరించునంత వెలుతురును సేకరించు శక్తి, ఛాయా చిత్రముల తీయుటలో అంతరాళమందు లక్షకోట్ల జ్యోతిర్వత్సరము *ల దూరమును చొచ్చుకొని పోగలశక్తి కలదు. ఈ దూరదర్శని మొత్తము భారము 508 మెట్రిక్ టన్నులు. దర్పణము మాత్రమే 15 మెట్రిక్ టన్నుల బరువుండును.

(1) అతి దూరస్థ మందాకినులు - ఒక దానినుండి మరొకటి దూరముగా చలించి పోవునట్టి వాటి గమనము (2) నక్షత్రముల భౌతిక లక్షణములు - విశ్వము అంతట రాసాయనిక మూలకముల వ్యాప్తి (3) మన మందాకినిలోను, ఇతర నాక్షత్ర వ్యవస్థలలోను నక్షత్రముల పుట్టుక, పరిణామములు (4) చంద్రుడు, గ్రహముల ఉపరితలముల పరిశీలన మొదలగు ప్రసిద్ధ పరిశీలనలు ఈ వేధశాలలో చేయబడినవి.

గ్రీనిచ్ వేధశాల : చూ. పు. 257.

ప్రక్క పుటలో (555) పట్టికలో ప్రపంచములోకెల్ల గొప్ప రేడియో, పరావర్తన, వక్రీభవన (భుగ్న) దూరదర్శనులు, వాటిని కలిగియున్న వేధశాలలు పేర్కొనబడినవి.

కొడైకెనాల్ ఖగోళభౌతిక వేధశాల : పలనీపర్వతములపై సముద్ర మట్టమునకు 7700 అడుగుల (2347 మీ.) ఎత్తున నిర్మింపబడిన ఈ వేధశాల, సౌర భౌతికశాస్త్ర వికాసమునకు దోహద మొనర్చి ప్రపంచఖ్యాతిని పొందినది. ఇండియాలో ఖగోళ, భూగోళశాస్త్రములందు, నౌకాయానములందు ప్రాయోగిక విజ్ఞానమును పెంపొందించు లక్ష్యముతో ఈస్టిండియా కంపెనీ వారిచే 1792 లో మద్రాసు వేధశాల వ్యవస్థాపితమైనది. డైరెక్టర్ పాగ్‌సన్, అతని ఉత్తరాధికారి మిచీస్మిత్ ప్రోద్బలముచే దాని శాఖగ ఈ వేధశాల 19 వ శతాబ్ద చివరి భాగములో స్థాపితమైనది.

ఈ వేధశాలయందు దాదాపు 60 ఏండ్లు ఖగోళ భౌతిక శాస్త్రజ్ఞులు ప్రతిదినము సూర్యుని అవేక్షించి, ఛాయా చిత్రములు తీసి ఫలితములను వివరించిరి. సౌరవర్ణ మండలము (సోలార్ క్రోమోస్ఫియర్), ఐదు సూర్య కళంకముల ఆవర్తనములపై కాంతిమండలముల దైనిందిన లక్షణములను చూపు ఛాయా చిత్రముల రికార్డు ఈ వేధశాలలో తయారుచేయబడినది. ఇట్టి కృషిలో మౌంట్ విల్సన్ వేధశాల (యునైటెడ్ స్టేట్స్), మ్యూడాన్ వేధశాల (ఫ్రాన్స్)లు మాత్రమే దీనికి సాటి.

ఈ వేధశాల అత్యున్నత దశలోనికి వచ్చుటకు మిచీస్మిత్, ఎవర్‌షెడ్, రాయడ్స్, ఏ.ఎల్. నారాయణ, దాస్, బప్పు మొదలగు డైరెక్టర్‌ల విశేష కృషి కారణము.

* జ్యోతిర్వత్సరము అనగా సెకనుకు 186000 మైళ్ల (299338 కి. మీ.) వేగముతో ఒక సంవత్సరము కాలము వెలుతురు ప్రయాణము చేయు దూరము $5{\cdot}88 \times 10^{12}$ మై.

గొప్ప రేడియో దూరదర్శనులు

వేధశాల	ప్రదేశము	దూరదర్శని	వ్యవస్థాపన
		(అడుగులలో)	
నేవల్ రీసెర్చ్ లేబొరేటరీ	సుగర్‌గ్రూవ్ (యునైటెడ్ స్టేట్స్)	600	1962
మాంచెస్టర్ యూనివర్సిటీ	జోడ్రెల్ బాంక్ (ఇంగ్లండు)	250	1957
రేడియో ఫిజిక్స్ లేబొరేటరీ	సిడ్నీ (ఆస్ట్రేలియా)	230	1961
అసోసియేటెడ్ యూనివర్సిటీస్	గ్రీన్ బాంక్ (యునైటెడ్ స్టేట్స్)	140	1962

గొప్ప పరావర్తన దూరదర్శనులు

		(అంగుళములలో)	
పాలమార్	పాలమార్ మౌంట్ (కాలిఫోర్నియా)	200	1948
లిక్	మౌంట్ హామిల్టన్ (కాలిఫోర్నియా)	120	1959
క్రైమియన్	నాక్నీ (క్రైమియా)	102	1960
మౌంట్ విల్సన్	మౌంట్ విల్సన్ (కాలిఫోర్నియా)	100	1918
మెక్ డొనాల్డ్	ఫోర్ట్ డేవిస్ (టెక్సాస్)	82	1939
హాంటే ప్రావిన్స్	సెయింట్ మైకేల్ (ఫ్రాన్స్)	77	1958
డేవిడ్ డన్‌లప్	అంటారియో (కెనడా)	74	1935
రాడ్ క్లిఫ్	ప్రెటోరియా (దక్షిణ ఆఫ్రికా)	74	1948
మౌంట్ స్ట్రోమ్‌లో	కెనబెర్రా (ఆస్ట్రేలియా)	74	1955
హెల్వాన్	హెల్వాన్ (ఈజిప్టు)	74	1960
ఒకాయామా	కామోగాటా (జపాన్)	74	1960
డొమినియన్ అస్ట్రోఫిజికల్	విక్టోరియా	72	1918

గమనిక : సోవియట్ రష్యావారు 236 అంగుళముల వ్యాసముగల పరావర్తన దూరదర్శనిని నిర్మించుచున్నారు.

గొప్ప వక్రీభవన (భగ్న) దూరదర్శనులు

		(అంగుళములలో)	
యేర్కస్	విలియమ్స్ బే	40	1897
లిక్	మౌంట్ హామిల్టన్ (కాలిఫోర్నియా)	36	1888
పారిస్	మ్యూడాన్ (ఫ్రాన్స్)	33	1893
అల్లెఘెనీ	పిటస్ బర్గ్	32	1899
పాట్స్‌డామ్	పాట్స్‌డామ్ (జర్మనీ)	30	1914
గ్రీనిచ్	గ్రీనిచ్ పార్క్ (ఇంగ్లండు)	28	1894

1 అడుగు = 0·3048 మీటరు ; 1 అంగుళము = 2·54 సెంటీమీటర్లు.

ఇచ్చట సౌరభౌతికశాస్త్రములో ఆవిష్కరింపబడిన పెక్కు నూతన ఫలితములలో అతి ముఖ్యమైనది : 'సూర్యకళంకములలోని తరంగ గమనము (రేడియల్ మోషన్)'. ఈ ఆవిర్భావమునకు ఆవిష్కర్త పేరుతో 'ఎవర్ షెడ్ ఫలితము' అని పేరు పెట్టబడెను. సూర్యకళంకములోని అయస్కాంతత్వము - వాయు గతిశాస్త్రము (గాస్ డైనమిక్స్) ల మధ్యగల సంకీర్ణ అంతర సంబంధముపై ఎట్టి పరిశీలనకైనను పై ఫలితము అతి ముఖ్యమైనది.

ఇటీవలి సంవత్సరములలో ఒక సౌరదూరదర్శని, ఒక కొరోనాగ్రాఫ్, ఒక మోనోక్రోమాటిక్ హీలియోగ్రాఫ్ ఈ వేధశాలలో నూతనముగ చేర్చబడినవి. ఈ నూతన సౌరదూర్శదనిలో 120 అడుగుల (36.5 మీ.) నాభ్యాంతరము కలిగి నాభివద్ద 13 అంగుళముల (33 సెం. మీ.) వ్యాసముగల సూర్య ప్రతిబింబమును ఏర్పరచునట్టి 15 అంగుళముల (38·1 సెం. మీ.) కటకము అమర్చబడినది. కొరోనాగ్రాఫ్ కల్పిత సూర్యగ్రహణమును ప్రదర్శించునట్టి

దూరదర్శని. నూతన మోనోక్రోమాటిక్ హీలియోగ్రాఫ్ సహాయమున ఉదయము 7 గంటలనుండి సాయంత్రము 5 గంటలవరకు సూర్యునిపై చాక్షుష, ఛాయాచిత్ర అవేక్షణలు అవిచ్ఛిన్నముగా సాగుచున్నవి.

ఈ వేధశాలకు అనుషంగములుగ ఒక అయస్కాంతత్వ వేధశాల (1949), అయనోస్ఫెరిక్ ప్రయోగశాల (1952) లో ప్రారంభింపబడి ఆయారంగములలో ఉత్తమ కృషి సాగించబడుచున్నది.

రేడియోఖగోళశాస్త్రములో కూడ కొడైకెనాల్ వేధశాల తన కృషిని ప్రారంభించినది. నేడు ఈ వేధశాలలో 60 Mc/*sec*, 100 Mc/*sec*, 200 Mc/*sec* లతో పనిచేయు మూడు రేడియో దూరదర్శనులున్నవి. సౌర, మందాకినీల రేడియో వికిరణము (రేడియేషన్) ను పరిశీలించు నిమిత్తము 20 అడుగుల (6·1 మీ.) వ్యాసముగల్గి 3000 Mc/*sec* తో పనిచేయు పరాస ఆకృతిగల రేడియో దూరదర్శని ప్రస్తుతము నిర్మాణములో ఉన్నది.

నిజామియా వేధశాల (హైదరాబాదు) : ఈ వేధశాల నైజామ్ ప్రభుత్వమువారిచే 1908 లో వ్యవస్థాపితమై ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ ఆధిపత్యమునకు 1919 లో మార్చబడినది. నిజామియా వేధశాల భౌగోళిక స్థానము (అక్షాంశము $17\frac{1}{2}^{\circ}$ ఉ. రేఖాంశము $78\frac{1}{2}^{\circ}$ తూ.) చంద్రుడు, గ్రహముల సమస్యల పరిశోధనలకు మిక్కిలి అనుకూలమైనది.

15 అంగుళముల (38·1 సెం. మీ.) విజువల్ గ్రబ్ రిఫ్రాక్టర్, 8 అంగుళముల (20·3 సెం. మీ.) ఫొటో - విజువల్ ఎస్ట్రోగ్రాఫ్‌లు ఈ వేధశాల ఆరంభ పరికరములు. ఆ తర్వాత ఒక హేల్ స్పెక్ట్రోహీలియోస్కోప్, ఒక ట్రాన్‌సిట్ పరికరము (ప్రతరణ యంత్రము), రెండు మిల్నే - షా సెయిస్మోగ్రాఫ్‌లు చేర్చబడినవి.

1909 - 46 ల మధ్య కొనసాగింపబడిన 'కార్టే - డ్యూ - సియల్' అంతర్జాతీయ ప్రోగ్రామ్‌లో ఈ వేధశాల పాల్గొనుటలో దీని ప్రాముఖ్యత వెల్లడియగుచున్నది. -17° నుండి -23° వరకు, $+36^{\circ}$ నుండి $+39^{\circ}$ వరకు క్రాంతి మండలములలో ఉన్న ఆకాశ పటములను తయారుచేసి, 800,000 నక్షత్రములతో కూడిఉన్న 11 ఎస్ట్రోగ్రాఫిక్ కాటలాగులను ఈ వేధశాల ప్రచురించినది.

అంతర్జాతీయ జియోఫిజికల్ ఇయర్ (1957-59) ప్రోగ్రామ్‌లో సౌరవేధశాలగా ఇది సహకరించినది. 1946 వరకు ఈ వేధశాల ప్రథమశ్రేణి మెట్రోలాజికల్ స్టేషన్‌గ ఉన్నది. ఆతర్వాత ఆ కార్యక్రమమును ఇండియన్ మెట్రోలాజికల్ డిపార్ట్‌మెంట్ వారు తీసికొనిరి.

నిజామియా వేధశాలను అభివృద్ధిచేయుటకు, ఆధునిక పద్ధతులలో ఖగోళశాస్త్ర డిపార్ట్‌మెంట్ నొకదానిని ప్రారంభించుటకు ఉస్మానియా యూనివర్సిటీకి యూనివర్సిటీ గ్రాంట్స్ కమీషన్‌వారు రెండవ పంచవర్ష ప్రణాళికలో కొంత ధనము గ్రాంటుగా ఇచ్చిరి. 1959-60లో ఖగోళశాస్త్ర డిపార్ట్‌మెంట్ ప్రారంభింపబడినది. ఖగోళశాస్త్రములో బి. ఎస్. సి; ఎమ్. ఎస్. సి; పి. ఎచ్. డి; పట్టములకు ప్రయోగ పూర్వక బోధన ఇచ్చట చేయబడుచున్నది.

యునైటెడ్‌స్టేట్స్ నుండి లభించిన ధన సహాయముతో 48 అంగుళముల (121·9 సెం. మీ.) పరావర్తన దూరదర్శని ఒకటి హైదరాబాదు నగరమునకు ఆగ్నేయముగా 35 మైళ్ల దూరములో ఉన్న రంగాపూర్ గ్రామ సమీపమున నెలకొల్పబడుచున్నది. ఆగ్నేయ ఆసియాలో ఉన్న ఇట్టి పరికరములలో ఇదే పెద్దదైనది.

ప్రస్తుతము నక్షత్ర కిరణ వేగముల (రేడియల్ వెలాసిటీస్ ఆవ్ స్టార్స్) ను నిర్ణయించు కార్యక్రమములో మౌంట్ విల్సన్ వేధశాలతో ఈ వేధశాల సహకరించుచున్నది.

సౌర ప్రవృత్తి (సోలార్ ఆక్టివిటి) పై కొనసాగుచున్న అంతర్జాతీయ ప్రబోధరహిత సూర్య సంవత్సర (1964-65) ప్రోగ్రామ్‌లో కూడా నిజామియా వేధశాల పాల్గొనుచున్నది.

ఢిల్లీ వేధశాల : జంతర్ మంతర్ అను పేరుతో భారత రాజధాని నగరమున చూడదగిన దృశ్యస్థలములలో ఒకటిగ ప్రసిద్ధి నొందిన ఈ వేధశాల జయసింహునిచే నిర్మింపబడిన ఐదు వేధశాలలో మొట్టమొదటిది. దీని నిర్మాణకాలము 1724 ప్రాంతము. దీని ముఖ్యాంశములు :

అక్షాంశము ... ... 28° 37′ 35″ ఉ.

రేఖాంశము ... 77° 13′ 5″ గ్రినిచ్‌కు తూర్పుగ.

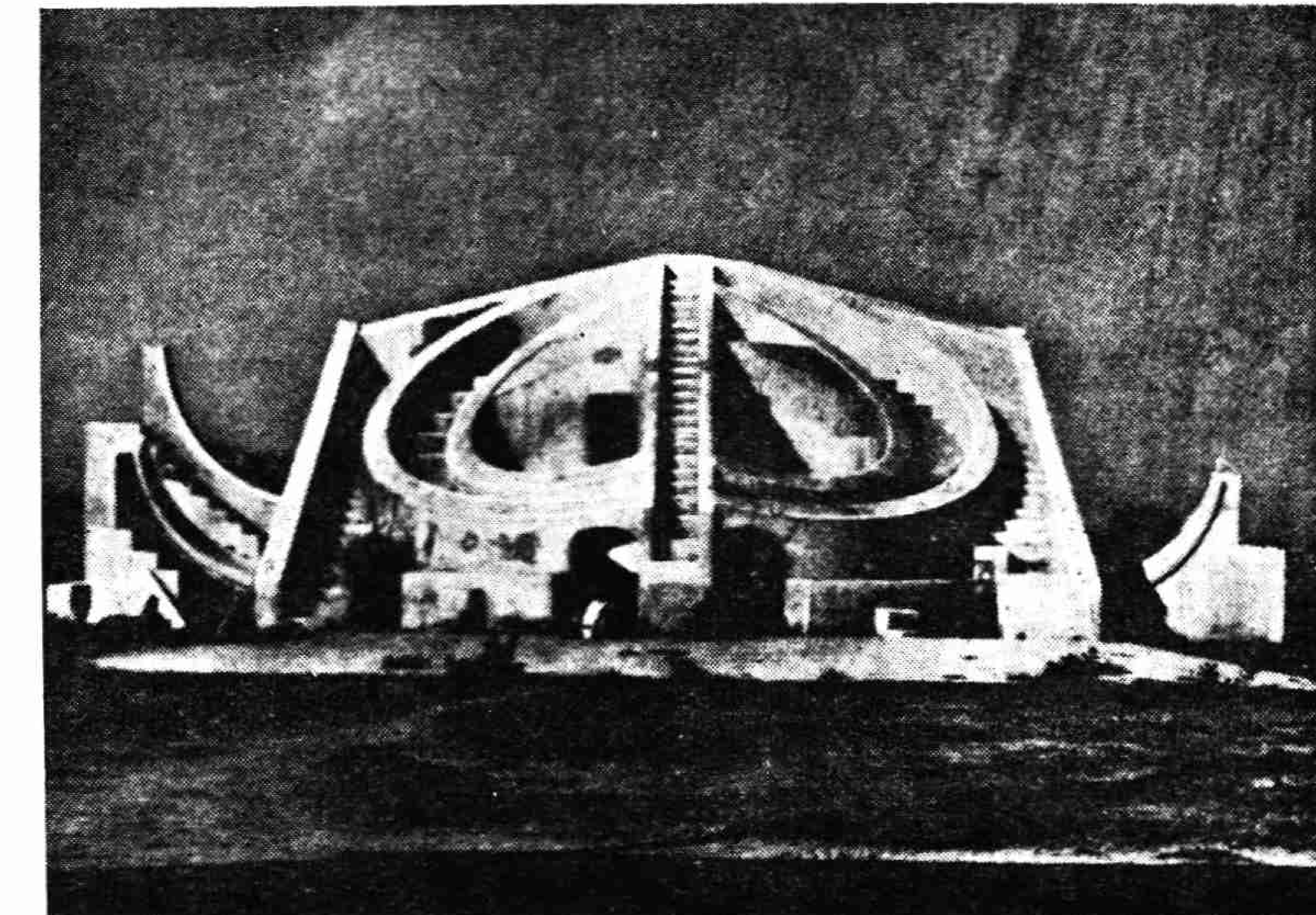
సముద్ర మట్టముపై ఎత్తు ... 212 మీటర్లు.

అయస్కాంతిక క్రాంతి ... 1919 లో తూ. 1° 45′ ; వార్షిక మార్పు : ...3′.

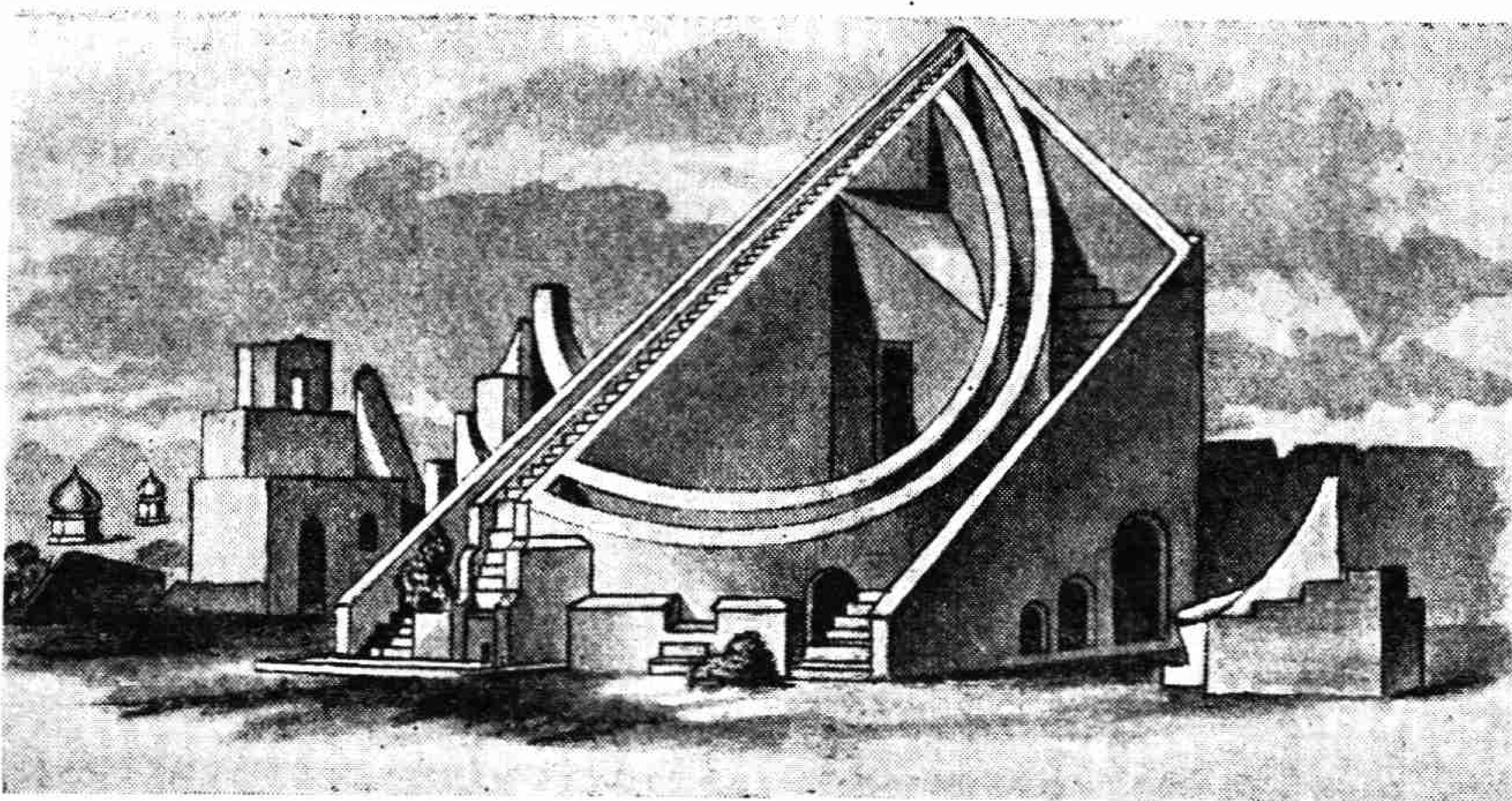
స్థానిక కాలము ... ప్రమాణకాలము పూర్వము 21 నిమిషముల 7·7 సెకనులు.

ఈ వేధశాలలో సున్నము, రాళ్లతో నిర్మింపబడిన సమ్రాట్ యంత్రము, జైప్రకాశ్, రామయంత్రము, మిశ్రయంత్రము, కొన్ని లోహ పరికరములు ఉన్నవి. వీనిలో మొదటి మూడింటిని జయసింహుడే కల్పించి నిర్మింపచేసెను. మిశ్రయంత్రము మాత్రము జయసింహుని పుత్రుడు మధుసింగ్‌చే చేర్చబడినదని భావించబడుచున్నది.

సమ్రాట్ యంత్రము - దృక్సిద్ధ సౌర కాలమును; జైప్రకాశ్ - స్థానిక కాలమును, సూర్యుని క్రాంతిని, యామ్యోత్తర వృత్తముపై ఉన్న రాశిని; రామ యంత్రము - ఉచ్చత్వము (అల్టిట్యూడ్), దిగంశ (అజిమత్) లను తెల్పును. మిశ్ర యంత్రము అనగా నియత్ చక్ర, చిన్న సమ్రాట్ యంత్రము, దక్షిణావృత్తి యంత్రము, కర్కరాశి వలయము మొదలగు పెక్కు యంత్రములు ఒకే భవనమందుంచబడినవి.



చిత్రము 402 మిశ్ర యంత్రము (జంతర్ మంతర్)



చిత్రము 403 జంతర్ మంతర్

జైపూర్ వేధశాల : ఇది జయసింహునిచే నిర్మింపబడిన రెండవ వేధశాల. జైపూర్ నగరము 1728 లో జయసింహునిచే నిర్మింపబడినది. ఈ వేధశాల నిర్మాణకాలము 1734 ప్రాంతము. దీని ముఖ్యాంశములు :

అక్షాంశము	... 26° 55′ 27·4″ ఉ.
రేఖాంశము	... 75° 49′ 18·7″ తూ.
సముద్రమట్టముపై ఎత్తు	... 482 మీటర్లు
అయస్కాంతిక క్రాంతి	... 1919 లో తూ. 1° 35′.

స్థానిక కాలము ... ప్రమాణకాలము పూర్వము 26 నిమిషముల 43 సెకనులు.

ఢిల్లీ వేధశాలలో ఉన్నటువంటి రాతి యంత్రముల వంటి యంత్రములే కాక పెక్కు లోహ పరికరములు కూడ ఇచ్చట ఉన్నవి. ఈ వేధశాలలో సమ్రాట్ యంత్రము, జైప్రకాశ్, రాశివలయము, షష్టాంశ యంత్రము, కపాల యంత్రము, రామ యంత్రము, దిగంశ యంత్రము, నారీవలయ యంత్రము, దక్షిణావృత్తి యంత్రము మొదలగునవి కలవు.

ఉజ్జయిని వేధశాల : గ్రీనిచ్ ఆవ్ ఇండియా అనబడు ఉజ్జయిని లేదా అవంతి నగరము ప్రాచీన కాలమున భారతదేశ ఖగోళశాస్త్ర అధ్యయనమునకు కేంద్రముగ ప్రసిద్ధికెక్కినది.

1728 - 1734 మధ్యకాలములో ఇచ్చట ఒక వేధశాలను జయసింహుడు నిర్మింపచేసెను. ఈ వేధశాల ముఖ్యాంశములు :

అక్షాంశము	... 23° 10′ 16″ ఉ.
రేఖాంశము	... 75° 46′ 3″ గ్రీనిచ్‌కు తూర్పుగ

సముద్ర మట్టము
వై ఎత్తు ... 457 మీటర్లు
అయస్కాంతిక
క్రాంతి ... 1915 లో తూ. 0° 49'. వార్షిక మార్పు 3'
స్థానిక కాలము ... ప్రమాణ కాలము పూర్వము 26 నిమిషముల 52 సెకనులు.

శిథిలావస్థలో ఉన్న ఈ వేధశాలలో సమ్రాట్ యంత్రము, నారీవలయ యంత్రము, దిగంశయంత్రము, దక్షిణావృత్తి యంత్రము లున్నవి.

బెనారెస్ వేధశాల : ఇది జయసింహునిచే నిర్మింపబడిన వేధశాలలలో నాల్గవది. ఇది మానసింగ్ (అంబర్ సంస్థానాధీశుడు) నిచే నిర్మింపబడిన మానమందిర మిద్దెపై ఉన్నది. ఈ వేధశాల ముఖ్యాంశములు :

అక్షాంశము ... 25° 18' 24.9" ఉ.
రేఖాంశము ... 83° 0' 46.1" గ్రీనిచ్ కుతూర్పుగ
సముద్ర మట్టము
వై ఎత్తు ... 107 మీటర్లు
అయస్కాంతిక
క్రాంతి ... 1919 లో తూ. 0° 45'
స్థానిక కాలము ... ప్రమాణకాలమునకు తర్వాత 2 నిమిషముల 3 సెకనులు

ఈ వేధశాలలో సమ్రాట్ యంత్రము, నారీవలయ యంత్రము, చక్రయంత్రము, దిగంశయంత్రములున్నవి. చాలకాలము క్రిందటనే ప్రయోగ వినియోగార్థము ఈ వేధశాలను ఉపయోగించుట మానివేయబడినది.

మధుర వేధశాల : రాజా మానసింగ్ (జైపూర్) చే పునర్నిర్మాణము చేయబడిన మధురకోటపై ,జయసింహుడు తన కడపటి వేధశాలను నిర్మించెను. నేడిది నామరూపములు లేకుండ శిథిలమై పోయినది. (చూ. జయసింహుడు - పు. 273).

పా. ల. నా.

వైట్ హెడ్, ఆల్ఫ్రెడ్ నార్త్ (1861 - 1947) : బ్రిటిష్ గణితశాస్త్రవేత్త, దార్శనికుడు; కేంబ్రిడ్జి యూనివర్సిటీ ట్రినిటీ కాలేజీనుండి 1884 లో పట్టభద్రుడయ్యెను. 1911 వరకు గణితశాస్త్ర లెక్చరర్ గ అచ్చట ఉండెను. ఆ తరువాత లండన్ యూనివర్సిటీలో వినియుక్త గణితశాస్త్ర లెక్చరర్ గాను, గణితశాస్త్ర ప్రొఫెసర్ గాను (1914 - 24) బోధనచేసెను. 1924 లో హార్వర్డ్ యూనివర్సిటీలో దర్శనశాస్త్ర ప్రొఫెసర్ పదవిని వైట్ హెడ్ స్వీకరించెను.

గణితశాస్త్రము, తర్కశాస్త్రము, విజ్ఞానదర్శనము, భౌతికశాస్త్రములందు వైట్ హెడ్ చేసిన రచనలు ఆతనికి విశ్వఖ్యాతిని ఆర్జించి పెట్టినవి. 1914 కు పూర్వము గణిత, తర్కశాస్త్రముల పరిశీలనలందు వైట్ హెడ్ నిమగ్నుడయ్యెను. ఆ తరువాత విశ్వశాస్త్రము (కాస్మాలజీ) పరిశీలనలపై తన దృష్టిని కేంద్రీకరించెను. ఇతని ప్రథమ గ్రంథము 'ఏ ట్రీటైజ్ ఆన్ యూనివర్సల్ ఆల్జీబ్రా' (1898) బీజగణిత మేరలను వ్యాపింపచేయుటకై ఆతడు చేసిన కృషి. తన శిష్యుడైన బెర్ట్రాండ్ రసెల్, తాను కలసి రచించిన 'ప్రిన్సిపియా మాతమేటికా (మూడు సంపుటములు 1910-13)' అనే ఉద్గ్రంథము తర్కశాస్త్ర సూత్రములనుండి గణితశాస్త్రమును నిగమనము చేయవచ్చునని చూపుటకు చేసిన మహత్తర కృషి.


వైట్ హెడ్
చిత్రము 404

'వస్తు ప్రపంచముయొక్క గణిత భావములు' (1906) అను గ్రంథము వైట్ హెడ్ భవిష్యత్ అభిరుచులను సూచించుచున్నది. ద్రవ్యము, అంతరాళము, కాలముల ప్రధాన ఆంతర సంబంధములను వర్ణించుటలో దార్శనికులు సాంప్రదాయకముగ అవలంబించుచువచ్చిన విధానములు అసంపూర్ణములని వైట్ హెడ్ నిశితముగ విమర్శించి, అవయవిదర్శనము (ఫిలాసఫీ ఆవ్ ఆర్గానిజమ్) అనబడు తన వాస్తవిక భావమును వివరించుటకై ప్రత్యేక పద జాలమును కల్పించెను.

'ప్రకృతి జ్ఞాన సూత్రముల పరిశీలన' (1919), 'ప్రకృతి భావము' (1920) లు ప్రకృతి విజ్ఞాన నూతన దర్శనమును ప్రసాదించినవి. తన నూతన దర్శనముపై ఆధారపడి వైట్ హెడ్ రచించిన 'సాపేక్షతా సిద్ధాంత మూల తత్త్వము' ఐన్‌స్టయిన్ సాపేక్షతా సిద్ధాంతమునకు దారిచూపెను. ఇతని రచన లన్నిటిలోనికి ఎక్కువ జనాదరణను పొందిన 'విజ్ఞానము - ఆధునిక ప్రపంచము' (1925) లో ఈతడు గెలిలియో, డేకార్ట్, లాక్ మొదలగు విజ్ఞానవేత్తలనుండి మనము పారంపర్యముగ పొందిన ప్రకృతిని ద్విధాకరించుటను నిశితముగ విమర్శించెను. 'క్రమము - యాథార్థ్యము' (1929), 'భావముల సాహస

కృత్యములు' ఇతని ఇతర ఉద్గ్రంథములు (చూ. రసెల్ పు. 470; దర్శనములు - మతములు పు. 709). పా. ల. నా.

వ్యవకలనము : అంక, బీజగణితముల ప్రధాన పరికర్మములలో ఇది ఒకటి. రెండు రాశులకు గల భేదమును కనుగొనుట వ్యవకలనము (తీసివేత) అనబడును. వ్యవకలనమును సంకలనము యొక్క విలోమ పరికర్మగ కూడ నిర్వచింతురు. వ్యవకలనమునకు నేడు వాడుకలో ఉన్న సంకేతము '—' మొట్టమొదట 1489 లో జె. విండ్‌మాన్ గ్రంథమున ముద్రణ (లైఫ్‌జిగ్‌లో) నొందినది.

ఈ పరికర్మలో వియోజ్యము (మిన్యుయెండ్) అనబడు ఒక సంఖ్యనుండి వియోజకము (సబ్ట్రెహెండ్) అనబడు మరొక సంఖ్య తీసివేయబడును. అట్లు తీసివేయగా లభించిన సంఖ్యను భేదము, లేదా శేషము అందురు. అనగా ఏ సంఖ్యను వియోజకముతో సంకలనము చేసిన వియోజ్యము లభించునో ఆ సంఖ్యే వాటి భేదమగును.

వియోజ్యము — వియోజకము = భేదము.

వ్యవకలనము చేయునప్పుడు దత్త సంఖ్యలకు స్థానభేద ప్రకారము ఒకదాని క్రింద ఒకటి వ్రాసికొని చివరనుండి (ఒకట్ల స్థానమునుండి) క్రింది సంఖ్యను తీసివేయవలెను.

```
ఉదా (1):   1897      ఉదా (2):   396·23
            543                   85·02
           ────                  ──────
           1354                  311·21
```

ఏ స్థానమునందైనా క్రింది సంఖ్య పైసంఖ్యకన్న పెద్దది అయిన, పై సంఖ్యకు 10 ని కలిపి తీసివేతను సాగించవలెను. ఇట్లు చేయుటవలన ఆ సంఖ్యకు ఎడమవైపున ఉన్న సంఖ్యలో 1 తగ్గిపోవును. దీనిని అప్పుతెచ్చుకొనుట అందురు.

```
            0 12 13 17               8 12 11  11 12
ఉదా (1):   1  3  4  7    ఉదా (2):   1  9  3  2 . 2  2
              8  6  9                  8  4  6 · 3  5
           ──────────              ────────────────
              4  7  8               1  0  8  5 . 8  7
```

పా. ల. నా.

శకములు* : మన గ్రంథములందు కనబడిన 'శక' పదము పాశ్చాత్య విద్వాంసులకును, మన వారిలో చాల మందికిని గొప్ప సందేహమునకు అవకాశ మిచ్చినది. వారు 'శక కాలము' నకును, వాయవ్య పరిసర ప్రాంతములలో నివసించుచుండిన 'శక' జాతి వారికిని ఒక విధమగు సంబంధమును కల్పించి, భారతదేశ చరిత్ర యందు వంశ పారంపర్యము యొక్క కాల నిర్ణయము చేయునపుడు చాల పొరపాటు చేసిరి.

'శక' పద నిర్వచన మీ క్రింది విధమున చేయబడినది.

'1. శక సామర్థ్యే, 2. శక జాతిభేదే, సచ వ్రాత్య క్షత్రియః।
3. దేశభేదే, 4. నృపభేదే, తదీయే వత్సరేచ।
కలియుగే శకకర్తృషు షట్సు -
యుధిష్ఠిరః, విక్రమాదిత్యః,
శాలివాహనశ్చేతి త్రయోగతాః।
విజయాభినందనాదయస్త్రయో భవిష్యంతి:
తథాచ జ్యోతి ర్విదాభరణే।

10 అధ్యాయే ఉక్తంయథా
కలౌ భవిష్యన్త్యథ భారతావనౌ
మహీభుజో బాహు భృతోప్య నేకశః।
శకాస్తథైషా మభిషేచ నాదికం
హితం సదోదీరిత కాలసాధితమ్॥

ధరాధి భూ ర్భిల్ల శకాది జాతిజ
స్తదాసన స్తేఽభి జనైర్నమస్కృతః।
సుత స్సరాజాధిజనై ప్రతిష్ఠితో
నమంత్రభేదా ద్యభిషేచనోచితః॥
నిహంతి యో భూతలమండలే శకాన్।
స పంచకోట్యబ్జ దశాసమాన్ కలౌ।
స రాజపుత్రో శక కారకో భవేత్।
నృపాథి రాజ్యేహ్యథ శాక కర్తృహా॥

(తత్ర శక కారకస్య విక్రమాదిత్యస్య హననాత్ శాలివాహనస్య శక కర్తృత్వం)

యుధిష్ఠిరో భూత్ భువిహస్తినాపురే।
తథోజ్జయిన్యాం పురి విక్రమాహ్వయః।
శాలేయ భూమో భృతి శాలివాహనః।
స చిత్రకూటే విజయాభి నందనః॥
నాగార్జునే రోహితకే క్షితౌ బలి
ర్భవిష్యతీంద్రో భృగు కచ్ఛ పత్తనే।
కృత ప్రవృత్తి స్తదనంతరం భవేత్
తథా భవిష్యంత్యవనీ భృతోత్కరః॥

- వాచస్పత్యము.

ఇందు శక పద నిర్వచనము చేయబడినది. 'శక' పదము శక్ - సామర్థ్యే అను ధాతువునుండి పుట్టినది. వ్రాత్య క్షత్రియులకు 'శక' పదము వాడబడును. అది ఒక దేశ భాగమునకు, సంవత్సరమునకు కూడ పేరు. కలియుగమునందు ఆర్గురు శక కారకులు కలరు. యుధిష్ఠిర, విక్రమ, శాలివాహనుల శకము లిదివరలో జరిగినవి. ఇక రాబోవుచున్నవి విజయానంద, నాగార్జున, బలి శకములు.

శక జాతివారు వేదబాహ్యులు. వారికి మంత్రాభిషేచనము లేదు. ఏ రాజపుత్రుడు శకజాతి వారిని జయించునో, లేదా ఇతర శకకారకుని చంపునో అతడు శకకారకుడు.

* గమనిక : ఇందు భారతదేశమున సంప్రదాయ సిద్ధముగ నున్న వివిధ వాదములను వ్యాసకర్త వ్యాఖ్యానించిరి.

శకము స్థాపించువారు శకజాతివారై యుండవలయు నను మతము పొరబాటని ఇందువలన తెలియుచున్నది. మన దేశమునందు ప్రచారములోనుండు శకములు ఇపుడు వివరింపబడును,

మన జ్యోతిష గ్రంథముల యందు, పురాణాదుల యందు వివరింపబడిన శకములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

i. సృష్ట్యాదిగా కొన్ని శకములు మన పుస్తకములందు చెప్పబడినవి.

శ్లో॥ కల్పా దస్మాచ్చ మనవః । షట్ వ్యతీతా స్స సంధయః ।
వైవస్వతస్య చ మనో । ర్యుగానాం త్రిఘనో గతః ॥
అష్టావింశా ద్యుగాదస్మా । ద్యాత మేతత్ కృతం యుగమ్ ॥
సూర్య, సి. 1 – 22, 23.

షణ్మనూనాంతు సంపిండ్య । కాలం తత్సంధిభిః స్సహ
కల్పాది సంధినా సార్థం । వైవస్వత మనో స్తథా॥ 45.
యుగానాం త్రిఘనం యాతం । తథా కృతయుగం త్విదం ।
ప్రోఝ్య సృష్టేః తతః కాలం ।
పూర్వోక్తం దివ్య సంఖ్యయా॥ 46.
సూర్యాబ్ద సంఖ్యయా జ్ఞేయా । కృత స్యాంతే గతా అమీ ।
ఖ చతుష్క యమా ద్యగ్ని । శర రంధ్ర నిశాకరాః॥ 47.

అర్థము: కల్పాది సంధియును, మనువులు ఆర్గురును, వారి సంధులును గడచిన తరువాత ఏడవ మనువు మొదలు ఇరువది యెనిమిదవ మహాయుగములో త్రేతాయుగ ప్రారంభ కాలమునకు అయిన సంవత్సరములు 195,37,20,000.

'అల్పావశిష్టే కృతే' యని సూర్య సిద్ధాంత గ్రంథకర్త గ్రంథ ప్రారంభకాలమును గుర్తించియున్నాడు. అది నమ్మదగునా యను విషయము వేరు. నమ్మకూడదనుటకు బలమగు కారణము లిచ్చువరకు ఈ వాక్యమును నమ్ముట సమంజసము.

శ్లో॥ అస్మిన్ కృతయుగ స్యాంతే । సర్వే మధ్యగతా గ్రహాః ।
వినాతు పాత మందోచ్చాన్ ।
మేషాదౌ తుల్యతా మితాః॥ 57.
మకరాదౌ శశాంకోచ్చం । తత్పాతస్తు తులాదిగః ।
నిరంశత్వం గతా శ్చాన్యే । నోక్తా స్తే మందచారిణః॥ 58.

త్రేతాయుగ ప్రారంభము నుండి కలియుగ
ఆరంభమువరకు సం॥లు 21,60,000
క్రీస్తుశకము 1957 వరకు, 5,057
సృష్ట్యాదినుండి క్రీ. శ. 1957 వరకు
మొత్తము సం॥లు 195,58,85,057
ii. వైవస్వత మన్వాది శకము 12,05,33,057
iii. మయ ప్రచారిత సూర్య సిద్ధాంత
కాలము 21,65,057
iv. యుధిష్ఠిర శకము – ధర్మరాజు 5,093
(పట్టాభిషేకశకము: అనగా కలిపూర్వము 36 సం॥లు).
v. కలియుగము క్రీ. పూ. 3,102

1957 నాటి 5057 సంవత్సరములకు పూర్వము ధర్మరాజు హస్తినాపురమునందు 36 సంవత్సరములు పరిపాలించెను. మౌసల పర్వము 1–1.

తరువాత శ్రీ కృష్ణ నిర్యాణము.

శ్లో॥ యస్మిన్ కృష్ణో దివం యాత । స్తస్మిన్నేవ తదాహని
ప్రతిపన్నం కలియుగం । ప్రమాణం తస్యమే శృణు ॥
మత్స్య – 271 అధ్యా. 52.
గతే సనాతనా స్యాంశో । విష్ణో స్తత్ర భువో దివం ।
తత్యాజ సానుజో రాజ్యం । ధర్మపుత్రో యుధిష్ఠిరః ॥
విపరీతాని దృష్ట్వాచ । నిమిత్తాని హి పాండవః ।
యాతే కృష్ణే చకారాథ । సోభిషేకం పరీక్షితః ॥
విష్ణుపురాణమ్ ॥

శ్రీ కృష్ణ నిర్యాణ సమయమునందే కలి ప్రవేశము. అపుడు ధర్మరాజు విపరీత నిమిత్తములను గమనించి, పరీక్షితునకు పట్టాభిషేక మొనరించి, అనుజులతో కూడ మహా ప్రస్థాన యాత్ర ప్రారంభించెను.

తత్కాల గ్రహస్థితి. సిద్ధాంతరీత్యా గణితాగతము

	సిద్ధాంతశిరోమణి	ఆర్య సిద్ధాంతము	పరాశర
	రా. అ. క.	రా. అ. క.	రా. అ. క.
1. రవి	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0
2. చంద్ర	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0	0 . 0 . 0
3. బుధ	11 . 27 . 24	11 . 21 . 22	11 . 21 . 17
4 శుక్ర	11 . 28 . 42	11 . 27 . 07	11 . 26 . 59
5. కుజ	11 . 29 . 24	0 . 0 . 0	11 . 29 . 15
6. గురు	11 . 29 . 28	11 . 27 . 7	11 . 27 . 3
7. శని	11 . 28 . 46	0 . 0 . 0	11 . 28 . 57

నిష్పక్షపాతులగు పాశ్చాత్య జ్యోతిష్కులీ గణితమును ఒప్పుకొని యున్నారు. 'బ్రాహ్మణుల గణితము మన గణితమునకు సరియగుటచే వారు దృగ్సిద్ధముగా నిర్ణయించి యుండవలయు' నని బైలీ పండితుడు వ్రాసి యున్నాడు. 'భారతీయుల ఖగోళశాస్త్ర గణితము రీత్యా క్రీస్తు పుట్టుకకు 3102 సంవత్సరముల పూర్వము కలియుగము ప్రారంభమయ్యెను' అని కౌంట్ వ్రాసి యున్నాడు, డాక్టర్ బూలర్, ఎమ్. ఏ. ట్రాయర్ మొదలగు వారు ఈ గణితమును ఒప్పుకొని యున్నారు. అందుచే కలియుగ యాథార్థ్యతను గురించి సందేహము లేదు. ఈ విషయము విపులముగా ఇదివరకే చర్చింపబడినది. (చూ. పు. 173).

జయాభ్యుదయ యుధిష్ఠిర శకము: ప్రారంభము కలి 1 లో. అనగా క్రీ. పూ. 3101. వ్యాసుడు కలియుగము 1 లో మహాభారతమును 'జయ' మను పేరుతో వ్రాయ నారంభించెను. దానికి జయాభ్యుదయ యుధిష్ఠిర శకమని పేరు. కలియుగము 60 లో పరీక్షిత్తు మరణము. తరువాత జనమేజయుని పట్టాభిషేకము. అతని దాన శాసన మొకటి క్రింద వివరింపబడినది.

శ్రీ కురు వంశావతంస శ్రీ జనమేజయ భూపాలానాం దాన శాసన పత్రం.

శ్లో॥ పాతువో జలదశ్యామః । శార్ఙ్గజ్యాఘాత కర్కశాః
త్రైలోక్య మండల స్తమా । శ్చత్వారో హరిబాహవః॥
స్వస్తిశ్రీ జయాభ్యుదయే యుధిష్ఠిర శకే ప్లవంగాఖ్యే ఏకోన నవతీ (89) వత్సరే సహస్య మాసి అమావాస్యాయాం సోమవాసరే శ్రీమన్మహా రాజాధిరాజ పరమేశ్వరో వైయ గ్రణీ వైయాఘ్ర(?) పాద గోత్రజః శ్రీ జనమేజయభూపః కిష్కింధా నగర్యాం సింహాసనస్థః సకల వర్ణాశ్రమ ధర్మ ప్రతిపాలకః పశ్చిమ దేశస్థ సీతాపుర వృకోదర క్షేత్రే తత్రత్య మునిబృంద మఠస్య గరుడవాహన తీర్థ శ్రీమచ్ఛిష్యకైకయ చాధైరారాధిత సీతారామస్య పూజార్థం కృత భూదాన శాసన మస్మత్ప్రపితామహ యుధిష్ఠిరా ధిష్ఠిత మునిబృంద క్షేత్రస్య చతుః సీమా పరిమితి క్రమః... అస్మతా పితౄణాం విష్ణులోక ప్రాప్త్యర్థం హరిహర సన్నిధా వుపరాగ సమయే సహిరణ్యేన తులసీదళ జలధారా పూర్వకం క్షేత్రం యతిహస్తే దత్తో స్మ్యహమ్ ....

ఈ దానశాసనము కలియుగము 89 లో అనగా క్రీ పూ. 3012లో వ్రాయబడినది. అప్పటికే మన దేశమునందు తిథి వార నక్షత్రములు ప్రచారమునందున్నట్లు నిశ్చయమగు చున్నది.

'సహస్యమాసి' యనునది గూఢార్థము కలదిగా నున్నది.

యుధిష్ఠిర శకము, లేదా లౌకికాబ్దము: యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యము చేయుచుండినపుడు సప్తర్షులు మఘా నక్షత్రము నందుండినట్లు గ్రంథములలో నున్నది. ఇందు వలన సప్తర్షులకు గమనము, లేదా చారముండునట్లు అర్థమగుటచే ఆ విషయము వేరు శీర్షిక క్రింద వివరింప బడును.

శ్లో॥ ఆసన్ మఘాసు మునయః
శాసతి పృథ్వీం యుధిష్ఠిరే నృపతౌ.
-వరాహమిహిరః బృహత్సంహితా.

శ్లో॥ తేతు పారీక్షితే కాలే । మఘా స్వాసన్ ద్విజోత్తమ॥
విష్ణుపురాణము-4 అంశ. 24 అధ్యా. 106 శ్లో.

వాయు పురాణము 99-2, తో, బ్రహ్మాండపురాణము 3-74 లోను ఇట్టి శ్లోకములు కలవు.

'తేచ ద్విజా స్త్వదీయే కాలే అధునా మఘాశ్రితా వర్తంతే॥'
శ్రీధరస్వామి భాగవత వ్యాఖ్యానము-భావార్థ దీపిక.

శ్లో॥ కలేర్గతైః సాయక నేత్రవర్షైః
యుధిష్ఠిరాద్యాః త్రిదివం ప్రయాతాః।
లోకేహి సంవత్సర పత్రికా యాం
సప్తర్షిమానం ప్రవదంతి సంతః॥
-కల్హణుని రాజతరంగిణి.

కాని, డాక్టర్ బూలర్ వ్రాసిన ప్రతిలో 'యుధిష్ఠి రాద్యాః' అను పదమునకు బదులు 'సప్తర్షి వర్యాః' అని కలదు. ఆ సవరణకు అర్థమే లేదు. ఇట్లే అచ్చు ప్రతులలో పాశ్చాత్య విద్వాంసులు వారికి అనుకూలము లగు సవరణలను చేసి, అర్థములేని శ్లోకములు వ్రాసినారు. డాక్టర్ ఫ్లీట్ ప్రచురించిన గుప్తరాజుల శాసనములలో శీర్షికను చదివిన, కొన్ని సవరణలు చేసినట్లు తోచుచున్నది. డాక్టర్ తేబాంట్ తాను సవరణలు చేసినట్లు బహిరంగ ముగా ఒప్పుకొని యున్నాడు.

శ్లో॥ పంచ వింశతి వర్షేషు । గతే ష్వథ కలౌయుగే।
సమాశ్రయిష్య త్యాశ్లేషాం । మునయః తే శతం సమాః॥
తత్రైవ ధర్మపుత్రోపి । మహా ప్రస్థాన మాస్థితః।
భువం పరిభ్రమన్నంతే । స్వర్గ మారోక్ష్యతి ధ్రువం॥
తత్రైవ లౌకికాబ్దేతి సప్తవింశ శతాత్మకః।
ధర్మపుత్ర జ్ఞాపకార్థం లోకే తావ త్ప్రవర్తితః॥
కలియుగ రాజ వృత్తాంతము.

పై శ్లోకములు లౌకికాబ్ద ప్రారంభమును విశదీక రించుచున్నవి.

'కలియుగము 25 లో సప్తర్షులు మఘలో 100 సంవత్స రములుండిన తరువాత ఆశ్లేషా నక్షత్రమును పొందుదురు. మహాప్రస్థాన యాత్రలో నుండిన ధర్మరాజు భూప్రదక్షి ణము చేసి, స్వర్గలోకమును చెందెను. అతని జ్ఞాప కార్థము 2,700 సంవత్సరముల ఆవర్తనకాలము కల లౌకికాబ్దము స్థాపింపబడెను'.

రాజతరంగిణిలో లౌకిక శకమే వాడబడినది.

బుద్ధశకము: బుద్ధభగవానుని అవతార కాలము గాని, నిర్యాణకాలముకాని పాశ్చాత్యులు ఋజుదృష్టితో నిర్ణయింపలేదు. అతని జన్మ సంవత్సరము క్రీ. పూ. 500 అని నిర్ణయించినారు. కాని, అది కల్హణుని రాజ తరంగిణికిని, నేపాళ వంశావళికిని విరుద్ధముగా నున్నది. మనదేశమునందు ప్రచారములోనుండు భవిష్య పురాణ మును నవీన చరిత్రకారులు పాటించలేదు. కలియుగ రాజవృత్తాంతమను గ్రంథములోని శ్లోకములు కొన్ని అచ్చు పుస్తకములందు కనబడుచున్నవేకాని మనవారు శ్రద్ధ వహించి, ఈ గ్రంథమునంతయు అచ్చొత్తించి, మన

కృతజ్ఞతకు పాత్రులు కారైరి. ఆ యుద్ధగ్రంథమును ప్రచురించియుండిన ఇప్పుడు ప్రచారములోనుండు చరిత్రల లోని లోపములన్నియు విశదములగును.

బుద్ధుడు ఇక్ష్వాకు వంశస్థుడు. ఇక్ష్వాకు చక్రవర్తి ప్రస్తుత మహాయుగమునకు చెందిన కృతయుగాది యందుండెను. మన గణితజ్ఞుల ప్రకారము ఇప్పుడు వైవస్వత మన్వంతర ములో 28 వ మహాయుగము జరుగుచున్నది. ఇక్ష్వాకు వంశపరంపరలోని ముఖ్యుల పేర్లు అన్ని పురాణముల లోను ఇవ్వబడినవి. భగీరథుడు, రఘువు, రాముడు మొదలగు వారు ఈ వంశభూషణులు. ఈ వంశజుడగు బృహద్బలుడు మహాభారత యుద్ధములో క్రీ. పూ. 3138 యందు మరణించెను. తరువాత 24 వ వంశజుడు సిద్ధార్థుడను బుద్ధుడు. ఇక్ష్వాకు వంశము 30 తరములతో అంతరించెను.

శ్లో॥ ఇక్ష్వాకూనా మయం వంశః । సుమిత్రాంతో గమిష్యతి॥

శ్లో॥ మాయామోహ స్వరూపోఽసౌ । శుద్ధోదన సుతోఽభవత్ ।
మోహయా మాసదైత్యాన్ స్తాం । స్త్యాజితాన్ వేద ధర్మకమ్
తేన బౌద్ధా బభూవుర్హి । తేభ్యోఽన్యేవేద వర్జితాః॥

—బుద్ధుని గురించి—విష్ణుపురాణము.

చరిత్ర పరిశోధకులు బుద్ధుని జీవిత కాలములోని ముఖ్య ఘట్టములకు క్రింది విధమున కాల నిర్ణయము చేసినారు.

(a)	సిద్ధార్థుని జననము	క్రీ. పూ. 1887.
(b)	రాజ్యత్యాగము	క్రీ. పూ. 1858.
(c)	తపస్సు	క్రీ. పూ. 1858-52.
(d)	ప్రబోధము	క్రీ. పూ. 1852-1807.

చీనా దేశీయుడగు ఫా-హియాన్ పింగ్ చక్రవర్తి కాలములో బుద్ధ నిర్యాణమైన 300 సంవత్సరములకు పైగా బుద్ధ విగ్రహము స్థాపింపబడెనని వ్రాసియున్నాడు. పింగ్ చక్రవర్తి క్రీ. పూ. 750-719 లో నుండెను. కాబట్టి బుద్ధుడు క్రీ. పూ. ఆరవ శతాబ్దము నాటి వాడని తలచుటకు వీలులేదు.

శ్లో॥ బోధి సత్వాశ్చ దేశేస్మి । న్నేకో భూమీశ్వరోఽభవత్ ।
సచ నాగార్జునః శ్రీమాన్ । షడర్హద్వన సంశ్రయీ॥
తస్మి న్నవసరే బౌద్ధా । దేశే ప్రబలతాం యయుః।
నాగార్జునేన సుధియా । బోధి సత్వేన పాలితాః॥

రాజతరంగిణి-1-177.

కనిష్కుని కాలములో (క్రీ. పూ. 1294-1234) ఆరు దినములు కాశ్మీరమునందు బౌద్ధమత ప్రచారకుడగు నాగార్జును డున్నట్లు తెలియుచున్నది.

డాక్టర్ ఫ్లీట్ అభిప్రాయము ప్రకారము అశోకుడు క్రీ. పూ. 1260 లో నుండినట్లును, బుద్ధ నిర్యాణము క్రీ. పూ. 1671 లో జరిగినట్లును తెలియవచ్చుచున్నది.

క్రీ. పూ. 1000 లో కట్టిన ఒక బౌద్ధ శ్రమణాచార్యుని స్మారక మందిరము ఏథెన్స్‌లో ఉన్నట్లు త్యాగరాజయ్యర్ తన 'హిందూ వాస్తు శాస్త్ర' మను గ్రంథములో వ్రాసి యున్నాడు.

కాబట్టి బుద్ధుని నిర్యాణము క్రీ. పూ. 550 కంటె పూర్వము జరిగియుండవలయునని తెలియుచున్నది. ఈ వాదమునకు అనుకూలములగు కొన్ని గణితముపై నాధారపడిన రుజువులు ఇచ్చట సేకరింపబడినవి.

క్రైస్తవ మతాచార్యుడు బిగాండే 'గౌతమ జీవితము' అను పుస్తకములో ఎక్టజానా శకములో 8 తేదీలను ఇచ్చి యున్నాడు. వానికి సరియగు క్రీస్తు శకములోని తేదీలు క్రింద ఇవ్వబడినవి :

కౌజాడా శకము ముగింపు : శనివారము తప్సాంగ్ (ఫాల్గుణ) నెల మొదటి తేది. ఫాల్గుణ అమావాస్యా శుక్ర వారము క్రీ. పూ. 29-1-1955 ఉదయం 1 గ. వరకు కలదు. అమావాస్యచే విద్ధ కానట్టి దినమునందు సంవత్సరారంభము చేయుట సంప్రదాయ మయినందున క్రీ. పూ. 30-1-1955 శనివారము ప్రాత సంవత్సరముపోయి క్రొత్త సంవత్స రారంభము.

ఎక్టజానా శకము : ఆదివారము చైత్ర శుక్లపక్ష పాడ్యమి 'టాగు' నెల (చైత్రము).

చైత్ర అమావాస్య శనివారము క్రీ. పూ. 27-2-1955 నందు 47 గ., 24 వి. గ. ల వరకు; శకారంభము ఆదివారము క్రీ. పూ. 28-2-1955.

బుద్ధ జననము : శకము 68. వైశాఖ పూర్ణిమ, విశాఖ నక్షత్రము, శుక్రవారము. క్రీ. పూ. 31-3-1886. శుక్ర వారమునందు పూర్ణిమ గడియలు 59 - 24 ; విశాఖ 24 గడియలు.

బుద్ధుని రాజ్య త్యాగము : శకము 96. ఆదివారము, ఆషాఢ పూర్ణిమ, ఉత్తరాషాఢ.

ధ్యానారంభము సోమవారము. క్రీ. పూ. 29-5-1859. ఆదివారమునందు పూర్ణిమ మరుదినము 16 గ., 48 వి. గ. ల వరకు నుండును. 29-5-1859 లో ఉత్తరాషాఢ ఆరంభము 50 గడియలకు. అనగా 30-5-1859 సోమ వారము పూర్ణిమా సహిత ఉత్తరాషాఢ నక్షత్రము.

జ్ఞానోదయము : శకము 103. వైశాఖ పూర్ణిమ, విశాఖ నక్షత్రము, బుధవారము సూర్యోదయాత్పూర్వము. క్రీ. పూ. 3-4-1851 బుధవారము విశాఖ నక్షత్రము 1 గ.,

8 వి. గ. ల వరకు. ఉదయాత్పూర్వము 11 గడియల వరకు పూర్ణిమ.

బుద్ధుని పితృ నిర్యాణము : శకము 107. శ్రావణ (వా క్సాంగ్) పూర్ణిమ, సూర్యోదయము - శనివారము. క్రీ. పూ. 25-6-1848 లో 27 గ. లకు పున్నమ ఆరంభము.

బుద్ధ నిర్యాణము : శకము 148. వైశాఖ పూర్ణిమ, విశాఖ నక్షత్రము, మంగళవారము సూర్యోదయాత్పూర్వము. క్రీ. పూ. 27-3-1807 మంగళవారము పౌర్ణమి 37 గ., 12 వి. గ. ల వరకు. విశాఖ 26-3-1807, 52 గ., 12 వి. గ. లకు ప్రారంభించి 28-3-1807 ఉదయము 1 గ., 12 వి. గ. ల వరకు కలదు.

క్రొత్త మత శకారంభము : 148 లో ఫాల్గుణ మాసము, కృష్ణపాడ్యమి. సోమవారము (ఆదివారమని ఒక మతము) క్రీ. పూ. 12-1-1807. శనివారము ఫాల్గుణ పౌర్ణిమ 7 గడియల వరకు. 13-1-1807 ఆదివారము నూతన శకారంభము.

నేపాళ వంశావళి, రాజ తరంగిణి, పురాణములు - వీటిని అనుసరించి పరిశోధించిన ఏర్పడు కాలము ఇవ్వబడినది. కాని, ప్రస్తుతము ప్రచారములో నుండునది క్రీ. పూ. 550: ఇది పాశ్చాత్య విద్వాంసులచే, వారి అనుయాయులగు వారిచేతను ఆమోదింపబడి అందరిచేతను ఒప్పుకొనబడినది. కాని, ఇది శాస్త్ర విరుద్ధము.

బిగాండే ఇచ్చిన అంశములు బుద్ధకాల ప్రాచీనతను తెలుపుటయేకాక, ఆర్యుల గణిత విద్యా ప్రౌఢతనుకూడ తెలుపుచున్నవి ; వారి తిథి వార నక్షత్రముల జ్ఞానము చాల ప్రాచీనమైనదని నిస్సంశయముగా తెలియజేయుచున్నది.

మాలవగణ శకము : కొందరు చారిత్రకులు ఈ శకము కలి 2377 అనగా క్రీ. పూ. 725 లో ఆరంభించినట్లు చెప్పుదురు. ఇది విక్రమార్కుని శకమని పాశ్చాత్యులు తలచుచున్నారు.

'మాలవానాం గణ స్థిత్యా యాతే శత చతుష్టయే ॥
త్రినవతి అధికేద్దానాం'

అను శాసనమును డాక్టర్ ఫ్లీట్ మున్నగువారు విక్రమ శకమని రూఢిగా నమ్మసాగిరి.

మాలవగణ శకమును గుర్తించు శాసనములు నాలుగు: ; వానికి 'మందసర' శాసనములని పేరు. ఈ శకమును గురించి పూర్తిగా పరిశోధన జరగలేదు.

శకకాలము, శక నృపకాలము :

శ్లో ॥ ఆసన్ మఘాసు మునయః
శాసతి పృథ్వీం యుధిష్ఠిరే నృపతౌ ।
షట్ ద్విక పంచ ద్వియుతః
శకకాలంః తస్యరాజ్ఞశ్చ ॥

బృ. సంహిత-13-3.

'యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యము చేయునపుడు సప్తర్షులు మఘయందుండిరి. అతని కాలమునకు 2,526 సంవత్సరములు చేర్చిన 'శక' కాలము ఏర్పడును'.

యుధిష్ఠిరుని రాజ్యకాలము క్రీ.పూ. 3077 అయినందున ఈ శకకాలము 3077 – 2526 = క్రీ.పూ. 551 అని తెలియుచున్నది. మనవారీ శకమును విక్రమార్క శకమని తలచి, యుధిష్ఠిరుని కాలమును నిర్ణయించిరి. అది గొప్ప పొరపాటు. వరాహమిహిరుని కాలములో కలియుగ శకమే కాక ఈ శకము కూడ ప్రచారము నందుండెను. కాని, కలియుగము సర్వజన సామాన్యముగా నుండుటచే, శక కాల నిర్ణయము కలియుగముపై ఆధారపడునట్లు చేయబడెను. మనము దానికి విరోధముగా చేయుటచే చరిత్ర సంబంధములగు చిక్కులెన్నియో ఏర్పడినవి. వరాహమిహిర శక కాలనిర్ణయ విషయమున కొన్ని ముఖ్యాంశములు స్థలాంతరమున చెప్పబడినవి.

జ్యోతిష్కులు అహర్గణ సాధనకు కలియుగమును తీసికొనుటచే, వరాహమిహిరుడు పేర్కొనిన ఈ శకము వాడుకలో లేక విస్మృతిలో పడెను. కల్హణుడు కూడ ఈ శకమును శాలివాహన శకమని పొరబడెను. పురాణాంతర్గత రాజవంశావళి ప్రకారము మగధలో శాతవాహనులు రాజ్యము చేయుచుండినపుడు ఈ శకము ప్రారంభము అయి ఉండవలయును. పురాణాంతర్గత మగధ రాజ వంశావళి క్రింద ఇవ్వబడినది.

భారత యుద్ధము క్రీ. పూ. 3129

అపుడు జరాసంధ సుతుడు సహదేవుడు యుద్ధములో మరణించెను. అతని తరువాత

శ్లో ॥ ద్వావింశతి నృపాహ్యేతే । భవితారో బృహద్రథాః ।
పూర్ణం వర్ష సహస్రంతు । తేషాం రాజ్యం భవిష్యతి ॥

మత్స్య. పు. 169-30.

బార్హద్రథుల రాజ్యకాలము 1006 సం॥లు. తరువాత ప్రద్యోతనులు క్రీ.పూ. 2133లో రాజ్యమునకు వచ్చి 138 సంవత్సరములు రాజ్యమేలిరి.

శ్లో ॥ .... పంచ ప్రద్యోతనా ఇమే ।
అష్ట త్రింశోత్తరం శతం భోక్ష్యంతి పృథివీం నృపాః ॥

విష్ణు. పు. XII-.2

తరువాత శిశునాగులు క్రీ. పూ. 1995 లో రాజ్యమునకు వచ్చి పదుగురు 362 సంవత్సరములు రాజ్యమేలిరి.

శ్లో॥ ఇత్యేతే భవితారోవై శైశునాగా నృపాదశ।
శతాని త్రీణి వర్షాణి ద్విషష్ట్య భ్యధికాని తు॥
వాయుపురాణము.

పిమ్మట నందాదులు క్రీ.పూ. 1633 లో రాజ్యమునకు వచ్చి 100 సంవత్సరములు రాజ్యము చేసిరి.

మహాపద్మాః తత్పుత్రాశ్చ ఏకవర్ష శతం అవని
పత యో భవిష్యంతి॥

పిదప గుప్తులు క్రీ. పూ. 1533 లో రాజ్యమునకు వచ్చి పంద్రెండు మంది 316 సంవత్సరములు రాజ్యభారము వహించిరి.

శ్లో॥ ద్వాదశైతే మౌర్యాః చంద్రగుప్తాదయో మహీం।
శతాని త్రీణి భోక్ష్యంతి దశ షట్చ సమాః కలౌ॥
కలియుగ రాజ వృత్తాంతము-II భాగము, 2 అధ్యాయము.

అటుపై శుంగరాజులు క్రీ. పూ. 1219 నుండి 300 సంవత్సరములు మగధాధీశులైరి.

శ్లో॥ దశైతే శుంగ రాజానో। భోక్ష్యంతి మాం వసుంధరాం।
శతం పూర్ణం శతే ద్వేచ। తేభ్యః కణ్వాన్ గమిష్యతి॥
-కలియుగ రాజ వృత్తాంతము.

తరువాత మగధ రాజ్యమునకు కణ్వవంశజులు నలుగురు 85 సంవత్సరములు క్రీ.పూ. 834 వరకు రాజులైరి.

శ్లో॥ చత్వార ఏతే భూపాలాః। కణ్వగోత్ర సముద్భవాః।
ధర్మేణ భోక్ష్యంతి మహీం। పంచాశీతి వత్సరాన్॥
- కలియుగ రాజవృత్తాంతము

క్రీ. పూ. 328 వరకు 32 మంది రాజులు మగధరాజ్యాధిపతులైరి.

శ్లో॥ ఏతే ద్వాత్రింశాంధ్రాస్తు। భోక్ష్యంతి వసుధా మిమాం।
శతాని పంచ పూర్ణాని। తేషాం రాజ్యం భవిష్యతి॥
కలియుగ రాజ వృత్తాంతము.

తరువాత మహాగుప్తులు 8 మంది 245 సంవత్సరములు మగధ రాజ్యాధిపతులైరి.

శ్లో॥ భోక్ష్యంతి ద్వే శతే పంచ। చత్వారింశ చ్చవై సమాః।
మగధానాం మహారాజ్యం। ఛిన్నం భిన్నం చ సర్వశః॥
సాకమేతై ర్మహాగుప్త వంశ్యై ర్యాస్యతి సాంప్రతమ్॥
-కలియుగ రాజ వృత్తాంతము.

మహాగుప్తుల తరువాత మగధ రాజ్యము ఛిన్నాభిన్నము అగును.

ఈ పద్ధతి ప్రకారము శాతవాహన చక్రవర్తి మేఖస్వాతి, లేదా మహా శాతకర్ణి క్రీ.పూ. 558 నుండి 520 వరకు రాజ్యమేలెను. శాతవాహనులు శాసనములు కొన్నిటిలో తమ రాజ్యారంభమునుండి కాలము గణించిరి. అందుచే మహాశాతకర్ణి ప్రబల చక్రవర్తి యగుటచే అతడేర్పరచిన శకము కొంతకాలము మన దేశములో వాడబడి, తరువాతి జ్యోతిష్కుల ఆదరణకు పాలుగాక విస్మృతి పథములో పడెనని తోచుచున్నది. ఈ శకమును వరాహమిహిరుడు, బ్రహ్మగుప్తుడు, భట్టోత్పలుడు వాడినట్లు తోచుచున్నది.

కనిష్క శకము : కల్హణుని రాజతరంగిణి ప్రకారము క్రీ. పూ. 1182 లో మూడవ గోనందుడు కాశ్మీరరాజు అయ్యెను. అతనికి రెండు తరములకు పూర్వము కనిష్కుడు కాశ్మీర దేశమును ఏలినట్లు రాజతరంగిణిలో నున్నది. హుష్క, జుష్క, కనిష్కులు ముగ్గురు చేరి 60 సంవత్సరములు క్రీ. పూ 1294-1234 వరకు రాజ్యము చేసిరి. వీరు ఒక శకమును స్థాపించినట్లు తెలియుచున్నది. శాసనములబట్టి 1 మొదలు 98 సంవత్సరములవరకే కనబడినందున, తరువాత ఆ శకము వాడుకలో లేనట్లు తెలియుచున్నది. పాశ్చాత్య చారిత్రకులు 'కనిష్క' అను పేరుగల రాజులు ముగ్గురు ఉండినట్లు ఊహించుచున్నారు. అందుచే కొన్ని శాసనములలో కనబడిన సంఖ్యలకు 100 చేర్చవలయునని ఒక సిద్ధాంతము బయలుదేరినది. కనిష్కుని కాలమును చర్చించి పాశ్చాత్య చారిత్రకులు క్రీ.పూ. 12వ శతాబ్దమునుండి క్రీ. శ. 78 సంవత్సరమునకు దించిరి. మరియు పాత శక మొకటి క్రీ. పూ. 123లో ప్రారంభించినట్లు కూడ ఒక వాదము బయలుదేరినది. ఈ శకమును గురించిన నవీన మతము క్రింద క్రోడీకరింపబడినది.

(a) ఈ శకము మొదట క్రీ. పూ. 123 లో శకనులు ప్రారంభించిరి. వీరు మధ్య ఆసియానుండి ఆర్యావర్తమునకు వచ్చిరి ; హిందువుల ఆచారములను, జ్యోతిష విధానమును అవలంబించి తాము పూర్వము అనుష్ఠించుచుండిన గ్రీక్ పద్ధతులను మానివేసిరి.

(b) ఇప్పటి 'ఆఫ్ఘనిస్థానము' పూర్వము 'శక' స్థానము. శకనులు తమ దేశమును వీడి ఆర్యావర్తములో వాస మేర్పరచుకొన్నపుడు క్రమేణ ఖరోష్ఠి, బ్రాహ్మి లిపులను వాడసాగిరి.

(c) మొదటి మూడు శతాబ్దములలో వారు శక కాలమును వాడుచు, గ్రీక్‌ల ననుసరించి నూటి స్థానమునందు సంఖ్యను వదిలివేయుచుండిరి. వారు భారతీయ పూర్ణిమాంత నెలల వాడిరి.

(d) క్రీ. పూ. 123 లో ప్రారంభించిన శకమునే మరల క్రీ. శ. 78 లో ఆచరణకు తెచ్చిరి. ఇందు 200 విడిచి పెట్టుటచే, కనిష్కశకము 1 ప్రాతశకము 201 కి సమానము. ఈ సిద్ధాంతము ప్రకారము కల్హణునిచే పేర్కొన

బడిన కనిష్కునికి చోటు లేదు. అతని నేమి చేయవల యునో ఈ సిద్ధాంతులు చెప్పవలెరెరి.

శ్రీహర్ష శకము : ఇది ఒక వివాదాంశమగు శకము. అల్బరూనీ పండితుని అభిప్రాయమునకును, ఇపుడు ప్రచారములోనుండు శకమునకును సంబంధ మేమియులేదు. పాశ్చాత్యులు భారతదేశ చారిత్ర ప్రాచీనతను తగ్గించుటలో చేసిన సఫలీకృత పరిశ్రమలలో నిది యొకటి. ఆల్బెరూనీ గ్రంథము 'ఇండియా' భాగము 2, పుట. 5-7 లలో కల వివరములు కొన్ని క్రింద ఇవ్వ బడినవి. అతని యాజ్జజర్డ్ శకము 400 సంవత్సరములకు సరియగు భారతదేశ శక సంవత్సరములు కొన్ని ఇవ్వ బడినవి.

అల్బరూనీ శకము 400 కి సరియగు కొన్ని శక సంవత్సరములు :

1. శ్రీహర్ష శకము - 1488;
2. విక్రమ శకము - 1068;
3. శాలివాహన శకము - 953;
4. వల్లభ శకము - 712;
5. ఖండఖాద్యక శకము - 366;
6. పంచ సిద్ధాంతిక శకము - 526.

కలి ప్రారంభము అల్బరూనీ శక ప్రారంభమునకు 4132 సం॥ల పూర్వము.

'శ్రీహర్షునికి, విక్రమాదిత్యునికి మధ్య 400 సంవత్స రములు. కాని, కొన్నిచోట్ల శ్రీహర్షుడు విక్రమాదిత్యునికి 664 సంవత్సరముల తరువాత కాశ్మీరములో చదివి యుంటిని' అని ఆల్బెరూనీ పండితుని పుస్తకమునందున్నది.

కల్హణుడు క్రీ. శ. 1148 నాటి వాడు. వరాహమిహి రుని శకము శాలివాహన శకమని అతడు పొరబడినాడో, లేదా ఈ క్రింది శ్లోకము ప్రక్షిప్తమో తెలియకున్నది.

శ్లో॥ భారతం ద్వాపరాంతే భూద్వార్తయేతి విమోహితాః ।
కేచిదేషాం మృషాతేషాం కాలసంఖ్యాం ప్రచక్రిరే ॥ 1-49.

అతడు భారతయుద్ధము కలి 653 లో జరిగినట్లు వ్రాసి నాడు. ఇదంతయు ప్రచురించినపు డిరికింపబడినదని కొంత మంది చారిత్రకుల మతము. (చూ. సప్తర్షియుగము - లౌకికాబ్దము - పు. 599).

కలియుగారంభము క్రీ. పూ. 3102 లేదా — 3101
+ 4132
క్రీ. శ. 1031

ఈ సంవత్సరము అల్బరూనీ శకము 400 కి సమానము; శక ప్రారంభకాలము కీ. శ. 631 కాబట్టి శ్రీహర్ష శక ప్రారంభము క్రీ. 1031 — 1488 = — 457 లేదా క్రీ.పూ. 458. విక్రమ శకము క్రీ. పూ. 58; శాలివాహన శకము క్రీ. శ. 77; వల్లభశకము క్రీ. శ. 318 అందు ప్రారంభింపబడినవి. శాలి వాహన శకమును ఆధారముగా కొని అల్బరూనీ పండితుడు పంచసిద్ధాంతిక, ఖండఖాద్యక శకనిర్ణయములో గొప్ప పొరబాటు చేసెను.

శ్రీహర్షుడు మాళవదేశాధీశుడు. మహాభారత కాల ములో మాళవ దేశము స్వతంత్ర రాజ్యము; తరువాత అది హస్తినాపుర రాజులకు లోనైయుండెను. తరువాత మహాపద్మనంద సర్వక్షత్రాంతకుడై, హస్తినాపుర ప్రాబల్య మును నిర్మూలించి, మాళవదేశమునకు సార్వభౌము డాయెను. క్రీ. పూ. 850 లో ధుంజి అను బ్రాహ్మణుడు మాళవ దేశమునకు రాజై, అతనివంశజులు 387 సంవత్సర ములు రాజ్యమేలిరి; క్రమేణ దానికి స్వాతంత్ర్యముకూడ లభించెను. తరువాత పన్వారు వంశీయులు ఉజ్జయిని ముఖ్యపట్టణముగా మాళవదేశము నేలిరి. వారిలో కడపటి రాజునకు 'శీలావతి' కూతురు మాత్రముండెను. ఆమె సకల వేదవేదాంగ పారంగతుడగు చంద్రశర్మ యను బ్రాహ్మణుని పెండ్లాడి, భర్తృహరి, శ్రీహర్ష యను నిద్దరు కుమారుల పొందెను. శ్రీహర్షుడే శ్రీహర్ష విక్రమ చక్రవర్తి; శకనుల దాడుల నిర్మూలించి, శ్రీహర్ష శకమును క్రీ. పూ. 457 లో స్థాపించి హైందవ సామ్రాజ్య కీర్తిని దిగంతములకు వ్యాపింపజేసెను. పాశ్చాత్య విద్వాంసులు క్రీ. శ. 606 లో కనోజి రాజ్యాధిపతి యగు హర్షవర్ధన శిలాదిత్యునితో శ్రీహర్ష విక్రమాదిత్యుని జంటవేసి, హిందూ దేశ చరిత్రను తారుమారుచేసిరి. శ్రీహర్ష శకము నేపాళ వంశావళిలో పేర్కొనబడినది. దీని కాలము క్రీ. పూ. 487 యని తీసికొనిన, నేపాళ చక్రవర్తియగు శివదేవవర్మ యొక్క శాసనకాలము వంశావళిలో చెప్పిన కలియుగ కాలమునకు సరియగుచున్నది. లేనిచో చిక్కులు ఏర్పడును.

గుప్త శకము : ఇది వివాదాస్పదమగు శకము. మన పురాణముల ప్రకారము గుప్త రాజుల కాలము క్రీ. పూ. 327 మొదలు 82 వరకు. ఈ గణన ప్రకారము గుప్త శకము క్రీ. పూ. 327 అనగా కలి 2775 లో ప్రారంభించి యుండవలయునని తెలియుచున్నది. చరిత్రకారులకు కలియుగారంభములో సంశయ మేర్పడినందున గుప్తశక నిర్ణయములో చాల వివాదము లేర్పడెను. డాక్టర్ ఫ్లీట్ గుప్తశక కాలము 319-320 అనియు, ఎమ్. ఏ. పాయి కీ. శ. 272-273 అనియు, డి. ఎన్. ముఖర్జీ క్రీ. శ. 419-20 అనియు, శ్యామశాస్త్రి క్రీ. శ. 200-201 అనియు,

అల్బరూనీ క్రీ. శ. 319-320 అనియు, కన్నింగ్‌హామ్ క్రీ. శ. 167 అనియు, బెయిల్ క్రీ. శ. 190 అనియు, డాక్టర్ భండార్కర్ క్రీ. శ. 319-20 అనియు వాదించియున్నారు. దీనికి కారణము చంద్రగుప్త మౌర్యుని అలెగ్జాండర్‌కు సమకాలికునిగా జేయుట. ఈ పొరబాటును ప్రొఫెసర్ ట్రాయర్ కనుగొని భారతదేశ చరిత్రకాలమును పునర్నిర్మాణము చేయవలయునని రూఢిగా వ్రాసినను, అతని సలహాలను మాక్స్‌ముల్లర్ మొదలగువారు త్రోసివేసి, ట్రాయర్ వాదము పురాణముల ననుసరించి యుండుటచే, మత్స్యాది పురాణములు చరిత్రలు కావనియు, వానిని పూర్తిగా నమ్మకూడదనియు తీర్మానించిరి. కాని గుప్త శకము క్రీ. శ. 319 లో ప్రారంభించినట్లు, అది ఉత్తర హిందూస్థానము నందంటను వాడుకలో నున్నట్లు చరిత్రకారు లందురు తలచుచున్నారు. అట్లే అచ్చు పుస్తకము లలో నున్నది.

గుప్తరాజ్యము శిథిలమైన తరువాత ఈ శకమును గుజరాత్, రాజపుత్రస్థానములలో క్రీ. శ. 13 శతాబ్దముల వరకు గుప్త సామంతరాజులగు మైత్రకులును, తదితరులును వాడినట్లు తెలియుచున్నది. వంగదేశములో ఈ శకము క్రీ. శ. 510 యందంతరించెను. ఉత్తర ప్రదేశములో తరువాత హర్షశకము (606 - 824 క్రీ. శ.) ప్రచారములోనికి వచ్చెను. ప్రతీహారులు ఉత్తర భారతస్థానమునకు రాజులైనపుడు తమ దేశమగు రాజస్థానమునందు వాడుకలో నుండిన విక్రమ శకమును తమ రాజ్యము నందంతట వ్యాపింపజేసిరి. బుద్ధగుప్తుని శాసనము ఒకదానిలో తిథి వారములు కలవు. చరిత్రకారులు దాని కాలము 484 క్రీ. శ. అని తలచుచున్నారు.

వా॥ శతే పంచాషష్ట్యధికే వర్షాణాం భూపతౌ చ బుద్ధగుప్తే ఆషాఢ
మాస (శుక్ల) (ద్వా) దశ్యాం సురగురో ర్దివసే......... ॥

గుప్తశకము 165 లో బుద్ధగుప్తుడు రాజ్యము చేయునపుడు ఆషాఢమాస శుక్లద్వాదశి గురువారము.

విక్రమ శకము: (క్రీ. పూ. 57) ఇపుడు విక్రమశకము సర్వజన సమ్మతమయినను, విక్రమార్కుడు చారిత్రక పురుషుడని అందరు ఒప్పుకొనినను కొన్ని దశాబ్దములకు పూర్వము విక్రమార్కుడు కృత్రిమ పురుషుడను వాదము చెలరేగుచుండెను. దీనికి కారణము పాశ్చాత్య చారిత్రకుల అపనమ్మకమే. మొట్టమొదట వి. ఏ. స్మిత్ విక్రమార్కుడు చారిత్రక పురుషుడు కాడని వాదించెను. డాక్టర్ భండార్కర్ అతనితో తప్పనిసరిగ ఏకీభవించెను. మన వారందరు అట్లే అధికారుల కటాక్షవీక్షణములకు ఆశించి కొన్ని తప్పులను ఒప్పులుగా మన్నించిరి. పర్గిటర్ కలియుగ రాజవంశావళిని విమర్శించుటకు భవిష్య పురాణమును శ్రద్ధతో చదువవలయునని హెచ్చరించినాడు.

భవిష్య పురాణములో విక్రమార్కుని జన్మమును గురించి విశదీకరింపబడినది.

శ్లో॥ పూర్ణే త్రింశచ్ఛతే వర్షే కలౌ ప్రాప్తే భయంకరే।
శకానాం చ వినాశార్థం ఆర్య ధర్మ ప్రవృద్ధయే॥
జాతః శివాజ్ఞయా సోఽపి కైలాసా ద్గుహ్య కాలయాత్
... ...
విక్రమాదిత్య నామానం పితా కృత్వా ముమోద హ।
స బాలోపి మహాప్రాజ్ఞః పితృ మాతృ ప్రియంకరః।
పంచవర్షే వయః ప్రాప్తే తపసోఽర్థే వనం గతః।
ద్వాదశాబ్దం ప్రయత్నేన విక్రమేణ కృతం తపః॥
పశ్చా దంబావతీం దివ్యాం పురం యాతః శ్రియాన్వితః।
దివ్యం సింహాసనం రమ్యం ద్వాత్రింశ న్మూర్తి సంయుతః
3-1-7 శ్లో॥ 14-18

'కలి 3000 సంవత్సరములో భయంకరులగు శకనుల నాశము చేయుటకు శివుని ఆజ్ఞ ననుసరించి గుహ్యకాంశమున విక్రమార్కుడు జన్మించెను; పంచవర్ష ప్రాయుడై నపుడే తపోవనంబుజేరి ద్వాదశ వర్షములు తపస్సు చేసిన తరువాత అంబావతీ (ఉజ్జయిని) పురమునుజేరి ముప్పది రెండు మూర్తులుగల సింహాసనము నధిరోహించెను. విక్రమార్కుడను పేరు జన్మనామము; చారిత్రకు లనుకొనునట్లు బిరుదు కాదు.

భవిష్య పురాణమునందీ విషయములు కలవు:

విక్రమార్కుని జననము కలి 3001; క్రీ. పూ. 101

పట్టాభిషేకము కలి 3020; క్రీ. పూ. 82

నేపాళదేశగమనము విక్రమశకారంభము, కలి 3044; క్రీ. పూ. 58-57

విక్రమాదిత్యుని మరణము కలి 3120; క్రీ. శ. 19

కాళిదాసుని జ్యోతిర్విదాభరణమను గ్రంథములో విక్రమార్క సార్వభౌముని గురించిన చారిత్రక విషయము లివ్వబడినవి. అందు శకపద నిర్వచనము కలదు.

జ్యోతిర్విదాభరణ రచన కాలమును క్రింది శ్లోకము తెలుపుచున్నది.

శ్లో॥ వర్షే సింధుర దర్శనాంబర గుణై ర్యాతే కలే సమ్మితే।
మాసే మాధవ సంజ్ఞికే చ విహితో గ్రంథ క్రియోపక్రమః॥

కలి 3068 లో వైశాఖ మాసములో గ్రంథోపక్రమణము జరిగినది. కార్తికములో పూర్తి అయినది. అతని సభయందుండిన పండితులను కాళిదాసుడు పేర్కొనినాడు.

శ్లో॥ ధన్వంతరి క్షపణ కామరసింహ శంకు
వేతాళభట్ట ఘట కర్పర కాళిదాసాః।
ఖ్యాతో వరాహమిహిరో నృపతేః సభాయాం
రత్నానివై వరరుచి ర్నవ విక్రమస్య॥

శ్లో॥ శ్రీ విక్రమార్కో జగతీ తలేస్మిన్
జీయా న్ననుప్రఖ్య యశా నరేంద్రః
పుపోషయః కోటి సువర్ణతో మాం
సబాంధవం సప్తతి వత్సరాణి॥

శ్రీ కృష్ణమిశ్రుని జ్యోతిష ఫల రత్నమాల.

తన కుటుంబమును 70 సంవత్సరములు పోషించినట్లు అతడు విక్రమార్కుని గురించి చెప్పినాడు.

నేపాళ దేశమునకు కలి 3044 (క్రీ. పూ. 58-57) లో విక్రమార్కుడు వెళ్లి, ఆ దేశరాజగు అంశువర్మను తన సామంతరాజుగా జేర్చుకొని విక్రమ శకమును స్థాపించి నట్లు నేపాళ వంశావళి యందున్నది.

రాజతరంగిణిలో విక్రమార్కుడు తన మంత్రియగు మాతృగుప్తుని రాజులేని కాశ్మీరమునకు కలి 3115 లో పంపినట్లు చెప్పబడినది.

'నందా ద్రిందు గుణాశ్చ (3171 విక్రమ నృపస్యాంతే
కతే ర్వత్సరాః'.

-సిద్ధాంత శిరోమణి, కాలమానాధ్యాయము.

'కలి 3179 లేదా క్రీ. శ. 78 లో విక్రమశకము అంతమొందును. అనగా శాలివాహన శక ప్రారంభమగును.

హరిస్వామి శుక్ల యజుర్వేద మాధ్యందిన శతపథ భాష్యమునందు విక్రమార్కుని ఆస్థానమందు తాను ధర్మాధ్యక్షుడుగా నుండినట్లు వ్రాసియున్నాడు.

విక్రమార్క సార్వభౌముడు చరిత్ర పురుషుడని విశదమగుచున్నది. అతడు మాళవాధీశుడు. కలి 2377 లో ప్రారంభించిన మాళవగణ శకమునకు నవీనతను కల్పించి, చరిత్రయందు లేనిపోని సంశయములను కల్పించి యున్నారు.

పంచాంగ సంస్కరణ సంస్థవారుకూడ ఆ సంశయముల నాదరించి కలియుగము కల్పితమని వ్రాసియున్నారు. మన పురాణములందు, జ్యోతిష గ్రంథములందు వారికి ఆదరాభిమానములు తక్కువ. శకముల స్థాపనములో మనవారు గ్రీకుల - కాల్డియన్ల ననుసరించిరని వారు ప్రచురించిన నివేదికయందు 255 వ పుటలో వ్రాసి యున్నారు. ఆ నివేదిక కేంద్ర ప్రభుత్వము యొక్క ఆదరణను పొందియున్నది. మరియు ఆ నివేదిక ప్రకారము విక్రమార్కుడు చరిత్ర పురుషుడని నిరూపింపవలయునట! అతనిని గురించి వ్రాసిన పుస్తకములు వారికి అనాదరణీయములు.

క్రీస్తు శకము : ఇది వివాదాంశమైనను పాశ్చాత్య క్రైస్తవ సంఘబలమువలన నిర్వివాదాంశముగ చేయబడినది. దానియందుండు లోపములను పాశ్చాత్య విద్వాంసులు మూసిపెట్టి, హిందూదేశ చరిత్రలోని నిర్వివాదాంశ విషయములను వివాదాంశములుగా జేసి మన దేశచరిత్రను తారుమారు చేసిరి.

క్రీస్తు శకమును గురించి హైడన్ స్మిత్ ఇట్లు వ్రాసినాడు: 'ఏ. డి. అనగా క్రీస్తుప్రభువు యొక్క అవతారము, శిలువపై మరణము పొందిన సంవత్సరము. క్రీస్తు శకము ప్రారంభము జనవరి 1 తేది. రోమ్‌పుర నిర్మాణము తరువాత 753 వ సంవత్సరమునకును, జూలియన్ సంవత్సరము 4714 నకును సరియగుచున్నది. క్రీ. శ. 522 లో ఈ శకము డయోనిసియసు ఎక్సిజసు సన్యాసిచే స్థాపింపబడినది. ఆరవ శతాబ్దమున ఆ శకమును ప్రవేశపెట్టి 815 లో జరిగిన మత సమావేశ తీర్మానము ననుసరించి మతాచార్యులందరీ శకమును వాడవలయునని ఉత్తరవు చేసిరి. కాని అనేక శతాబ్దములవరకు ఈ శకము వాడుకలోనికి రాకుండెను ...... క్రీస్తు 4, 5 క్రీస్తు శకములో పుట్టినట్లు తలచుచున్నారు'.

ఈ సిద్ధాంతము ప్రకారము క్రీస్తుయొక్క జననము, మరణము ఒకే సంవత్సరములో జరిగినట్లు తెలియుచున్నది. కాని బైబిల్ ప్రకారము అతడు 33 సంవత్సరములు జీవించినట్లు తెలియుచున్నది. కాబట్టి బి. సి. (క్రీస్తు పూర్వము), ఏ. డి. (క్రీస్తు తరువాత) అను వాక్యములకు అర్థమేలేదు. ఈ శకము క్రైస్తవ మతాచార్యుల ఆదరాభిమానములవలన సర్వదేశములకు సమ్మతమై ప్రస్తుతము ప్రచారములోనున్నది.

శాలివాహన శకము (క్రీ. శ. 78): విక్రమార్కుని అనంతరము క్రీ. శ. 19 మొదలు 78 వరకు రాజ్యములో అరాజకము ఎక్కువ యయ్యెను. రాజులు బలహీనులగుటచే శకనుల దాడులు ఎక్కువ అయ్యెను.

శ్లో॥ ఏతస్మి న్నంతరే తత్ర । శాలివాహన భూపతిః।
విక్రమాదిత్య పౌత్రశ్చ । పితృ రాజ్యం గృహీతవాన్॥
జిత్వాశకాన్ దురాదర్ష । శ్చీనతైత్తిరి దేశజాన్॥

రాజ తరంగిణి-3. 3-2-17-18.

'అంతలో విక్రమాదిత్యుని పౌత్రుడగు శాలివాహనుడు పితృరాజ్యమునకు అధిపతియయ్యెను. అతడు శకనులను, చీనులను, తార్తారులను జయించెను'.

శ్లో॥ బాహ్లీకాన్ కామరూపాంశ్చ । రోమజాన్ ఖురజాన్ శఠాన్।
తేషాంకోశాన్ గృహీత్వాచ । దండయోగ్యా నకారయత్॥

భవి॥ 3-3-2-19.

'శాలివాహనుడు బాహ్లీకులను, కామరూపులను, ఖురాసానులను, రోమజులను జయించి వారు దోచుకొని పోయిన ద్రవ్యమును మరల మన దేశమునకు తెచ్చెను.'

శ్లో॥ స్వరాజ్యం ప్రాప్తవాన్ రాజా । హయమేధ మచీకరత్ ।
రాజ్యం కృత్వా స షష్ట్యబ్దం । స్వర్గలోక ముపాయయౌ ॥
భవి ॥ 3-3-2-33.

'అశ్వమేధయాగముచేసి, 60 సంవత్సరములు రాజ్యమేలిన తరువాత అతడు స్వర్గలోకమును జేరెను'.

ఈ శకము దక్షిణదేశమున అమాసాంతముగాను, ఉత్తర హిందూ స్థానమునందు పూర్ణిమాంతముగాను అనుష్ఠించెదరు.

భవిష్యపురాణము ప్రకారము అగ్ని కులజులగు ప్రమర వంశీయులు ఉజ్జయినియందు కలి 2710 (క్రీ. పూ. 392) మొదలు కలి 4295 (క్రీ. శ. 1193) వరకు రాజ్యమేలిరి. ఈ వంశములో ఎనిమిదవ రాజు విక్రమార్కుడు. శాలివాహనుడు పదునొకండవ రాజు, భోజరాజు ఇరువదొకటవ రాజు.

భోజరాజు కాలము క్రీ. శ. 638-693. ఇతని యాస్థానమునందు రెండవ కాళిదాసు కవియైయుండెను. ఇతనికిని, కావ్యత్రయ కర్తయగు ప్రథమ కాళిదాసునకు సంబంధమేర్పరచినందున చరిత్ర రచనలో కలత కలిగెను.

'శక' పదము పాశ్చాత్యుల పొరబాటునకు కారణము. 'శక' పదమును 'శకనుల'కు సంబంధించినదని వారు తలచిరి. మన ప్రముఖులు దాని ననుసరించిరి.

పంచాంగ సంస్కరణ సంస్థ కూడ ఆ త్రోవను వెళ్లుటయే దుఃఖదాయకమగు విషయము. శాలివాహన శకము తరువాతి జ్యోతిష్కులచే వాడబడినది. ఇది వరాహమిహిరుని శకము కాదని ఇదివరకే నిరూపింపబడినది.

చేది, లేదా కాలచూరి: శకము ప్రారంభము క్రీ. శ. 248, పూర్ణిమాంతము. సంవత్సరారంభము ఆశ్వయుజ శుద్ధపాడ్యమి. ఇది మధ్య పశ్చిమ భాగములందు వాడుకలో నుండెను.

వల్లభి: ప్రారంభము క్రీ. శ. 318. పూర్ణిమాంతము, అమాసాంతము. సంవత్సరారంభము కార్తీక శుద్ధ పాడ్యమి. కతియవాడ్, సౌరాష్ట్ర దేశములందు వాడబడినది. గుప్త శకమునకు సంబంధించినది.

హిజిరా: ప్రారంభము క్రీ. శ. 622. చాంద్రమానము. మహమ్మదీయ శకము. ఇందు అధికమాస సవరణ లేనందున సంవత్సరారంభము మారుచుండును.

వంగసర్: ప్రారంభము క్రీ. శ. 593. మేషాది; కాబట్టి ఏప్రిల్ 14 వ తేది సంవత్సరాది. వంగ దేశములో వాడబడును.

విలాయతి: ప్రారంభము క్రీ. శ. 592. కన్యాది; కాబట్టి సెప్టెంబర్ 16 వ తేది సంవత్సరాది. వంగ, ఓఢ్ర దేశములలో వాడుదురు.

అమ్లి: ప్రారంభము క్రీ. శ. 592. భాద్రపద శుక్ల ద్వాదశి సంవత్సరాది. ఓఢ్రదేశములో వాడుదురు. జగన్నాథమును స్థాపించిన ఇంద్రద్యుమ్న మహారాజుగారి జన్మ దివసము భాద్రపద శుక్లద్వాదశి. ఇతని జ్ఞాపకార్థము ఈ శకము స్థాపింపబడినది.

జగన్నాథ దేవాలయము క్రీ. శ. 1119 లో గంగ వంశీయుడగు భీమదేవ మహారాజుచే నిర్మితమని చరిత్రకారుల అభిప్రాయము.

ఫస్లీ: వంగదేశములో, వాయవ్య భారతదేశములో వాడబడును; క్రీ. శకములో 592 తీసివేసిన ఈ సంవత్సరము లభించును. ఇది పూర్ణిమాంతము; చాంద్రమానము. వంగ దేశములో సౌరమానము.

దక్కన్ ఫస్లీ: క్రీ. శకములో 593 తీసివేయవలయును. క్రీ. శ. 1556 వరకు హిజిరా శకముపై ఆధారపడి ఉండెను; తరువాత సౌరమానముగా మారెను. వంగ సంవత్సరముతో ఏకీభవించును. సంవత్సరారంభము రవి మృగశిరలో ప్రవేశించినపుడు, అనగా మృగశిర కార్తెతో ప్రారంభము. మహమ్మదీయ పంచాంగమును అనుసరించును.

మద్రాసు ఫస్లీ: సౌరమానము. ప్రారంభము జూలై మొదటి తేది. దీనిలో నెలలు లేవు. పన్ను వసూలునకు వాడుదురు. ఫస్లీ సంవత్సరము = క్రీ. శ. — 590.

మహారాష్ట్ర సుర - సన్ లేదా షహూర్ - సన్: ఇది క్రీ. శ. — 599. దీనిని మహారాష్ట్రులు వాడుచుండిరి. మృగశిర కార్తెతో ప్రారంభము.

హర్ష శకము: ఇది హర్షవర్ధనుని కాలమును శ్రీహర్షుని కాలమును ఒకటిగాచేసినందున వచ్చిన కష్టము. హర్షవర్ధన శిలాదిత్యుడు క్రీ. శ. 606 లో రాజ్యము చేసెను. శ్రీహర్షుడు ఉజ్జయినీ సామ్రాజ్య చక్రవర్తి. ఇతని కాలము క్రీ. పూ. 457. ఇట్టి పొరబాటు గుప్తుల విషయములోకూడ జరిగినది. క్రీ. పూ. రాజ్యమేలిన గుప్త చక్రవర్తులను భవిష్యపురాణములో చెప్పినట్లు గుప్త రాజ్యక్షీణానంతరము సాధారణ రాజులగు గుప్తులను ఒకటిచేసినందున చరిత్రయందు గందరగోళ మేర్పడినది. శాసనములందు మహాగుప్తయనియు, గుప్తయనియు నుండుటలో గల వ్యత్యాసమును చరిత్రకారులు గుర్తింపరైరి.

నీవార శకము: నేపాళ దేశములో వాడబడెను. ఇది కార్తికాది, అమాసాంతము. ఇది క్రీ. శ. 878 మొదలు 1768 వరకు ప్రచారములో నుండెను.

చాళుక్య శకము : ప్రారంభము క్రీ. శ. 1076. క్రీ. శ. 1162 వరకు ప్రచారములో నుండెను.

లక్ష్మణసేన శకము: మిథిల, తిర్హూత దేశములలో విక్రమ శకముతో వాడుదురు. ఇది కార్తికాది, అమాసాంతము. ప్రారంభము క్రీ. శ. 1108. డాక్టర్ కీల్ హారన్ మతము ప్రకారము ఇది క్రీ. శ. 1194 మొదలు క్రీ. శ. 1551 వరకు ప్రచారములో నుండెను.

మహారాష్ట్ర రాజ శకము : ప్రారంభము క్రీ. శ. 1673. శివాజి మహారాజ పట్టాభిషేక దినమున జ్యేష్ఠ శుక్ల త్రయోదశిలో ప్రారంభించెను. సౌర - చాంద్రమానము. అమాసాంతము.

తరీఖి - ఇ - ఇలాహి : దైవ శకము. 14-2-1556 అక్బరు చక్రవర్తి అయిననాడు ప్రారంభించెను.

ఇతర శకములు :

	శకము	ఆరంభ కాలము
(a)	ఆలెగ్జాండర్	క్రీ. పూ. 29-8-5502
(b)	కాన్‌స్టాంటినోపుల్	క్రీ. పూ. 1-9-5508
(c)	ఆంటియోక్	క్రీ. పూ. 1-9-5492
(d)	జూలియన్	క్రీ. పూ. 1-4-4714
(e)	యూదు	క్రీ. పూ. 7-10-376

ఆచార్య

శక్మవాదము : న్యూటన్ శక్మము : 'ప్రతియొక ద్రవ్యబిందువు మరియొక ద్రవ్యబిందువును వాని ద్రవ్యముల లబ్ధమునకు అనుపాతముగను, వాని మధ్యదూరము యొక్క వర్గమునకు విలోమానుపాతముగను నుండు బలముతో ఆకర్షించును' అనునదియే న్యూటన్ యొక్క ప్రఖ్యాత సూత్రము. ఈ ఆకర్షణమును గణించుటకే లాప్‌లాస్ అను గణితజ్ఞుడు శక్మ (పొటెన్షియల్) అను భావమును క్రీ. శ. 1784లో ప్రతిపాదించెను.

ఒక కణము (అనగా ద్రవ్యరాశిగల బిందువు) P యందున్నదనుకొనెదము. ఇది తన చుట్టు ఒక బలక్షేత్రమును (ఫీల్డ్ ఆవ్ ఫోర్స్) నిర్మించుచున్నదనియు, మరియొక బిందువు Qనందు ఈ క్షేత్రము యొక్క శక్మ (పొటెన్షియల్) $\frac{m}{PQ}$ అనియు చెప్పెదము. ఇచ్చట m కణము P యొక్క ద్రవ్యరాశి. ఇటులనే పెక్కు కణములు P_1, P_2, P_3, ... ఉన్నచో, ఈ కణసమూహమునకు వేరొక బిందువు Q నందు శక్మ యొక్క విలువ $V(Q) = \frac{m_1}{P_1 Q} + \frac{m_2}{P_2 Q} + \frac{m_3}{P_3 Q} + \ldots$ అగును. అనగా Q నందు ఒక్కొక్క కణము యొక్క శక్మను సంకలనము చేసెదము. ఇచ్చట m_1, m_2, m_3 అనునవి P_1, P_2, P_3 యందున్న కణముల ద్రవ్యరాశులు. ప్రత్యేక కణసమూహము కాక అవిచ్ఛిన్న వస్తువైతే, Q బిందువందు దాని శక్మ ఒక చయన రూపములో నుండును.

$$V(Q) = \iiint \frac{\rho \, dx \, dy \, dz}{PQ}$$

ఇచ్చట $P(x, y, z)$ బిందువునందు ఆ వస్తు సాంద్రత $\rho(x, y, z)$ అని తీసికొనియున్నాము. ఈ చయనము Q బిందువు వస్తువు లోపల ఉన్నను ఉపసరణ చయనముగనే ఉండును.

V అను శక్మనుండి, (x, y, z) బిందువు నందుండు యూనిట్ ద్రవ్యరాశిగల కణముపై ఆకర్షణ బల ఘటకములను

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \; Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \; Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

అను వ్యుత్పన్నములచే పొందవచ్చును.

లాప్‌లాస్ సమీకరణము : ద్రవ్యరాశి లేని స్థలము (x, y, z) లో, శక్మ అగు $V(x, y, z)$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

అను సమీకరణమును తృప్తిచేయును. దీనిని లాప్‌లాస్ సమీకరణమని యందురు.

ద్రవ్యరాశి లోపలనైనను, బయటనైనను గల యన్ని బిందువుల వద్దను సరిపడు సమీకరణము యొక్క రూపమును లాప్‌లాస్ శిష్యుడు ప్వాస్సాన్ అను శాస్త్రజ్ఞుడు, కనుగొనెను. అది $\nabla^2 V = 4\pi\rho$. ఈ సమీకరణము నందు ρ అనునది (x, y, z) బిందువునందు సాంద్రత. ప్వాస్సాన్ సమీకరణములో $\rho = 0$ అని ప్రతిపాదించినచో, లాప్‌లాస్ సమీకరణము దొరకుచున్నది.

పని, శక్మము : ఒక చలద్ద్రవ్యము భూమ్యాకర్షణ శక్తికి ప్రతికూలముగా 'A' నుండి 'B' కు పయనించుటలో చేయు పని సంఘర్షణ నుపేక్షించినచో ఆ ద్రవ్యమును 'A' నుండి 'B' కు యే మార్గమున గొనిపోయినను ఒకటే యగునని 'గ్రీన్' అను శాస్త్రజ్ఞుడు కనుగొనెను. రమారమి అన్ని ప్రకృతి దృశ్యములలోను బలములు దూరముల ఫలములగుననియు, కావున అవి అవికారి వ్యవస్థగా నేర్పడుననియు, వానికి శక్మ సిద్ధాంతమును వర్తింపజేయవచ్చుననియును ఆ శాస్త్రజ్ఞుడు గుర్తించెను. విద్యుదయస్కాంత వస్తువులలో సంభవించు బలములు కూడ ఇదే తరహాకు చెందినవని యాతడు గ్రహించెను. అతడే మొట్టమొదటగా శక్మఫలమను పదము నుపయోగించెను.

A నుండి B కు, ఒక యూనిట్ ద్రవ్యరాశి పయనించిన ఎడల జరుగు పని

$$W = -\int_{A}^{B} \frac{\partial V}{\partial s} \cdot ds = V(A) - V(B).$$

కావున B ఆకర్షణ ద్రవ్యమునకు దూరముగా నుండు కొలది $V(B)$ తగ్గుచునుండును. B అనంతమును సమీపించునపుడు $V(B)$ శూన్యమును సమీపించును. B అనంత దూరమున నున్నదనుకొనిన యెడల $W = V(A)$ అగును, కావున ఒక ద్రవ్యరాశి వలన A వద్ద నేర్పడు శక్మము, A నుండి అనంతమున కొక యూనిట్ ద్రవ్యరాశి పయనించుట వలన జరుగు పనికి సమానమగును. కొందరు గ్రంథకర్తలు అనంతమునుండి A వద్దకు పయనించగా జరుగు పనియని 'శక్మము' ను నిర్వచించుదురు. దీనివలన శక్మముయొక్క సంజ్ఞ మాత్రమే మారును ; అనగా $V(x, y, z)$ అనునది $-V(x, y, z)$ అగును.

విద్యుచ్ఛక్మము : న్యూటన్ శక్మము మాదిరిగనే యేదైన ఒక బిందువు వద్ద విద్యుచ్ఛక్మమును, ఆ బిందువు వద్దకు అనంతమునుండి యొక యూనిట్ ధన విద్యుదావేశము (యూనిట్ ఛార్జి) పయనించగా జరుగుపనియని నిర్వచింపవచ్చును. రెండుబిందువుల మధ్య శక్మ భేదమును ఒక యూనిట్ ధన విద్యుదావేశమును ఒక బిందువువద్ద నుండి రెండవ బిందువు వద్దకు విద్యుద్బలములకు వ్యతిరేకముగా తీసికొని వచ్చుటలో జరుగు పనిగా నిర్వచింతురు. A వద్ద e ధన విద్యుదావేశమైనచో r దూరములో గల బిందువువద్ద శక్మము $\frac{e}{r}$ అగును. ఈ సూత్రమును వర్తింపజేయుటవలన అనేక విషయముల వివరణమును చక్కని రూపములో నీయవచ్చును. ఉదాహరణ కొక స్థూపాకారవాహకము e అను ధన విద్యుదావేశము దగ్గరకు తేబడిన దనుకొనుడు. అప్పుడు వాహకములో e కు దగ్గరగా నున్న చివర A ఋణాత్మకముగను, అతి దూరముగా నున్న రెండవ చివర B ధనాత్మకముగను విద్యుదీకరింపబడును. కారణమేమన విద్యుద్వస్తువు వ్యాపింపజేయు విద్యుత్క్షేత్రములో శక్మము దూరముతో తగ్గుచుండును గాన A వద్ద శక్మమెక్కువగను, B వద్ద తక్కువగను నుండును. దానివలన విద్యుదావేశములు పారుటలో పైన వివరించిన శక్మైక రూపత సంభవించును.

విద్యుదయస్కాంతిక శక్మములు : చూ. విద్యుదయస్కాంత సిద్ధాంతము - పు. 670, భౌతిక రాసాయనిక శాస్త్రములు.

వేగశక్మము : ద్రవచలన శాస్త్రములో ప్రతి బిందువు వద్దను కణభ్రమణము శూన్యమైనచో ఆచలనమును నిర్భ్రమణ చలన మని అందురు. అపుడు ఒక బిందువేగ ఘటకములు ఒక ఫలము $\phi(x, y, z)$ యొక్క ఆంశిక వ్యుత్పన్నములగును. ఈ ఫలమును వేగశక్మమని యందురు. అసంపీడ్యమాన ద్రవములలో ఈ వేగశక్మము లాప్‌లాస్ సమీకరణమును తృప్తిపరచునని చూపవచ్చును.

ధ్వని : నిష్పీడ్యమానమును, సంఘర్షణ రహితమును నగు ద్రవ ద్రవ్యములో శబ్ద తరంగ ప్రసరణము జరుగునప్పుడు అది నిర్భ్రమణమగునని తీసికొనవచ్చును. వేగశక్మ 'V' అనియును, పీడన ఫలము p అనియును, సాంద్రత 'ρ' అనియును అనుకొనిన ఎడల $\frac{dp}{dt} = k\nabla^2 V$ అని చూపవచ్చును. 'k' అనునది శబ్ద వేగము. $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = k^2 \nabla^2 V$ అను ప్రసిద్ధమైన శబ్ద తరంగ ప్రసారాంతరీకరణ సమీకరణమును పడయవచ్చును.

శక్మమును గూర్చి కొన్ని ముఖ్య సిద్ధాంతములు : (i) అనంతము దగ్గర శూన్యమగు $\phi(x, y, z)$ అను నేదైన ఒక దైశిక ఫలమును తీసికొనిన యెడల కొన్ని నియమములతో నీ క్రింది సమీకరణములు నిజమగును.

$$F = \nabla\phi + \nabla \times H$$

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\nabla F}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$H = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\nabla \times H}{r}\, dx\, dy\, dz$$

పై చయనములు త్రిపరిమాణిక ఆకాశమందంతటను వ్యాపించియుండును.

ϕ, V, H ఫలములు శక్మ ఫలముల స్వభావమునే కలిగియుండి అనంతము వద్ద శూన్యములగును. వానిని F యొక్క అదిశ, సదిశ ఫలములనవచ్చును.

F భ్రమణ రహితమైనచో $H = 0$ అగును, కావున అది కేవల అదిశ శక్మమునే కలిగియుండును. $\nabla . F$ = శూన్యము అయినచో F ను నిరుపసరణ ఫలమని యందురు.

భ్రమణరహిత అమూర్త క్షేత్రముల యెడల 'V' ను కేవలము శక్మము లేదా అమూర్త శక్మము అని యందురు. $(-V)$ ను శక్మశక్తి యందురు. భూమ్యాకర్షణ క్షేత్రములలో నిది సంప్రదాయము. కాని సజాతీయాంశములు పరస్పరము నిరసించుకొను క్షేత్రములలో V ను $F = -\nabla V$ అని నిర్వచింతురు. అప్పుడది శక్మశక్తితో సమానమగును. శక్మమనగా శక్తికి మూలము అనవచ్చును.

(ii) గ్రీన్ శాస్త్రజ్ఞుని యొక ముఖ్య సిద్ధాంతమునుండి శక్మ ఫలము

$$\int_S \int F.N \, dS = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

అను సమీకరణమును తృప్తిపరచునని చూపవచ్చును. పై చయనము 'S' అను నేదైన ఒక సంవృత తలముపై తీసికొనవచ్చును, N తలముయొక్క అభిలంబ దిశను సూచించును.

(iii) 'శక్మ ఫలమొక సంవృత తలముపై స్థిరరాశి యగునెడల, ఆ తలమావరించు ఘన స్థలమునందంతటను అది స్థిరరాశియే కాగలదు'.

(iv) 'గోళ కేంద్రమువద్ద శక్మముయొక్క విలువ గోళ తలముపై శక్మమధ్యమానమున్కు సమమగును'. పై రెండును ముఖ్యమైన సిద్ధాంతములు.

(v) ఏ స్వరాత్మక ఫలమునైనను న్యూటన్ శక్మముగ భావించవచ్చును.

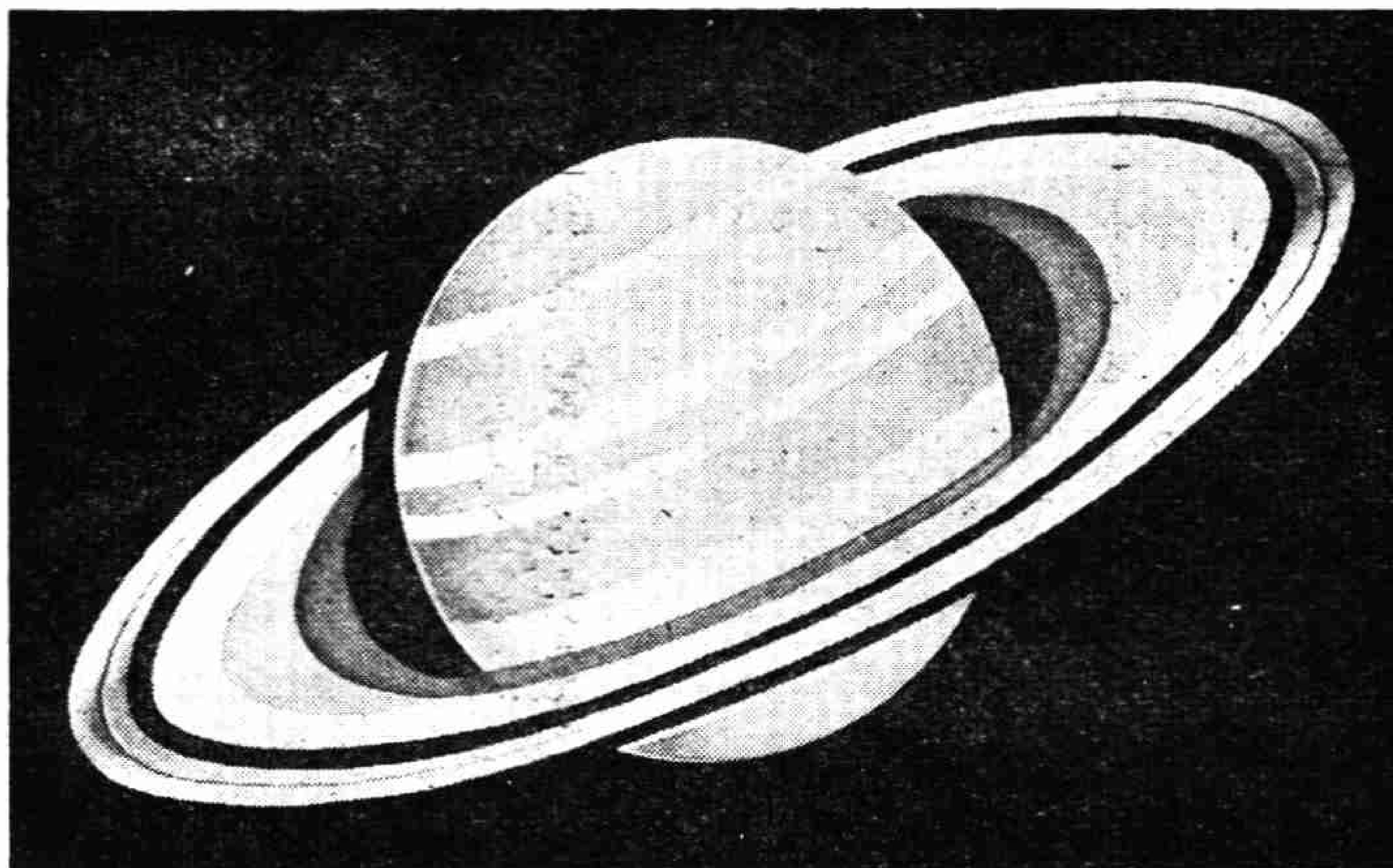
(vi) కొద్ది నియమముల నుపయోగించినచో 'ఏ శక్మ ఫలమైనను ఒకే యొక విభాగమునకు శక్మమగును'. కావున శక్మ ఫలముల చర్చ, స్వరాత్మక ఫలముల చర్చయే యగును. డి. ఆర్. కె. స.

శని : భూశనుల మధ్యదూరము సుమారు 143.23 కోట్ల కి. మీ. గ్రహము పరిహేళివద్ద షడ్భాంతరములో నున్నప్పుడు భూమికి అత్యంత సమీపములో (సుమారు 119.09 కోట్ల కి. మీ.) నుండును. గ్రహము లన్నిటిలోను ధ్రువములవద్ద చప్పటముగ నుండునది శనిగ్రహమే. దీని ధ్రువ వ్యాసము సుమారు 120 04 కి. మీ. దీని ఘన పరిమాణము భూమితో సరిపోల్చిన 750 రెట్లున్నది.

శని తలములో మచ్చలను ఎప్పుడో ఒకప్పుడు కనవచ్చును. ఇవి కనబడు కాలము చాల తక్కువ యగుటచే గ్రహముయొక్క భ్రమణ కాలమును నిశ్చయముగ గణింప నశక్యము. నిరక్షరేఖా ప్రాంతములో కనబడిన మచ్చనుండి హాల్ గ్రహ భ్రమణకాలము 10. గం. 14 ని. అని కనుగొనెను. 1903 వ సంవత్సరములో 35° ఉత్తర శరములో కనబడిన మచ్చనుండి కనుగొనిన ప్రమాణము 10 గం. 38 ని. కాబట్టి నిరక్షరేఖ నుండి దూరము పోయినకొలది భ్రమణకాలము హెచ్చుచున్నదని తెలియుచున్నది. ఇందు శని గురు గ్రహమును పోలియున్నది.

శని గ్రహ పరావర్తన శక్తి సుమారు 0.42 (ఇంచు మించుగ గురు గ్రహ పరావర్తన శక్తికి సమానము). శని గ్రహ వర్ణమాలలో మీతేన్, అమోనియా వాయువుల పట్టీలు కనబడును. గురుగ్రహ వర్ణమాలలోనున్న వాటికన్న మీతేన్ పట్టీలు ఎక్కువగ, అమోనియా పట్టీలు తక్కువగ నుండును. వికిరణమాపక పరిశీలన నుండి శనిలోక తాప క్రమము సుమారు $-150°C$ అని తెలియవచ్చుచున్నది. శనిలోక వాతావరణము మీతేన్, అమోనియా, హైడ్రోజన్, హీలియమ్ వాయువులతో కూడుకొని యున్నదనియు, గ్రహము అడుగుభాగమున నొక మంచుగడ్డ కప్పు ఉన్నదనియు, దాని గర్భము శిలామయమైనదనియు శాస్త్రజ్ఞులు (ముఖ్యముగ విల్డ్, డన్‌హామ్ మొదలగువారు) విశ్వసించుచున్నారు.

వలయ బృందము : శని గ్రహమును పరివేష్టించి యున్న వలయ బృందము (కంకణములు) ఒక రమణీయ దృశ్యము. దూరదర్శనితో చూచినపుడు నభోమూర్తులన్నిటిలోను అతి మనోహరముగా శని కనబడును. శని గ్రహము చుట్టు సకేంద్రములైన మూడు వలయములు గ్రహము యొక్క నిరక్షరేఖా తలములో నున్నవి. వీనిని A, B, C అను అక్షరములతో సూచింతురు. వాని బాహ్య వ్యాసములు క్రమముగ 273,588; 233,355; 181,856 కి. మీ. వెడల్పు క్రమముగ 17,702; 28,968; 17,702 కి. మీ. వలయము A వలయము B యంత కాంతిమంతమైనది కాదు. వీనిని కాసినే విభాగము వేరు చేయుచున్నది. దీని వెడల్పు సుమారు 4023 కి. మీ. మూడవ వలయమగు C కి పలుచ వలయము అని పేరు.



చిత్రము 405 శని కంకణములు

ఇది B నుండి సుమారు 2414 కి. మీ. ల ఎడములో నున్నది. ఈ వలయ బృందము సుమారు 16 కి. మీ. ల మందము కలిగియుండుటచే ఇది ఒక సన్నని కాగితమువలె కనుపించుచుండును. ఆవలనుండు నక్షత్రములను కూడ ఈ వలయముల ద్వారా చూడ వీలగును. ఇది గ్రహకక్షా తలమునకు 27° ఏటవాలుగ నుండును.

ఈ వలయముల స్వభావము ఒక వివాదాంశమై యుండినది. ఇవి గ్రహము చుట్టు వేగముగ తిరుగుచుండు పెక్కు చిన్న ఉపగ్రహములతో కూడుకొని యున్నవని నేటి శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. వర్ణమాలా దర్శక పరిశోధనలనుండి అంతర్వలయము సెకనునకు 19·3 కి.మీ. వేగముతోను, బాహ్య వలయము సెకనునకు 16 కి. మీ. వేగముతోను తిరుగుచున్నవని తెలియవచ్చినది.

శనిగ్రహమునకు 9 ఉపగ్రహములు కలవు. వాటి వివరములు దిగువ పట్టికలో చూడవచ్చును.

సౌరబృందములో ప్రాచీనులకు తెలిసియుండిన కడపటి గ్రహము శని. దాని పరిభ్రమణ కాలము ఇతర గ్రహముల కంటె తక్కువ. అందుచే మన పూర్వీకులు శనికి పర్యాయ నామములను కల్పించియున్నారు.

'శని మందౌ పంగు కాలౌ ఛాయా పుత్రోసితోర్కజః॥'

అమరము.

శని, మంద, పంగు: ఈ మూడు పదములు శని గ్రహముయొక్క మందగతిని తెలుపుచున్నవి.

కాల: నల్లని రంగు కలది. చాల దూరములో నుండుటచే ఈ గ్రహము నలుపురంగు కలదిగా కనబడును.

ఛాయాపుత్రః : శని కక్షకు తర్వాత సూర్యకిరణములు అల్పకాంతి కలవగుటచే, అచట చీకటి ఎక్కువయని మన పూర్వీకులు తలచిరి. అందుచే శనికి ఛాయాపుత్రుడను పేరు సార్థకమని వారు తలచిరి.

అసితః : నల్లని రంగు గల మూర్తి.

ఉపగ్రహము	ఆవిష్కర్త		శని నుండి దూరము మైళ్ళలో*	భ్రమణకాలము ది.	గం.	ని.	వ్యాసము మైళ్ళలో
మిమాస్	హర్షల్	1789	1,15,000	0	22	39	400
ఎన్‌సిలాడస్	హర్షల్	1789	1,48,000	1	8	53	400
టెథిస్	కాసినే	1684	1,83,000	1	21	18	700 ?
డయోన్	కాసినే	1684	2,35,000	2	17	41	900
రియా	కాసినే	1672	3,27,000	4	12	25	1150
టైటాన్	హైగెన్స్	1655	7,60,000	15	22	41	3500
హైపెరియాన్	బాండ్	1848	9,20,000	21	6	38	250 ?
జాపటస్	కాసినే	1671	22,10,000	79	7	56	800 ?
ఫీబె	పికరింగ్	1898	80,00,000	550	10	50	200 ?

పై ఉపగ్రహము లన్నిటిలోను కాంతిమంతమైనది టైటాన్. ఇది మీథేన్, అమోనియా వాయువులతో కూడియున్న వాతావరణమును కలిగియున్నదని క్యూపర్ కనుగొనెను. సౌరబృందములోని ఉపగ్రహములలో వాతావరణమును టైటాన్‌లోనే కనుగొని యున్నారు. హైపెరియాన్ ఉపగ్రహమును దూరదర్శనితోనే చూడ వీలగును. దీని దీర్ఘాక్షము సంవత్సరమునకు 18° 40′ సవ్యగతిని కలిగి యుండును. హైపెరియాన్ టైటాన్‌ల యోగము కక్ష యొక్క అపకేంద్రము వద్దనే సంభవించుచుండును. అప్పుడు టైటాన్ నుండి కక్ష అధిక దూరములో నుండును. ఇది ఖగోళ యాంత్రిక శాస్త్రములో ఒక విచిత్రమైన సంభవము. బాహ్యతమమైన ఉపగ్రహమగు ఫీబె సవ్యగతిని కలిగియున్నది.

అర్కజః : సూర్యుని కుమారుడు; సూర్యకాంతి లీనమై ఛాయ ప్రారంభించు సరిహద్దులో శని సంచరించుటచే ఈ పేరు కలిగినది. సూర్యునికి ఛాయాదేవికి జనించిన వాడు అని ఉత్ప్రేక్షాలంకారము. కె. ఎస్. వి. స.

శుక్రుడు : గ్రీకులు శుక్రుని సౌందర్య దేవతగను, శాంతిదేవతగను పరిగణించిరి. శుక్రుడు దానవుల గురువనియు, గొప్ప కవియనియు మన విశ్వాసము.

సూర్యునికి సమీపముగా నుండుటచేతను, తన పరావర్తన శక్తి అధికముగ (0·59) నుండుటచేతను శుక్రుడు అధిక దీప్తితో ప్రకాశించును. గ్రహములన్నిటిలోను మిక్కిలి ప్రకాశవంతమయినది శుక్ర గ్రహము. రవినుండి అంతరము ఎక్కువగా నున్నప్పుడు శుక్రుని నిస్సహాయ నేత్రములతో పగటిపూట వారముల కొలది చూడవచ్చును.

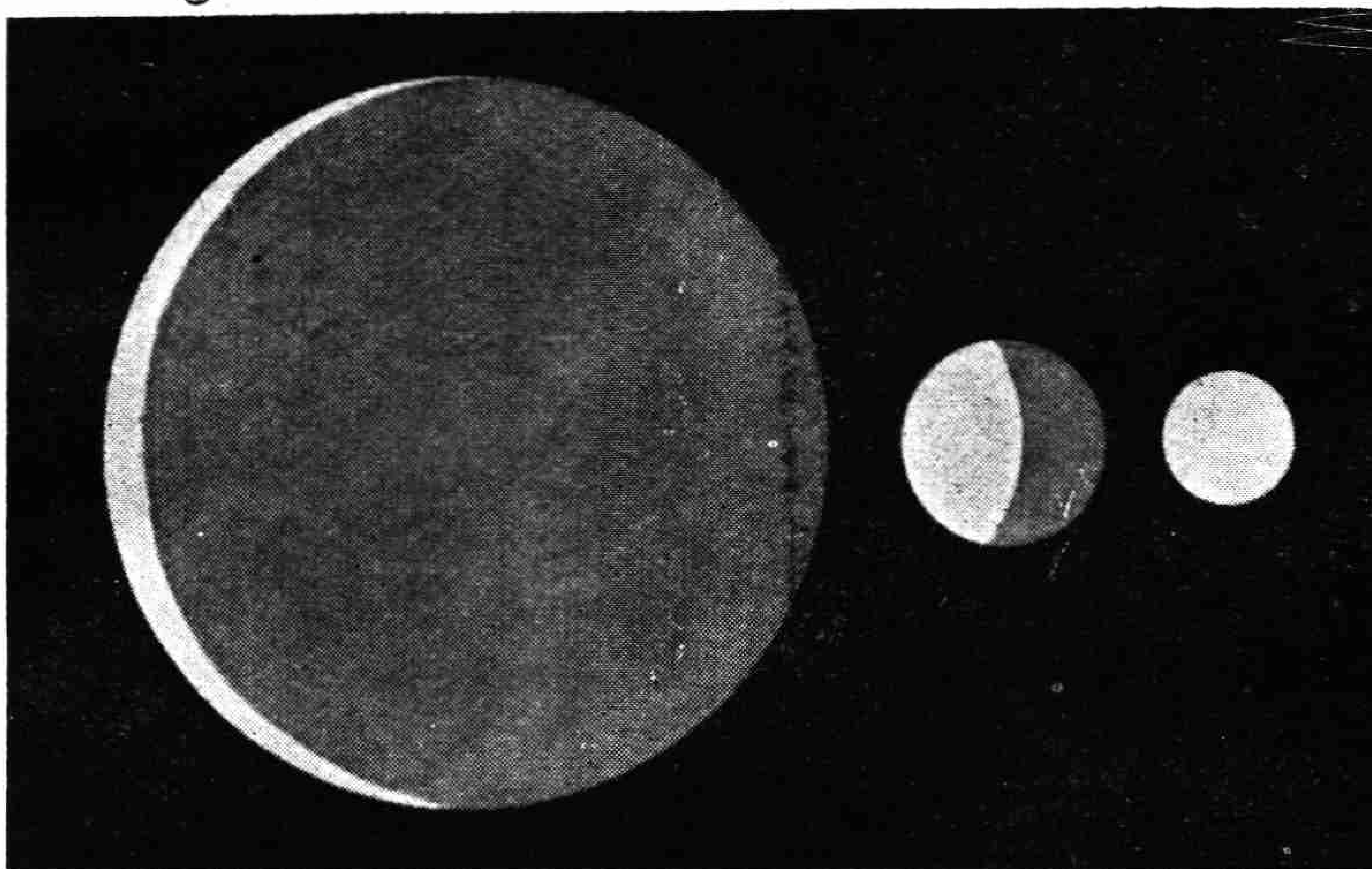
* 1 మైలు = 1·609 కి. మీ.

చంద్రునివలె శుక్రుడును కళలను చూపును. శుక్రుని దృశ్య పరిమాణములో మార్పులు అధికముగ నుండును. గ్రహము అధమ యోగములో నుండునపుడు దాని దృశ్య వ్యాసము సుమారు 1′ ఉండును. ఉత్తమ యోగములో నుండునపుడు దాని దృశ్య వ్యాసము 11″ ఉండును. దీనికి కారణము గ్రహముఉత్తమ యోగములో నుండునపుడు భూగ్రహముల మధ్యదూరము, అధమ యోగములో నుండునపుడు గల మధ్య దూరము కంటె సుమారు 6 రెట్లుండుటయే; అధమ యోగమునకు సుమారు 36 దినములు పూర్వమో, తరువాతనో గ్రహము అత్యంత ప్రకాశవంతముగ నుండును.



చిత్రము 408 నెల వంక, శుక్రుడు – వీటి యోగము రమణీయమైన దృశ్యము

సంధ్యా సమయములో దూరదర్శని సహాయమున శుక్రుని బాగుగ పరిశీలింపవచ్చును. దానిలో కచ్చితమయిన చిహ్నములు కానరావు. కాని, అది చంద్రరేఖ ఆకారమును గలిగి యున్నప్పుడు దానిలో అస్పష్టములైన కొన్ని నల్లని ఛాయలు చూపట్టును. కచ్చితమయిన చిహ్నములు లేకపోవుటచే దీని భ్రమణ కాలమును కనుగొనుట దుస్సాధ్యముగనున్నది. మరియు దీని గణిత భ్రమణకాలము నేటికిని వివాదాస్పదమైయున్నది.



చిత్రము 407 శుక్రుని దృశ్యపరిమాణ, ఆకృతులలోని మార్పులు

వర్ణమాలా దర్శకమును ఉపయోగించుటలో ఎట్టి ఉపయోగకరమయిన ఫలితము లభింపలేదు. శుక్రుడు సూర్యునికి ఒకటే ముఖము చూపుచుండు ననియు, దాని భ్రమణ కాలము సుమారు 225 దినములనియు షియాపరెల్లి తలచెను. కాని శుక్రుని భ్రమణ కాలము సుమారు 2, 3 వారములని నేటి శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు.

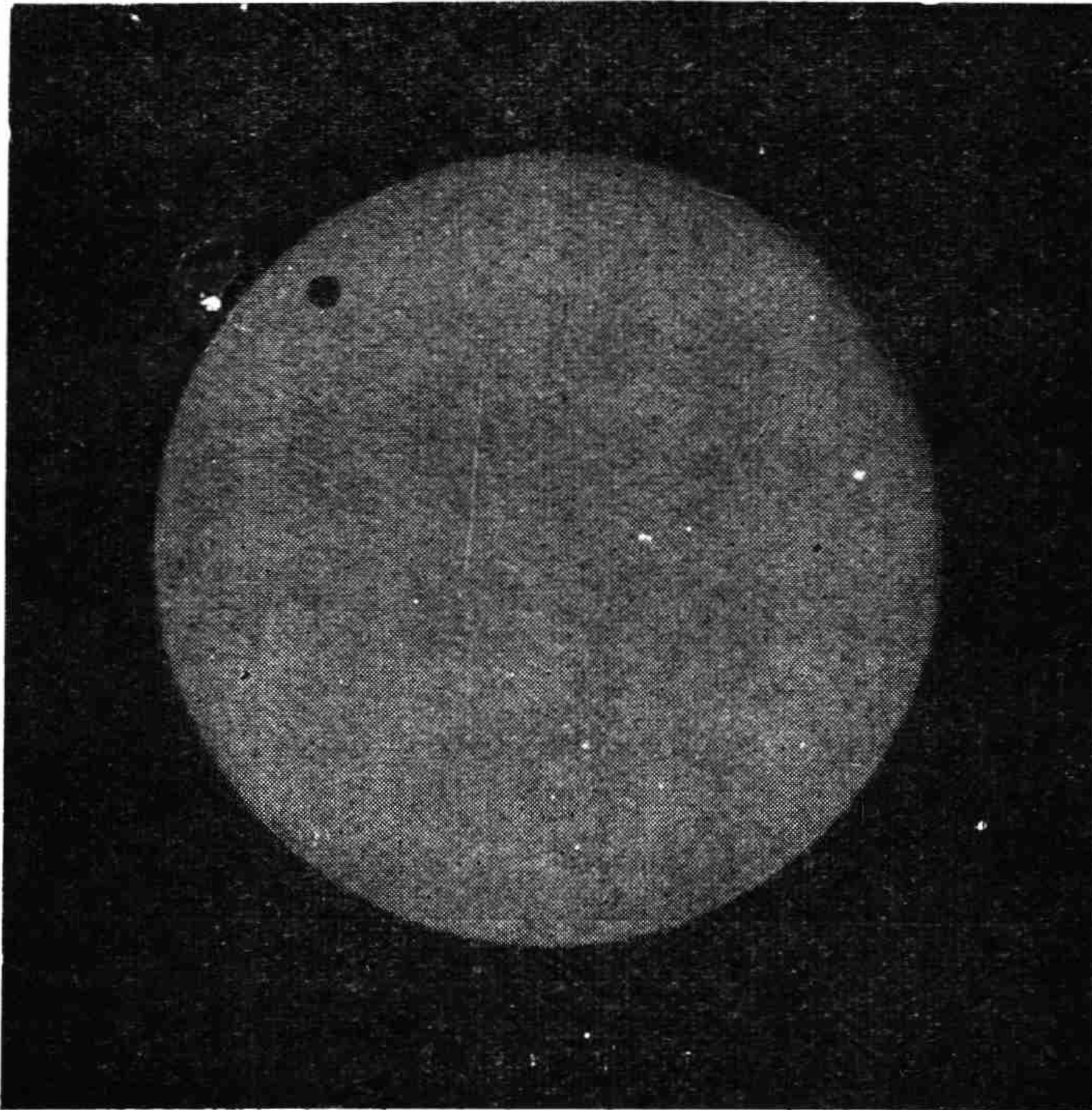
శుక్రుని పరావర్తన శక్తి సుమారు 0.59 అని చెప్పితిమి. దీని నుండి శుక్రలోకమంతయు మేఘమయమనియు, అస్పష్టమయిన వాతావరణముతో కూడుకొని యున్నదనియు తెలియవచ్చుచున్నది. రవి బింబతరణ సమయములో శుక్రుని చుట్టు ప్రకాశవంతమయిన కాంతివలయమును చూడవచ్చును (చూ. చిత్రము 409 – పు. 574). ఈ దృశ్యము చాల అరుదుగా సంభవించును. క్రిందటి క్రాంతి 1882లో జరిగినది. రాబోవునది 2004 లో జరుగును. ఈ దృశ్యము నుండి లొమొనోసోవ్ అను రష్యన్ ఖగోళ శాస్త్రవేత్త శుక్రలోకము వాతావరణముచే చుట్టబడి ఉన్నదని అనుమానించెను. ఇది నేడు ఇతర పరిశోధనలచే సమర్థింపబడినది. శుక్ర వాతావరణములో నీటి యావిరి, ఆక్సిజన్ ఉన్న జాడలు అంతగా కానరావు. శుక్రుని

వర్ణమాలలో కార్బన్ డైఆక్సైడ్‌ను సూచించు దృఢమయిన విచూషణ రేఖలను చూడవచ్చును.

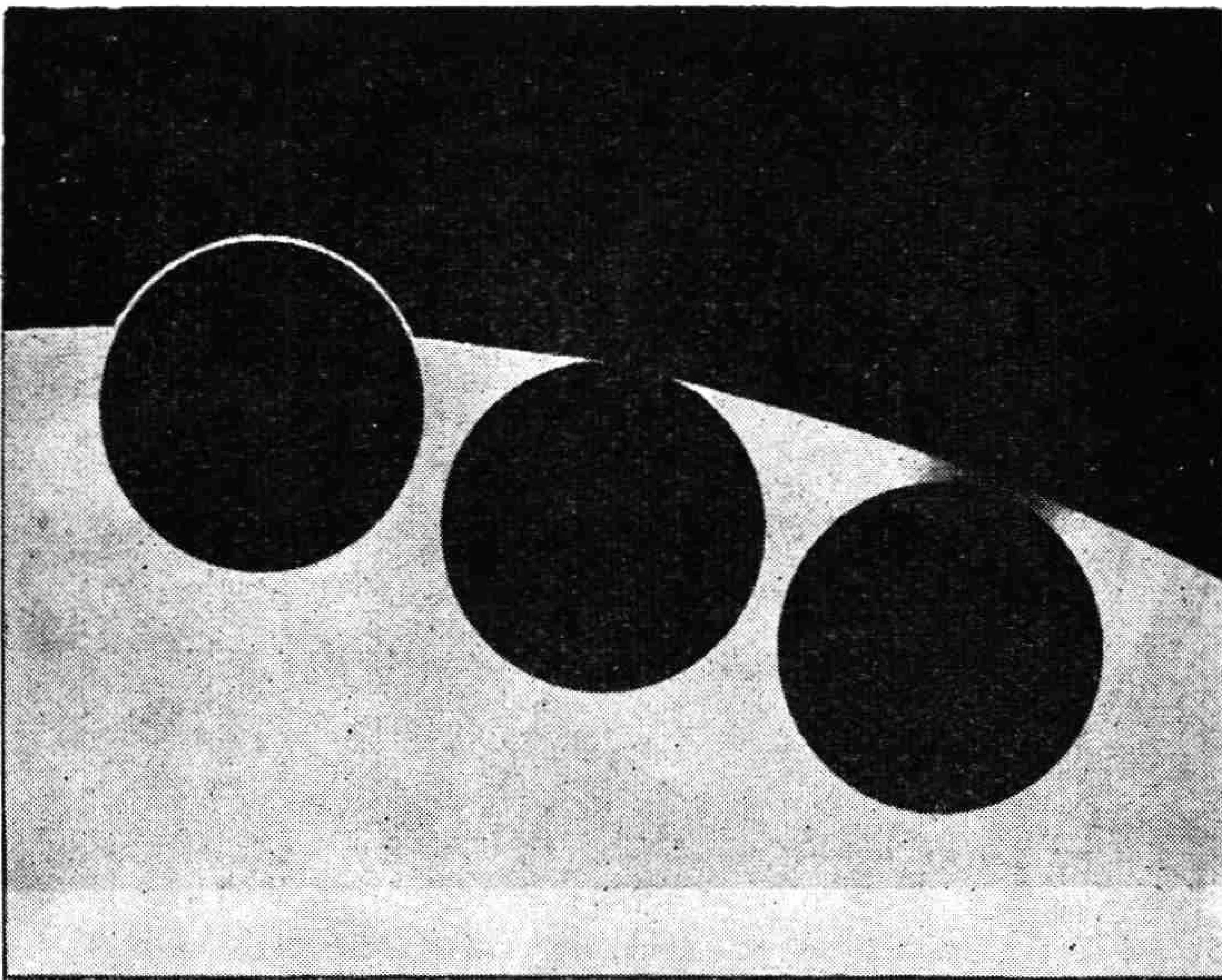
శుక్రుడు రవి నుండి భూమికంటె రెండురెట్లు తేజోష్ణతలను పొందును. చంద్రరేఖ ఆకారమును కలిగియున్నప్పుడు శుక్రుని తాపక్రమము సుమారు —23°C. ఇది మేఘవేష్టనము యొక్క పై భాగములోని తాపక్రమమును సూచించును. శుక్రతలములోని తాపక్రమము సుమారు 50°C.

శుక్ర బింబమునకు పరిభ్రమణ కాలములో బుధ బింబమునకుకలుగునట్టి మార్పులు కలుగును. అధమ యోగములో శుక్రుడుఅస్తంగతుడగును; ఉత్తమ యోగములో కూడ అస్తంగతుడగును. బాహ్య గ్రహముల వలె, చంద్రునివలె ఉత్తమ యోగములోనున్నప్పుడు శుక్రుడు పూర్ణకళలతో కనుపింపడు.

శుక్రుడు మనకు దగ్గరగా నున్న సమయమున దాని చీకటి తలమే మనకుకనిపించును, దూరముగా నున్నప్పుడు దాని సూర్యప్రకాశిత ముఖము గోచరమగును. ఈ రెండు దృశ్యముల మధ్యప్రకాశిత అర్ధేందు ఆకారము మనకు కనపడదు. రేడియో ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనల ఫలితముగ చీకటివైపు ఎల్లప్పుడును చీకటిలో నున్నప్పటికన్న ఎక్కువ వేడి కలిగియున్నదని తెలిసినది. అందుచేత శుక్ర గ్రహమునకు పరిభ్రమణము కలదని ఊహించవలసియున్నది.



చిత్రము 408 శుక్ర ప్రతరణము



చిత్రము 409 ప్రతరణ సమయమున శుక్రుని చుట్టుగల కాంతివలయము

పౌరాణిక గాథ సమర్థన: ఈ మార్పులు సామాన్య జన మనోరంజకముగా నుండుటకుగాను ఈ క్రింది గాథ మన పురాణములందు వ్రాబడినది.

విష్ణువు వామన రూపియై త్రైలోక్య సామ్రాజ్యాధిపతియగు బలి చక్రవర్తిని మూడడుగులు సురకార్యార్థియై యాచించెను. దానవాచార్యుడగు శుక్రునికి ఈ దానము వలన బలి చక్రవర్తికి కీడు మూడునను భయముతో దత్త సమయమున నీటిధార క్రింద పడకుండునట్లు పాత్రద్వారమును తన కంటితో మూయగా, నీరు

ధారాళముగా వచ్చుటకుగాను, వామనమూర్తి దర్భాగ్రముతో పొడిచెను. అప్పుడు నీటిధార బయటికి వచ్చి శాస్త్రోక్తముగ దానము పూర్తియయ్యెను. విష్ణువుచే శుక్రుని కన్నొకటి పొడవబడినందున, శుక్రుడు ఒంటికంటి దేవరయయ్యెనని పౌరాణిక గాధ.

వేదములో సూర్యునికి విష్ణువని పర్యాయనామము కలదు. ఉత్తమయోగములో శుక్రునికి అస్తంగతము కలుగుటచే శుక్రుని పూర్ణ బింబము మనకు కనబడదు. రవికిరణ కాంతిజ్వాలల మరుగుపడిన శుక్రుడు పూర్ణ కాంతినిపోగొట్టుకొనునను రహస్యమును తెలిసికొనిన ఆర్యులు వామనమూర్తి హస్తగత దర్భాగ్రతాడిత అంధనేత్రుడని శుక్రుని వర్ణించుటలో పొరబాటేమియు లేదు. కె. ఎస్. వి. న.

శుద్ధగతి శాస్త్రము : శుద్ధగతి శాస్త్రమునందు ద్రవ్యరాశి, బలము అను భావములు రావు. స్థలము, కాలము అను భావములకు మాత్రము స్థలముండును.

కణ శుద్ధగతి శాస్త్రము : ఒక కణముయొక్క నిరూపకముల (x, y, z) సూచించునపుడు ఒక కణము యొక్క నిర్దేశము సంపూర్ణమగును. ఆ కణము చేలనమును స్వీకరించుచో ఈ నిరూపకములు కాలముతో మారును. అట్టిచో అక్ష దిశలలో దాని వేగము

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt};\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt};\quad \dot{z}=\frac{dz}{dt}$$

అని చెప్పెదము. ఇచ్చట t అనునది కాలపు కొలత. ఒక బిందువుయొక్క వేగము పైన చూపిన ఘటకములు గల ఒక సదిశరాశి అనగా $V = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}$.

ఇందు i, j, k అనునవి యూనిట్ సదిశరాశులు. ఈ కణము ఒక వక్రరేఖా పథమున చలించినచో, దాని వేగముయొక్క దిశ, ఆ రేఖకు స్పర్శ రేఖయొక్క దిశ యగును. వేగముయొక్క పరిమాణము $s = \frac{ds}{dt}$. ఇచ్చట s అనునది ఆ వక్రరేఖపై కొలువబడిన దూరము.

ఒక కణము యొక్క త్వరణము దాని వేగము మారు రేటును సూచించును. ఇది కూడ ఒక సదిశ రాశియే.

$$A = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\ddot{z}.$$

x, y, z ల పైనుంచిన రెండు చుక్కలును కాలమునకు అపేక్షయా వాటి ద్విగుణిత అంతరీకరణ పరికర్మను తెలియజేయును. ఒక కణము ఒక వక్రరేఖను అనుసరించి చలించుచో దాని త్వరణములో ఒక భాగము ఆ వక్రరేఖకు గీయబడిన స్పర్శరేఖ దిక్కునందును, మరియొక భాగము ఆ బిందువువద్ద ఆ వక్రమునకు గీయబడిన అభిలంబ రేఖ దిక్కునందును ఉండును.

మొదట పేర్కొనిన ఘటకము : $\frac{dV}{dt} = V\frac{dV}{ds}$.

రెండవ భాగము $A = V^2/\rho$. ఇచ్చట ρ అనునది వక్రరేఖయొక్క వక్రతా వ్యాసార్ధము.

భ్రమణాక్షములు : ఒకప్పుడు x, y నిరూపకములు, z అక్షమునకు సాపేక్షముగ ω వేగముతో భ్రమించుచున్నట్లు గ్రహించుట యవసరమగును. ఈ పక్షమునందు స్థాన సదిశరాశియగు $R + ix = jy + kz$ ను అంతరీకరణము చేయవలసి వచ్చును. ఇచ్చట మనము జ్ఞాపకముంచుకొనవలసినది ఏమనగా $\frac{di}{dt} = \omega j;\ \frac{dj}{dt} = -\omega i.$ దీనినుండి వేగ సదిశరాశిని పొందవచ్చును :

$$V = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z} + \omega \times R$$

దృఢతల గమనము : ఒక దృఢతలము (ఒక పలక అనుకొనవచ్చును.) నకు రెండు రీతుల గమన ముండవచ్చును. మొదటిది స్థానాంతరీకరణము. ఇందు ఆ తలమందుండు బిందువులన్నియు, సమానాంతర రేఖల ననుసరించి సమాన దూరముల లంఘించును. రెండవ చలన రీతి భ్రమణము. ఇది పలక తలమునకు లంబముగా నుండు అక్షము చుట్టు భ్రమణము. ఈ పలక ఒక స్థానము నుండి మరియొక స్థానమును కేవల భ్రమణమును స్వీకరించుట వలననే చేరగలదు. మరియొక ముఖ్యమైన సిద్ధాంత మేమనగా : తగిన రెండు వక్ర రేఖలు తీసికొని వాటియందు ఒకదానిని స్థిరముగా నుంచి మరియొకదానిని మొదటి క్రవరేఖపై జారకుండ దొర్లించుటవలన అన్ని విధములైన గమనములను పొందవచ్చును.

దృఢవస్తువు గమనము : త్రిపరిమాణికమగు దృఢవస్తువునకు స్థానాంతరీకరణమో, లేదా ఒక అక్షము చుట్టు శుద్ధ భ్రమణమో ఉండవచ్చును. మొదటి పక్షములో ఆ వస్తువు నందుండు బిందువులన్నియు సమానాంతర రేఖల ననుసరించి సమదూరములు లంఘించును. రెండవ పక్షములో ప్రతి బిందువు మార్గమును భ్రమణాక్షముననుండు కేంద్రముగా గల ఒక వృత్తమగును. ఈ వృత్తముల తలము లన్నియు భ్రమణాక్షమునకు లంబముగా నుండును. ఒక దృఢ వస్తువు ఒక అక్షరేఖ చుట్టు భ్రమణమును, అదే అక్ష దిక్కులో స్థానాంతరీకరణమును ఏకకాలములో పొంది యుంటే, ఇటువంటి గమనమునకు 'తిరుగుడు చీల గమనము' (స్క్రూ మోషన్) అని పేరు. ఒక దృఢ వస్తువును ఏ స్థలమునుండి మరి యే స్థలమునకైనను ఉచిత

తిరుగుడు చీల గమనము ద్వారా సాధించవచ్చుననుట ఈ శాస్త్రములో నొక సిద్ధాంతము. దృఢవస్తువుకు చేరిన బిందువు ఏదైన స్థిరీకరింప బడినచో, అది ఆ బిందువు ద్వారా వెళ్లు అక్షము చుట్టు భ్రమణమును స్వీకరించ గలదు. భ్రమించుచున్న వస్తువుయొక్క తాత్కాలిక గతిని భ్రమణాక్షము ననుసరించి, ఆ అక్షము చుట్టు కోణీయ వేగము నిడువుగా గల ఒక సదిశ రాశి ద్వారా గుర్తింప వచ్చును.

స్థిర బిందువుగుండ పోవు రెండు అక్షముల చుట్టు రెండు భ్రమణములు ఏకకాలమందు ఉన్నచో, సమానాంతర చతుర్భుజ నియమము ప్రకారము వాటి సదిశరాశులను కలుపవచ్చును. ఆ సంకలిత ఫలమును ఆ రెండు సదిశ రాశుల కూడికచే సూచించబడిన అక్షమునకు చుట్టు ఆ వస్తువు ఒకే భ్రమణము కలదిగా భావించవచ్చును.

ఒక పరిమిత కోణ మంతట ఒక అక్షము చుట్టు జరిగిన భ్రమణమును, ఆ భ్రమణాక్షము వెంట కొలువబడిన ఒక పొడవుచే నిరూపించవచ్చును. కాని, అట్టి పరిభ్రమణ రాశులను, సమానాంతర చతుర్భుజ సూత్రముననుసరించి ఒకే భ్రమణముగా కూర్చుటకు వీలులేదు. అందువలన పరిమిత భ్రమణములు సదిశరాశులు కావు. నిజమునకు భిన్నాక్షములకు సాపేక్షముగ రెండు పరిమిత భ్రమణములు A, B గలవనుకొందము. B వెంబడి A, A వెంబడి B ఈ రెండును సమాన ఫలముల నీయవు. సదిశ రాశుల విషయములో $A+B=B+A$ సత్యము. అందువలన పరిమిత భ్రమణములు సదిశ రాశులు కావు. ఆ. స.

శుల్బ సూత్రములు : ఆరు వేదాంగములలో ఏకదేశమును, వైదిక మతాచరణ ననుశాసించునదియు, అతి విస్తృతము అగు కల్ప సూత్ర వాఙ్మయము నందొక ఖండము శుల్బ సూత్రములు. అందు నేడు మనకు స్వతంత్ర ప్రకరణములుగ మిగిలియున్నవి ఎనిమిది లేదా తొమ్మిది శుల్బ సూత్రములు. తక్కినవి విశిష్టములగు కల్ప సూత్ర కరణములందలి భాగములు. ఈ వేరు వేరు శుల్బ సూత్రములు బోధాయన, ఆపస్తంబ, కాత్యాయన, మానవ అను నాలుగున్నవి. శుల్బమనగా త్రాడు. అందుచే శుల్బ సూత్రమన త్రాడు వాడుకచేయు గణిత పరికర్మకు సంబంధించిన సూత్రము అని పేరు. అనగా ఇది యజ్ఞకర్మకై యజ్ఞ వేదికలను, హోమ గుండములను నిర్మించుటకు వలయు మాన పద్ధతుల వివరణము. ఇందు ఆవశ్యకమగు కొలతలకు, స్థాన నిర్దేశములకు త్రాళ్ల నుపయోగించుచుండిరి. యథార్థమైన కొలతలు, స్థాన నిర్దేశములు యజ్ఞ కర్మల సాఫల్యమునకై ఆవశ్యకమగుటచే ఈ మాన యాథార్థ్య సంపాదనకై యథార్థ శాస్త్రమగు జ్యామితి శాస్త్రము పెంపొందింపబడినది.

శుల్బ సూత్రముల రచనా కాలము వేద వాఙ్మయ మంతటి కాలముతోపాటు యొక వివాదాస్పదమైన విషయము. ఆపస్తంబ శుల్బ సూత్రములను జర్మనీ భాషలోనికి అనువదించి, సంస్కరించిన బిర్కా అను జర్మనీ పండితుని అభిప్రాయము ప్రకారము శుల్బ సూత్రములలో కెల్ల ప్రాచీనతమమగు బోధాయన సూత్రము క్రీ. పూ. ఎనిమిదవ శతాబ్దమునకు చెందినది. వేదాంగములలో ఒకటియగు జ్యోతిషము ఖగోళ శాస్త్రీయోపపత్తుల నాధారముగా గొని క్రీ. పూ. 1500 వందల ఏండ్ల కాలమున వెలుగు చూచినదని ఊహింపబడుటచే, శుల్బ సూత్రములు కూడ జ్యోతిషముతో సమకాలీనములే కావలయును. ఏది ఎట్లున్నను శుల్బ సూత్రములు క్రీ పూ. 5 వ శతాబ్దము కన్న పశ్చాత్కాలీనములు కావు.

ప్రాచీన గణిత లోకమందు పితాగొరస్ ప్రతిపాదనయని పేరొందిన సిద్ధాంతము అనగా 'లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణముపై గీయబడు చతురస్రము యొక్క వైశాల్యము తక్కిన రెండు భుజములపై గీయబడిన చతురస్రముల సంకలిత వైశాల్యమునకు సమము' అను సిద్ధాంతమును ప్రతిపాదించుట శుల్బ సూత్రముల మహానిర్వాహము. శుల్బ సూత్రములు ఉపపత్తుల పొందుపరుప పని బెట్టుకొనక పోవుటచే అట్టి ఉపపత్తి ఆ కాలము వారికి తెలియునో, తెలియదో మనకు తెలియదు. కాని, ఈ యజ్ఞ వేదిక నిర్మాతలు దానిని అనేక సన్నివేశములలో వాడుక చేసిన రీతిని చూడ వారు దాని సార్థక్యమును పూర్ణముగ అవగాహించుకొనినట్లు మనకు విశదమగుచున్నది. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజముల కొలతకు సరిగానున్న త్రాళ్లను సాగదీసి పట్టుకొని, ఒక లంబమును నిలబెట్టు పద్ధతి సాధారణముగ వాడుకలో నుండెడిది. అట్టి లంబకోణ త్రిభుజముల భుజముల పొడవుల నిష్పత్తులలో ఉన్న సంఖ్యల పట్టీలనేకము తీయబడినవి. చతురస్రములు, దీర్ఘ చతురస్రములు, లంబములు వ్రాయుటకుగాను జ్యామితీయ విధానము తీయబడినవి. ఇది గాక ఒక చతురస్రము, లేదా దీర్ఘ చతురస్రము, లేదా త్రిభుజమునకు గుణిజ సంబంధములో నున్న మరొక చిత్రమును గీయుటకు, లేదా చతురస్రముల సంకలన వ్యవకలనములకు వలయు పరికర్మలు సూచించబడినవి. వృత్తమును సమచతురస్రీకరించు పద్ధతికూడ యత్నించబడినది. కాని ఇది కేవల స్థూల పద్ధతి. ఈ పద్ధతి స్థూలమేకాని, నిశితమైనది కాదని శుల్బ సూత్రకారులకుకూడ తెలిసినట్టుగ కనిపించుచున్నది.

పైన నిరూపించిన రచనలు క్రింది బీజగణితీయ సర్వ సమత్వముల జ్ఞానము వారికున్నట్లు మనకు తెలియజేయు చున్నవి.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}\ldots\ldots$ అనురూపములో $\sqrt{2}$ విలువ యాథార్థ్యమునకు అత్యంత సన్నిహితముగ గణించబడినది. ఈ ప్రకరణమందు కన్పట్టు 'సవిశేష*' పదమునకు వ్యాఖ్యాతలిచ్చిన వివరణమును మనమంగీకరింతుమేని పైన చెప్పిన $\sqrt{2}$ విలువ ఆసన్న మూల్యమే యని శుల్బ సూత్రకారులకు తెలిసి యుండెనని మనము కొనవచ్చును. కరణీయ సంఖ్యల విలువలు జ్యామితీయ విధానమున సాధించబడెను. పూర్ణాంకముల, భిన్నాంకముల, మిశ్రాంకముల వర్గగణనము వీరికి మిక్కిలి పరిచితమైన గణిత వ్యవహారము.

$z^2 + y^2 = x^2$ వంటి అనిశ్చిత సమీకరణముల సాధనలు, ఒక సంఖ్య చతురస్రముల వైశాల్యముల సంకలిత వైశాల్యముగల ఒక చతురస్రమును రచించుటలో ఇమిడి యున్నవి. ఇట్లు చాల ప్రాచీనకాలమునందే భారతీయులకుగల గణిత, (ముఖ్యముగా జ్యామితీయ) జ్ఞానసంపదను శుల్బ సూత్రములు మనకు వెల్లడి చేయుచున్నవి. తరువాత వారు తగిన శ్రద్ధను తీసికొనక పోవుటచే, ఈ జ్ఞానమంతయు ఈ దేశమందు లుప్తమై పోయినదను నేరమొకటి భారతీయులపై మోపబడినది. శుల్బ సూత్రముల ప్రయోజనమునకు తరువాతి గణిత జ్ఞాన ప్రయోజనమునకు వ్యత్యాసము ఏర్పడినదియే కాని భారతదేశ గణితజ్ఞాన సాతత్యమునకు భంగము వాటిల్లలేదు.

శుల్బసూత్రము లందున్న గణితశాస్త్ర విషయములు తన 'సైయన్స్ అవ్ ది శుల్బ' అను గ్రంథమందు (1937, కలకత్తా విశ్వవిద్యాలయము) డాక్టర్ బి. బి. దత్త కూలంకషముగా చర్చించియున్నాడు. సరస్వతి.

శూన్యాంకము (జీరో): సంఖ్యాసమితిలో శూన్య అంకె అపూర్వమైన స్థానమును పొందియున్నది. ఆధునిక సంకేతములలో ఇది '0' చే గుర్తించబడుచున్నది. క్రీ.పూ. 2వ శతాబ్ద ప్రాంతములో భారతదేశమున ఈ అంకె ఉపయోగింపబడినది. దీని కల్పనతో గణితశాస్త్ర పురోగతి ప్రారంభమయినది. ఈ అంకె కల్పనకు పూర్వము 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 లను గుర్తించుటకు సంకేతములు ఉన్నప్పటికి, అంతకన్న పెద్ద సంఖ్యలను వ్రాయుటకు వివిధ దేశములలో వివిధ పద్ధతులు అవలంబింపబడినవి. ఈ అంకె కల్పన సంఖ్యాసమితిలో స్థాన సంకేతనమును ప్రవేశపెట్టినది. '0' సంకేతము లేనిచో మూడు వందల అయిదును, ముప్పై అయిదును, లేదా మూడువేల అయిదును ఒకదానికి మరొకటి భ్రమపడే అవకాశము ఉండెడిది. శూన్య అంకె సంకేతము ఆ సంఖ్యలను 305, 35, 3005 అని వ్రాయునట్లు సాధ్యపరచి సందిగ్ధతను తొలగించి స్పష్టము చేసినది. అనగా స్థాన సంకేతనములో 0, 1, 2,......9 అంకెలకు, ఒక సంఖ్యలో వాటి స్థానమునుబట్టి విలువ మారుచుండును. సంఖ్యలో ఒక్కొక్క స్థానము ఎడమవైపునకు జరిగిన కొలది ఆ అంకె విలువ 10 రెట్లగును.

శూన్య అంకె శూన్యతను సూచించుదానిగా తరచు భావించుచుందురు. ఉదాహరణకు శూన్య నిడివి అనేది దూరమే కాదు. శూన్య వైశాల్యము, శూన్యబలము, శూన్యకాలములకు కూడ పై అర్థమే వర్తించును. కాని, శూన్య తాపక్రమము అనేది తాపక్రమ కొలమానములో ఒక స్థానమును సూచించును. దానికన్న ఎక్కువ, తక్కువ తాపక్రమములు ఆ కొలమానములో ఉన్నవి. వాస్తవ సంఖ్యాసమితిలో -1 కు $+1$ కు మధ్య స్థానమును '0' పొందుచున్నది. సాధారణముగ దీనిని పూర్ణాంకముగ తీసికొందురు. శూన్యముతో చేయబడు పరికర్మములు క్రింది నియమములకు లోబడి ఉండును. a అనునది '0' కానట్టి మరే సంఖ్య అయినప్పటికి,

(1) $a + 0 = a$
(2) $a - 0 = a$
(3) $0 - a = -a$
(4) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
(5) $0/a = 0$
(6) $a^0 = 1$
(7) $0! = 1$
(8) $a \div 0$ అనిర్వచనీయము.

ఏలన $\frac{a}{0} = x$, అనగా దీని అర్థము $a = 0 \times x$. ఇపుడు a శూన్యమైనచో x కు అద్వితీయవిలువ (యునీక్ వాల్యూ) లేదు. $a \neq 0$ అయినచో $a = 0 \times x$ అగునట్లు x కనిపెట్టుట సాధ్యముకాదు. కనుక a కు ఏ విలువ ఇచ్చినను $a/0$ కు స్పష్ట విలువలేదు.

కాని, ఉన్నత గణితములో $x \longrightarrow 0$ అగునప్పుడు అనగా x శూన్యమును సమీపించునపుడు $\frac{a}{x}$ (ఇచ్చట $a \neq 0$)

* సవిశేష = సశేష = ఇంకను మిగిలియున్నది అని అర్థము.

యొక్క నడతను పరిశీలించవలసియుండును. $x \longrightarrow 0$ అగునపుడు a మేరలేక పెరుగును. అనగా ఏ స్థిర సంఖ్య తీసికొనినను దానిని, a అతిక్రమించును. దీనినే కలనశాస్త్ర సంకేతములో $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$ అని సూచించుదురు.

పా. ల. నా.

శృంఖలిత భిన్నములు : $\frac{3}{4}$, $\frac{27}{5}$ ఇవి రెండు భిన్నములు. వీటియందు మొదటి భిన్నమందు హారమగు 4, లవమగు 3 కంటే పెద్ద సంఖ్య. కనుక $\frac{3}{4} < 1$. ఇటువంటి భిన్నమును యుక్త (క్రమ) భిన్నమనెదము. రెండవ భిన్నములో $27 > 5$, అనగా ఇది 1 కంటె పెద్దది. ఇటువంటి అయుక్త (అపక్రమ) భిన్నమును $5+\frac{2}{5}$, అనగా ఒక పూర్ణాంక భాగముగను ఒక యుక్త భిన్నాంక భాగముగను వ్రాయవచ్చును.

ఇపుడు $5+\dfrac{2}{4+\frac{1}{3}}$ అను శృంఖలిత భిన్నమును తీసికొనెదము. ఇచ్చట హారము $4+\frac{1}{3}$. దీనిలో ఒక పూర్ణాంకము 4 ను ఒక భిన్నము $\frac{1}{3}$ ను ఉన్నవి. దీనిలో 3 కి బదులు $3+\frac{2}{7}$ అని తీసికొనిన, మనకు లభ్యమగు మరీ పెద్ద శృంఖలిత భిన్నము $5+\cfrac{2}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{7}}}$

దీని విలువ కనిపెట్టుటకు చివరనుండి ప్రారంభించి $3+\frac{2}{7}=\frac{23}{7}$, తరువాత $4+\dfrac{1}{23/7} = 4+\dfrac{7}{23} = \dfrac{99}{23}$ అనియు, కడపట $5+\dfrac{2}{99/23} = 5+\dfrac{46}{99} = \dfrac{541}{99}$ అనియు నిర్ణయించవలెను.

ఇట్టి శృంఖలిత భిన్నములను ఎక్కువ స్థలము లేక సంక్షేపముగా ఒకేవరుసలో వ్రాయుట వాడుక. పైన వివరించిన శృంఖలిత భిన్నమును $5+\dfrac{2}{4+}\;\dfrac{1}{3+}\;\dfrac{2}{7}$ అని వ్రాసెదము. ఇది శృంఖలిత భిన్నమని సూచించుటకును, $5+\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{7}$ అను భిన్న సంకలము కాదని గుర్తించుటకును, + సంజ్ఞ హారములో సంఖ్య ప్రక్కన వ్రాసెదము.

లవములన్నియు 1 గ నుంటే, అటువంటి దానికి 'సరళ శృంఖలిత భిన్నము' (స. శృ. భి.) అని పేరు.

ఉదా : $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\frac{1}{6}}} = 2+\dfrac{1}{4+}\;\dfrac{1}{3+}\;\dfrac{1}{6}$ అనునది ఒక సరళ శృంఖలిత భిన్నము. ఏ శృంఖలిత భిన్నమునైనను సరళ శృంఖలిత భిన్నముగా వ్రాయవచ్చును కనుక, ఇకమీద 'సరళ శృంఖలిత భిన్నముల' నే చర్చించెదము.

స. శృ. భి. యొక్క ఉపసరణలు :

$a_1+\dfrac{1}{a_2+}\;\dfrac{1}{a_3+}\;\cdots\;\cdots\;\dfrac{1}{a_n}$ అను n పద శృంఖలిత భిన్నమును తీసికొనుము. దీని విలువ కనిపెట్టుటకు చివరిదగు a_n నుండి ప్రారంభించవలెనని పైన చెప్పితిమి. అయితే అటులచేయక, తలయగు a_1 నుండి ప్రారంభించి కొన్ని పదముల తరువాత కత్తిరించినట్లైతే మనకు దొరకు ఉప శృంఖలమునకు 'ఉపసరణ' మని పేరు. కనుక మొదటి ఉపసరణము $\dfrac{a_1}{1}$, రెండవది $a_1+\dfrac{1}{a_2} = \dfrac{a_1a_2+1}{a_2}$, మూడవది $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\;\dfrac{1}{a_3} = \dfrac{a_1a_2a_3+a_3+a_1}{a_2a_3+1}$

ఇటులనే, కడపటి లేదా n వ ఉపసరణము, దత్త శృంఖలమే అగుచున్నది. ఈ ఉపసరణములను p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, ... కడపట p_n/q_n అని వ్రాయుట వాడుక. కనుక

$$p_1 = a_1\,; \qquad q_1 = 1$$
$$p_2 = a_1a_2+1\,; \qquad q_2 = a_2$$
$$p_3 = a_1a_2a_3+a_3+a_1\,; \qquad q_3 = a_2a_3+1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

వీటిని కనిపెట్టుటకు రెండు సూత్రములున్నవి. అవి :

$$p_n = a_n\,p_{n-1}+p_{n-2}$$
$$q_n = a_n\,q_{n-1}+q_{n-2}$$

మొదటి రెండు ఉపసరణలు కనిపెట్టిన తరువాత పై సూత్రములను ఉపయోగించి మిగిలిన ఉపసరణములను సులభముగా గణింపవచ్చును.

శృంఖములలోని సంకేతములు $a_1, a_2, \ldots a_n$ అన్నియు ధన పూర్ణాంకములు కావున, p_r, q_r కూడ ధన పూర్ణాంకములు. n పదములు గల శృంఖలమందు p_n/q_n దాని విలువ. కనుక పరిమిత పదములు గల ఒక్కొక్క శృంఖలిత భిన్న విలువ ఒక అకరణీయ సంఖ్య, అనగా రెండు పూర్ణాంకముల నిష్పత్తి అగును.

విపర్యయముగా ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య p/q ను, ఒక పరిమిత సరళ శృంఖలిత భిన్నముగా వ్రాయవచ్చును. ఇది చూపుటకు, p, q పూర్ణాంకములకు ఉమ్మడి విభాజక

ములు లేవనుకొందము. అటులున్నచో వాటిని p/q అను భిన్నము యొక్క హార, లవముల నుండి కొట్టి వేసి భిన్నమును మరింత సులభ రూపములో వ్రాయ వచ్చును.

p ని q చే భాగించగా a_1 లబ్ధము, r_1 శేషము అను కొందము. అనగా

$$p = a_1 q + r_1 \qquad \text{(i)} \quad 0 \leq r_1 < q$$

ఇట్లే $$q = a_2 r_1 + r_2 \qquad \text{(ii)} \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = a_3 r_2 + r_3 \qquad \text{(iii)} \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

అని వ్రాయవచ్చును. $r_1, r_2, r_3, \ldots \ldots$లు ధన పూర్ణాంక ములు. వాని విలువలు క్రమముగా తగ్గుచుండుటచే, ఏదో ఒకచోట r_n విలువ శూన్యము కాక తప్పదు. అనగా ఒక చోట $r_{n-1} = a_n r_{n-2}$ అగును.

p, q కంటె చిన్నదయినచో $a_1 = 0$ అగును. మరియే ఇతర 'a' విలువయు శూన్యముకాదు.

$$\text{కావున } \frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \qquad (1)$$

$$= a_1 + \frac{1}{(q_1/r_1)}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_n} \text{ అగును.}$$

ఇదియే మనకు కావలసిన శృంఖలిత భిన్నము.

ఈ భిన్నమునకు సమసంఖ్యాక ఉపసరణలుగాని, బేసి సంఖ్యాక ఉపసరణలుగాని ఉండునట్లు చేయవచ్చును.

పై భిన్నములో n సరిసంఖ్య అయినచో $a_n \neq 1$ అయిన

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{(a_n - 1)} + \frac{1}{1}$$

అనియు,

$a_n = 1$ అయిన, $$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots \frac{1}{a_{n-1} + 1}$$

అనియు వ్రాయవచ్చును.

ఈ భిన్నములో వచ్చు $a_1, a_2, \ldots$లు, p, q ల గ.సా.భా. కనుగొనునప్పుడు క్రమముగా వచ్చు లబ్ధములు.

ఉదా: $$\frac{476}{219} = 2 + \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{4+} \frac{1}{2}$$

సరిసంఖ్యాక ఉపసరణలు, కావలెనంటే కడపటి 2 ను $1 + \frac{1}{1}$ అని వ్రాయవచ్చును.

ప్రతి పరిమిత సామాన్య శృ. భి. విలువ అకరణీయ మగుటచేతను, ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యయు పరిమిత సామాన్య శృ. భి. గను మార్చవీలయినదియునగుటచే, అనంత పదములుగల శృ. భి. ల విలువ కరణీయము అనియు మనము ఊహింపవచ్చును.

విపర్యయముగ, కరణీయ సంఖ్యలను అనంత పద శృ. భి. లుగా వ్రాయవచ్చును.

ఎట్లన x అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనుకొందము. a_1 x లోని పూర్ణాంక భాగము $[x]$ అనుకొందము.

కనుక $x = a_1 + (x - a_1)$. ఇప్పుడు $0 < (x - a_1) < 1$,

కనుక $$\frac{1}{x - a_1} > 1 ; \; a_2 = \left[\frac{1}{x - a_1} \right]$$

అనుకొందము.

$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \left(\frac{1}{x - a_2} - a_2 \right)$$

$\frac{1}{x - a_1}$ బదులు $\frac{1}{x - a_2} - a_3$ తీసికొని పై విధముననే $a_1, a_2, \ldots \ldots$ల విలువలు గ్రహించవచ్చును. x విలువ కరణీయమగుటచే ఇట్లెన్ని పర్యాయములు చేసినను శేషము శూన్యముకాదు. ఇట్లేర్పడు $a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4 +} \cdots$ శృంఖలిత భిన్నము విలువ x కు సమానము.

ఉదా: $$1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{2+} \ldots \ldots \ldots$$

ఇందు $\frac{1}{2+} \frac{1}{3}$ అను భాగము ఆవర్తన కలది.

(ii) $$1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{4+} \ldots \; \ldots \; \ldots$$

ఇందు ఏ సంఖ్యయు తిరిగి కనిపించుట లేదు.

ఇందుదహరించిన మొదటి తరగతి భి. శృ. ములను ఆవర్తన సరళ భి. శృ. అందురు. ప్రతి వర్గకరణియు ఆవర్తన సరళ శృ. భి. ముగా మార్చవచ్చుననియు, విపర్యయముగ ప్రతి అట్టి ఆవర్తన శృ. భి, ము ల విలువ వర్గ కరణి అనియుకూడ నిరూపించియున్నారు ఉదా. 2:

$$\frac{\sqrt{5} + 3}{2} = 2 + \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = 2 + \frac{1}{2/(\sqrt{5} - 1)}$$

$$= 2 + \frac{1}{2(\sqrt{5} + 1)/(5 - 1)} = 2 + \frac{1}{(\sqrt{5} + 1)/2}$$

తిరిగి $(\sqrt{5}-1)/2$ వచ్చినందున పై విధముగానే తర్వాత సంఖ్యలు వచ్చును.

కాబట్టి $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2} = 2 + \dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\cdots\cdots$

ఇందు $\dfrac{1}{1}$ ఆవర్తన చెందుచున్నది.

ఉదా. 3 : $a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{1}{b+}\cdots$ విలువ కనుగొనుట,

$x = a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{1}{b+}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$ అయినచో

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{x}} = a+\frac{x}{bx+1}$$

$$=\frac{a\,(bx+1)+x}{bx+1} = \frac{(ab+1)\,x+a}{bx+1}$$

$x\,(bx+1) = (ab+1)\,x+a\;;\; bx^2-abx-a=0$ అను రెండవ తరగతి సమీకరణ మూలములలో నొకటి x విలువ.

$$x = \tfrac{1}{2}\,ab \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+4ab)}$$

x విలువ ధనరాశి యగుటచే

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{ab+\sqrt{(a^2b^2+4ab)}\right\}$$

అని నిర్ణయించవచ్చును.

శృ. భి. యొక్క ఉపసరణలు - వాని లక్షణములు : $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$ ఒక సా. శృ భి. అనుకొందము.

$\dfrac{p_1}{q_1},\ \dfrac{p_2}{q_2}$ వాని ఉపసరణ లనుకొందము. వాని నిర్మాణ సూత్రము పైన సూచింపబడినది. దానినుండి ముఖ్యముగా

$\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n}{q_n\,q_{n-1}}$ అనియు,

$\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{q_n\,q_{n-2}}$ అనియు సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

$a_1,\ a_2,\cdots\cdots$లు అన్నియు ధన పూర్ణాంకములగుటచే

$$\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_6}{q_6} > \cdots \text{ అనియు}$$

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \text{ అనియు}$$

గ్రహింపవచ్చును. అనగా బేసి ఉపసరణలు ఏకరీతి వృద్ధి చెందుచున్నవనియు, సరి ఉపసరణలు ఏకరీతి క్షీణత చెందుచున్నవనియు తెలియుచున్నది.

$p_n = a_n\,p_{n-1}+p_{n-2}\;;\; q_n = a_n\,q_{n-1}+q_{n-2}$ అగుటచే, $p_n > p_{n-1}\;;\; q_n > q_{n-1}$ అనియు గ్రహించవచ్చును.

ఇంతేకాక $p_n,\ q_n$ లు రెండును n కంటె పెద్దవి అని కూడా గ్రహించవచ్చును.

పరిమిత శృ. భి. ముల విలువ కడపటి ఉపసరణ విలువ యగుటచే దానిని గురించి విస్తరించి చెప్పనవసరములేదు. అనంత శృ. భి. ల విలువ, n అనంతముగా వృద్ధి చెందునపుడు $\dfrac{p_n}{q_n}$ యొక్క అవధి అని చెప్పవచ్చును.

F శృ. భి. విలువ అయినచో

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_1}{q_1}+\left(\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}\right)+\left(\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_3}\right)+\cdots\cdots$$

దీని అవధి

$= \dfrac{p_1}{q_1}+\sum\limits_{2}^{\infty}\left(\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$ అని వ్రాయవచ్చును.

$= \dfrac{p_1}{q_1}+\sum\limits_{2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{q_n\,q_{n-1}}$ పై సూత్రముల ప్రకారము,

$\sum\limits_{2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{q_n\,q_{n-1}}$ ఒక ఏకాంతర పరంపర. దానిలో $n\longrightarrow\infty$ అగునపుడు

$\dfrac{1}{q_n\,q_{n-1}}\longrightarrow 0$ కాబట్టి $\sum\limits_{2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{q_n\,q_{n-1}}$ ఒక ఉపసరణ పరంపర.

కాబట్టి ప్రతి అనంతపద శృంఖలిత భిన్నమును ఒక విలువకు ఉపసరణ చెందును. దానినే ఆ శృంఖలిత భిన్న విలువ F అని చెప్పవచ్చును. పై పరంపరలోని మొదటి n పదముల మొత్తము p_n/q_n అగుటచే, సరి — బేసి ఉపసరణలు కూడా ఆ భిన్నము యొక్క విలువకు ఏకరీతిగా సమీపించును. ఆ బేసి ఉపసరణలు F కంటె తక్కువ అనియు సరి ఉపసరణలు F కంటె హెచ్చు అనియు తెలియుచున్నది. ఇంతేకాక F విలువ రెండు ప్రక్కలనున్న ఉపసరణల మధ్య నుండును.

$\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n}{q_n\,q_{n-1}}$ అగుటచే

$$p_n\,q_{n-1}-p_{n-1}\,q_n = (-1)^n.$$

$p_n,\ q_n$ లకు ఉమ్మడిభాజకమున్నచో, అది పై సమీకరణము యొక్క రెండు వైపులను భాగించవలయుననుటచే ఆ ఉమ్మడి భాజకము 1 ని భాగించును. అనగా $p_n,\ q_n$ లకు ఎప్పుడును ఉమ్మడి భాజకము లుండవు. ఇట్లే $p_n,\ p_{n-1}\;;\; q_n,\ q_{n-1}$ లు కూడా సాపేక్ష ప్రధా

సాంకములు అని గ్రహించవచ్చును. ఇదియు కాక

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{1}{q_n^2} < F < \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n^2}$$

అని నిరూపించవచ్చును.

కాబట్టి $1/q_n^2$ తేడాతో F విలువ స్థూలముగా p_n/q_n కు సమానము. కాబట్టి మనకు F విలువకు ఎంత దగ్గర మదింపు గల భిన్నము కావలయునన్న అంత హెచ్చు విలువ గల n ను గ్రహించి, p_n/q_n ఉపసరణ F కు దగ్గర అని చెప్పవచ్చును. ఇంతేకాక p/q అను భిన్నము F కు p_n/q_n, p_{n-1}/q_{n-1} ల కంటె దగ్గరగా ఉన్న ఎడల $q > q_n > q_{n-1}$ అని నిరూపించవచ్చును.

అనంత సరళ శృంఖలిత భిన్నము లెల్లప్పుడు, కరణీయములే కావున, ఒకదత్త ఆకరసంఖ్యకు ఎంత దగ్గరలో కావలెనో అంత దగ్గరలో ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు వాని శృ. భిన్నముల ఉపసరణలు ఉపయోగించవచ్చును. ఇది శృ. భిన్నముల ముఖ్య ఉపయోగములలో నొకటి.

ఉదా : $\sqrt{2}$ విలువ నాలుగు దశాంశస్థానముల వరకు కనుగొనుము.

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+1/(\sqrt{2}+1)} =$$

$$1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\;\cdots\;\cdots$$

$$p_7 = 239\,;\; q_7 = 169,\; q_7^2 = 169^2 > 10{,}000$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{239}{169}\right| < \frac{1}{169^2} < \frac{1}{10{,}000}$$

$$\frac{239}{169} = 1{\cdot}41420\;\ldots\;\ldots$$

$$\therefore\; \sqrt{2} = 1{\cdot}4142$$

అనంత పరంపర శృ. భి. ల సంబంధము :

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots u_n + \cdots\cdots$ అనునది ఒక అనంత సంకలన పరంపర. ఈ పరంపరలో మొదటి n పదముల మొత్తము

$$\frac{u_1}{1-}\;\frac{u_2}{u_1+u_2-}\;\frac{u_1u_2}{u_2+u_3-}\;\frac{u_2u_4}{u_3+u_4-}\;\cdots\;\cdots$$

అను శృ. భిన్నము యొక్క n వ ఉపసరణకు సమానమని నిరూపించియున్నారు. పై సూత్రమును ఉపయోగించి ప్రతి సంకలన పరంపరకు సమానమగు నొక శృంఖలిత భిన్నమును నిర్మించవచ్చును. ఉదా :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1-}\;\frac{x}{x+2-}\;\frac{2x}{x+3-}\;\frac{3x}{x+4-}\;\cdots\cdots$$

డయోఫాంటస్ సమీకరణములు : వీటి సాధనలో శృ. భిన్నములు చాల ఉపయోగపడును.

ఉదా ; $ax + by = c$ అను సమీకరణమును ధన పూర్ణాంకములలో సాధింపవలయుననుకొందము.

x, y ల గుణకములు క్రమముగా a, b లు. a/b ని సామాన్య శృ. భిన్నముగా మార్చవలయును. అంత్య ఉపసరణ విలువ a/b ఉపాంత్య ఉపసరణ p/q అయినచో $aq - bp = \pm 1$ అని తెలియును.

సామాన్య బేసి సంఖ్యాక ఉపసరణ లుండునట్లో, సరి సంఖ్యాక ఉపసరణలుండునట్లో మార్చ వీలగుటచే $aq - bp = 1$ అగునట్లు ఎల్లప్పుడు చేయవచ్చును. కావున

$$ax + by = c\,;$$

$acq - bcp = c$ అని వ్రాయవచ్చును.

తీసివేయగా $a\,(x - cq) + b\,(y + pc) = 0$

$$\therefore\; \frac{y+pc}{a} = \frac{cq-x}{b} = t \text{ (అనుకొందము).}$$

$$\therefore\; x = cq - bt,\; y = at - pc$$

x, y లు ధన పూర్ణాంకము లగునట్లు t విలువ నిర్ణయించవచ్చును. t కి అట్టి విలువ లెన్ని యున్న అన్ని జతల విలువలు ఆ సమీకరణమునకు సాధనములు.

ఆ సమీకరణము $ax - by = c$ అయినచో, దీనికి అపరిమిత సాధనములుండును. అన్నిటికి ఒక సాధారణ రూపము కనుగొనవచ్చును.

పై పద్ధతి ప్రకారము p, q లను $ap - bq = 1$ అయినట్లు కనుగొనిన మనకు

$$ax - by = c\;;$$

$apc - bqc = c$ అని లభించును.

తీసివేయగా $a\,(x - pc) - b\,(y - qc) = 0$

$$\therefore\; \frac{x-pc}{b} = \frac{y-qc}{a} = t \text{ (అనుకొందము).}$$

$\therefore x = bt + pc\,;\; y = at + qc$. ఇది వ్యాపకరూపము.

t కి వేర్వేరు పూర్ణాంక విలువలిచ్చిన, వేరు వేరు సాధనములు వచ్చును. ఇట్లే రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశులున్న సమీకరణములను ధన పూర్ణాంకములలో సాధింప వీలగును.

x, y లలో రెండవతరగతి సమీకరణములు : ముఖ్యముగా $x^2 - ny^2 = 1$ అను సమీకరణమును పెల్స్ సమీకరణము అందురు. $\sqrt{n}$ ను సామాన్య శృ. భిన్నముగా మార్చగా A_1/B_1, A_2/B_2, ... A_n/B_n లు దాని ఉపసరణ

లయిన యెడల, పై సమీకరణమును సాధింపగా వచ్చు x, y ల విలువలు $x = A_n$; $y = B_n$ రూపములో నుండ వలయునని నిరూపించియున్నారు.

జోసఫ్ లూయీ విల్ అభిజీయ సంఖ్యలున్నవని శృ. భిన్నముల నుపయోగించి నిరూపించగలిగెను. క. సు. రా.

శ్రీధరుడు : అంకగణితమునకు, మాపక గణితమునకు అంకిత మొనర్చబడిన 'త్రిశతిక' యే శ్రీధరుని రచనలలోకెల్ల మిగిలియున్న ప్రధాన గ్రంథము. మూడు వందల ఆర్యావృత్తము లిందున్నవి ; కనుక దీనికి త్రిశతిక అనిపేరు పెట్టబడినది. ఈతని మరియొక గ్రంథము 'పాటీ' లేదా అంకగణిత ప్రకరణము యొక్క సంక్షిప్తరూపమే ఈ గ్రంథమని తెలియజేసెడి శ్లోకముతో త్రిశతిక ప్రారంభింపబడినది. మహావీరుని గణితసార సంగ్రహము నందు శ్రీధర రచితమని ఉదాహరింపబడిన ఒక శ్లోకము ఈ గ్రంథమున కన్పట్టదు. శ్రీధరునిచే వ్రాయబడిన యొక బీజగణిత ప్రకరణమునుండి ఈ శ్లోకము ఉద్ధృతమై యుండ వచ్చుననుటకు ఎంతేని సంభావన కలదు. జాతకపద్ధతి యను గ్రంథమును రచించిన శ్రీధరుడు కూడ ఇతడే కావచ్చును. ఇతని కాలము సుమారుగా క్రీ. శ. 750 కావచ్చును.

బ్రహ్మగుప్తుని బ్రహ్మస్ఫుటసిద్ధాంతము తరువాత అంకగణితమును, జ్యామితిని చర్చించిన మొదటిగ్రంథము త్రిశతికయే. అంకగణితమందు పూర్ణాంకములు, భిన్నాంకములు, వర్గకరణము, ఘనకరణము, వర్గమూల ఘనమూల నిష్కర్షణలు, లాభనష్టములు, వినిమయము, త్రైరాశికము, మిశ్రములు మొదలైన మౌలిక పరికర్మలు విచార విషయములు. $1 + 3 + 5 + \dots \dots \dots$ n పదముల వరకు ఉన్న ఈ పరంపర వర్గకరణ, ఘనకరణ ప్రక్రియలలో ఉపయోగింపబడినది. ఇవికాక ప్రత్యక్ గుణనము, $(a + b)^3$ సూత్రవినియోగము వంటి మామూలు పరికర్మలు కూడ చర్చింపబడినవి. శ్రీధరుడు

$$n^3 = \sum_1^n \left\{3r(r-1)+1\right\}$$ అను సూత్రమును ఇచ్చియున్నాడు. భాగజాతి, భాగానుబంధజాతివంటి వివిధ జాతుల సంకీర్ణ భిన్నాంకములను ఇతడు తడవెను.

ఇతడిచ్చిన జ్యామితి చర్చ బ్రహ్మగుప్తుని దానికన్న చాల ప్రాథమిక గణములోనిది. కాని విచ్ఛేదకము యొక్క వైశాల్యమును లెక్కకట్టుటకు ఆసన్న ఫలమగు క్రింది సూత్రము శ్రీధరుడు ప్రతిపాదించెను.

$$A = \sqrt{\left\{\frac{h(c+h)}{2}\right\}^2 \times \frac{10}{9}}$$

బ్రహ్మగుప్తుడీ సూత్రము నీయలేదు,

శంకు ఆకారముగల గుంటయొక్క ఘనపరిమాణమును కొలుచుటకు శ్రీధరుడు ప్రతిపాదించిన యథార్థ సూత్రము ఒక నూతన విషయము. గోళముయొక్క ఘనపరిమాణమునకు శ్రీధరుడిచ్చిన $\frac{19 \cdot d^3}{2 \cdot 15}$ సూత్రము $\frac{4}{3}\pi r^3$ అను సూత్రమునందు π కి బదులుగా $\frac{19}{5}$ విలువ ఉంచుటవలన లభ్యమయినదే. మనకు తెలిసిన భారతీయ గణిత వేత్తలలో గోళముయొక్క ఘనమునకు సూత్రమును ఉపయోగించినవారలలో ఇతడే మొదటివాడు.

గణితసార సంగ్రహరచయిత మహావీరుడు శ్రీధరుని నుండి చాల గ్రహించినాడు. ఇతని తరువాతి గ్రంథకర్తలు, వ్యాఖ్యాతలు కూడ ఇతని గ్రంథములనుండి పెల్లుగ శ్లోకముల నుదాహరించిరి. సరస్వతి

శ్రీపతి : శ్రీపతి గణిత, ఖగోళ, జ్యోతిశ్శాస్త్రములలో పెక్కు గ్రంథములు రచించెను. శ్రీపతి రచించిన 'గణిత తిలకము' అను గ్రంథమును సంస్కరించిన హెచ్. ఆర్. కపాడియా 10 గ్రంథములవరకు శ్రీపతి రచించినవి కలవని వచించెను. వీటిలో సిద్ధాంత శేఖరము, ధీకోటికరణము, రత్నమాల, జాతకపద్ధతి యనునవి జ్యోతిశ్శాస్త్ర ప్రకరణములు. దైవజ్ఞ వల్లభమునకు విషయము పంచాంగకరణము. ఇతని తక్కిన రచనల గురించి తెలిసినది చాల తక్కువ. శ్రీపతిచే రచింపబడినదని ప్రసిద్ధి కెక్కిన బీజగణితము కాలగర్భమున లీనమైపోవుట చాల శోచనీయమయిన విషయము. భట్ట కేశవుడు, నాగదేవుడు శ్రీపతి తండ్రి తాతలు. ఇతడు కాశ్యపగోత్రుడు. ధీకోటికరణమందున్న లెక్కలు 961 శకాబ్దముల కాలమును సూచించుటచే శ్రీపతి ఈ గ్రంథమును క్రీ. శ. 11 వ శతాబ్దపు పూర్వార్ధమందు రచించియుండవచ్చును.

గణితతిలక మొక్కటే సంస్కృతమందు మాపక క్షేత్రమితిని మినహాయించి, కేవలము అంకగణితమునకు అంకితము చేయబడిన గ్రంథమువలె కానవచ్చుచున్నది. ఇందు గుణనము, లేదా గుణకారమునకు 1. కపాటద్వయ సంధి, 2. తత్థ్సము, 3. ఖండ అను మూడు విధానము లీయబడినవి. సింహతిలక సూరియను వ్యాఖ్యాత వివరణ బాహుళ్యమును చేకూర్చిన చివరి విధానము 'స్థానంచ రూపంచ విభజ్య కుర్యాత్ । సంతాడనంవా ఖలు ఖండ సంజ్ఞమ్' అను శ్లోకమందు 'స్థాన', 'రూప' శబ్దములను వినిమయించినచో ఆధునిక గుణన ప్రక్రియను అనుసరించునట్లు తోచుచున్నది.

ఒక సంఖ్యయొక్క ఘనమును కనుగొనుటకు శ్రీపతి ఒక వింత అకుశల ప్రక్రియ నిచ్చియున్నాడు. ఇది కొనకు $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ మీద అనగా $r^3 = 1 + 3r(r-1) + (r-1)^3$ అను సూత్రముపై ఆధారపడియున్నది. ఈ ప్రక్రియ వ్యక్తముగా r కన్న ఒకటి తక్కువయగు $(r-1)$ అను రాశిని ఘనీకరించుటపై ఆధారపడినది.

గణిత తిలకమునందు వర్గమూలములను, ఘనమూలములను నిష్కర్షించుటకు మామూలు విధానము తీయబడినవి. నాలుగు రకముల (భాగజాతి, ప్రభాగజాతి, భాగానుబంధజాతి, భాగాపవాహజాతి) సంకీర్ణ భిన్నాంకముల సరళీకరణ ప్రక్రియ పొందుపరుపబడినది. అట్లే మొదటి రెండవ తరగతి సమీకరణముల సాధన సమస్యలు 9 రకములుగా ఈయబడినవి.

సిద్ధాంత శేఖరము ఖగోళశాస్త్ర ప్రకరణము. కాని అందు 13 వ, 14 వ అధ్యాయములలో అంకగణితము, జ్యామితి, బీజగణితము చర్చింపబడినవి. ఈ గ్రంథములో కొంతభాగము, 1-10 అధ్యాయములు, 1932 లో కలకత్తా విశ్వవిద్యాలయముచే ప్రచురింపబడినవి. సరస్వతి

శ్రేఢులు (అంక శ్రేఢులు) : శ్రేఢులనగా పరంపరలు. శ్రేఢులు పలు విధములు. వానిలో సంకలన శ్రేఢి గుణోత్తర శ్రేఢి, హరాత్మక శ్రేఢి అనునవి ప్రధానమైనవి.

సంకలన శ్రేఢి : సంకలన శ్రేఢిలో పదమునకును, దానికి ముందున్న పదమునకును గల భేదము స్థిరముగ నుండును. అట్టి భేదమునకు చయము అని పేరు. చయము ధనాత్మకమైన కావచ్చును, లేదా ఋణాత్మకమైనను కావచ్చును.

ఒక సంకలన శ్రేఢి యందు a అనునది ఆది పదము, d అనునది ఆ శ్రేఢియొక్క చయమయినచో, ఆ శ్రేఢిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) + \ldots$$

ఈ శ్రేఢియందు ఆది పదమేది అయినను కావచ్చును. రెండవ పదము మొదటి పదమునకు ఒక చయమును కలుపుటచే వచ్చినది. మూడవ పదము మొదటి పదమునకు రెండు చయములు కలుపుటచేత వచ్చుచున్నది. పై శ్రేఢియందలి n వ పదము $a + (n-1)d$ అగును.

సంకలన శ్రేఢియందలి ఏ రెండు పదములు తెలిపినను ఆ సంకలన శ్రేఢిని నిర్ణయించవచ్చును. ఉదా : ఒక సంకలన శ్రేఢియందలి ఆది పదము 2, చయము 3 అయిన ఆ శ్రేఢిని నిర్ణయించుము. ఆ శ్రేఢియందలి 9వ పదమును కనుగొనుము.

ఆది పదము = 2, చయము = 3 అందుచేత శ్రేఢి 2, 5, 8, 11, 15, ... అగును. ఆ శ్రేఢియందలి 9 వ పదము $= 2 + (9-1)\,3 = 26$.

ఉదా : ఒక సంకలన శ్రేఢియొక్క ఏడవ పదము 15, 21 వ పదము 22 అయిన ఆ శ్రేఢి యందలి 10 వ పదమును కనుగొనుము.

న్యాసము : ఇచ్చట $a + 6d = 15$; $a + 20d = 22$ అందుచేత $d = \frac{1}{2}$, $a = 12$. కాబట్టి ఆ సంకలన శ్రేఢియొక్క 10 వ పదము $12 + (10-1)\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$.

సంకలన మధ్యమము : మూడు రాశులు సంకలన శ్రేఢియందున్న, వాని యందలి మధ్యరాశిని మిగిలిన రెండింటియొక్క సంకలన మధ్యమము అందురు. a, b, c అను మూడు రాశులు సంకలన శ్రేఢి యందున్నవను కొందము. అప్పుడు $b - a = c - b$ అగును; అందుచేత $b = (a+c)/2$. అనగా రెండు రాశుల సంకలన మధ్యమము వాని సంకలనార్ధము అగును.

a, b లు రెండు తెలిసిన రాశులని, వాని నడుమన n సంకలన మధ్యమములను వ్రాయవలయునని అనుకొందము.

అప్పుడు a ఆది పదముగా గల సంకలన శ్రేఢియొక్క $(n+2)$ వ పదము b అగును. అందుచేత

$$b = a + (n+1)d; \quad \therefore d = (b-a)/(n+1)$$

కనుక a, b ల నడుమ వ్రాయవలసిన పదములు :

$$a + d,\ a + 2d, \ldots \ldots a + nd. \text{ ఇచ్చట } \left\{ d = \frac{b-a}{(n+1)} \right\}$$

ఉదా : 2, 65 అను సంఖ్యల నడుమ 20 సంకలన మధ్యమములను వ్రాయుము.

ఇచట $65 = 2 + (22-1)\,d$. అందుచేత $d = 3$.

కనుక 2, 65 ల మధ్య వ్రాయవలసిన 25 సంకలన మధ్యమములు 5, 8, 11, ... 59, 62 అగును.

శ్రేఢీ సంకలనము : ఒక సంకలన శ్రేఢియందలి మొదటి n పదముల సంకలనమును కనుగొందము. దీని విలువ S_n అనుకొందము.

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots \ldots$$
$$[a + (n-2)d] + [a + (n-1)d] \qquad (1)$$

S_n ను త్రిప్పి వ్రాయగా

$$S_n = [a + (n-1)d] +$$
$$[a + (n-2)d] + \ldots + (a+d) + a \qquad (2)$$

పై రెండు సమీకరణములను సంకలనము చేసినచో

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots$$

ఇట్లు n పదములున్నవి.

శ్రేఢులు

$= n\left[2a + (n-1)d\right]$ అందుచేత

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$ అగును.

పై ఫలితమును క్రింది విధముగా కూడ వ్రాయ వచ్చును.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\, a+\{a+(n-1)\,d\,\}\,\right]$$

అనగా, సంకలన శ్రేఢియందు n పదముల సంకలనము ఆది పదము, కడపటి పదము - వీటి సంకల నార్ధమును n చేత గుణింపగా దొరకును.

ఉదా : ఒక దేశ ప్రభుత్వమువారు అధికాహారోత్పత్తి కొరకు మొదటి మూడు పంచవర్ష ప్రణాళికలందు మొదటి సంవత్సరములో 150 కోట్ల రూపాయలను, తరువాత ప్రతి వత్సరము పూర్వపు సంవత్సరము కంటె 25 కోట్ల రూపాయలు అధికముగను ఖర్చు పెట్టుటకు నిర్ణయించిరి. ప్రభుత్వమువారు ఆఖరి సంవత్సరములో ఖర్చు పెట్టవలసిన ధనమెంత? ఆ పథకము కొరకు ఖర్చు అగు మొత్తము ధనమెంత?

న్యాసము : ఇచ్చట ఆది పదము 150, చయము 25, పదసంఖ్య 15. అందుచేత అంత్యపదము (15 వ పదము) = ఆదిపదము + $(15-1)\times$ చయము =

$150 + 14\times 25 = 500$ కోట్లు.

అందుచేత, చివరి సంవత్సరములో ఖర్చు పెట్టవలసిన ధనము 500 కోట్ల రూపాయలు. ఆ పథకమునకు ఖర్చగు మొత్తము ధనము

$= \frac{15}{2}$ (ఆదిపదము + అంత్యపదము) =

$\frac{15}{2}\left(150+500\right) = 4875$ కోట్ల రూపాయలు.

గుణోత్తర శ్రేఢి : గుణోత్తర శ్రేఢిలోని పదములలో ఏ పదమును తీసికొనినను, అది తత్పూర్వ పదమున కన్న కొన్ని రెట్లు హెచ్చుగనైనను, తక్కువగనైనను ఉండును. ఏ సంఖ్యచే పూర్వపదమును గుణకారము చేసిన పర పదము వచ్చునో, దానికి గుణోత్తరమని పేరు. గుణోత్తర శ్రేఢిలోని యే రెండు సమీప పదములనైనను తీసికొని, వానిలో పర సంఖ్యను పూర్వ సంఖ్యచే భాగింప గుణోత్తరము వచ్చును.

ఒక గుణోత్తర శ్రేఢియందు a అనునది ఆది పదమనియు, r అనునది గుణోత్తరమనియు అనుకొనిన, ఆ గుణోత్తర శ్రేఢిని క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును :

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

ఈ శ్రేఢియందు ఆదిపద మేదియైనను కావచ్చును. రెండవ పదము ఆదిపదమును గుణోత్తరముచే గుణకారము చేయుటవలన వచ్చినది. ఆదిపదమును, గుణోత్తర వర్గముచే గుణింపగా మూడవ పదము, గుణోత్తర ఘనముచే గుణింపగా నాలుగవ పదము వచ్చుచున్నవి. కావున గుణోత్తర శ్రేఢియందు ఎన్నవ పదమును కనుగొనవలయునో, ఆ సంఖ్యనుండి 1 తగ్గింపగా ఏ సంఖ్య వచ్చునో అన్ని పర్యాయములు గుణోత్తరమును గుణోత్తరముచే గుణకారముచేసి, అలబ్ధమును ఆదిపదముచే గుణించిన, కావలసిన పదము సిద్ధించును. కావున పై శ్రేఢియందు n వ పదము ar^{n-1} అగును,

ఉదా. 1 : ఒక గుణోత్తర శ్రేఢియందు ఆది పదము 2, గుణోత్తరము 3 అయిన ఆ శ్రేఢిని నిర్ణయించుము? ఆ శ్రేఢియందలి 9 వ పదమును కనుగొనుము?

ఆదిపదము = 2; గుణోత్తరము = 3. అందుచేత ఆ శ్రేఢి, $2+2\times 3+2\times 3^2+2\times 3^3+\ \ldots\ \ldots$ అగును. ఆ శ్రేఢియందలి 9 వ పదము =

$$2\times 3^{(9-1)} = 2\times 3^{8} = 13{,}122$$

ఉదా. 2 : ఒక గుణోత్తర శ్రేఢి యందు 2 వ పదము 4, 4 వ పదము 2 అయిన ఆ శ్రేఢియందు 6 వ పదము. కనిపెట్టుము ?

ఇచ్చట $ar = 4$; $ar^3 = 2$

కాబట్టి $r^2 = 2/4$, $r = 1/\sqrt{2}$

అందుచేత, $a = 4/r = 4\sqrt{2}$

ఆ శ్రేఢి : $4\sqrt{2},\ 4,\ 2\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ldots$ అగును.

గుణోత్తర మధ్యమము : మూడు రాశులు గుణోత్తర శ్రేఢియందున్న వాని యందలి మధ్యరాశిని మిగిలిన రెండింటియొక్క గుణోత్తర మధ్యమము అందురు.

a, b, c అను మూడు రాశులు గుణోత్తర శ్రేఢి యందున్న వనుకొందము. అప్పుడు

$b/a = c/b$ అగును. అందుచేత $b = \pm\sqrt{ac}$.

ఈ విధముగా, రెండు రాశుల గుణోత్తర మధ్యమము వాని గుణకారలబ్ధ వర్గమూలము అగును.

తెలిసిన రెండు రాశుల నడుమ ఎన్ని గుణోత్తర మధ్యమములనైన వ్రాయవచ్చును. a, b లు రెండు తెలిసిన రాశులని, వాటి మధ్య n గుణోత్తర మధ్యమములను వ్రాయవలయునని అనుకొందము.

అప్పుడు a ఆది పదము, b గుణోత్తర శ్రేఢియందు $(n+2)$ వ పదమగును.

కనుక $b = ar^{n+1}$ $\therefore r = (b/a)^{1/(n+1)}$; అందుచేత a, bల మధ్య వ్రాయవలసిన n గుణోత్తర మధ్యమములు $ar, ar^2, \dots \dots ar^n$

అనగా $a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}, a^{\frac{n-1}{n+1}} b^{\frac{2}{n+1}} + \dots \dots + a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}$ అగును.

ఉదా : 3, 192 అను సంఖ్యల మధ్య 5 గుణోత్తర మధ్యమములను వ్రాయుము.

అప్పుడు 192 అనునది 3 ఆదిపదముగాగల గుణోత్తర శ్రేఢియందు 7 వ పదమగును.

$\therefore 192 = 3r^6$. అందుచేత $r = (192/3)^{\frac{1}{6}} = 2$.

కనుక, 3, 192 అను సంఖ్యల మధ్య వ్రాయవలసిన 5 గుణోత్తర మధ్యమములు :

$3 \times 2,\ 3 \times 2^2,\ 3 \times 2^3,\ 3 \times 2^4,\ 3 \times 2^5$

అనగా 6, 12, 24, 48, 96 అగును.

గుణోత్తర శ్రేఢీ సంకలనము : ఒక గుణోత్తర శ్రేఢి యందు ఆది పదము a, గుణోత్తరము r అయిన ఆ శ్రేఢి యందలి మొదటి n పదముల సంకలన రాశి S ను కనుగొందము.

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

అగును

(1) ని r చే గుణించగా,

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \qquad (2)$$

(2) నుండి, (1) తీసివేయగా,

$$rS - S = ar^n - a = a\,(r^n - 1)$$

అందుచేత $S = a \times \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

అనగా గుణోత్తర శ్రేఢియొక్క సంకలనమునకు, అంత్య పదముచే గుణోత్తరమును గుణకారముచేసి అందుండి ఆదిపదమును తీసివేసి, ఒకటి తగ్గిన గుణోత్తరముతో భాగించవలెను.

అనంత గుణోత్తర శ్రేఢి :

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = a\left(\dfrac{r^n - 1}{r - 1}\right)$ అను పైన కనిపెట్టిన సూత్రములో n అనంతమైనచో, ఆ శ్రేఢి ఒక అనంత పరంపర అగుచున్నది. గుణోత్తరమగు r యొక్క ప్రకేవల విలువ $|r| < 1$ అయినట్లైతే, అనగా $-1 < r < +1$ అయితే, n అనంతమగునపుడు r^n శూన్యమును సమీపించును. కనుక అటువంటి అనంత పరంపర విలువ $a/(1-r)$ అగును.

ఉదా : $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dots \dots = 1$

ఉదా : 0.25252525 ... అగు అనంత దశాంశము యొక్క విలువ కనిపెట్టుము. పైన వ్రాసిన దశాంశ మును $\dfrac{25}{100} + \dfrac{25}{100^2} + \dfrac{25}{100^3} + \dots$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఇది ఒక గుణోత్తర శ్రేఢి. ఇచ్చట $a = \dfrac{25}{100}$, $r = \dfrac{1}{100}$

కనుక, ఈ అనంత గుణోత్తర శ్రేఢి విలువ $a/(1-r)$

$$= \left(\frac{25}{100}\right) \Big/ \left(\frac{99}{100}\right) = \left(\frac{25}{99}\right)$$

హరాత్మక శ్రేఢి : ఒక సంకలన శ్రేఢి $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots a+nd$ను తీసికొనెదము. ఈ శ్రేఢిలోని పదముల వ్యుత్క్రమ సంఖ్యలు (రెసిప్రోకల్స్) పదములుగాగల శ్రేఢి

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \dots \dots \frac{1}{a+nd}$$

హరాత్మకశ్రేఢి అనబడును. అనగా $a_1, a_2, a_3, \dots$ ఒక హరాత్మక శ్రేఢి అయినచో, $1/a_1, 1/a_2, 1/a_3 \dots$ ఒక సంకలనశ్రేఢి అగును. $a_1, a_2, a_3, \dots$ ఒక సంకలన శ్రేఢి అయిన $1/a_1, 1/a_2, 1/a_3, \dots$ ఒక హరాత్మక శ్రేఢి అగును. హరాత్మక శ్రేఢులకు సంగీత శాస్త్రములో ప్రాముఖ్యము ఉన్నది.

హరాత్మక మధ్యమము : a, b, c అను రాశులు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉన్నచో $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ అనునవి సంకలన శ్రేఢిలో ఉండును. అందుచేత $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$.

కాబట్టి $b = \dfrac{2ac}{a+c}$. ఈ విధముగా రెండు రాశుల హరాత్మక మధ్యమము ఆ రాశుల గుణకార లబ్ధమును దాని సంకలన మధ్యమముచే భాగించగా వచ్చును.

a, b అను రెండు రాశుల సంకలన, గుణోత్తర, హరాత్మక మధ్యమములు వరుసగా A, G, H అనుకొందము. అప్పుడు

$$A = \frac{1}{2}(a+b);\ G = \sqrt{ab};\ H = \frac{2ab}{a+b}$$

అగును. కాబట్టి

$A \cdot H = G^2$. ఈ విధముగా, రెండు రాశుల గుణోత్తర మధ్యమమే ఆ రాశుల సంకలన మధ్యమ, హరాత్మక మధ్యమముల గుణోత్తర మధ్యమమగును.

రెండు రాశుల మధ్య ఎన్ని హరాత్మకమధ్యమముల నైన వ్రాయవచ్చును. కాని, మొదట వాని సంబంధ సంకలన మధ్యమములను కనుగొని, అనంతరము వాని వ్యుత్క్రమములనే హరాత్మక మధ్యమములుగా వ్రాయ వలయును. హరాత్మక శ్రేఢియందు రాశుల సంకలనమును కనుగొనుటకు సులభమైన సూత్రము ఏదియులేదు.

ఏకోత్తరాంక సంకలనము: 1, 2, 3, 4, 5, ... అని మనము వరుసగా వ్రాయు అంకెలనే ఏకోత్తరాంకము లందురు. వానియందు మొదటి n సంఖ్యల సంకలనమును కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొందము.

$S_n = 1+2+3+4+ \dots +n$ అని అనుకొందము. ఇది సంకలనశ్రేఢి. దీనియందు ఆది పదము 1; అంత్యపదము n. అందు పదముల సంఖ్య n. కనుక $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

అనగా, మనము ఎన్నవ పదము వరకు సంకలనము కను గొనవలయునో ఆ అంత్య పద సంఖ్యను, ఆ సంఖ్యకు ఒకటి కలపగా, వచ్చు సంఖ్యచే గుణకారముచేసి 2 చే భాగించిన, ఇష్టపదమువరకు ఏకోత్తరాంక సంకలనము వచ్చును.

ఉదా: $1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

బేసి సంఖ్యల సంకలనము: 1, 3, 5, 7, ... మొదలగు నవి బేసి సంఖ్యలు. వీనియందు మొదటి n పదముల సంకలనమును కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొందము.

$S = 1+3+5+7+ \dots \dots + (2n-1)$ అని అనుకొందము.

ఇది సంకలన శ్రేఢి. దీనియందు ఆది పదము 1; చయము 2. అందుచేత,

$$S = \frac{n}{2}\left\{2+(n-1)\times 2\right\} = n^2$$

అందుచేత, ఒకటి మొదలు బేసి అంకముల, అనగా, 1, 3, 5, 7, ... మొదలైన వాని సంకలనము గచ్ఛాంక (పదముల సంఖ్య) వర్గము అగును.

సరిసంఖ్యల సంకలనము: 2, 4, 6, 8, 10, ... మొద లగునవి సరిసంఖ్యలు. వీనియందు మొదటి n పదముల సంకలనమును కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొందము.

$S = 2+4+6+8+ \dots\dots + 2n$ అని అనుకొందము. ఇది సంకలనశ్రేఢి. దీనియందు ఆది పదము 2; చయము 2; అంత్య పదము $2n$.

$$\therefore S = \frac{2+2n}{2} \times n = n(n+1)$$

మరికొన్ని పరంపరలు: ఇచ్చట ముఖ్యమైన మరికొన్ని పరంపరలు ఇవ్వబడినవి. ఒక పరంపర యొక్క n వ పదమును U_n చేత, దానియందు మొదటి n పదముల సంకలనమును S_n చేత గుర్తించుకొందము. పరంపరల సంకలనమునకు సాధారణ పద్ధతి యేదియును ఈయబడ లేదు. కాని, అనేక అభియోగములందు పరంపర వ్యాపక పదమును $f(n)-f(n+1)$ రూపములో వ్రాయుటచే ఫలితము పొందబడుచున్నది. ఉదాహరణమునకు ఈ క్రింది పరంపరను పరిశీలింపుము.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

దీనియందు n వ పదమగు $\frac{1}{n(n+1)}$ ను $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ అని వ్రాయవచ్చును. కనుక దత్తపరంపరను క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

దీనియందు ఆది, అంత్య పదములు తప్ప మిగిలినవి కొట్టు కొని పోవును. అందుచేత $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$.

కొన్ని సమయములందు ఒక పరంపర యొక్క n వ పదమగు U_n సంఖ్యను $f(n+1)-f(n)$ అను రూపమున వ్రాసి, ఆ పరంపర సంకలనము కనిపెట్టవచ్చును.

ఉదా: $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n+1)$ పరంపరను తీసికొనెదము. ఇచ్చట $U_n = n(n+1)$ దీనినే $\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$ అని వ్రాయవచ్చును. $n = 1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots$ విలువలు ఇవ్వగా

$1\cdot2 = \frac{1}{3}(1\cdot2\cdot3-0)$

$2\cdot3 = \frac{1}{3}(2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3)$

$3\cdot4 = \frac{1}{3}(3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4)$

... ...

$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$

ఇరు ప్రక్కలను సంకలనము చేసిన ఎడల కుడివైపున $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ తప్ప అన్నియును కొట్టివేయబడు చున్నవి. కనుక

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ఇదే విధమున

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\tfrac14 n(n+1)(n+2)(n+3)$$

అని నిరూపించవచ్చును.

ఏకోత్తరాంకవర్గ సంకలనము: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\dots$ మొదలైన సంఖ్యలే ఏకోత్తరాంక వర్గ సంఖ్యలు. వాని యందు మొదటి n సంఖ్యల సంకలనమును కనుగొందము.

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\dots\dots+n^2$$

ఇచ్చట, $U_n = n^2 = n(n+1) - n$.

అందుచేత $S_n = \frac{1}{3}(n)(n+1)(n+2) - \frac{1}{n}(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ అగును.}$$

ఉదా: ఈ క్రింది పరంపర యందు మొదటి 30 పదముల సంకలనమును కనుగొనుము.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots\dots+30^2 =$$
$$\tfrac16\cdot30(30+1)(2\times30+1) = 5\times31\times61 = 9455$$

ఏకోత్తరాంక ఘన సంకలనము:

$$S_n = 1^3+2^3+3^3+4^3+\dots\dots$$

ఇచ్చట, $U_n = n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n^2 - 2n$
$$= n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n$$

అందుచేత

$$S_n = \tfrac14 n(n+1)(n+2)(n+3) - \tfrac23 n -$$
$$\tfrac33 n(n+1)(n+2) + \tfrac12 n(n+1)$$
$$= \tfrac14 n(n+1)\{(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2\}$$
$$= \tfrac14 n^2(n+1)^2$$

మనము $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$ అని తెలిసికొంటిమి. కనుక

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

అనగా ఏకోత్తరాంక ఘన సంకలనము ఏకోత్తరాంక సంకలన వర్గమగుచున్నది.

త్రిభుజ సంఖ్యలు, గోపురపు సంఖ్యలు: ఒక తలములో మొదటి వరుసలో ఒక వస్తువును, రెండవ వరుసలో రెండు వస్తువులును, ఇటులనే పద్ధతిగా పెట్టిన యెడల క్రింది చిత్రములో చిత్రించినట్లు ఒక సమభుజ త్రిభుజము దొరకును.

ఇట్లు n వరుసలున్నచో త్రిభుజములో నున్న వస్తువుల సంఖ్య $1+2+3+\dots\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

0
0 0
0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0 0

$n = 1, 2, 3$ అగునపుడు ఈ సంఖ్యలు 1, 3, 6, 10, 15, 21 అగును.

ఈ సంఖ్యలకు త్రిభుజ సంఖ్యలని పేరు.

ఇటులనే చతురస్రాకారములో నున్నట్లు అయితే 1, 4, 9, 16, 25 అను వర్గసంఖ్యలు దొరకును.

ఇట్టి వ్యూహములలో ఉన్న వస్తువులు ఒకే విధమైన గోళములనియు, అవి ప్రక్క దానిని స్పర్శించు చున్నవనియు అనుకొనెదము. అప్పుడు ఈ వ్యూహముపై మరియొక వ్యూహమును లేవనెత్తవచ్చును. అదియు త్రిభుజాకారముననే యుండును. కాని ఒక్కొక్క భుజములోను క్రింది వ్యూహము కంటె ఒక గోళము తక్కువగా నుండును. ఉదాహరణమునకు క్రింది వ్యూహములోని భుజములందు 10 గోళము లుండిన, దాని పై వ్యూహములో ఒక భుజమునందు 9 గోళము లుండును. దాని మీద ఇదే రీతిగా మరియొక త్రిభుజమునందును 8 గోళము లుండును. అన్నిటికంటె పైనున్న వరుసలో ఒక గోళము మాత్రముండును. కనుక మొత్తపు గోళముల సంఖ్య $1+3+6+10+\dots\dots+$

$$n(n+1)/2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

గోళ గోపురము యొక్క పీఠము - త్రిభుజాకారమున లేక చతురస్రాకారమున ఉన్నట్లు అయితే శిఖరములో ఒక గోళమును, దాని క్రింద వరుసలో 4, దాని క్రింద వరుసలో 9, ఇటుల

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

మొత్తపు గోళములు ఆ గోపురములో నుండును.

పీఠము దీర్ఘచతురస్రము అనుకొనెదము. దీని నిడుపులో 10 గోళములు, వెడల్పులో 6 గోళములు ఉండును అనుకొనెదము. అపుడు దానిమీద నున్న వరుస నిడుపులో 9 గోళములు, వెడల్పులో 5 గోళములు ఉండును. ఇటులనే పైకి పోగా 8×4 తరువాత, 7×3 తరువాత కడపటి వరుసలో 5×1 మొత్తము

$$60+45+32+21+12+5 = 175.$$

పీఠములోని నిడుపులో n గోళములును, వెడల్పులో m గోళములు ఉన్నచో మొత్తపు గోళముల సంఖ్య $\frac16 m(m+1)(3n-m+1)$ అగును.

భారత దేశములో ఆర్యభటుని కాలముననే అనగా క్రీస్తు శకము 5వ శతాబ్దము నుండియే సంకలన, గుణోత్తర శ్రేఢులును, ఏకోత్తరవర్గ, ఘనసంకలనములును తెలిసి యుండెను. పా. ల. నా.

సంకలనము : చూ. గణిత సమీక్ష - పు. 5; అంక గణితము - పు. 97.

సంకలనీయతా సిద్ధాంతములు : సంకలనీయత యొక్క భావము : ఒక అనంత పరంపర

$$\sum_{n=0}^{\infty} = a_0 + a_1 + \dots \dots + a_n + \dots \qquad (1)$$

యొక్క ఖండ సంకలన ఫలములు

$$S_0 = a_0; S_1 = a_0 + a_1; \dots S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad (2)$$

ఒక వరుసగ ఏర్పడి, అందు n యొక్క విలువ అనంతమయినపుడు S_n యొక్క అవధి S అయినచో అది ఒక ఉపసరణ పరంపర అని చెప్పుదురు. అట్లు లేనపుడు దానిని అపసరణ పరంపర యందురు. అపుడు ఒక మాధ్యమ విధానము (P) మూలమున ఖండ సంకలనముల మాధ్యమ మూల్యము, తగిన అవధీకరణముచే S కు అనుసరించినట్లు చేయవచ్చునని అనుకొనెదము. అట్టి విధానము ఒకటి లభించినచో S_n వరుస S విలువకు (P) సంకలనీయము అని చెప్పుదురు. ఉదా :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \dots \qquad (3)$$

పరంపర తీసికొందము. ఇచ్చట S_n వరుస, 1, 0, 1, 0, 1, 0 అగును.

$$S_0 = 1; \ \frac{S_0 + S_1}{2} = \frac{1}{2}; \ \frac{S_0 + S_1 + S_2}{3} = \frac{2}{3}$$

$\frac{S_0 + S_1 + S_2 + S_3}{4} = \frac{1}{2}$; ... ఇట్లు $S_0, S_1, S_2, \dots$ ల మాధ్యమ మూల్యమును తీసికొని $n \longrightarrow \infty$ అగునపుడు

ఇందు అవధి $\frac{S_0 + S_1 + \dots \dots + S_n}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$

కనుక $1 - 1 + 1 - 1 + \dots \dots$ పరంపరకు (P) సంకలనీయ విలువ $\frac{1}{2}$ అని చెప్పుదురు.

పరంపర (3) ని క్రింది విధముగా మార్చవచ్చును.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \qquad (4)$$

ఇందు $|x| > 1$ మరియు x వాస్తవిక లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యగా గాని ఉండవచ్చును. $x = 1$ అయినపుడు దీని ఎడమవైపు నుండు పరంపరయొక్క సంకలన ఫలమును నిర్వచించుటకు వీలులేదు. కాని కుడివైపుననుండు $\frac{1}{1+x}$ యొక్క విలువను $x \neq -1$ అయినపుడెల్ల నిర్వచనము చేయుటకు వీలగును.

కాని, పరంపర (4) యొక్క సంకలనము నిర్వచనము చేయుటకు వీలయినపుడెల్ల ఫలము (4) యొక్క విలువకు సమానమని ఒక సంప్రదాయము (కన్వెన్షన్) ఏర్పాటు చేసికొనిన $x = 1$ అయినపుడు,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \dots = \frac{1}{2}$$

అగును. కనుక పరంపర (3)కి సంకలనీయ విలువ విధానము (4) ప్రకారము $\frac{1}{2}$ అని చెప్పవచ్చును.

ఇట్టి సంప్రదాయము అనుసరించి ఒక అపసరణ పరంపరకు ఫలమును నిశ్చయించునట్టి పద్ధతులందు గణితజ్ఞులు శ్రద్ధచూపిరి. ఎందుకన ఈ సంప్రదాయముల ననుసరించి పరంపరలకు నిర్ణయించిన విలువలు, సంప్రదాయములు లేక ఏర్పడు ఫలితములను సాధించుటకు శీఘ్రముగా అవకాశమిచ్చుటయేకాక, అవి న్యాయమైనవి అనికూడ కనబడినవి.

ఉదా : (4) లో $x = -e^{it}$ అనుకొందము. ఇందు, $0 < t < 2\pi$ అయిన $x \neq -1$; ఇరువైపులనుండు సంకీర్ణ భాగములను సమానములుగ తీసికొని, t ని $2t$గా మార్చిన,

$$\sin 2t + \sin 4t + \sin 6t + \dots = \frac{1}{2} \cot t$$

ఈ సమీకరణమును t చే గుణకారముచేసి, $t = 0$ నుండి $t = \frac{\pi}{2}$ వరకు చయనీకరణము చేసిన ఇతర పద్ధతులచే మనకు సాధ్యము కాని ఫలితము లభించును. ఇది (4) అపసరణ పరంపర యగునపుడు దానికి ఒక సంకలనము సూచించుటచే లభించిన ఫలితము.

స్వతహాగా రసవంతమగుటచేతను ఇతర సందర్భములలో ప్రయోగార్హమగుటచేతను గణితజ్ఞులిపుడు అపసరణ పరంపరలకు సంకలన ఫలమును నిర్ణయించుటలో శ్రద్ధవహించియున్నారు. ముగ్గురు గణితజ్ఞులు జి. హెచ్. హార్డీ, జె. ఇ. లిటిల్ వుడ్, ఏస్. వెయినర్ చేరి 1920 మొదలు 1930 వరకు పరిశ్రమ చేసినందున, అపసరణ పరంపరల సంకలనములకు ఎదురు చూడని విధమున ఒక ప్రయోగము లభించినది. ఒక దత్త సంఖ్యకు ఎక్కువ కానట్టి ప్రధాన సంఖ్య లెన్నియను ప్రశ్నకు ఈ ప్రయత్నముల వలన సమాధానము దొరికెను.

సంకలనీయతలో కొన్ని ప్రఖ్యాత పద్ధతులు : పరంపర (3) కి సంబంధించిన సంకలనీయతా పద్ధతులు రెండింటికిని విశాలీకృత నిర్వచనము ఇపుడు చేయబడును.

ఒక పరంపరలో n అనంతమయినపుడు

$$\frac{S_0 + S_1 + S_2 + \dots S_n}{n+1} \longrightarrow S \qquad (5)$$

అయినచో ఆ పరంపర (C, 1) విధానమున S కు సంకలనీయమని చెప్పుదుము. ఇందు (5) లో ఇచ్చిన అంక మాధ్యమము సిసారో (1890) నిర్వచించిన వివిధ క్రమములగు మాధ్యమములలో ప్రథమ క్రమమగును.

తర్వాత ఘాత పరంపర విధాన సంకలనీయతను నిర్వచనము చేయుదుము.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \text{ అయినపుడు ఉపసరణముగాను,} \\ x \to 1-0 \text{ అయినపుడు } S \text{ కు సమీపించునట్లు} \end{array} \right\} \quad (6)$$

ఉన్నచో, పై పరంపర యొక్క సంకలనీయత (A) అని చెప్పుదుము. ఇచ్చట $x \longrightarrow 1-0$ యొక్క వివరణ ఏమన, x ఒకటికి తక్కువయగు విలువలగుండ అవధి 1 ని సమీపించుటయే. ఈ సంకలనతా విధానము గణిత విద్యావిశారదుడగు ఆబెల్ పేరు వహించుచున్నది. నిర్వచనము (6) ప్రకారము ఈ పరంపర (2) యొక్క ఘార వర్థిత మాధ్యమమని తలచుకొనవచ్చును. ఏలన, ఘాత పరంపర (6) ను క్రింది రూపములో మార్చవచ్చును.

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \dots \dots}{1 + x + x^2 \dots \dots}$$

B విధాన సంకలనీయత యొక్క నిర్వచనము క్రింద ఇవ్వబడినది:

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = \frac{S_0 + S_1 x + S_2 x^2/2! + \dots}{1 + x + x^2/2! + \dots} \quad (7)$$

ఇది $x > 0$ అయినపుడు ఉపసరణముగా నుండును. x అనంతమగునపుడు పొందు విలువను B సంకలనీయత విలువ S అనెదము. దీనికి 'బోరెల్ విధానము' అని పేరు. 1895 లో బోరెల్ ఈ విధానము A, B లు ఇమిడినట్టి ఒక విశాల విధానమును ప్రచురించెను.

మరియొక విధానము లాంబర్ట్ పద్ధతిని అనుసరించి ఆనందరావు కనుగొనెను. ఇది (A) విధాన సంకలనీయతతో సంబంధించినది. ఆ సంబంధమును క్రింది విధమున సవరింపవచ్చును.

(6) లో $x = e^{-t}$ అని తీసికొనిన $0 < x < 1$, $x \longrightarrow 1-0$ నిబంధనలకు బదులు $t > 0$ అనియు $t \longrightarrow +0$ అనియు లభించును. తర్వాత (6) లో x^n బదులు తగిన ఫలము $g(nt)$ ప్రతిక్షేపింపవచ్చును.

$g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ అను ప్రత్యేకఫలము ఉపయోగించిన, (6), (L) విధాన సంకలనీయత యగును.

ఏ సంకలనీయతా విధానమందైనను ఒక ముఖ్యనిబంధన యేమనగా, ఉపసరణ పరంపరల విషయములలో మామూలుగా లభించు విలువకును, సంకలనీయ విధానములచే లభించు విలువలకును వ్యత్యాసము ఉండకూడదు. దీనికి క్రమత్వ నిబంధన అనిపేరు. ఇది వరకు ప్రచారములో ఉన్న సంకలన విధానములన్నియును, ఈ నిబంధనలకు లోబడవు. కాని చాల పద్ధతులు క్రమమయినవి యని టోప్లిట్జ్ 1911 లో చూపించెను. వానిలో (C, 1), (A), (B), (L) ప్రత్యేకములైనవి, ఇవి యన్నియు క్రమములైనవి.

'క్రమత్వము' (రెగ్యులారిటీ) తో సంబంధించిన విషయము మరి యొకటి కూడ కలదు. (P') పద్ధతిలో సంకలనీయత కల ఒక పరంపర, అదే విలువ S కు మరి యొక పద్ధతి (P'') లో కూడ సంకలనీయత కలదా యను సమస్యయే. ఈ రెండవ ప్రశ్నకు జవాబు కొన్ని ప్రత్యేక విషయములలో ఇవ్వబడినది. ఉదా: (P') విధానము (C, 1) అయిన (P'') విధానము (A) లేదా (L) అయిన సంకలనీయత విలువలలో వ్యత్యాసము లేదనియు, (P'') విధానములో సంకలనీయత కలిగినపుడు (P') విధానముగా సంకలనీయత లేదనియు నిరూపింపబడినది.

టాబిర్ సిద్ధాంతములు: ప్రతి పరంపరకు ఒక సన్నివేశము కలదు. అది ఏదన, (i) (P') సంకలనీయతలో (P'') సంకలనీయత ఇమిడియున్నను, (P'') లో (P') ఇమిడి యుండనక్కరలేదు. (ii) క్రమ విధానమున (P) సంకలనీయతలో ఉపసరణత ఇమిడియుండక పోయినను, ఇది విపర్యయముగా ఇట్లుండునట్లు (A) విధాన సంకలనీయత గల పరంపర (3) వలన విశదమగుచున్నది. ఇప్పుడు తగిన నిబంధనలకు లోబడిన ఒక పరంపరను (i) లో (P'') విధానము వలన (P') విధానమునకు అవకాశ ముండునా అనియు, లేదా (ii) లో (P) విధానము వలన పరంపర ఉపసరణమగునా యను ప్రశ్నలను సాధింపవలయును. ఈ రెండు ప్రశ్నలకు సరిపోవు సిద్ధాంతములు చాల ప్రయోజనకరములు. ఇట్టి సిద్ధాంతములలో మొట్టమొదటి దానిని (A) టాబిర్ 1897 లో ప్రచురించినందున, వాటి కన్నిటికి టాబిర్ సిద్ధాంతములని పేరు. అతడీ క్రింది సిద్ధాంతమును మొదట ప్రచురించెను.

'ఒక పరంపర యొక్క n-పదము $1/n$ తో సరిపోల్చిన అది విలువలో ఉపేక్షింప తగినట్లుండిన, (A) విధాన సంకలనీయత వలన పరంపర యొక్క ఉపసరణత ఊహింపవచ్చును'.

ఈ సిద్ధాంత జన్యములగు వానిలో ముఖ్యములగు కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి. 1910 లో లిటిల్ వుడ్ ప్రౌఢతరమగు సిద్ధాంతము సాధించెను. అందు n పదము $1/n$ తో సరిపోల్చతగు విలువ గలది.

1920 లో ఆనందరావు పై సిద్ధాంతమును మరికొంత నిశితమగునట్లు చేసెను. పరంపరలో వాస్తవిక పదములు ఉండగా (A) విధాన సంకలనీయతకు బదులు ఎక్కువ నిశితమగు (C, 1) విధానమును అవలంబించిన, n వ పదము

పై గల నిబంధనకు బదులు ఒక తేలిక యగు నిబంధనను తీసికొనవచ్చును. దీనిని సావకాశ అపచయ నిబంధనఅని చెప్పుదురు. తర్వాత ఆనందరావును అనుసరింపక 1925 లో ష్మిట్ మహాశయుడును, ఆనందరావు ప్రోద్బలముపై 1926 లో విజయరాఘవన్‌ను, ఆనందరావు సిద్ధాంతములో వాడిన (C, 1) విధానమును (A) విధాన సంకలనీయతకు వ్యాపింపచేసిరి. ఇందుచే టాబిర్ సిద్ధాంతమునకు ఉత్కృష్ట రూపము లభించినది, 1913 లో హార్డీ - లిటిల్‌వుడ్‌లు ఆవిష్కరించిన సిద్ధాంతముపై ష్మిడ్జ్ - విజయరాఘవన్ సిద్ధాంతమును ఆధారపడునట్లు చేయవచ్చును. ఆ సిద్ధాంతము ఏమన : ఒక పరంపర వాస్తవికమయిన, దాని (A) విధానసంకలనీయతలో దాని ఉపసరణత ఇమిడియున్నది. దీనికి చక్కని ఉపపత్తి 1930 లో జె. కారమాటా ప్రచురించెను. దీనికి సరియగు ప్రతి రూపమొకటి కలదు. అందు (A) విధాన సంకలనీయతకు బదులు (L) విధాన సంకలనీయత వాడబడును. దానికి ఉపపత్తి వీనర్ 1932 లో చూపిన నిశితమగు మార్గమున స్థాపింపవచ్చును.

ష్మిడ్జ్ - విజయరాఘవన్ ప్రతిపాదించిన (A) విధాన సంకలనీయ సిద్ధాంతమువలె (B), (L) విధానములకు సామ్యములగు సిద్ధాంతములును కలవు. (L) విధాన సంకలనీయత యొక్క ఒక ప్రత్యేక రూపము ప్రధాన సంఖ్య సిద్ధాంతమునకు సమానమగును.

ఇటీవల సాధారణముగా గణితశాస్త్ర వాడుకయందుండు యూక్లీడియన్ అంతరాళము కాక ప్రత్యేకములగు అంతరాళములు ఉపయోగింపబడినవి. జెల్లర్ ప్రచురించిన గ్రంథమునందు దీనికి సంబంధించిన సర్వతోముఖ పరిచయమునకు అవకాశము కలదు.

సంకలనీయతా విధానములు చాల ఉపయోగకరములని మాత్రమే కాక, వీనిచే ఉపసరణలు, కొన్ని ప్రత్యేక పరంపరల సంకలన ఫలములను కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణముగా 0 మొదలు 2π వరకు x అవిచ్ఛిన్నమైన, $f(x)$ ఫలము నుండి ఫోరియర్ పరంపర - జీవ, కోటిజీవ పరంపరలు సాధించినచో ఇవి (C, 1) సంకలనీయతా విధానములో $f(x)$ విలువగలది యగును. కాని, ఉదాహరణముల వలన ఇవి ఆవశ్యకముగా ఉపసరణ పరంపరలు కావు అని 1910 లో చూపబడినది.

సులభ ఫల జన్యములగు ఫోరియర్ పరంపరల యొక్క ఉపసరణత వాని సంకలనీయతా ప్రశ్నలకంటె చాల కఠినముగా ఉండును. సి. టి. రా.

సంకీర్ణ సంఖ్యలు : వాస్తవిక బీజగణితము పూర్తి కాని గణిత విద్యాశాఖ. అన్ని వాస్తవిక సంఖ్యలకు వర్గమూలము, లాగరిదమ్‌లు (లఘు గణకము) చెందవు. ఋణరాశులకు వర్గమూలము, లాగరిదమ్‌లు కనుగొనుటకు వీలులేదు. పరికర్మలకుగాను క్షేత్ర విస్తరణ ఆవశ్యకము. $x^2 = -1$ అయినచో x యొక్క విలువ కనుగొనుటకు వీలుండవలయును.

ఒక బిందువు X, O నుండి బయలుదేరి ఋజురేఖ OP వెంబడి వెళ్లునపుడు ఏర్పడు కొలతను ఒక వాస్తవిక సంఖ్య x గుర్తించును. రెండు బిందువులు P, Q ఒక సమతలములో నుండిన P, Q యొక్క స్థానాంతరతను గుర్తించుటకు రెండు వాస్తవిక సంఖ్యలు కావలయును. ఒక జత స్థిర నిరూపకాక్షములు తీసికొని P యొక్క నిరూపకములు x, y; Q యొక్క నిరూపకములు $x+x_1$, $y+y_1$ అని తీసికొనిన, స్థానాంతరత PQ ను $[x_1, y_1]$ చిహ్నముచే గుర్తింపవచ్చును.

$[x_1, y_1]$ ఒక క్రమబద్ధమైన జత ; $[y_1, x_1]$ తో సమానము కాదు. x_1, y_1 రాశులకు క్రమబద్ధమైన జత అని పేరు ఇవ్వబడినది

ఒక క్రమబద్ధమైన జతను $[x_1, y_1]$ గుర్తించుటకు రెండు వాస్తవిక సంఖ్యలు కావలయును.

నాలుగు పరికర్మలు : రెండు స్థానాంతరతల $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ యొక్క సంకలనమును నిర్వచనము చేయుటకు స్థానాంతర పరికర్మలను ఒకటి వెంబడి ఒకటి నిర్వహించుట యుక్తము. కాబట్టి

$$[x_1, y_1] + [x_2 + y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2],$$

$[x_1, y_1]$ ను సంఖ్యాద్వయమని చెప్పవచ్చును.

గుణకారము : ఒక సంఖ్యాద్వయము $[x_1, y_1]$ ను ఒక వాస్తవిక సంఖ్య k చే గుణించిన

$$k[x_1, y_1] = [k x_1 + k y_1]$$

లభించును. మనము రెండు సంఖ్యాద్వయముల గుణకారమును మనకు తగినట్లు నిర్వచనము చేయవచ్చును. కాని, రసవంతమగు ఫలితమును క్రింది విధానము ఇచ్చుచున్నది.

$$[x_1, y_1]\,[x_2, y_2] = [x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1]$$

తక్కినవి ప్రశంసనీయములు కావు.

ఇందుండి లభించు ఫలితములు :

$$[x_1\ 0]\,[x_2, y_2] = [x_1 x_2, x_1 y_2] = x_1 \times [x_2, y_2]$$
$$[0\ y_1]\,[x_2, y_2] = [-y_1 y_2, x_2 y_1] = y_1 \times [-y_2, x_2]$$

దీనికి జ్యామితీయ వివరణ కలదు.

స్థానాంతరత $[x_1\ 0]$ చే గుణించుట, వాస్తవిక సంఖ్య x_1 చే గుణించుటకు సమానము.

స్థానాంతరత $[0_1\ y_1]$ చే గుణించుట, వాస్తవిక సంఖ్య y_1 చే గుణించి, ఒక సమకోణము గుండ భ్రమణము చేయవలయును.

$[x_1, y_1]$ సంఖ్యాద్వయమును ఒక సంయుత చిహ్నము $x + i y_1$ చే గుర్తించుట యుక్తము. గాస్‌ను అనుసరించి దీనిని సంకీర్ణ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

అంకగణిత పరికర్మలందు సంకీర్ణ సంఖ్య $x_1 + i\,0$ ను వాస్తవిక సంఖ్య x_1 చేతను, i చిహ్నము $0 + i \cdot 1$ అనియును గుర్తించిన $i^2 = [0, 1] \times [0, 1] = [-1, 0] =$ (వాస్తవిక సంఖ) -1

a, b, c సంకీర్ణ సంఖ్యలైన

$a + b = b + a$ [పరివర్తన న్యాయము].

$ab = ba$ [పరివర్తన న్యాయము].

$(a + b) + c = a + (b + c)$ [సంయోజక న్యాయము].

$ab \cdot c = a \cdot bc$ [సంయోజక న్యాయము].

$a\,(b + c) = ab + ac$ [విభాజక న్యాయము],

$ab = 0$ అయిన a లేదా, b శూన్యమగును. బీజగణిత పరికర్మలు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు ప్రయోగించినచో క్రొత్త సంఖ్యలు ఏమియు ఏర్పడవు. కాబట్టి సంకీర్ణ సంఖ్య ఒక విశేష వ్యాపక సంఖ్యకు ఉదాహరణము.

సంకీర్ణ సంఖ్యలను ప్రయోగించుటవలన, వేరు వేరుగా నుండు వాస్తవిక ఫలముల ఐక్యత విశదమాయెను.

వృత్తీయ ఫలములు $\sin x$, $\cos x$ కును, ఘాత ఫలములకు మధ్యగల సంబంధము విశదమయ్యెను.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

చతుష్కములు : హామిల్టన్ సంకీర్ణ సంఖ్యల కంటె ఎక్కువ వ్యాపక సంఖ్యలను ప్రతిపాదించెను. సంకీర్ణ సంఖ్యలందు ప్రధాన రూపద్వయములు $1, i$; సంఖ్యలను గుర్తించు మార్గము $1 \cdot x + i \cdot y = x + i y$; $i \cdot i = -1$ చతుష్కములందు నాలుగు ప్రధాన రూపములు.

$1, i, j, k$ లు కలవు. సంఖ్యను వ్రాయు మార్గము

$$1 \cdot x + i \cdot y + j \cdot z + k \cdot w = x + i y + z + k w$$

వాని గుణకార పథకము

$$i \cdot i = 0 \qquad j \cdot i = -k \qquad k \cdot i = j$$

$$i \cdot j = k \qquad j \cdot j = 0 \qquad k \cdot j = -i$$

$$i \cdot k = -j \qquad j \cdot k = i \qquad k \cdot k = 0$$

మన అంతరాళము విమాత్రయాత్మకము (త్రిపరిమాణికాకాశము). భౌతికశాస్త్రమునందు, కాలము కూడ చేరుటచే చతుర్విమాకాశము ఏర్పడుచున్నది. అందుచే చతుష్కముల ఆవశ్యకత విశదమయినది. వేరొక వ్యాపక గుణకార పథకము కూడ వాడుకలో నున్నది.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

సంకీర్ణ సంఖ్యయొక్క మాపాంకము : $x + i y$ యొక్క మాపాంకమును $|x + i y|$ చే గుర్తింతుము. దాని విలువ $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$; $x, -x$ యొక్క మాపాంకము $|x|$.

$(x + i y_1) + (x_2 + i y_2)$ యొక్క మాపాంకము ఎంత ?

$(x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2)$ యొక్క మాపాంకము

$$= \{ (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) \}^{\frac{1}{2}} = A$$

కాని $\{ |x_1 + i y_1| + |x_2 + i y_2| \}^2$

$$= \{ (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} + (x_2^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} \}^2$$

$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2 \{ (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2 \{ (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \} = B$$

B కంటె A ఎప్పుడును తక్కువగా నుండదు.

కాబట్టి రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము యొక్క మాపాంకము వాని మాపాంకముల సంకలనము కంటె తక్కువగా నుండదు.

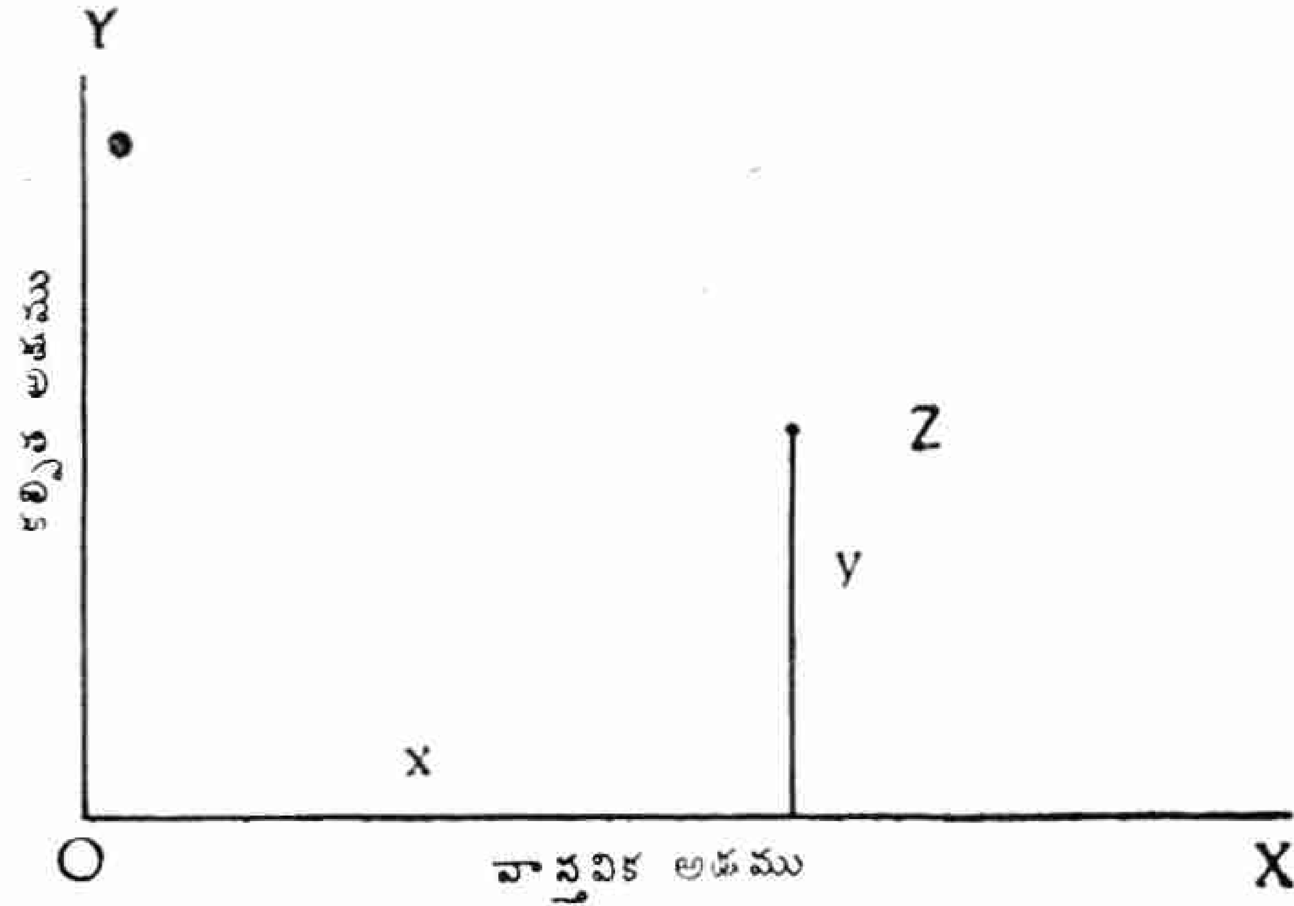
ఆర్గాండ్ చిత్రము : సంకీర్ణసంఖ్య $x + i y$ ని ఒక అక్షరముచే గుర్తించుట వాడుక : $x + i y = z$.

z యొక్క వాస్తవిక భాగము x; కల్పిత భాగము y. $|x + i y| = |z| = \sqrt{x^3 + y^2}$.

సంకీర్ణ సంఖ్యలను రేఖా చిత్రముల మూలముగ గుర్తింపవచ్చును (చూ. చిత్రము 410 - పు. 592).

x — అక్షమును వాస్తవిక అక్షముగాను, y — అక్షమును కల్పిత అక్షముగాను తీసికొని z సంఖ్యను గుర్తించునపుడు x, y నిరూపకములచే గుర్తింపవచ్చును.

సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము: ఆర్గాండ్ చిత్రము నందు z_1, z_2 సంఖ్యలను P, Q బిందువులు గుర్తించును. $z_1 + z_2$ కనుగొనవలయును.

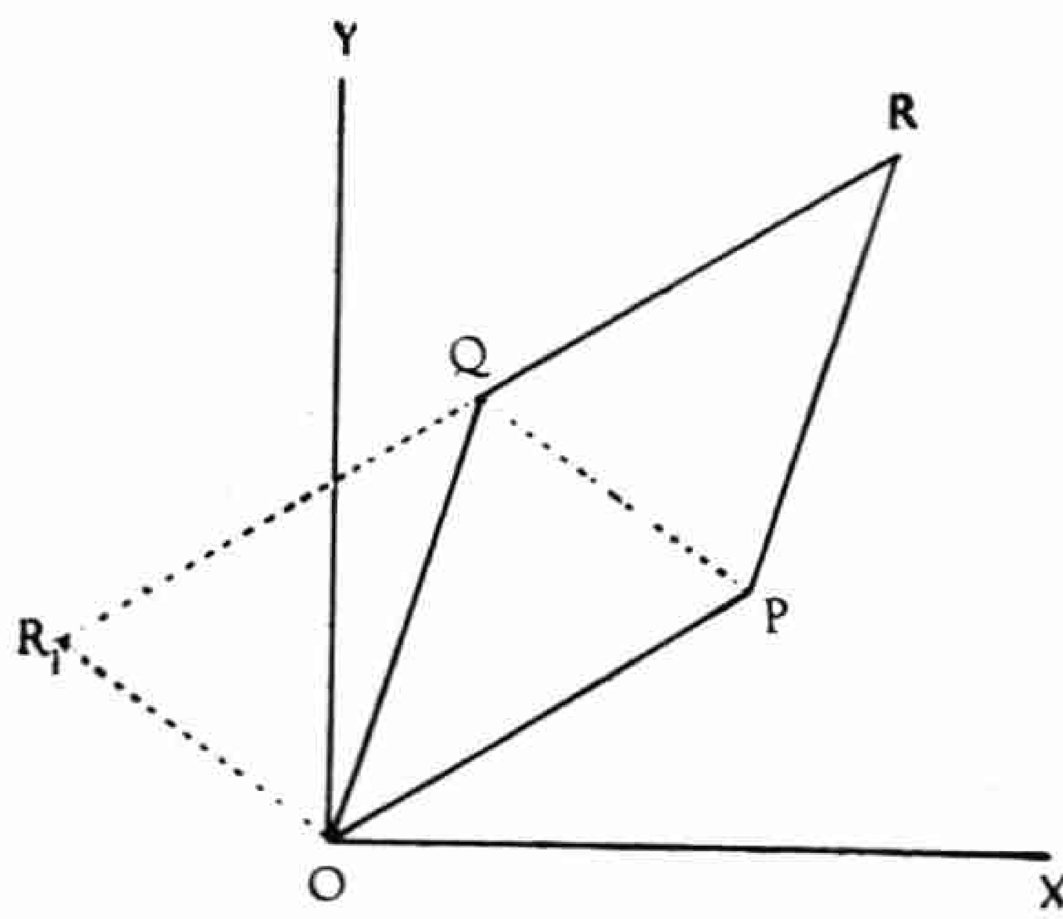


చిత్రము 410

OP, OQ లను భుజములుగా తీసికొని $OPQR$ సామ్య చతుర్భుజము తీసికొనుము. వికర్ణము OR, $z_1 + z_2$ సంకీర్ణ రాశిని గుర్తించును. ఇచట

$$OP = | z_1 |$$
$$PR = OQ = | z_2 |$$
$$OR = | z_1 + z_2 |$$ అని విశదమగుచున్నది.

$OPQR_1$ సామ్య చతుర్భుజమును పూర్తిచేయుము. పూర్వరీతిగానే విమర్శించిన, PQ భుజము $z_1 - z_2$ రాశిని గుర్తించును. QP చే $z_2 - z_1$ గుర్తింపవచ్చును. గతిశాస్త్రము యొక్క రెండు వేగముల సంకలన, వ్యవకలన విధానమును ఇచట పాటించునట్లు విశదమగుచున్నది.

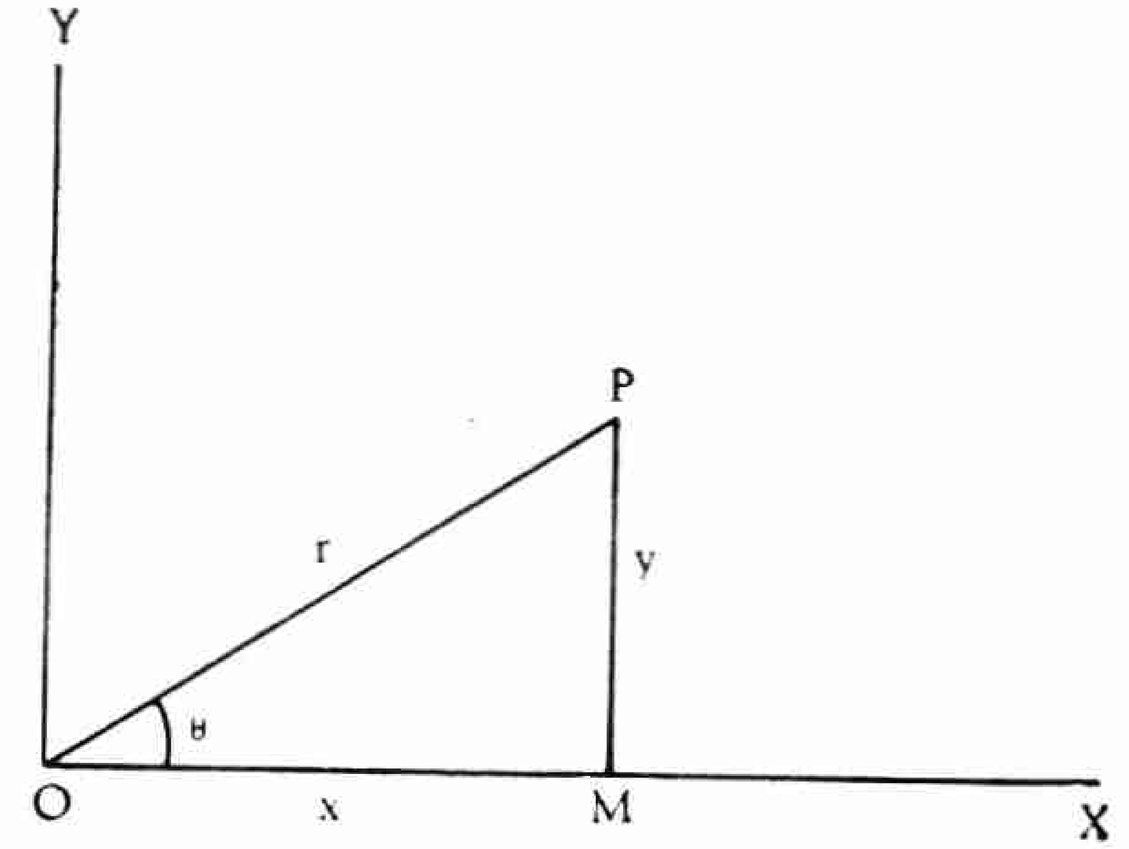


చిత్రము 411

ఒక కణమునకు రెండు వేగములు u, v లు కలవు. వానిని OP, OQ లచే గుర్తింపవచ్చును.

మొదట ఆ కణము u వేగముతో P బిందువును చేరును; తర్వాత v వేగముతో P నుండి బయలుదేరి OQ కు సామ్యముగా వెళ్లి R వద్ద చేరును. వేగములు u, v లు మిళితములయిన, తుట్టతుదకు R వద్ద చేరును. మొదట v, తర్వాత u తీసికొనిన గమ్యస్థానము R లో మార్పు ఉండదు. అదే విధమున u వేగమును OP గుర్తించిన, v ని OQ గుర్తించిన, PQ ఏ వేగమును గుర్తింపవలయును. PQ చే గుర్తింపబడు వేగము $u - v$ అని తెలియుచున్నది. QP ని $v - u$ గుర్తించును. కాబట్టి వ్యవకలనము విమర్శింపబడెను.

గుణకారము: సంకలనరాశి z, P చే గుర్తింపబడును. $z = x + iy$ అయిన, P నుండి వాస్తవికాక్షమునకు



చిత్రము 412

లంబము $= PM = y$, $OM = x$, $OP = r$, $\angle POM = \theta$ అని తీసికొనుము.

$$x = OM = OP \cos\theta = r\cos\theta$$
$$y = PM = OP \sin\theta = r\sin\theta$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2 ; \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

θ కు విపులత (ఆంప్లిట్యూడ్) అనిపేరు.

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

ఇపుడు రెండు సంకీర్ణరాశులు z_1, z_2 తీసికొని వాని లబ్ధమును కనుగొనవలయును.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ అని తీసికొనుము.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &\quad + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

రెండు సంకీర్ణరాశుల మాపాంకముల లబ్ధము వాని లబ్ధముల మాపాంకమునకు సమానము.

రెండు సంకీర్ణరాశుల విపులతల సంకలనము వాని లబ్ధముల విపులతకు సమానము. z_1, z_2 యొక్క మాపాంకములు 1 అయిన

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

దీనికి డిమాయర్ సిద్ధాంతమనిపేరు. డిమాయర్ సిద్ధాంతము యొక్క వ్యాపక రూపము

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta$$

ఇది n యొక్క అన్ని విలువలకు అన్వయించును.

బిందు పథములు : విపులత $z =$ స్థిరరాశి అను సమీకరణము మూలబిందువు గుండ వెళ్లు ఒక అనంత అర్ధరేఖను గుర్తించును. దాని నిమ్నత $= \frac{y}{x}$;

$|z - A| = r$; ఇందు A, r రెండును స్థిరరాశులు.

ఈ సమీకరణము A కేంద్రముగా, r వ్యాసార్ధముగా గల ఒక వృత్తమును గుర్తించును.

సంకీర్ణరాశి ఫలములు : y, x నాస్తవిక రాశులయినపుడు y యొక్క విలువ x పై ఆధారపడియుండిన, $y = f(x)$ అని వ్రాయుదుము. x యొక్క ఫలము y.

z ఒక సంకీర్ణరాశి ; $f(z)$ ఒక సంకీర్ణ రాశి ఫలము. దీనియందు రెండు భాగములు కలవు. $z = x + iy$ అని ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించిన $f(z) = u + iv$ అని ఏర్పడును. ఇచట u, v లు x, y యొక్క ఫలములు. వాస్తవిక ఫలముల ధర్మములన్నియు అట్లే u, v లకు అనువర్తించుటచే, $f(z)$ కు కూడ అన్వయించును.

అవిచ్ఛిన్నత. ఉపసరణత, అపసరణత మొదలగు ధర్మములు మార్పులు లేక అన్వయించును. $f(z)$ యొక్క లక్షణముల విపుల విమర్శనకు చూ. విశ్లేషణ ఫలములు పు. 527.

ఆచార్య

సంఖ్యామాపములు : మనము ఇప్పుడు వ్రాయు సంఖ్యలలో అంకెలు స్థాన మహిమ గలవి, అనగా స్థానములు మారుటచే అంకెల విలువలు మారుచుండును. మార్పు యొక్క విలువ పదిరెట్లు. ఒకట్ల స్థానములో 7 యొక్క విలువ 7 ; కాని సహస్ర స్థానమున ఉండునప్పుడు 7000. ఒక సంఖ్య 4535 తీసికొందము

ఇది $4 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 5$ కు సమానము. ఈ విధానము ప్రచారములో నున్నది. దీనికి దశగుణ మానము లేదా మాపము అని పేరు. మాపకాంకము 10. దానిని కొందరు మూలాంకము (రాడిక్స్) అని చెప్పుదురు. గణితవేత్తలు మూలాంకమునకు వేరు వేరు విలువలు ఇచ్చి యున్నారు. బాబిలోనియన్‌లు 60 మూలాంకము వాడుచుండినట్లు తెలియుచున్నది. మరికొందరు 20 మూలాంకము వాడిరి. కొన్ని సమయములందు భారతీయులు కూడ 60 మూలాంకమును వాడిరి. ఉదా :

1 ఋతువు = 60 దినములు

1 దినము = 60 గడియలు

1 గడియ = 60 విగడియలు

1 విగడియ = 60 కలలు

వాడుకలో నున్న కోణమానము :

1 అంశ = 60 కలలు

1 కల = 60 వికలలు

ప్రస్తుతము గణితజ్ఞులు 2 మొదలు 12 వరకు మూలాంకములను వాడుదురు. మూలాంకము 12 అయినప్పుడు 10 కి t, 11 కు e 12 కు I సంజ్ఞలు వాడుదురు. మనము వానికి మారుగ క్రమముగా ద, ఏ, ద్వా సంజ్ఞలు వాడవచ్చును. దశ యొక్క మొదటి అక్షరము 'ద', ఏకాదశ, ద్వాదశముల మొదటి అక్షరములు క్రమముగా 'ఏ' 'ద్వా' అగును. ద్వాదశ మూలాంకములో 4535 గుర్తించవలయుననిన దానిని 12 తో వరుసగా శేషము 12 కు తక్కువ యగు వరకు భాగింపవలయును. కాబట్టి,

$$4535 = 2 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 5 \times 12 + 11$$

లేదా 275 ఏ అనియు వ్రాయవచ్చును. ప్రతి స్థానము ఎడమవైపు జరుగునప్పుడు 12 రెట్లు హెచ్చును. 4535 లో ప్రతి స్థానము 10 రెట్లు హెచ్చును.

మూలాంకము **2** : 251 సంఖ్యను మూలాంకము రెండుతో గుర్తించి చూతము.

```
2|251
  2|125 - 1
    2|62 - 1
      2|31 - 0
        2|15 - 1
          2|7 - 1
            2|3 - 1
               1 - 1
```

$$251 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

లేదా

11111011 అని వ్రాయవచ్చును.

వ్యాపకముగా మూలాంకము r అని తీసికొనిన, ఒక సంఖ్యను

$$a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + a_4 r^3 + a_5 r^4 + \dots + a_n r^{n-1} = N$$

అని గుర్తింపవచ్చును.

r మూలాంకముతో ఈ సంఖ్యలో n స్థానములుండును. ప్రతి a యును r కంటె తక్కువగా నుండవలయును.

నిష్కాసనము : 9 తో నిష్కాసనము చేయుట వాడుకలో నున్నది. దానివలన ఒక సంఖ్య 9 చే భాగింపబడునా లేదా అని కనుగొనవచ్చును. అట్లే $(r-1)$ చే N భాగింపబడిన, $(r-1)$ చే $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ భాగింపబడవలయును.

మరియు $a_1 + a_3 + \dots = a_2 + a_4 + \dots$ అయినప్పుడు $(r+1)$ చే N భాగింపబడును.

ఇది మూలాంకము 10 అయినప్పుడు 11 చే భాగింపబడుటకు అనురూపమగును.

భిన్నాంకములు :

$$0{\cdot}254 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3}$$

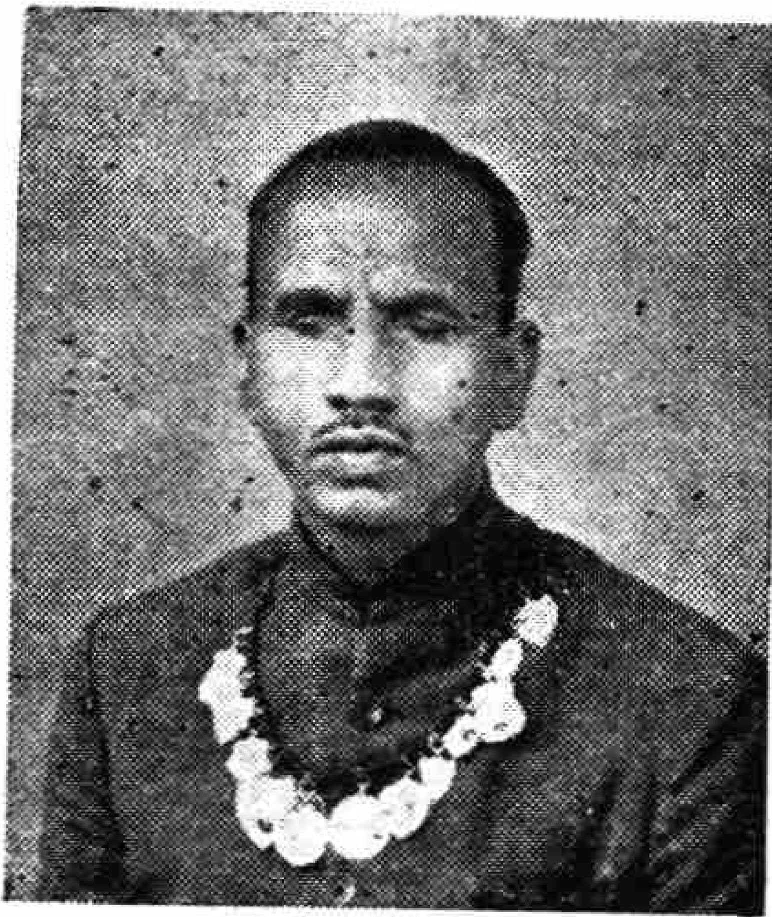
ఇచ్చట మూలాంకము 10.

మూలాంకము $= r$ అయిన

$$0{\cdot}254 = \frac{2}{r} + \frac{5}{r^2} + \frac{4}{r^3}$$

బుద్ధి చాతుర్యముతో ఇట్టి ప్రశ్నలు అనేకములు కల్పింపవచ్చును. ఆచార్య

సంజీవరాయశర్మ, లక్కోజు : శ్రీ సంజీవరాయశర్మ కడపజిల్లా, ప్రొద్దుటూరు తాలూకా, కల్లూరు గ్రామములో 1910 ఫిబ్రవరి 26 వ తేదీనాడు ఒక విశ్వబ్రాహ్మణ వంశమున జన్మించెను. ఇతడు పుట్టుగ్రుడ్డి; 5 వ తరగతి వరకు గ్రామ పాఠశాలలో చదువు కొనెను. చిన్న వయసులోనే ఇతని ప్రతిభ లోకమునకు వెల్లడియయ్యెను. బాల్యమునందే ఇతడు ప్రదర్శనలలో తన అత్యద్భుతగణనా సామర్థ్యమును నిరూపింపగలిగెను. ఫిడేలు వాయించుచు, అతడు మనస్సులో లెక్కలు కట్టి ఫలితములు చెప్పును. అతడు దైవభక్తి పరాయణుడు; మిక్కిలిచిత్తావేశముతో భగవత్కీర్తనలు పాడుచుండును. సంజీవరాయశర్మకు వివాహమైనది; ఇద్దరు కుమార్తెలు, ఒక కుమారుడు కలిగిరి.


చిత్రము 413
సంజీవరాయశర్మ

అతడు సాధారణ అంకగణిత పరికర్మలగు గుణకారము, భాగహారము, ఘాతోన్నయనము, వృద్ధిగణన అతిశీఘ్రముగ చేయగలుగుటయేకాక ఒక ఇంగ్లీషు తేదీకి అనుగుణమగు తిథివారములును, తిథివారములకు అనుగుణమగు ఇంగ్లీషు తేదీని అవలీలగ చెప్పగలడు. అతడు అనేక స్థలములలో అద్భుత గణిత ప్రదర్శనలు ఇచ్చి, అనేక పతకములు, గణితబ్రహ్మ, విశ్వసాంఖ్యాచార్య ఇత్యాది బిరుదులు గడించెను. అతడు కావించిన కొన్ని అద్భుత గణనములు :

1. ప్రశ్న : నాలుగు రెండ్లువేసి పెద్ద మొత్తము చేయుట, అనగా $2^{2^{2^2}}$

జవాబు : 67399866667876599486667537717549076684092861056351431202759025623O4 (67 అంకెలు).

2. ప్రశ్న : 4567346796704 యొక్క వర్గమెంత ?

జవాబు : 20800656771363290905263616.

3. ప్రశ్న : 17^{28} విలువ ఎంత ?

జవాబు : 28351092476867700887730107366063041.

4. ప్రశ్న : 74462898441675122902993018227199467668020601 — దీని 6 వ మూలము (రూట్) ఎంత ?

జవాబు : 20511149.

5. ప్రశ్న : $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots$ ఈ ప్రకారము 1000 వరకు కూడిన ఎంతవచ్చును ?

జవాబు : 91 · 409 924 241 · 424 243 424 241 · 924 · 242 · 500 (చుక్కలతో క్రమము లేదు).

6. ప్రశ్న : ఒకడు పట్టణములోగల మిత్రునిచూచుటకు వెళ్లెను. మిత్రుడున్న వీధిలో 50 కంటె ఎక్కువగా, 500 కు లోపుగా ఒకే శ్రేణిలో ఇండ్లు కలవు. ఒకటి మొదలుకొని మిత్రుని ఇంటివరకు 1, 2, 3 గల వరుస నంబర్లు కూడినను, చివర నుండి వరుసగా కూడినను సమానముగా మొత్తము రావలెనన్న ఆ వీధిలోని ఇండ్లు ఎన్ని ?

జవాబు : ఇండ్ల మొత్తము 288. మిత్రుని ఇంటి నంబరు 204 (చూ. అద్భుత గణకులు - పు. 131). ఆ. న.

సంభావ్యతావాదము : ఈ దినము వర్షము వచ్చునా ? రాదా ? అను ప్రశ్నలకు ఏమి సమాధానము ఇవ్వగలము ? వర్షాకాలములో వర్షము వచ్చుటకు అవకాశము ఎక్కువ అనియు, ఎండకాలములో తక్కువ అనియు చెప్పవచ్చును. కాని, వర్షాకాలములో అభీష్టదినములో వర్షము లేకపోవచ్చును; ఎండకాలములో వర్షము రావచ్చును.

ఒక పాచిక దొర్లించిన, ఒకటి పడునా ? పడదా ? ఒకటి పడుటకు అవకాశము ఏమి ? ఇట్టి సమస్యలకు సంబంధించిన శాస్త్రమునకు సంభావ్యతావాదము (థియరీ ఆవ్ ప్రాబబిలిటీ) అని చెప్పుదురు.

ఇట్టి ప్రశ్నలు గణిత రూపమున విమర్శింపబడును.

చరిత్ర : ఈ శాస్త్రమునకు జన్మదేశము ఫ్రాన్స్. మూడు వందల సంవత్సరములకు పూర్వము దీనికి అంకురార్పణము జరిగినది. అప్పటి ఫ్రాన్స్ దేశపు చక్రవర్తి లూయీ-xiv భూస్వాముల అధికారమును అంతమొందించి, వారల పరస్పర యుద్ధములకు అవకాశము లేకుండ

చేసెను. కాబట్టి గత్యంతరము లేక వారందరు కాలక్షేపమునకు ఇతరదారుల పట్టిరి. వానిలో ఒకదారి జూదము. వారిలో అగ్రగణ్యుడు డి-మేరే. అతడు ఈ వ్యాపారములో ఎక్కువ శ్రద్ధ పుచ్చుకొనెను. పందెములు వేయుటకు అతడు రెండు సమస్యలను సిద్ధపరచెను.

(1) ఒక పాచికను 4 సార్లు దొర్లించిన, అధమపక్షము ఒకసారి ఆరు వచ్చునని పందెము వేసి ఒక జూదరి జయించెను.

(2) రెండు పాచికల 24 సార్లు దొర్లించిన అధమపక్షము ఒక జత ఆరులు వచ్చునని పందెము వేసి, మరియొక జూదరి ఓడిపోయెను.

ఏల? ఇందు గల రహస్యము గణిత కుఠార భేద్యము. మేరే ఈ రహస్యమును కనుగొనుటకు ఆ కాలపు గణితవేత్తయగు ఫర్మాని ఆశ్రయించెను. గణిత మూలమున మొదటి జూదరికి జయించుటకు అవకాశము $\frac{51}{49}$ అనియు, రెండవ జూదరికి $\frac{49}{51}$ అనియు ఆ గణితవేత్త నిరూపించెను. అప్పుడు సంభావ్యతా కలనము (కాల్క్యులస్ ఆవ్ ప్రాబబిలిటీ) అను శాస్త్రము ఫర్మా రచించెను.

పందొమ్మిదవ శతాబ్దారంభమున లాప్లాస్ సంభావ్యతా వాదమును చక్కబెట్టి, అది మానవుల అనుభవమును గణిత రూపముగా వ్రాయబడినదనియు చూపెను.

విమర్శన: ఒక సంచిలో తుల్యరూప భారములు గల గోళములు 5 కలవు. అందు 2 నలుపు, 3 ఎరుపు. ఒక గోళమును సంచిలో నుండి తీసిన దాని రంగు యొక్క సంభావ్యత ఏమి? అని లాప్లాస్ విమర్శించెను.

5 గోళములుండుటవలన, ఒక గోళమును 5 మార్గములుగా తీయవచ్చును. అందు నల్లగోళమును రెండు మార్గములుగాను, ఎరుపు గోళముల 3 విధములుగాను తీయవచ్చును.

కాబట్టి నల్లగోళము తీయుటకు సంభావ్యత = $\frac{2}{5}$.

ఎరుపుగోళము తీయుటకు సంభావ్యత = $3/5$.

నిర్వచనము: ఇప్పుడు నిర్వచనమును సాధింపవచ్చును. ఒక సందర్భములో n సంభవములు సమాన అవకాశముతో జరిగిన, వానిలో m సంభవములు అనుకూలములయిన, అనుకూలత యొక్క సంభావ్యత = m/n.

కొన్ని సూత్రములు: సంకలన సూత్రము: పరస్పర బహిష్కార సంభవములు: E_1, E_2 పరస్పర బహిష్కార సంభవములు. వాని సంభావ్యతలు క్రమముగా p, q అయిన, వాని మిశ్రిత సంభావ్యత = $p+q$. ఒక జాడీలో N గోళములు ఉన్నవి. వానిలో x ఎరుపు గోళములు, y తెలుపు గోళములు. ఆ జాడీ నుండి ఒక ఎరుపు లేదా ఒక తెలుపు గోళము తీయునపుడు సంభావ్యత ఎంత?

ఒక ఎరుపు గోళము తీయుటలో సంభావ్యత = $x/N = p$.

ఒక తెల్లగోళము తీయుటలో సంభావ్యత = $y/N = q$. ఆ జాడీనుండి ఒక ఎరుపు లేదా ఒక తెలుపుగోళము తీయుటలో లభించు సంభావ్యత $\frac{x}{N}+\frac{y}{N}=\frac{x+y}{N}=p+q$ దీనికి మిశ్రిత సంభావ్యత యని పేరు. ఇందు సంభావ్యతలు పరస్పర బహిష్కారములు; పరస్పర సంబంధము లేదు.

గుణకార సూత్రము: కొన్ని సంభవములు పరస్పర బహిష్కారములు కావు. సంభవములు, ఒకటి వెంబడి ఒకటిగాని, లేదా ఏకకాలములోగాని ఏర్పడును.

ఒక పాచిక విసురుటలో రెండు ఒకట్లు, ఒక దాని తర్వాత రెండవది సంభవింపవలయుననిన, మొదటి ఒకటి పడుటకును, రెండవసారి ఒకటి పడుటకును పరస్పర సంబంధము లేకపోయినను, మొదటిసారి ఒకటి పడిన తర్వాత రెండవ ఒకటి పడవలయును.

మొదటి ఒకటి పడుటలో సంభావ్యత $\frac{1}{6}$; తర్వాత రెండవసారి ఒకటి పడుటలో సంభావ్యత $\frac{1}{6}$. మొదటి సంభవము E_1 అనియు, రెండవ సంభవము E_2 అనియు తలచుకొనిన, E_1 సంభవించిన తర్వాత E_2 సంభవింపవలయును. E_2 సంభవము, E_1 సంభవముపై ఆధారపడి యున్నది. కాబట్టి వాని సంభావ్యతలు క్రమముగా m, n అయిన, వాని మిశ్రిత సంభావ్యత $m \times n = mn$. ఒక సంభావ్యత p తెలిసిన, n ప్రయత్నములలో ఒక సంభవము $0, 1, 2, \ldots n$ సారులు ఏర్పడిన, వాని సంభావ్యతల కనుగొనుటకు బెర్నొలీ ఒక సూత్రమును వివరించి యున్నాడు.

ఒక సంభవములో జయము = p, అపజయము = q; ఏలన, ఆ ఒక సంభవములో జయమో లేదా అపజయమో ఏర్పడవలయును. కాబట్టి $p+q=1$. ఒక సంభవములో జయము p, అపజయము q అని తీసికొనుము. వస్తువులు N అయిన, జయము Np; అపజయము Nq. రెండవసారి ప్రయత్నములో Np వస్తువులలో

జయము Np^2; అపజయము Npq.

Nq వస్తువులలో జయము Nqp; అపజయము Nq^2. ఈ రెండు ప్రయత్నములు చేరిన, కడపట

$$Np^2+2Npq+Nq^2=N(p+q)^2.$$

సులభ గ్రాహ్యమునకుగాను. p ఎరుపు గోళములు, q

నలుపుగోళములయిన, ఈ రెండు ప్రయత్నములలో రెండు సారులు ఎరుపు లభించు సంభావ్యత p^2; ఒక సారి ఎరుపు, ఒకసారి నలుపు లభించు సంభావ్యత $2pq$; రెండుసారులు నలుపు లభించు సంభావ్యత $= q^2$. అట్లే మూడు ప్రయత్నములలో జయాపజయ మేళనము, (జయము = ఎరుపు; అపజయము = నలుపు) యొక్క సంభావ్యతలు $(p+q)^3$ లోని పదములు తెలుపును. గోళ ముల సంఖ్యలు $N(p+q)^3$ లోని పదములు తెలుపును.

n సారులు ప్రయత్నములు చేసిన లభించు వివిధ సంభావ్యతలు ఇదే విధమున $(p+q)^n$ యొక్క వివిధ పదము లని చూపవచ్చును.

సంభావ్యతను గుర్తించు వస్తువుల సంఖ్య $N(p+q)^n$ లో నుండి లభించును. $N(p+q)^n =$
$N\{p^n + nc_1 p^{n-1} q + \cdots + nc_r\, p^{n-r} q^r + \cdots + q^n\}$
మేరే సమస్యలకు సమాధానము కనుగొనుటకు, మొదటి సమస్యకు $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4$ లో మొదటి నాలుగు పదముల మొత్తమును, రెండవ సమస్యకు $2\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^{24}$ లో మొదటి 24 పదముల మొత్తమును కనుగొనవలయును.

మరియొక విశేషము: ఒక నాణెమును 100 సార్లు ఎగురవేసిన, 50 తలలు, 50 తోకలుపడవు. కాని, ప్రయత్నములను అధికము చేసిన తల తోక సంఖ్యల నిష్పత్తి $\frac{1}{2}$ ను అనుసరించును.

ఒక పాచికలో 1 పడవలయుననిన, సంభావ్యతను గుర్తించు సంఖ్య $\frac{1}{6}$; కాని, పాచికను 600 సార్లు $(=N)$ దొర్లించిన, 100 సార్లు ఒకటి పడదు. వ్యత్యాసము ఉండును. N యొక్క విలువ ఎక్కువ చేసిన p యొక్క విలువ $\frac{1}{6}$ ను అనుసరించును.

ఇందుండి బెర్నొలీ పెద్ద సంఖ్యల నియమము (లా ఆవ్ లార్జ్ నంబర్స్) ను స్థాపించెను.

పాచికలో దోషము ఉండకూడదు. సాంద్రత ఏక రూపముగా నుండవలయును. గురుత్వ కేంద్రము మధ్యమ కేంద్రముతో ఏకీభవించియుండవలయును. కూట పాచికల వాడకూడదు. భారతదేశములో ఒక సంభవము కలదు. కూటపాచికల ఉపయోగించి, శకుని పాండవులను జూదములో ఓడించెను. అట్లులేనిచో జయాపజయములు సమానముగా నుండవలయును.

పొరపాటు లేకుండ వ్యాపారము చేసిన, నష్టమెప్పుడు రాదు. సంభావ్యతావాదము వర్తకములో ఎక్కువగా వాడుకకు వచ్చెను.

చయనీకరణ విధానము: వారతాసారణిని విమర్శించునపుడీ విధానము ఉపయోగింతుము. కాని, వారతా విభజన వక్రరూపమున అమర్చినపుడు, వారతలు అవిచ్ఛిన్న పరంపరయగును. అపుడెట్లు సంభావ్యత కనుగొనుట? వారతావక్రము యొక్క సమీకరణము $y = f(x)$ అయిన,

$$x_1,\ x_2 \text{ మధ్యగల వైశాల్యము } = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

ఇది వారతా విభజనలో x_1, x_2 విలువల మధ్యగల వారతల సంఖ్య తెలుపును. కాబట్టి

వారతల సంభావ్యత =

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

దీనిని ప్రతిరూపముల విభజనలకు కూడ వాడవచ్చును.

ఆచార్య

సదృశ చిత్రపట లేఖనము: మనము భవనమును కట్టునప్పుడు భవనము యొక్క ఆధారయోజనను రచించుదుము. దీనికి వాస్తవిక యోజన అనిపేరు. ఏలన ఈ భవనమందలి ప్రతి పొడవును చిత్రపటములో ఒక నియత నిష్పత్తిలో కురుచచేయబడియుండును, కాని, గీతల మధ్యనుండు కోణములు యోజనలో మారవు; భవనమందున్న లంబ కోణములు చిత్రమందు లంబ కోణముల చేతనే నిరూపించబడును. దీనికి కారణము ఏమన ఒక పెద్ద చతురస్రముకానిమ్ము చిన్న చతురస్రముకానిమ్ము వాటి కోణముల మొత్తము విలువ ఒకటే. కనుక రూపము తగ్గించునప్పుడు నిడుపులు మారును, కాని కోణములు మారవు. ఇట్లు ఏ చిత్రమైనను, పరిమాణములో తగ్గించి ఒక వాస్తవిక చిత్రము వ్రాయవచ్చును.

భూగోళముపై భారతదేశము వంటి చిత్రమును తీసికొందము. ఏ రెండు నగరముల మధ్యనైన ఉన్న గోళీయ దూరమును చిత్రముపై కొలువబడిన దూరముచే నిరూపించబడునట్లు ఒక కాగితముపై భారతదేశ చిత్రపటమును లిఖించుట సాధ్యమగునా? దీనికి జవాబు: ఇది మరియొక గోళముపై సాధ్యముగాని, కాగితముమీద అసాధ్యమనుటయే; కారణమేమనగా గోళతలముపై దూరముల జ్యామితి వేరు, సమతలముపై ఉన్న జ్యామితి వేరు.

పొడవులు, కోణములు ఇవి రెండును వాస్తవికముగా చిత్రించుట అసాధ్యము కనుక, కోణములు మాత్రము మారని చిత్రపటములు సాధ్యమా? అని అడిగెదము. ఇట్టి చిత్రములు ఎల్లప్పుడును సాధ్యమనుటయే ప్రత్యుత్తరము. ఇటువంటి (అనగా కోణములు మారని) చిత్రపటము

లిఖించుటకు 'సదృశ చిత్రపట లేఖన' (కన్‌ఫార్మల్ మాపింగ్) మని పేరు. దత్త చిత్రములోని దూరముల నిష్పత్తి బింబ చిత్రపటములో సాధారణముగ మారి పోవును.

సదృశ చిత్రపట నిర్మాణము యొక్క ఉపయోగమునకు ప్రథమ కారణము : ఏ వక్రతలముపై ఉన్న చిత్రమునైనను ఇంకొక వక్రతలముపై వాస్తవికముగ గీయలేము. కాని ఏతలముపైనైనను ఇంకొక తలము యొక్క సదృశ చిత్రము గీయుట సాధ్యము.

రెండవ కారణము : సదృశ చిత్రపట లేఖనము అతి స్వల్ప ప్రదేశములలో కోణములనేకాక ఆకారమును వాస్తవికముగ నిరూపించగలదు. ఇట్లు A_1, B_1, C_1 అను భూమిపై దగ్గరనున్న మూడు బిందువులు సమతలముపై దగ్గరగా ఉన్న A_2, B_2, C_2 అను బిందువులచే నిరూపింపబడినవనుకొనెదము. ఈ త్రిభుజముల అనుగుణ కోణములు సమానములు. అందువలన ఈ రెండు త్రిభుజములును ఆకారములో సదృశములు. ఏ చిత్రమైనను త్రిభుజముల సముదాయముగా పరిగణించబడవచ్చును. కనుక, ప్రతి చిన్న చిత్రము యొక్క రూపము బింబ చిత్రములో మార్పులేకయే చిత్రింపబడుచున్నది. కాని, ఇది పెద్ద పరిమాణములు గల చిత్రముల విషయములలో వాస్తవము కాదు. గోళాకార భూమి నంతయు సమతలాత్మకమైన కాగితపు మాపుపై ఇట్లు చిత్రించినచో చిన్న వైశాల్యములు వికృతి నొందకుండును; కాని పెద్ద వైశాల్యములు వికృతిని పొంది తీరును. మనము ఉపయోగించు భూగోళ పటములు ఇటువంటివే. అనగా దేశములు ఖండములవంటి పెద్ద ప్రదేశములకు అవి చిత్రించురూపము సరియైన రూపము కాదు!

మొదట రెండు సమతలములను తీసికొనెదము. మొదటి తల చిత్రములో ఉన్న బిందువు నిరూపకములు (x_1, y_1), దానికి అనుగుణమైన రెండవ చిత్రములో ఉన్న బిందువు (x_2, y_2) గ ఉండనిమ్ము. వీటి మధ్య $x_2 = cx_1$, $y_2 = cy_1$ (ఇచ్చట c ఒక స్థిరరాశి) అను సంబంధము ఏర్పరచినచో, ఈ చిత్రలేఖనము వాస్తవికమైనదని విశదమగుచున్నది.

ఇట్లుకాక $x_2 = \phi(x_1, y_1)$, $y_2 = \psi(x_1, y_1)$ అని తీసికొనెదము. ఇచ్చట ϕ, ψ లు x_1, y_1 చలరాశుల ఫలములు. దీనివల్ల ఒక చిత్రలేఖనము మొదటి తలమునుండి రెండవ తలమునకు ఏర్పడుచున్నది. ఏలన, మొదటిపటపు బిందువు (x_1, y_1) ఇచ్చినట్లైతే, బింబపటము యొక్క అనురూప బిందువు (x_2, y_2) ను ఈ సూత్రము నిర్ణయము చేయుచున్నది. ఈ పటస్థాపనము 'సదృశపట లేఖనము' (అనగా కోణములను మార్చని లేఖనము) గా ఉండవలెనంటే ϕ, ψ ఫలములపై కొన్ని నిబంధనలుండవలెను. అవి యేమనగా, $\phi(x, y) + i\psi(x, y)$ అనునది $f(x + iy)$ అను రూపములో వ్రాయ సాధ్యముగ నుండవలెను.

ఉదా : $\phi(x, y) = x^2 - y^2$, $\psi(x, y) = 2xy$ అని తీసికొనెదము. ఇచ్చట

$$\phi + i\psi = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2$$

(ఇచ్చట i అనునది సంకీర్ణ ఏకాంకము అనగా $i^2 = -1$) కనుక

$$x_2 = x_1^2 - y_1^2, \quad y_2 = 2x_1y_1$$

అనునది ఒక సదృశ చిత్రపటలేఖనము నిచ్చును. ఈ చిత్రములో $x_2 = a$, $y_2 = b$ అను సమానాంతర రేఖలకు అనుగుణముగ మొదటి చిత్రమునందు $x_1^2 - y_1^2 = a$, $2x_1y_1 = b$ అను అతిపరాసలు ఉండును.

$z = x + iy$ అని వ్రాసితిమేని, z యొక్క ఫలము $f(z)$ ఏదైనను తీసికొని దాని వాస్తవ భాగము $\phi(x, y)$ ను, సంకీర్ణభాగము $\psi(x, y)$ ను {అనగా $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$} తీసికొనినచో $x_2 = \phi(x_1, y_1)$, $y_2 = \psi(x_1, y_1)$ అను సదృశ చిత్రలేఖనమును పొందవచ్చును.

$f(z) = z + c/z$ అను ఫలమును ఉపయోగించుటవలన (ఇచ్చట c స్థిరరాశి) వాయు విమాన పక్షములకు ఉచితమగు ఆకారముల సంపాదించగలిగిరి. $z = x + iy$ అను సంకీర్ణ ఫలముల నుపయోగించి చిత్రపటలేఖనము చేయుటవలన, విద్యుచ్ఛాస్త్రమందు, అయస్కాంత శాస్త్రమందు, ద్రవప్రవాహశాస్త్రమందు తలయెత్తిన అనేక సమస్యలు పరిష్కరించబడినవి.

ఏదే నొక వక్రతలముపై మరియొక వక్రతలము యొక్క సదృశ చిత్రలేఖనము : పై సమస్యను S_1 అను ఏ వక్రతలమునైనను S_2 అను తలముపై సదృశముగా నిరూపించు ప్రశ్నగా మార్చవచ్చును. ఏలన ఒక సమతలముపై S_1, S_2 వక్రతలముల సదృశ చిత్రపటములు చిత్రించబడియున్నచో సమతలముపై ఒకే బిందువునకు అనుగుణముగ S_1 లోను, S_2 లోను ఉన్న బిందువులు ఈ రెండు వక్రతలముల మధ్య సదృశ చిత్రణమును నియమించును. ఒక సమతలముపై ఏ వక్రతలమునకునైన సదృశ చిత్రపటము గావించుట అను కేంద్ర సమస్యను గాస్ సాధించెను.

(u, v) అను వక్రరేఖీయ నిరూపకములను ఏ వక్రతలము నందైన ప్రవేశపెట్టినపుడు (u, v) ను $(u + du, v + dv)$ అను రెండు సమీపబిందువుల మధ్యదూరము $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ అను రూపమున

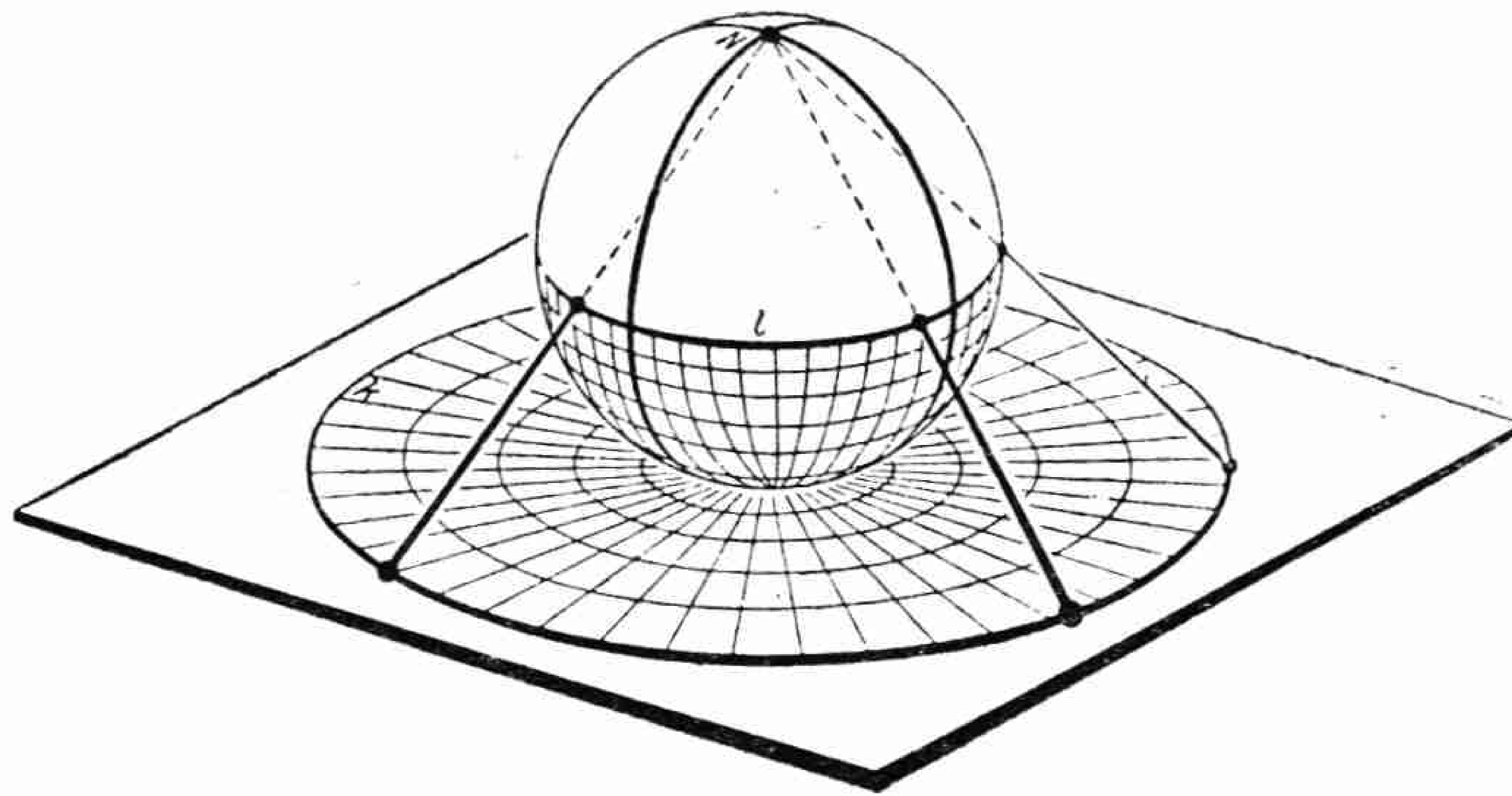
వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట E, F, G లు u, v యొక్క ఫలములుగ నుండును. (u, v) నిరూపకములను తగినట్లు ఏర్పుకొనుట వలన, మరింత సరళమైన రూపమగు $ds = f(u, v)(du^2 + dv^2)$ గ మార్చవచ్చును.

సమతలముపై లంబ నిరూపకములు (x, y) అయితే, ఇచ్చట $ds^2 = dx^2 + dy^2$ అగుచున్నది. కనుక (u, v) నిరూపకములుగల వక్రతల బిందువునకు అనురూపముగ, సమతలమందు $x = u$, $y = v$ అను బిందువు తీసికొనినచో, ఇది ఒక సదృశ చిత్రపటము నిచ్చును; ఏలన సమతలములో నుండు అన్ని చిన్న పొడవులును, వక్రతలమునకు పోవునపుడు ఒకే కారణాంకము $\sqrt{f(u,v)}$ చే గుణించబడును. ఇదియే సదృశ చిత్రపటము యొక్క విశిష్ట లక్షణము. సాధారణముగ $f(u, v)$ ఫలము u, v పై ఆధారపడి యుండును. అది స్థిరరాశియైతే, ఈ పటము సదృశపటమేగాక వాస్తవిక పటముగా కూడ నుండును. అయితే ఇది ఆవక్ర తలము స్తూపతలము, లేదా శంకు తలమువంటి వికాస్యమానతలముగ ఉన్ననే సాధ్యము.

సమతలముపై గోళతలముయొక్క సదృశ చిత్రపటము లిఖించుట: ఇదివరకే చెప్పినట్లు వికృతిని చెందకుండ సంపూర్ణగోళము, లేదా గోళాభమును సమతలముపై వాస్తవిక చిత్రపటముగ లిఖించుట సాధ్యము కాదు. కాని, సదృశ నిరూపణమును (అనగా అల్ప పరిమాణములుగల క్షేత్రములు మాత్రము వాస్తవికముగ నిరూపించు చిత్రమును) సమతలముపై సాధించవచ్చును. భూమిని ఒక గోళముగా తీసికొని అక్షాంశ U ను, రేఖాంశ V ను గోళీయ నిరూపకములుగ నుపయోగించుదము.

$$\left(0 \leq U < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}\right)$$

అప్పుడు రెండు సమీప బిందువుల మధ్యదూరము $ds^2 = \cos^2 V (dU)^2 + (dV)^2 = \cos^2 V[(dU)^2 + (dV/\cos V)^2]$ అగును. ఇప్పుడు



చిత్రము 414

$$u = U, \; iv = \int dV/\cos V = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right)$$

అను క్రొత్త నిరూపములకు మార్చినచో $ds^2 = \text{sech}\, v^2 (du^2 + dv^2)$. ఇట్లు సమతలముపై (x, y) అను కార్టీసియన్ నిరూపకములను నియోగించి,

$$x = cu, \quad y = cv = c \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right)$$

అను సంబంధముల సహాయమున గోళము యొక్క సదృశ నిరూపణ చిత్రమును సాధించవచ్చును. U = స్థిర రాశిచే తెలుపబడు యామ్యోత్తర రేఖలు y—అక్షమునకు సమానాంతరములుగ ఉన్న ఋజురేఖల చేతను; V = స్థిర రాశి అగు రేఖాంశ రేఖలు, x—అక్షమునకు సమానాంతర ఋజురేఖలచేతను చిత్రింపబడును. సమతలము నుండి గోళమునకు మారునప్పటి అధికీకరణ గుణకము k అనునది $k = (\cos V)/c$ అను సంబంధముచే నీయబడినది. ఈ కారణాంకము భూమధ్యరేఖనుండి ధ్రువ బిందువుల వైపు క్రమముగా తగ్గును. గోళ తలమంతయు $2\pi/c$ వెడల్పు గల పట్టీయందు చిత్రించబడును. ఈ పట్టీ y—అక్షమందు రెండువైపుల అనంతమునకు విస్తరించి యుండును. చిత్రపటములోని ఋజురేఖలు y—అక్షమునకు సమానాంతరముగా ఉన్న రేఖలను ఒక స్థిర కోణములో ఖండించును. సదృశనిరూపణ ధర్మము ప్రకారము కోణములు మారవు. కనుక పటములోని ఋజురేఖలు యామ్యోత్తరరేఖ లన్నిటిని ఒక స్థిరకోణములో ఖండించు గోళరేఖలకు అనుగుణముగ నుండును. ఇవి గోళములోని మహావృత్తములు కావు. (వీటికి *రంబ్ రేఖలని పేరు) అందువలన మెర్కేటర్ విక్షేపము అను పేరు గల ఈ నిరూపణ ఒక స్థానమునుండి ఇంకొక స్థానమునకు దిక్కును మార్చకుండ నావపై ప్రయాణము చేయు నావికులకు చాల ఉపయోగము.

సమతలముపై గోళము యొక్క ఇంకొక సదృశ నిరూపణ చిత్రణమునకు (దీనిని గ్రీక్ గణితజ్ఞుడు టాలెమీ నిర్మించెను) ఘన చిత్రీయ విక్షేపమని పేరు. దీనిని క్రింది రచననుండి సంపాదించవచ్చును. గోళముపై 'O' అను స్థిరబిందువు

*రంబ్ రేఖ: యామ్యోత్తర రేఖలన్నిటిని స్థిర కోణములో ఖండించునట్టి గుణము గల రేఖ. ఇది రెండు గోళీయ స్థలములను చేర్చు హ్రస్వతమ రేఖకాదు. అయినను నావలు ఈ రేఖను అనుసరించి ప్రయాణముచేయుట సహజము.

నొకదానిని తీసికొని, దానిని గోళముపై ఏదేని చల బిందువు P తో కలిపి, O ద్వారా వెళ్లు వ్యాసము యొక్క చివరనుండు O' బిందువు వద్ద గోళమునకు స్పర్శతలమును ఖండించునట్లు పొడిగించుము. గోళముపై ఉన్న P బిందువునకు సమతల చిత్రముపై నున్న P' ను ప్రతి బింబముగా గ్రహింతుము.

O ను ఉత్తర ధ్రువమువద్ద తీసికొనినచో, యామ్యోత్తర రేఖలు O' నుంచి బయలుదేరు ఋజురేఖలచే నిరూపించబడును. అక్షాంశ రేఖలు, O' కేంద్రముగల వృత్తములగును.

O' ను కేంద్రముగా తీసికొని, ధ్రువీయ నిరూపకముల (r, θ) ను గ్రహించినచో, గోళమునకు సమతలమునకు మధ్య గోచరించు అనురూపత. $\theta = V$;

$$r = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{U}{2}\right)$$

అను నిరూపక మూల్యములచే తెలియజేయబడును.

ఇచ్చట U అనునది గోళము యొక్క అక్షాంశము; V అనునది రేఖాంశము.

అ. న.

సద్రత్నమాల : ఇది ఆర్యభట సంప్రదాయమునకు చెందిన అర్వాచీన గ్రంథము; కరణ పద్ధతివలె ఇదియును అర్వాచీన ఆర్యభటీయ సంప్రదాయమునకు చెందిన π మూల్యమును నిర్ణయించు అనంతపరంపరలు, త్రికోణమితిలోని వికాసములు వంటి గణిత, ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞాన సామగ్రిని క్రోడీకరించినది. పురులాతిరి కుటుంబమునకు చెందిన ఉదయవర్మ సోదరుడగు యువరాజు రామవర్మ ఆజ్ఞను శిరసావహించి, శంకరవర్మచే ఈ గ్రంథము రచింపబడినదని దీని ఉపోద్ఘాతములో నుడువబడినది

భారతీయవృత్త సమచతురస్రీకరణము అను తన వ్యాసములో సి. ఎమ్. విష్ తానావ్యాసమును వ్రాసిన కాలమందు అనగా 1835 లో రాజ్యమేలుచున్న కడధనుడు అనువాని సోదరుడు శంకరవర్మ ఈ గ్రంథమును రచించినాడని చెప్పెను. అందుచే స్థానిక పండితులనుండి విష్ గ్రహించిన సమాచారము సత్యమయినచో ఈ గ్రంథము చాల నవీన మయినది. కాని అందు పొందుపరుపబడిన గణితశాస్త్ర విజ్ఞానము మట్టుకు మనకు తెలిసినంతవరకు చాల ప్రాచీనమయినది.

సరస్వతి

సప్తర్షియుగము - లౌకికాబ్దము : అన్ని పురాణములందును సప్తర్షి చారము చర్చింపబడినది.

శ్లో॥ ఆసన్ మఘాసు మునయః శాసతి పృథ్వీం యుధిష్ఠిరే నృపతే
షట్ద్వికపంచ ద్వియుతః శకకాలః తస్యరాజ్ఞస్య

(బృహత్సంహిత, 13. అధ్యా. శ్లో. 1.)

'యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యమేలినప్పుడు సప్తర్షులు మఘా నక్షత్రమున నుండిరి. యుధిష్ఠిరుని కాలమునకు 2526 చేర్చిన శక కాలము లభించును.'

నక్షత్రములకు చలనములేదు. వరాహమిహిరుడంతటి జ్యోతిష్కుడు సప్తర్షులకు చలన ముండునట్లు అర్థము ఇచ్చునట్టి శ్లోకమును వ్రాసినాడు. పురాణములతని ననుసరించి కలియుగ రాజవంశావళి చరిత్రమును సప్తర్షి కాలమానముపై ఆధారపడియుండునట్లు తెలుపుచున్నవి.

దీని రహస్యము వరాహమిహిరునితో అంతరించినట్లు తోచుచున్నది. తర్వాతి జ్యోతిష్కులు ఈ విషయమును గురించి వివరింపలేదు. పురాణములు మాత్రము కలియుగ రాజచరిత్రములో సప్తర్షియుగమును గురించి తప్పక వ్రాయుచుండెను. పాశ్చాత్యులీ విషయమును చదివినపుడు వారికేమియు తోచలేదు, మనవారికిని అంతే.

ఇండియన్ హిస్టరీ అను పత్రికలో డాక్టర్ త్రివేదీ సప్తర్షి చలనమును గురించి చక్కని విమర్శనము చేసినారు. కాని, అతనికి అంతరార్థము బోధపడలేదు, కాబట్టి వ్యాసములో సంపూర్ణత లేదు.

కోల్ బ్రూక్ 'గ్రంథకర్తలు పండ్రెండుగురు సప్తర్షులకు చలనము కలదని అభిప్రాయపడియున్నారు. సప్తర్షులు తూర్పునుండి పడమటివైపు పోవుచు, ఒక్కొక్క నక్షత్రములో 100 సంవత్సరముల కాలము వసించినట్లు తెలియుచున్నది' అని వ్రాసెను.

సిద్ధాంత సార్వభౌమములో గుర్తించిన ఈ చలనమును విమర్శించుచు కమలాకరుడు అట్టి చలనము కనబడలేదని వ్రాసినాడు. కాని పురాణములును, సంహితలును పొరపాటు పడవు. అనుభవమును, శాస్త్రములందు గల విశ్వాసమును అనుసరించి నక్షత్రములు స్థిరములనియు, కాని సప్త నక్షత్రముల అధిష్ఠాన దేవతలు పురాణములందు చెప్పినట్లు భ్రమణము చేయుదురనియు కమలాకరుడు అభిప్రాయపడెను.

ఈ సమాధానమునకు కోల్ బ్రూక్ ఒక విధముగ ఆదరణను చూపెను. దీనివలన సప్తర్షి చలనమును గురించి ఏ సంశయములేదని అతడు తలచెను. కాని గొప్ప సిద్ధాంతవేత్తలగు వరాహమిహిరుడు, లల్లాచార్యుడు సప్తర్షి చలనమును గురించి వ్రాసినందున అందేదియో గూఢార్థము ఉండవలయును అనియు, అదృశ్య వస్తువుల భ్రమణమును గురించి అంత విస్తారముగా గణిత సూత్రము లేర్పరచి ఉండరనియు అతడు అభిప్రాయపడెను.

అందుచే చాలమంది గ్రంథకర్తలు తమకు అర్థముకాని విషయమును గురించి చర్చించినట్లు తోచుచున్నది.

డాక్టర్ త్రివేదికి గూడ సంశయ మేర్పడినది. అది న్యాయమే; కాని విషు చలన రహస్యము తెలిసిన వారికి ఇదేమియు దురవగాహము కాదు.

భావార్థ దీపికయను భాగవత వ్యాఖ్యలో ఇదియే క్రింది విధముగ వ్రాయబడినది.

> 'సప్తర్షిణామితి అయ మర్థః-ప్రాగగ్రశకటాకారం తారా సప్తకం సప్తర్షి మండలం తత్ర కించిదున్నతే తేషా మగ్ర స్థానీయో మరీచిః తతః పశ్చాదా సమ్రయుగ కంధరా కారో వసిష్ఠస్సభార్యః తతః పశ్చాదీష దుత్తర స్థానీయోంగిరాః తతః పశ్చాచ్చతురస్ర తారాచతుష్కే ఐశాన్యే అత్రిః తతో దక్షిణతః పులస్త్యః, పులస్త్యా త్పశ్చిమతాః పులహాః, తత ఉత్తరతః క్రతుః ఏవం స్థితే తేషాం మధ్యే యా పూర్వా ఉదయ సమయే ప్రథమ ముదితా దృశ్యేతే తా పులహ క్రతు సంజ్ఞే, తయోస్తు మధ్యేత యోస్తు పూర్వయోస్తు మధ్యే తత్సమందక్షిణతః సమ శాదేన స్థితి మశ్విన్యాదిషు యదన్య తమం నక్షత్రం దృశ్యేతే తేనేతి. తేన తద్దైవయుక్తాః నృణా మబ్ధశతం తిష్ఠంతి. తేన ద్విజాస్త్వదీయే కాలే మఘా ఆశ్రితా వర్తంతే'.

'ఈ నక్షత్రములలో మొదట ఉదయమగునవి పులహ క్రతువులు. వీనికి నేరుగా దక్షిణములో ఏ నక్షత్రముండునో, ఆ నక్షత్రములో సప్తర్షు లుండునట్లు చెప్పుదురు. పరీక్షితు కాలములో ఇవి మఘ యందుండినవి.

ఉజ్జయినీ వాసులకు తులా విషు దినమునందు సూర్యాస్తమయసమయములో ఖగోళ చిత్రము ఎట్లుండునో చిత్రము 415 చూపుచున్నది. ఉజ్జయినీ రేఖాంశ 24°.

చిత్రము 415

P ఉత్తర ధ్రువము; $nEsW$ క్షితిజము; REQ విషువృత్తము; EZW క్రాంతి వృత్తము.

ఉజ్జయిని కర్కటక రేఖపై నుండుటచే, క్రాంతివృత్తము Z మస్తకముగుండ వెళ్లును. సమమండల రేఖ యగును.

E తూర్పు బిందువు; W పశ్చిమ బిందువు; n ఉత్తర బిందువు; s దక్షిణ బిందువు, $ZPQs$ యామ్యోత్తర వృత్తము.

ఆ దినము సూర్యాస్తమయ కాలములో సూర్యుడు W వద్ద అస్తమించును. అచట ♎ బిందువు కూడ నుండును. ♈ బిందువు E వద్ద ఉదయించుచుండును. అప్పుడు పులహ క్రతువులు (α, β) యామ్యోత్తర వృత్తముపై ఉండునని తలచినచో గురువృత్తము $P\alpha\beta$ యామ్యోత్త వృత్తముతో ఏకీభవించి, విషువృత్త, క్రాంతి వృత్తములకు సమకోణీయముగా నుండును.

క్రాంతి వృత్తముయొక్క ఆయన బిందువు Z తో చేరియుండుటచే గురువృత్తము $P\alpha\beta$ క్రాంతి వృత్తమును ఆయన బిందువులో సంధించును.

మన పూర్వులు గురువృత్తము $P\alpha\beta$ క్రాంతి వృత్తమును సంధించు బిందువు ప్రాగ్గమనము కలదై ఒక్కొక్క నక్షత్రములో 100 సంవత్సరములుండునని కనుగొనిరి. అదే భావార్థ దీపికయొక్క అర్థము.

పరీక్షితుని కాలములో సప్తర్షులు మఘయందుండిరి: సప్తర్షులు ఒక్కొక్క నక్షత్రములో నూరు సంవత్సరములుండి రనుటకు అర్థమేమి?

పులహ క్రతువులు యామ్యోత్తర వృత్తమును ఏక కాలములో ప్రతరణము చేయవు. వాని మధ్య బిందువును తీసికొనినచో ఈ మధ్య బిందువునకును, మరీచికిని గల ధ్రువ కాంతరము 38° 44′ అగును. దీనియొక్క విక్షేపణము విషువృత్తముపై 36° 37′. ఈ చాపమానము వృత్తములో సుమారు పదవభాగము.

మన పూర్వులు ఈ రహస్యమును కనుగొని, కలియుగ రాజ వంశావళి కాలమును సప్తర్షి చారముతో తెల్పిరి.

మన దురదృష్టవశాత్తు ఈ రహస్యమును వివరించు గ్రంథములు కానరాక పోవుటచేతను, పూర్వులు తమ శిష్యులకు ఈ రహస్యమును వివరింపక పోవుటచేతను మన దేశ చరిత్రలో గందరగోళ మేర్పడెను.

విషు గతి మారుచుండును. విషు గతి $= 50''{\cdot}256 + 0''{\cdot}0222\,T$ (ఇందు T యనునది క్రీ. శ. 1900 కు తర్వాతి శతాబ్దము. క్రీ. శ. 1900 కు పూర్వము T ఋణ సంఖ్య, తర్వాత ధన సంఖ్య).

వరాహమిహిరుని కాలములో మన గణన ప్రకారము విషు గతి $= 50'' \cdot 256 - 0'' \cdot 0222 \times 20 = 49'' \cdot 81$.

అయన బిందువు క్రాంతి వృత్తమున ఒక భ్రమణము పూర్తి చేయుటకు 26000 సంవత్సరములు అగును. ఒక నక్షత్రదూరము పోవుటకు $26000 \div 27 = 963$ సంవత్సరములు. దీనిని రమారమి 1000 సంవత్సరములని మన పూర్వులు తీసికొనిరి. రాజ వంశావళి చరిత్రకు 1000 సంవత్సరముల మానము (రూపము = యూనిట్) చాల

పెద్దదగుటచే దానిలో పదవవంతు $\frac{1}{10}$ తీసికొనిరి. ప్రతి నక్షత్రమును పది సమభాగములు చేసిన మొత్తము 270 భాగములు వచ్చును. ఈ భాగములకు వరుసగా అశ్విన్యాది నక్షత్రముల పేర్లు క్రమముగా 10 సారులు త్రిప్పిరి. మన జ్యోతిష్కులు వాడిన మార్గములలో ఇది యొక నూతన మార్గము. పాశ్చాత్యుల కిది అర్థము కాదు.

జ్యోతిషములో ప్రతి రాశిని తొమ్మిది భాగములు చేసిరి. ఒక్కొక్క భాగమునకు నవాంశమని పేరు. 108 నవాంశముల పేర్లకు మేషాదిరాశుల పేర్లు తొమ్మిది సారులు త్రిప్పబడినవి. సప్తర్షి చారములో నక్షత్ర దశాంశములకు అశ్విన్యాది నక్షత్రముల పేర్లు ఇచ్చుట వలన, అశ్విని, భరణి, కృత్తికలో పదవ దశాంశముతో ఒక ఆవృత్తి పూర్తియగును. కృత్తికలో ఎనిమిదవ దశాంశము మరల అశ్వినితో ఆరంభించి, ఆరుద్ర నాలుగవ దశాంశముతో రెండవ ఆవృత్తి పూర్తియగును. ఆరుద్ర ఐదవ దశాంశముతో మరల మూడవ ఆవృత్తి పేర్లు ప్రారంభించును. ఇట్లు పది ఆవృత్తులు దశాంశములకు పేర్లు ఇవ్వబడినవి.

అయన బిందువు ఒక నక్షత్రములో 1000 సంవత్సరములు సంచరించును. ఒక నక్షత్ర దశాంశములో 100 సంవత్సరములు సంచరించును. ఈ విషయము ఋగ్వేదము 1-24-9 లో నున్నట్లు ప్రొఫెసర్ కృష్ణమూర్తిగారు చూపియున్నారు.

'శతంతే రాజన్ భిషజః సహస్రం ఉర్వీ గభీరా సుమతిః తే అస్తు
బాధస్వ దూరే నిరృతిం పరాచైః కృతంచిత్ ఏనః
ప్రముముగ్ధి అస్మత్

"అయన బిందువు సప్తర్షులలో ఇరువది యేడవ భాగము వెనుక దిశలో చలించుటకు నూరు సంవత్సరములును, క్రాంతి వృత్తములో ఇరువది యేడవభాగము చలించుటకు వేయి సంవత్సరములును అగును."

సప్తర్షి చారము వేదకాలము నాటిది. కల్పితగాథ కాదు. ఇప్పటి విషుగతి 50".24. విషు భ్రమణ కాలము 27000 సంవత్సరములుండుటకు విషు గతి 48" ఉండవలయును. 10000 సంవత్సరములకు పూర్వము విషు గతికి ఈ విలువ యుండవచ్చును. ఇందుచే మన జ్యోతిషశాస్త్రము యొక్క ప్రాచీనత తెలియు చున్నది.

కలియుగ రాజ వంశకాల నిర్ణయము: కలియుగారంభము క్రీ. పూ. 18-2-3102 అని కొందరు, మరి కొందరు క్రీ. పూ. 20-2-3102 అనియు తలచుచున్నారు. అప్పుడు యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యమేలు చుండెను. అతని కాలములో సప్తర్షులు మఘయందుండిరి.

శ్లో॥ యదా యుధిష్ఠిరో రాజా శక్రప్రస్థే ప్రతిష్ఠితః
తదా సప్తర్షయః ప్రాపు ర్మఘాః పితృహితే రతాః
పంచసప్తతి వర్షాణి ప్రాక్ కలేః సప్తతే ద్విజాః
మఘాస్వాసన్ మహారాజే శాసత్యుర్వీం యుధిష్ఠిరే
పంచ వింశతి వర్షేషుగతే ష్వథకలౌ యుగే
సమాశ్రయ న్త్యాశ్లేషాం మునయ స్తే శతం సమాః
తదైవ ధర్మపుత్రోపి మహాప్రస్థాన మాస్థితః
భువం పరిభ్రమన్నంతే స్వర్గమారోక్ష్యతి ధ్రువం
తదైవ లౌకికాబ్దేపి సప్తవింశ శతాత్మకః
ధర్మపుత్ర జ్ఞాపకార్థం లోకే తావత్ ప్రవర్తితః

-కలియుగ రాజవృత్తాంతము భాగము 8. అధ్యాయము 1.

'కలియుగము 75 సంవత్సరములకు పూర్వము సప్తర్షులు మఘయందు ప్రవేశించిరి. యుధిష్ఠిరుడు రాజ్యమేలునపుడు వారు మఘయందు 100 సంవత్సరములుండి, కలి 25 లో ఆశ్లేషను ప్రవేశించిరి. అపుడు యుధిష్ఠిరుడు మహాప్రస్థానము ప్రారంభించెను. అతని జ్ఞాపకార్థము 2700 సంవత్సరములు మానము గల లౌకికాబ్దము స్థాపింపబడెను.

అయన బిందువు మఘయందుండునపుడు సప్తర్షులు మఘయందుండవచ్చును. మఘ ప్రథమ దశాంశ మఘ యగు

వంశము	రాజుల సంఖ్య	కాలము క్రీ. పూ. - క్రీ. పూ.	ఆకరములు	సంవత్సరములు
1. బార్హద్రథులు	22	3139 - 2133	మత్స్యపురాణము 169 - 30	1006
2. ప్రద్యోతనులు	5	2133 - 1995	విష్ణు. పూరా. XII - 2	138
3. శిశునాగులు	10	1995 - 1635	వాయుపురాణము	360
4. నందులు	9	1635 - 1535	భాగవతము	100
5. మౌర్యులు	12	1535 - 1219	కలి. రాజ. వృత్తా. భాగ. 2. అధ్యా. 2	316
6. సుంగరాజులు	10	1219 - 919	కలి. రాజ. వృత్తా.	300
7. కాణ్వులు	4	919 - 834	కలి. రాజ. వృత్తా. భాగ 2. అధ్యా. 2	85
8. ఆంధ్రులు	32	834 - 328	కలి. రాజ. వృత్తా.	506
9. మహాగుప్తులు	8	328 - 83	కలి. రాజ. వృత్తా.	245

చున్నది. ద్వితీయ దశాంశ పుబ్బ, ఇట్లు లెక్క పెట్ట వలయును. సప్తర్షులు యుధిష్ఠిరుని కాలములో పుబ్బ దశాంశ నుండి వెనుకకు జరిగి మఘ దశాంశయందు ప్రవేశించి అచ్చట 100 సంవత్సరములుండి కలి 25 లో ఆశ్లేష దశాంశను ప్రవేశించిరి. అపుడు విషుబిందువు రోహిణిలో నుండెను. ఆ కాలమునందు ఈజిప్టు దేశము మహోన్నత దశ యందుండినట్లు చరిత్రకారులు చెప్పుచున్నారు.

రోహిణి మఘ, జ్యేష్ఠ, ధనిష్ఠలను పాశ్చాత్యులు నక్షత్ర రాజములందురు. ఆ కాలములో విషుబిందువులును, అయన బిందువులును ఈ నక్షత్రముల యందుండెను.

పురాణ రాజవంశావళి కాలము పు. 601 లో ఈయ బడినది :

27 వ ఆంధ్రరాజు పులోమ తేదా వసిష్ఠపుత్ర శ్రీ శాత కర్ణి 409 నుండి 377 వరకు రాజ్యమేలెను. కలియుగ రాజుల కాల ప్రశంస పురాణములలో ఈయబడినది.

శ్లో॥ సప్తవింశాంధ్ర నృపతేః కాలే భావ్యస్యతేపునః
అశ్లేషాం సంప్రయాస్యంతి యుగస్యాంతే సురర్షయః
సప్తర్షయో మఘా యుక్తాః కాలే యాధిష్ఠిరే శకం
శ్రవణే తే భవిష్యంతి కాలే నందస్య భూపతేః
చతుర్వింశేథ నక్షత్రే భవిష్యంతి శతం సమాః
ఆంధ్ర రాజ్యారంభ కాలా దారభ్యేతే సురర్షయః
మహాపద్మాభిషేకాత్తు యావజ్జన్మ పరీక్షితః
ఏక మేవ సహస్రంతు జ్ఞేయం పంచ శతోత్తరం,
ఆంధ్ర రాజ్యోపక్రమాత్తు యావన్నందాభిషేచనం
అంతరం తచ్చతాన్యష్టా ప్రమాణజ్ఞైః సమాః స్మృతాః
యదా పునర్వసుర్యాస్యం త్యేతే సప్తర్షయః పునః
తదా శ్రీ గుప్తవంశ్యానాం రాష్ట్రం దైన్యం గమిష్యతి
పూర్వాభాద్రాం యదా తేతు ప్రవేక్ష్యంతి పునర్ద్విజాః
గుప్తేభ్యో మాగధం రాజ్యాం తదాపాలన్ గమిష్యతి.

కలియుగ రాజవృత్తాంతము భాగ 2. అధ్యా 3.

శ్లో॥ యావత్పరీక్షతో జన్మ యావన్నందాభిషేచనం
ఏతద్వర్ష సహస్రంతు జ్ఞేయం పంచశతోత్తరం

విష్ణుపురాణము. 4-23

శ్లో॥ ఆరభ్యభవతో జన్మ యావన్నందాభిషేచనం
ఏతద్వర్ష సహస్రంతు జ్ఞేయం పంచ శతోత్తరం,

భాగవతము.

శ్లో॥ భవిష్యతే ప్రసంఖ్యాతాఃపురాణజ్ఞైః శ్రుతర్షిభిః
సప్తర్షయస్తథా ప్రాంశుః ప్రదీప్తే నాగ్నినా సమాః
సప్తవింశతి భావ్యానా మాంధ్రాణాంతు యథాపునః

మత్స్యపురా. 271-40-41.

శ్లో॥ సప్తర్షయో మఘా యుక్తాః కాలే పారీక్షితే శతం
ఆంధ్రాంశే స చతుర్వింశే భవిష్యంతి మతేమమ,

వాయు. పు. 99-423.

పురాణము లన్నియు కాలనిర్ణయములో ఏకీభవించి యున్నవి. శ్లోకములలోని యభిప్రాయములు క్రింద ఈయ బడినవి.

(ఏ) 'ఇరువదేడవ ఆంధ్ర రాజు కాలములో సప్తర్షి యుగము ఒకటి పూర్తియగును'.

యుగారంభము క్రీ. పూ. 3077 ; ఒక యుగమానము 2700 సంవత్సరములు పూర్తియగునప్పుడు క్రీ. పూ. 377. అప్పుడు ఆంధ్ర రాజులలో 27 వ చక్రవర్తి వసిష్ఠపుత్ర శాతకర్ణి రాజ్యము చేయుచుండెను.

(బి) 'నందుని కాలములో శ్రవణము నందుందురు' - వెనుక వైపు ఎంచిన శ్రవణము మఘ నుండి 16 వ నక్షత్రము. శ్రవణము చేరుటకు 1500 సంవత్సరము లగును.

పరీక్షిత్తు జననము క్రీ. పూ. 3139. మహా పద్మనందుని పట్టాభిషేకము క్రీ. పూ. 1635. అంతరము 1504 సంవత్స రములు.

(సి) 'ఆంధ్ర రాజ్యారంభ మగునప్పుడు సప్తర్షులు 24 వ నక్షత్రమునందుండుదురు' - 24 వ నక్షత్రమును చేరుటకు 2300 సంవత్సరములగును. ఆంధ్రులు క్రీ. పూ. 834 లో రాజ్యమునకు వచ్చిరి. 3139 — 834 = 2305.

(డి) 'మరల పునర్వసును చేరునప్పుడు గుప్త రాజ్యము క్షీణదశను పొందును' - సప్తర్షులు పునర్వసును రెండవ భ్రమణములో చేరునప్పుడు 3000 సంవత్సరములగును. గుప్త రాజ్యము క్రీ. పూ. 83 లో అంతమొందెను. 3139 — 83 = 3056. క్రీ. పూ. 3139 లో పరీక్షిత్తు జన్మించెను. క్రీ. పూ. 3077 నుండి లెక్కించిన సరిపోవుచున్నది.

(ఇ) 'సప్తర్షులు పూర్వాభాద్రను మరల చేరునపుడు మగధరాజ్యము పాల వంశమును చేరును'.

మఘ నుండి పూర్వాభాద్రకు రెండవతూరి వచ్చుటకు 3900 సంవత్సరములగును. 3900 — 3138 = 762.

పాలవంశజుడగు గోపాల 1 క్రీ. శ. 765 — 769 వరకు రాజ్యము చేసెను. అప్పటికి మగధ సామ్రాజ్య భాస్కరు డస్తమించెను.

ఇంతకంటె నిష్కర్షయగు వంశావళి ఎవరీయగలరు ? భారతదేశ చరిత్ర నిర్మాణమునకీ విషయములు చాలవా? ఇట్టి అద్భుత విషయములను ఇదివరలో వాడకుండుట మన దురదృష్టమని తోచుచున్నది. ఆచార్య

సమకోణీయ విక్షేపము : ఇది శాంకవ విక్షేపము యొక్క విశేషవిధానము ; విక్షేపశీర్షము V అనంతము నకు పోవును (చూ. విక్షేపజ్యామితి పు 500).

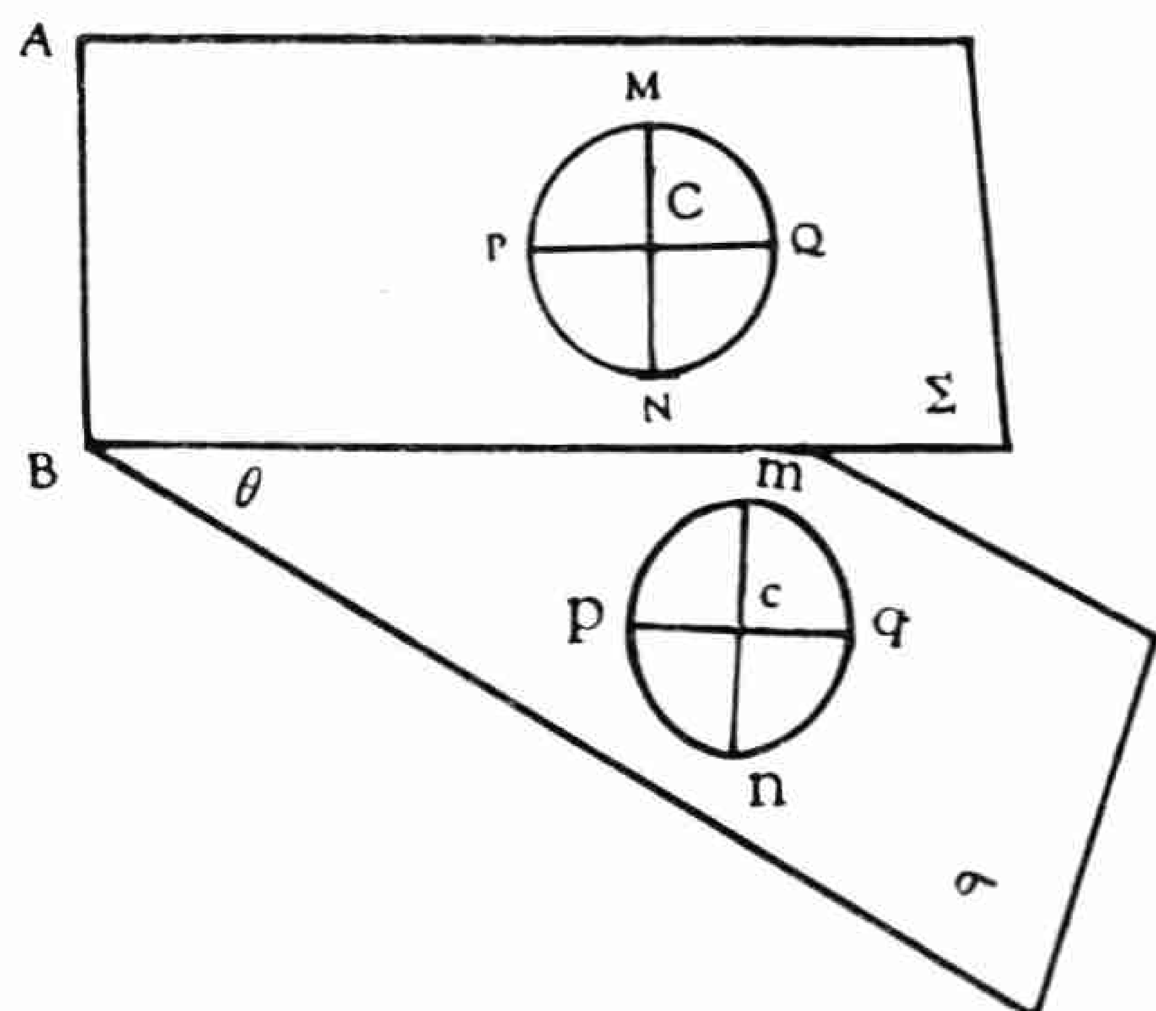
σ విక్షేప తలము ; AB విక్షేపాక్షము ; σ, Σ సమతల ములు సంధించు ఋజురేఖ AB.

Σ సమతలములో P, Q బిందువులు σ సమతలమునకు విక్షేపింపబడునపుడు Pp, Qq లంబములుగా σ తలమునకు గీయబడును.

బిందువులు p, q క్రమముగా బిందువులు P, Q ల యొక్క సమకోణీయ విక్షేపములు. ఋజురేఖలు ఋజురేఖలుగా విక్షేపింపబడును.

ఉపపత్తి : సమతలము Σ, σ ల మధ్యకోణము θ ; PQ ఋజురేఖ విక్షేపాక్షము AB కి లంబమైనపుడు, $pq = PQ \cos \theta$. ఋజురేఖ MN విక్షేపాక్షమునకు సామ్యముగా నుండిన, దాని విక్షేపము mn, MN కు సమానము.

Σ తలములో ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసము PQ విక్షేపాక్షము AB కి లంబము ; మరియొక వ్యాసము MN



చిత్రము 416

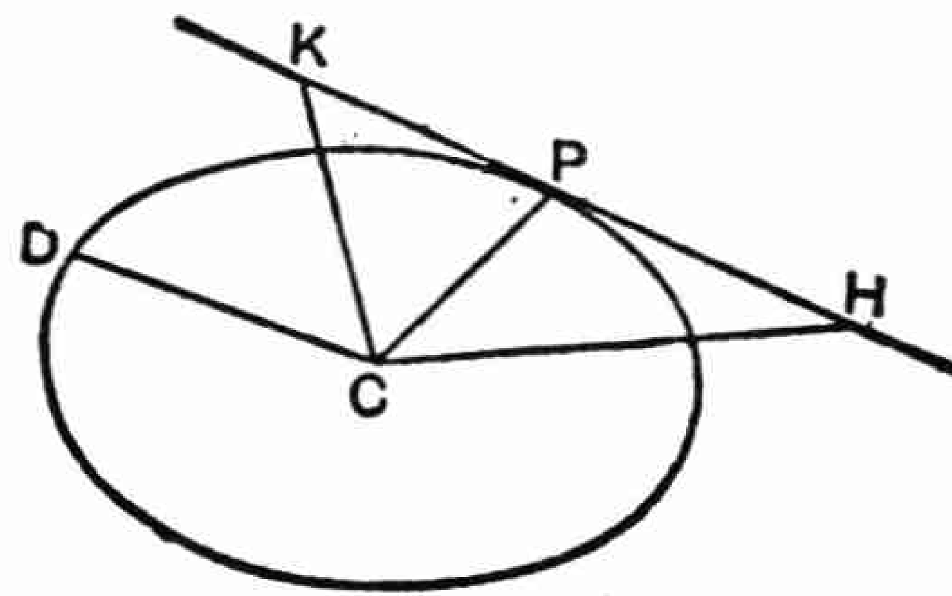
దానికి సామ్యము. ఇపుడు $pq = PQ \cos \theta$; $mn = MN$. వృత్తము $MPNQ$, విలోపము $mpnq$ గా విక్షేపింపబడును. దాని దీర్ఘాక్షము $= mn$; హ్రస్వాక్షము $= pq$. ఒకవృత్తము సమకోణీయ విక్షేపములో విలోపముగా మారును.

ఒక విలోపము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ను సమకోణీయ విక్షేపములో వృత్తముగా మార్చవచ్చును ; అపుడు దీర్ఘాక్షము a విక్షేపాక్షమునకు లంబముగా నుండవలయును.

హ్రస్వాక్షము $b = a \cos \theta$; ఇచట θ విలోపతలమునకును విక్షేపతలమునకు మధ్యకోణము.

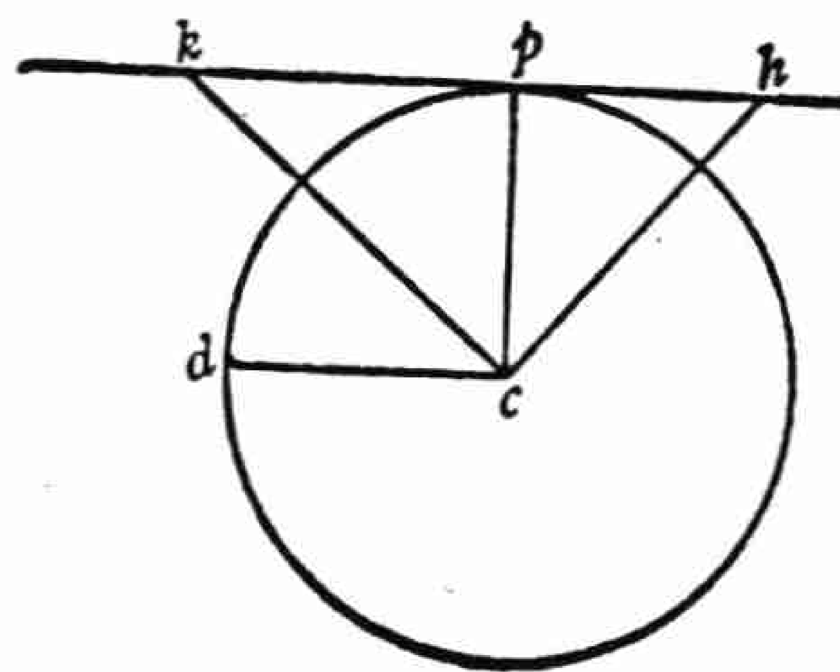
శాంకవ విక్షేపములో నుండునట్లు ధ్రువము, ధ్రువ రేఖల లక్షణములు, సంయుగ్మ రేఖల లక్షణములు సమకోణీయ విక్షేపములో మారవు. విలోపము యొక్క అనేక ధర్మములను సమకోణీయ విక్షేపము మూలముగా వృత్తధర్మముల నుండి సాధింపవచ్చును.

ఉదా : ఒక విలోపమునకు CH, CK సంయుగ్మ వ్యాసములు ; దానికి P వద్ద ఒక స్పర్శరేఖ CH, CK లను H, K బిందువులలో సంధించును. CP కి సంయుగ్మ వ్యాసము CD అయిన, $PH. PK = CD^2$ అని చూపుము.



చిత్రము 417

సమకోణీయ విక్షేపములో విలోపము వృత్తముగా మారును. ప్రథమాక్షరములన్నిటిని విక్షేపములో హ్రస్వాక్షరములుగా ఇచ్చట వ్రాయుదుము. వృత్తములో ch, ck సంయుగ్మ వ్యాసములు. కాబట్టి $kch = 90°$; p బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ ch, ck లను h, k లలో ఖండించును.



చిత్రము 418

ఇప్పుడు kch ఒక సమకోణము ; cp వ్యాసార్ధము, స్పర్శరేఖ hk కు లంబము. ఇందుచే $kp \cdot ph = cp^2 = cd^2$. విలోపము యొక్క సంయుగ్మ వ్యాసములు CP, CD లు వృత్తము యొక్క లంబ వ్యాసార్ధములు cp, cd లుగా విక్షేపములో మారును. కాబట్టి $PH \cdot PK = CD^2$. ఆచార్య

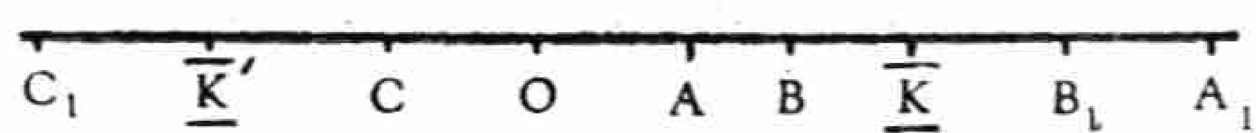
సమవాయత : నిర్వచనము : ఒక బిందువు O గుండ వెళ్లు ఒక ఋజురేఖపై బిందువుల జతలు A, A_1 ; B, B_1 ; C, C_1 ; ... ...

$OA . OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1$ ... ... $= k$

అను సంబంధములో నుండిన, బిందువుల జతలు A, A_1 ; B, B_1 ; C, C_1 ; ... సమవాయత (ఇన్‌వల్యూషన్) లో నుండును.

ప్రతి జతలోని బిందువులు పరస్పర సంయుగ్మము లగును. ప్రతి జత బిందువులు O బిందువునకు ఒకేవైపున నుండినచో k ధనాత్మకము.

O బిందువునకు ఇరువైపుల $OK^2 = OK'^2$ సంబంధములో నుండునట్లు $\overline{K}$, $\overline{K}'$ బిందువులుండిన, వానికి బిందు



చిత్రము 419

ద్వయములు (డబుల్ పాయింట్స్) అని పేరు. O బిందువునకు సమవాయతా కేంద్రమని పేరు (చూ. చిత్రము 419).

k ఋణాత్మక మైన, సంయుగ్మబిందువులు రెండును సమవాయతా కేంద్రమునకు ఎదుటివైపున నుండును. అపుడు బిందుద్వయములు కల్పితములు. $\overline{K}$, $\overline{K'}$ వాస్తవికము లయినపుడు $OK^2 = OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = \dots \dots$ అయినందున $(AA_1, \overline{K}\,\overline{K'}) = -1$. ఇట్లే ఇతర జతలకు కూడ. $AA_1, BB_1, CC_1, \dots \dots$ వ్యాసములుగా గల వృత్తము లన్నియు ఒక ఏకాక్షవృత్తబృంద మగును. $\overline{K}, \overline{K'}$ బిందువులు ఏకాక్ష వృత్తబృందముయొక్క అవధి బిందువులు — వ్యాసార్ధము లేనట్టి వృత్తములు.

$\overline{K}\,\overline{K'}$ వ్యాసముగాగల వృత్తము ననుసరించి, A, A_1; B, B_1 బిందువులు పరస్పరము విలోమ బిందువులు. $[OA \cdot OA_1 = OK^2 \dots \dots]$

ఒక సమవాయతను నిశ్చయించుటకు, రెండు జతలు; లేదా ఒక జత, ఒక బిందుద్వయము; లేదా రెండు బిందుద్వయములు కాని ఉండిన చాలును.

సమవాయతా శలాక : $VA, VA_1, VB, VB_1, \dots \dots$ ఒక శలాక కిరణములైనపుడు, వాని ఛేదక బిందువులు $A, A_1, B . B_1, C, C_1, \dots$ సమవాయతలో నుండిన, ఆ శలాక సమవాయతలో ఉన్నట్లు చెప్పుదురు. వీని రేఖా ద్వయములపై ఛేదకములో సమవాయతా బిందుద్వయము లుండును. VA, VA_1 సంయుగ్మ రేఖలు.

వృత్తముయొక్క సమవాయతా లక్షణములు : ఒక వృత్తము యొక్క సంయుగ్మ బిందువులు ఒక ఋజురేఖపై ఉండిన, అవి సమవాయతలో నుండును. ఆ ఋజురేఖ, వృత్తమును సంధించు బిందువులును ఆ సమవాయత యొక్క బిందుద్వయములు.

ఒక వృత్తము (C) కి A, B బిందువులు సంయుగ్మములు. బిందువు O ఋజురేఖ AB యొక్క ధ్రువము.

చిత్రము 420

కాబట్టి $\triangle OAB$ స్వసంయుగ్మము (సెల్ఫ్ కాంజుగేట్). దాని లంబకేంద్రము C వద్ద ఉండును (చూ. చిత్రము 420).

చిత్రము 421 లో CO ఋజురేఖ AB ని K లో ఖండింపనిమ్ము. $\triangle KAC$, $\triangle KOB$ సమరూపములు. కాబట్టి

చిత్రము 421

$KB \cdot KA = KC \cdot KO$ (ఒక స్థిరరాశి) $= s^2$. వృత్తాపేక్షయా, AB పై నుండు సంయుగ్మ బిందువులన్నియును ఒక సమవాయతలోనుండును.

AB యొక్క మధ్య బిందువు K అయినందున, $KP \cdot KQ = KA^2 = KB^2$. బిందువులు A, B లు సమవాయతయొక్క బిందు ద్వయములు.

ద్వైత తత్త్వము : దీనిచే జ్యామితియందు అనేక సిద్ధాంతములను సులభముగా సాధించవచ్చును. దీనిలో బిందువునకును, ఋజురేఖకును పరివర్తనము కలదు.

(ఏ) ఒక ఋజురేఖను ఒక బిందువుయొక్క పథముగా చూడవచ్చును. ఒక బిందువును అనేక ఋజురేఖల వేష్టనముగా చూడవచ్చును.

(బి) ఒక బిందువును P చే గుర్తించిన దానికి ద్వైతము అగు ఋజురేఖను హ్రస్వాక్షరముచే గుర్తింపవచ్చును.

(సి) మూడు కోణములు A, B, C ల నిచ్చిన త్రికోణము ABC ఏర్పడును. మూడు భుజములు (a, b, c) ల నిచ్చిన దానికి త్రిభుజము అని పేరు. ఇట్లే చతుర్భుజము చతుష్కోణముల యొక్క నిర్వచనము.

(డి) ఒక వృత్తమును ఒక బిందువుయొక్క పథమని గాని, లేదా స్పర్శరేఖయొక్క వేష్టనము (ఎన్వలప్) అని కాని తీసికొనవచ్చును. ఇందుండి వృత్తము సంబంధమైన సిద్ధాంతము లభించును.

సిద్ధాంతము : ఒక వృత్తము సంయుగ్మరేఖల జతలు ఒక బిందువువద్ద అనుషక్తములైన, ఒక సమవాయతా శలాక (ఇన్వల్యూషన్ పెన్సిల్) అగును. అనుషక్త

బిందువునుండి వృత్తమునకు ఏర్పడు స్పర్శరేఖలు ఈ సమవాయతా శలాక యొక్క రేఖాద్వయములు.

సమవాయతలో నుండు సమకోణీయ శలాక: ఇది సమవాయతా శలాక యొక్క ఒక విశేషము. ఇందు సంయుగ్మ జత మధ్య సమకోణము ఉండును. ఒక బిందువు గుండ వెళ్లు ప్రతి రెండు ఋజురేఖల మధ్య సమకోణముండిన, ఆ బిందువు కేంద్రముగా గల వృత్తమునకు ఈ ఋజురేఖల జతలు సంయుగ్మ వ్యాసము లగును. కాబట్టి ఈ శలాక సమవాయతలో నుండును. దీనికి సమకోణీయ సమవాయత అని పేరు.

ఒక సమవాయతాశలాకలో ఒక జత ఋజురేఖల మధ్య ఒక సమకోణముండును; రెండు జతల మధ్య సమకోణములుండిన, అది సమకోణీయ సమవాయతయగును.

ఒక సమవాయతా శలాక విశ్లేషీయము. ఒక సమవాయతా శలాకను సమకోణీయ శలాకగా విశ్లేషింపవచ్చును. ఆచార్య

సమానాంతర చతుర్భుజము (పారలెలోగ్రామ్): ఎదురెదురు భుజములు సమానాంతరముగ ఉండు చతుర్భుజమును సమానాంతర చతుర్భుజము అందురు.

దీనిలో
1. ఎదురెదురు భుజములు సమానములు.
2. ఎదురెదురు కోణములు సమానములు.
3. సన్నిహిత కోణములు సంపూరకములు.
4. ఏ వికర్ణముచేత అయినను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజములుగ అది విభజింపబడును.
5. వికర్ణములు సమ ద్విఖండనము చేసికొనును.

దీని వైశాల్యము ఏదో ఒక భుజము పొడవును, దాని ఎదుటి భుజమునుండి దానికి గల లంబదూరముల గుణకార లబ్ధము అగును.

దీర్ఘచతురస్రము ఒక విశిష్టమైన సమానాంతర చతుర్భుజము. విశేషమేమనగా ఒక కోణము లంబకోణమగును. కనుక దీనియందు అన్ని కోణములు లంబకోణములగును. భుజముల నిడుపులు l, b అయినచో దీని వైశాల్యము $l \times b$, వికర్ణము $\sqrt{(l^2+b^2)}$. భుజములు l, b సమానమయిన యెడల ఇది చతురస్రమగును (చూ. చతుర్భుజము). పా. ల. నా.

సమీకరణముల అంకాత్మక సాధన: $f(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots \dots + a_n = 0$ అను సమీకరణములో $a_0, a_1, \dots a_n$ సంఖ్యారూపములో ఇచ్చినవి అనుకొనెదము. మరియు గుణకములు $a_0, a_1, \dots \dots \dots a_n$ అకరణీయ సంఖ్యలనుకొందము. అప్పుడు వాని హార కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజముచే గుణించి వానిని పూర్ణ సంఖ్యలుగా చేయవచ్చును. కనుక ఇకమీద $n, a_0, a_1, \dots a_n$ అన్నియు పూర్ణాంకములనుకొనెదము.

బీజ సమీకరణముల తరగతి (డిగ్రీ) ఎంత అయినను, మనకు తగినంతటి స్థానములకు ఆసన్నమూలములను సాధించు విధములను ఇచ్చట వివరించెదము.

ఋణ మూలములు: $F(x) = 0$ యొక్క ఋణ మూలములు $F(-x)=0$ యొక్క ధన మూలములు. కాబట్టి $F(-x)=0$ యొక్క ధన మూలములను కనుగొనిన, $F(x)=0$ యొక్క ఋణమూలములు లభించును.

బహు మూలములు: $F(x) = 0$ యొక్క ఒక మూలము α, r సారులుండిన $F'(x)$ కు $F(x)$ కును గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము $(x-\alpha)^{r-1}$ అగును. దీనిచే $F(x)=0$ ను భాగించిన α ఏకమూలమైన సమీకరణము లభించును.

స్టర్మ్ సిద్ధాంతము: ఇందు మొట్టమొదట ఏక మూలములను వేరు పరిచి, వాని స్థానములను నిర్ణయింపవలయును. ఈ విధానము 1829 లో ప్రచురింపబడెను. $f(x)$ కును దాని ప్రథమ వ్యుత్పన్నము $f_1(x)$ కును గల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము కనుగొనుటలో కడపటి వరకు ప్రతి శేషముయొక్క సంజ్ఞను మార్చుచుండవలయును. తర్వాత దానిని భాజకముగా ఉపయోగింపవలయును. ఇట్లు మార్చిన శేషములను క్రమముగా $f_2(x), f_3(x), \dots f_n(x)$ భాగహారమును సులభముచేయుటకు ప్రతి శేషమును గుణించుటలోను, భాగించుటలోను ధన పూర్ణాంకములనే వాడవలయును.

బహు మూలఫలము కానిచో, తుది శేషము $f_n(x)$ ఒక సంఖ్యగా నుండును.

$f(x), f_1(x), f_2(x), \dots \dots f_n(x)$ లను స్టర్మ్ ఫలము లందుము.

సిద్ధాంతము: a, b సంఖ్యలు వాస్తవికములు. $a < b$. స్టర్మ్ ఫలములలో a ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు వరుసల సంజ్ఞలలోని మార్పులకును, b ని ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు మార్పులకును గల భేదములకు a, b మధ్యనుండు $f(x)=0$ యొక్క మూలములను గుర్తించును.

$f(x)=0$ భాగ ఫలములు $\phi(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots \phi_n(x)$ అనుకొనిన, $\phi_n(x)$ ఒక సంఖ్య యగును. a, b లను ఈ ఫలములందు ప్రతిక్షేపించినచో, వచ్చు రాశులయొక్క సంజ్ఞలలోని భేదము $f(x)=0$ యొక్క మూలముల సంఖ్యను గుర్తించును.

$f_n(x)=0$ యొక్క మూలములు సంకీర్ణములైన తర్వాత స్టర్మ్ ఫలములయొక్క సంజ్ఞలను గమనింపనక్కరలేదు.

ఉదా : క్రింది సమీకరణముయొక్క వాస్తవిక మూలముల సంఖ్యను, వాని స్థితులను కనుగొనుము.

$$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

తర్వాత గరిష్ఠ సామాన్య విధానము

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \;=\; f_1(x) \\
 & \qquad 7 \\
 \hline
 & 28x^3 - 21x^2 - 56x + 28 \;=\; 7 f_1(x) \\
x & 28x^3 - 32x^2 - 16x \;=\; 4x f_2(x) \\
 \hline
 & 11x^2 - 40x + 28 \\
 & \qquad 7 \\
 \hline
 & 77x^2 - 280x + 196 \\
11 & 77x^2 - 88x - 44 \\
 \hline
 & 48 \,|\, -192x + 240 \\
 & -4x + 5 \\
\end{array}$$

$$f_3(x) = 4x - 5.$$

$$\begin{array}{l|r}
x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \;=\; f(x) & \\
\qquad 4 & \\
\hline
4x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 16x + 4 & \\
4x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 4x & x \\
\hline
- x^3 - 8x^2 + 12x + 4 & \\
\qquad 4 & \\
\hline
-4x^3 - 32x^2 + 48x + 16 & \\
-4x^3 + 3x^2 + 8x - 4 & -1 \\
\hline
5 \,|\, -35x^2 + 40x + 20 & \\
-7x^2 + 8x + 4 & \\
\hline
7x^2 - 8x - 4 \;=\; f_2(x) & \\
\qquad 4 & \\
\hline
28x^2 - 32x - 16 & \\
28x^2 - 35x & 7x \\
\hline
3x - 16 & \\
\qquad 4 & \\
\hline
12x - 64 & \\
12x - 15 & 3 \\
\hline
-49 \;=\; f_4(x) & \\
\end{array}$$

స్టర్మ్ ఫలములు క్రింద నీయబడినవి :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$$

$$f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$f_2(x) = 7x^2 - 8x - 4$$

$$f_3(x) = 4x - 5$$

$$f_4(x) = 49$$

పలు విలువలకు స్టర్మ్ ఫలముల సంజ్ఞలలోని మార్పులు క్రింద నివ్వబడినవి :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
$f(x)$	+	+	−	+	+	+	+
$f_1(x)$	−	−	+	+	−	+	+
$f_2(x)$	+	+	+	−	−	+	+
$f_3(x)$	−	−	−	−	−	+	+
$f_4(x)$	+	+	+	+	+	+	+

సమీకరణము $f(x) = 0$ యొక్క మూలములలో $-2, -1$ మధ్య ఒకటి $-1, 0$ మధ్య ఒకటి; $1, 2$ మధ్య రెండును కలవు.

హార్నర్ విధానము (1819) : దీనిచే ఒక మూలము యొక్క దశాంశ భాగములో అంకెలను క్రమముగా కావలసినన్ని స్థానములకు కనుగొని సవరింపవచ్చును. $F(x)$ యొక్క ధనమూలము కనుగొనుటకు ఇది ఉపయోగించును. ఋణమూలము కనుగొనుటకు $F(-x) = 0$ తీసికొనవలయును. మొదట $F(x) = 0$ యొక్క మూలము ఏ రెండు సంఖ్యల నడుమ ఉన్నదో నిర్ణయింపవలయును. మూలము k, $k+1$ లకు మధ్య నుండనిమ్ము. $F(x) = 0$ యొక్క మూలమును k చే తగ్గింపవలయును. మిగిలిన మూలభాగము 1 కంటే తక్కువగా నుండును. మూలమును 10 చే గుణకారముచేసి, దాని పూర్ణాంక భాగమును నిర్ణయించి మరల దానిచే తగ్గింపవలయును. ఇట్లు అంకక్రమమున మూలము యొక్క దశాంశ భాగము నిర్ణయింపబడును. కార్యవిధానము క్రింద నీయబడినది.

ఉదా : $x^3 - 2x - 5 = 0$ యొక్క ధనమూలమును 15 దశాంశముల వరకు కనుగొనుము. $F(2) = -1$, $F(3) = +16$. కనుక ఒక మూలము 2, 3 మధ్యనుండును. మూలమును 2 చే తగ్గించిన $x^3 + 6x^2 + 10x = 1$ లభించును. ఈ మూలమును 10 చే గుణకారము చేసిన, $x^3 + 60x^2 + 1000x - 1000 = 0$ వచ్చును. మూలము ఇప్పుడును 0, 1 మధ్య ఉన్నది; మరల 10 చే గుణకారము చేయుము. అప్పుడు

$$x^3 + 600x^2 + 100{,}000x - 1{,}000{,}000 = 0.$$

దీనియొక్క మూలము 9, 10 కి మధ్యలో ఉన్నది. 9 చే

తగ్గించిన $x^3 + 627x^2 + 111043x - 50671 = 0$ లభించును. అంత్యోపాంత్య గుణకముల నుండి, మూలము 4, 5 ల మధ్య నుండునని తెలియుచున్నది. 4 చే తగ్గించిన లభించు ఫలము

$$x^3 + 62835x^2 + 1116079075x - 574591375 = 0$$

మూలమును 10 చే గుణకారము చేసిన లభించు సమీకరణము,

$$x^3 + 628350x^2 + 111607907500x - 574591375000 = 0.$$

గుణకములు పెద్ద సంఖ్యలగుచున్నవి. మనకు సవరించిన మూలము కావలయును కాబట్టి అన్ని గుణకములను 1000 చే భాగించి పూర్ణాంకముల నిలుపుకొనిన లభించు సమీకరణము.

$$628x^2 + 111607907x - 574591375 = 0$$

అనగా, 10 చే గుణించుటకు బదులు గుణకముల నుండి ఉపాంత్యములో నారంభించి వరుసగా 1, 2, 3 స్థానములు ఆరంభమున విసర్జింపవచ్చును. మరల యథాప్రకారము అంకసాధన చేయవచ్చును. ఇట్లు చేసిన లభించు మూలము 2·094551481542326. ఇప్పుడు 574591375 ఉపాంత్య గుణకము 111607907 చే భాగించిన మిగత స్థానములు 5148 లభించును గదా! ఎక్కువ శుద్ధత కావలయుననిన, హార్నర్ విధానమును ఎక్కువ స్థానములకు వాడవలయును. జె. వి. భా.

సాంఖ్యకశాస్త్రము (సామాన్య నిర్దేశము): స్టేట్ (అనగా దేశము, లేదా రాష్ట్రము) అను మూలపదము నుండి స్టాటిస్టిక్స్ (సాంఖ్యకశాస్త్రము) అను మాట వచ్చినది. రాష్ట్ర పరిపాలనమును గురించిన వివరములన్నియు సాంఖ్యకమను పేర పూర్వము తెలుపబడుచుండెడివి. ఈ మాట క్రమముగా వివరములను సేకరించు విధము, వాటి వర్ణనము, చిత్రపూర్వక ప్రదర్శనము, కోష్ట రచన, విశ్లేషణము — వీటిని తెలుపును.

అనేకములగు ప్రభుత్వ విభాగములు, సంస్థలు, పెద్దపెద్ద వ్యవస్థలు సమాచారమును సేకరించి, అందు అధిక భాగమును కోష్టక రూపమున పొందుపరతురు. భారత దేశమందు కేబినెట్ సెక్రటేరియట్‌కు చెందిన సెంట్రల్ స్టాటిస్టికల్ ఆర్గనైజేషన్ అనగా కేంద్ర సాంఘిక సంవిధానము దేశము యొక్క ఆర్థిక వివరములను, తదితర వివరములను సేకరించి సమన్వయించి పొందుపరచును. భారత దేశపు రిజర్వ్ బాంక్, కేంద్ర రాష్ట్రీయ మంత్రివర్గములు వారి వారికి కావలసిన సాంఖ్యక సంస్థలను స్థాపించుకున్నవి. ఇవి సంపాదించు వివరములు చాల వరకు జనాభా, సస్యముల క్రింద నున్న భూవిస్తీర్ణము, ఉత్పత్తి అయిన వస్తువుల విలువలు, వాడుకలో నున్న ధనము యొక్క మొత్తము, దేశీయాదాయము, జీవన నిర్వహణ మూల్య సూచనాంకములు, పశుసంపద, కార్మికుల వేతనములు, పంటలు, వాణిజ్య వివరములు మొదలైనవి. ఈ వివరములు ప్రభుత్వము కావించు నిర్ణయములకు ఆవశ్యకములు. సాంకేతిక విజ్ఞానమునకు సంబంధించిన కొన్ని విషయములు మామూలుగా రేఖా చిత్రముల ద్వారా, చిత్రములద్వారా ప్రదర్శింపబడుచుండును.

సంభవనీయత (లేదా సంభావ్యత) యొక్క గణనమే సాంఖ్యిక శాస్త్రమునకు మూలము: సాంఖ్యక శాస్త్రము ప్రయోగ గణితశాస్త్రము. దీనికి మూలము సంభవనీయత యొక్క గణితము. ప్రయోగము పదే పదే చేయగా వచ్చు ఫలితములు తడవతడవకు మారుచుండు సందర్భములలో ఫలితములు అనిశ్చితములైన కారణమున వాటి సంభవనీయతలను గురించి చెప్పవలసి వచ్చుచున్నది. ఇట్టి ప్రయోగములు కొన్ని ఈ క్రింద నీయబడినవి.

1. నాణెమును ఎగురవేయుట
2. పాచికను దొర్లించుట.
3. ఒక జన సమూహమునకు చెందిన ఏదో యొక వ్యక్తి పొడవును కొలుచుట.
4. తయారైన వస్తువులనుండి ఏదో ఒక దానిని తీసికొని దాని నిర్దుష్టతను నిర్ణయించుట.

ఇట్టి సందర్భములలో ప్రయోగము ప్రత్యక్షముగా నిర్వహించబడుదాక ఫలమేదో తెలియక అనిశ్చితమైయుండును. ఫలితములలో ఒకటి సిద్ధించుటయందు ఒకనికి కొంత విశ్వాసముండవచ్చును, మరియొకనికి ఈ విశ్వాసము భిన్నముగా నుండవచ్చును, ఫలసిద్ధి విషయమై అందరి విశ్వాసములు ఒకటిగా నుండవుగదా!

అట్టి నమ్మకము మీద శాస్త్రనిర్మాణము చేయుటవలన ఉపయోగముండదు. ఏలన ఈ నమ్మకములలో అందరికిని ఏకీభావము లేకుండును. ఎల్లరు చూచు ఫలితముల యొక్క నిశ్చితగుణముల మీదనే ప్రయోగఫలముల సంభవనీయతల యొక్క గణితశాస్త్రము నిర్మించబడవలెను అను విషయము స్పష్టమగుచున్నది. ప్రయోగ ఫలములలో అనిశ్చితత యుండుటకు కారణము ప్రయోగ విధానములో నిమిడియుండు యాదృచ్ఛికత. ఎంత శ్రద్ధ తీసికొన్నను కొంతవరకు మిగిలిపోవు యాదృచ్ఛికత యుండును.

సంభవనీయత యొక్క గణిత విధానమును మూడు విధముల చెప్పవచ్చును.

సంయోజక విధానము: ఈ పద్ధతిలో ప్రయోగ ఫలములు ఏవేవి రావచ్చునో వాటిని లెక్కపెట్టవలెను. అవి n అనుకొందము, మనము ఒక ఫలితము (లేదా సంఘటన)ను

గురించి విచారించు సందర్భమున అది సంభవించుటకు గల పక్షము లెన్నియో ఆ సంఖ్యను కూడ లెక్కపెట్టవలెను. ఇది r అనుకొాందము, అపుడు ప్రయోగము ఒకసారి చేసినచో మనము విచారించుచున్న ఫలితము వచ్చుటకు సంభవనీయత r/n అగును. ఈ నిర్వచనము తొలుత శాస్త్రము అభివృద్ధి చెందుటకు చాల ఉపయోగించినది.

కాని దానిలోపములు క్రమముగా అవగతములయినవి.

మనము ఒక నాణెమును ఎగురవేసితిమనుకొాందము. ఇప్పుడు రెండు విధముల ఫలితములలో నేదేని రావచ్చును. అవి బొమ్మ, బొరుసు; వీటిని తల, తోకలనెదము. మనము ఆలోచించుచున్న ఫలితము తల అయినచో అదివచ్చుటకు వీలైన పక్షము ఒకటి, ఎందుకనగా నాణెము మీద నొక వైపుననే కదా బొమ్మ యున్నది! కనుక నాణెమును ఒకసారి మీటినచో తల వచ్చుటకు సంభవనీయత $\frac{1}{2}$ $(r = 1, n = 2)$ ఈ నిర్వచనమును బట్టి చూచినచో నాణెము సౌష్ఠవముగా నిర్మించబడినదైనను కూటముగా (అనగా తలయో, తోకయో తరుచుగా సంభవించునట్లు) నిర్మించబడినదైనను భేదము లేక అన్ని నాణెములకు తలవచ్చు సంభవనీయత $\frac{1}{2}$ అగుచున్నది. కనుక ఈ నిర్వచనము నాణెములతో వాస్తవిక ప్రయోగములు చేయునపుడు వాడుటకు తృప్తికరముగాలేదు. ఈ నిర్వచనము యొక్క రెండవ లోపము: ఫలితములు అసంఖ్యాకము లైనపుడు, విడిఫలితముల సంభవనీయత అస్పష్టముగా నుండును. మూడవలోపము: సంభవనీయతలు అకరణీయ సంఖ్యలుగానే ఉండవలయును.

పౌనః పున్యాత్మక విధానము: (అనగా ప్రయోగములలో ఫలితము ఎంత తరుచు సంభవించునో దాని మీద ఆధారపడియుండు పద్ధతి): పై నిర్వచనములోనున్న దోషముల తొలగించుటకు ఆర్. ఫాన్. మిసీజ్ మన అనుభవమునకు అనుగుణముగ సంభవనీయతను పునస్సూత్రీకరించుటకు యత్నించెను. ఇందీతడు మరల మరల గావింపబడు ప్రయోగములను ఫలితముల యోజనలోనికి తీసికొనివచ్చి, నాణెము ఎగురవేయుటలో 'తల' చూపట్టుటకు సంభవనీయత $\frac{1}{2}$ కన్న ఎక్కువగాని, తక్కువగాని యగుటకు కూడ వీలుండునట్లు నిర్వచించెను. ప్రయోగ సంఖ్య ఎక్కువగుచున్న కొలది తిరిగి తిరిగి కావింపబడు పరీక్షలలో ఏదైనా ఒక సంఘటన ఎంత తరుచుగా వచ్చుచున్నదో తెలియజేయు నిష్పత్తి ఒక నియతమూల్యము వద్ద అంతకంతకు ఎక్కువగా స్థిరపడుచుండును అనుప్రయోగానుభవముపై అతని భావము ఆధారపడియున్నది. ఈ భావము ఒక దృష్టాంతముతో బోధపరచ ప్రయత్నింతుము.

ఒక నాణెమును అనేక పర్యాయములు ఎగుర వేసితిమి అనుకుందము. ఈ పరీక్షయందు మనకు ఆదరపాత్రమగు పక్షము 'తల' చూపట్టుట యనుకొాందము. 'తల' చూపుటను 'త' సంజ్ఞతోను తోక చూపుటను 'తో' సంజ్ఞతోను తెలిపెదమేని ఒక ప్రయోగపరంపరలో ఈ క్రింది ఫలితములు తోతోతో తతో తతతో తతతో తతోతో తతతతో ... . లభించినచో, తలలు చూపట్టుటకు సాపేక్ష పౌనఃపున్యము మొదటి ప్రయోగమందు 0/1, మొదటి రెండు ప్రయోగములందు 0/2, మొదటి మూడు ప్రయోగము లందు 0/3, మొదటి నాలుగు ప్రయోగములందు 1/4, మొదటి అయిదింటికి 1/5, మొదటి ఆరింటికి 2/6, మొదటి ఏడింటికి 3/7, ఇట్లే పౌనఃపున్యము సాగును. ఇట్టి ప్రయోగ పరంపరయందు తరచుగ మనకు గోచరించునది ఏమన, పైన చూపిన పౌనఃపున్యముల క్రమమందు అనగా 0, 0, 0, 1/4, 1/5, 2/6, మొదలైన వీటిని అనంతముగా వ్రాయుచు పోయినచో విలువలు ఒక నియత సంఖ్య సమీపమందు క్రిక్కిరిసి యున్నట్లు సాధారణముగ గమనించగలము. ఈ సంఖ్య సహజముగ 0-1 ల మధ్యనే యుండును.

ఒక ప్రత్యేక నాణెము విషయమై సాపేక్ష పౌనఃపున్య సంఖ్యలు $\frac{1}{2}$ అనుమూల్యమువద్ద స్థిరీకృతములు కావచ్చును. ఇంకొక నాణెము విషయమై స్థిరీకరణము 2/3 వద్దగాని, లేదా, 4/7 వద్దగాని, లేదా మరియే యితర సంఖ్యవద్దగాని జరుగవచ్చును. స్థిరీకృత మూల్యములు తలకు 1/2, తోకకు 1/2 అగుచో, ఈ రెండు సంఘటనలును సమసంభవనీయత కలవి యని చెప్పవచ్చును. ఈ స్థిరీకృత మూల్యములు ఎగురవేయబడిన యొక ప్రత్యేక నాణెమునకు సంబంధించి యుండునని గ్రహించవలెను. ఇట్టి ఎగురవేతను ప్రయోగమందుము, 'ప్రయోగము' అను పదమునందు విశేష మెట్టిదియు నిరూఢమై లేదు. ఏ సమయమందైనను ఫలమును ఉల్లేఖించుటకు నిర్వహింపబడవలసిన ఒక నిర్దిష్ట కార్యక్రమమే ప్రయోగము. ఇట్లు ఒకేమారు 5 నాణెముల ఎగురవేతగాని, లేదా ఒక నాణెమును నాలుగుసార్లు ఎగురవేయుటగాని ప్రయోగము కావచ్చును; లేదా 11 పాచికల దొర్లించుట కూడ ఒక ప్రయోగమే. ప్రయోగము యొక్క ఫలమునకు సంఘటన అని పేరు. 0, 1 ల మధ్యనున్న ఏ సంఖ్యవద్ద ప్రయోగ పరంపరయందు ఒక ఫలితము ఎంత తరుచుగా సంభవించుచున్నదో తెల్పు నిష్పత్తి స్థిరపడుచున్నదో. ఆ సంఖ్య ఆ ఫలితము (లేదా ఆ సంఘటన) యొక్క సంభవనీయత అయి ఉన్నది. ఇది సంభావ్యత యొక్క పౌనఃపున్యాత్మక నిర్వచనము. దీని వలన సంభావ్యత ధనసంఖ్యయనియు, ఒకటిని మించదనియు

స్పష్టమగుచున్నది. పైగా తెలియని సంభావ్యతలను అంచనా వేయుటకు ఈ నిర్వచనము చాల ఉపయోగ కరముగా నున్నది.

సంఘటనలు : ఈ సందర్భమున 'సంఘటన' యన నేమో తెలిసికొనుట యావశ్యకము. సంఘటన అనేక విధములు. మూడు నాణెము లొకేపరి ఎగురవేయుటయే ప్రయోగ మనుకొందము. కొన్ని ఫలముల నీ చూపిన విధమున వర్ణించవచ్చును. (1) చూపట్టిన 'తలల' సంఖ్య '0' (శూన్యము) అగుట ; (2) ఆ సంఖ్య శూన్యము కాకుండుట. (3) తలల సంఖ్య 0 గాని 2 గాని అగుట ; (4) తలల సంఖ్య ఒకే ఒకటి అగుట. శూన్యేతరమగు తలల సంఖ్యగల సంఘటన, 'తలల' సంఖ్య ఒకటికి సమానమైనపుడును, తలల సంఖ్య 2 అగునపుడును, లేదా 3 అగునపుడును కూడ సంభవించును. ఇంకొక విధముగా చెప్పవలెననిచో, ఒక తల, రెండు తలలు, లేదా మూడు తలలు చూపట్టు సంఘటనలలో ఏదియైన సంభవించునపుడు ఈ సంఘటన సంభవించును. ఇట్టి సంఘటన సంయుక్త సంఘటన యనబడును. ప్రస్తుత పక్షమందు సరిగా ఒక తల సంఘటిల్లుటకు సరిగా రెండు తలలు సంఘటిల్లుటకు, సరిగా మూడు తలలు సంఘటిల్లుటకు గల మూడు విడివిడి సంభావ్యతల మొత్తమే ఈ సంఘటనకు ఆరోపించబడు సంభవనీయత. వేరు రకములైన సంఘటనలకు సంభవనీయతల సంపాదించుటకు ఉచిత రీతిని తరగతుల ప్రకారము సంఘటనలను విడదీసి, తరువాత సంభావ్యతను గణితపద్ధతి ననుసరించి లెక్కించవలయును.

ఒక ఎగురవేతలో నాణెము తల చూపుటకుగల సంభావ్యత ఆ నాణమే తోక చూపుటకు గల సంభావ్యతకు సమమగు నెడ, ఆ నాణెము దోషయుతము కాదనియు, లేనియెడల అది కూటనాణెమనియు చెప్పుదురు. అటులనే దొర్లించుటలో ఒక పాచిక ఒకటి, రెండు, మూడు, నాలుగు, అయిదు, ఆరు అంకెల చూపుటకు గల సంభావ్యతలు సమానమగునేని, ఆ పాచికలు కుటిలములు కావందుము. ఫలముల మొత్తపు సంఖ్య పరిమితమై ఫలితములన్నియు సమసంభావ్యత కలవియైయున్న సందర్భమున, పౌనఃపున్య నిర్వచనము సంయోగాత్మక నిర్వచనమే యగును.

పరిమాణమూలకమైన సంభావ్యతయొక్క నిర్వచనము : సంభవనీయత సంఘటనతో సంబంధించినదీ, ఒకటికి మించనిదీ, అబుణాత్మకమయినదీ అయిన సంఖ్యయని సహజ సిద్ధముగా తీసికొని వ్యవహరించుట ఇటీవల ఎక్కువగా జరుగుచున్నది ; నిర్దిష్ట వికల్ప శ్రేణిలో ఏదో యొకటి సంభవించునపుడు సంఘటన సంభవించినదని తలంచుట పరిపాటియైనది. ఈ దృష్టిలో నిర్దిష్ట శ్రేణిని సంఘటన యనవచ్చును. ఈ శ్రేణిలోని ఫలితము ఒకే విడి ఫలితమైనచో దానిని అసంయుక్త సంఘటన యందుము. అసంయుక్త సంఘటనలకు మొత్తమునకది సంభవనీయత యగుచున్నది, సంభవనీయతల - సంఖ్యలు శ్రేణులపై ఆరోపించబడి పరిమాణపద్ధతికి చెందిన సూత్రములకు బద్ధములై యుండవలెను. ఈ విధమగు అభ్యుపగమనము ఏ. కోల్మోగొరాఫ్ కల్పించినది.

పౌనఃపున్యాత్మక అభ్యుపగమనము, పరిమాణ సైద్ధాంతిక అభ్యుపగమనము - ఈ రెండింటియందేది శ్రేష్ఠమో అను విషయము చాల వివాదములకు గురియైనది. ఈ అదృష్ట కారణముగ సంభవనీయతా వాద మూలములు మరల పరీక్షింపబడుచుండెను. కోల్మోగొరాఫ్ పద్ధతిని ఫాన్ మీసే దానితో సంపూర్ణముగ అన్వయింపవచ్చును. కొన్ని విషయములలో పరిమాణవాద పద్ధతి ఎక్కువ వీలుగా, సర్వదా సరళముగా ఉండునని చివరకు స్పష్టమైనది. ఈ రెండు పద్ధతులకు ఎట్టి వైరుధ్యము లేదని గ్రహించవలెను.

ఫాన్ మీసెకు పూర్వము సంభావ్యతా గణితమును గురించిన చారిత్రక సూచన : 17 వ శతాబ్ది మధ్యకాలమున ఫ్రెంచి సంఘమందు ద్యూతము ఒక లౌకిక లీలయై యుండెను. అనేక సందర్భములలో కల్గు లాభనష్టముల సంభవనీయతలను గురించి, ద్యూతమందు గాఢాభినివేశము గల షెవాలీయర్ డిమేర్ పారిస్ నివాసియు, తన స్నేహితుడు, ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, తత్త్వవేత్తయు అగు పాస్కల్‌తో ఉత్తర ప్రత్యుత్తరములు నడుపుచుండెను. పాస్కల్ తానే పి. ఫర్మాతో ఉత్తరముల ద్వారా ఈ విషయముల చర్చించుచుండెను. ఇట్లు ఇద్దరు ప్రతిభావంతులగు గణితజ్ఞులు క్రీడలలో కన్పట్టు సంభావ్యతల గణనను గురించిన సమస్యలను పరిష్కరించుటకు పూనుకొనిరి యనునది ఒక విచిత్ర దైవ సంఘటన. 1700 ప్రాంతమున ఈ విషయమును చర్చించిన రెండు ముఖ్య గ్రంథములు జేమ్స్ బెర్నౌలీ, డిమోవ్యర్లచే రచించబడినవి. మొదటిది ఆర్స్ కంజెక్టాండీ (ఊహనకళ). రెండవది 'క్రీడయందు సంభవించు సంఘటనల సంభవనీయతలను గణించు విధానము'. అను ఉపశీర్షికగల 'యదృచ్ఛా సిద్ధాంతము. ఈ రెండవ గ్రంథము యొక్క తుది రెండు కూర్పులలో నార్మల్ సంభావ్యతా విధానము యొక్క సూచన యగపడుచున్నది. ఆ కాలమందే ఒక నూతన అత్యంత ప్రధాన భావముదయించినది. సంభావ్యతా గణన నియమములు అనేకతరగతు

లకు చెందిన సమస్యలను సాధించుటకు వినియోగించబడ వచ్చునని తెలిసినది. మనుష్యుల జీవితకాల గణితముపై నాధారపడు జీవితభీమాను గురించిన సిద్ధాంతము అట్టి వాటిలో నొకటి. కాని ఈగ్రంథములందంతట సంభవనీయత యొక్క మూల ప్రశ్నల గురించిన మూల ప్రశ్నలకు తగిన ప్రాధాన్యమీయబడలేదు. తొలిసారి 1812 లో ప్రచురించబడిన లాప్‌లాస్ యొక్క 'తియొరీ అనలిటిక్ డెజ్ ప్రోబబిలిటీ.' యను గ్రంథమందు యదృచ్ఛమీద ఆధారపడిన ఆటలను గురించిన గణిత విషయములు చాలవరకు వివరించబడినవి. నిర్వచనముల గురించిన ప్రశ్న విషయమై లాప్‌లాస్ అంతటివాడు కూడ విమర్శారహితమైన దృష్టినే ప్రదర్శించినాడు. ఈ శాస్త్ర విషయముయొక్క తరువాతి వికాసముపై ఈగ్రంథము అత్యంత ప్రభావమును నెరపినది. లబ్ధములైన ప్రాయోగిక ఫలములు చాల ఉపయోగకరములుగా నుండుటచే ఈ సిద్ధాంతముయొక్క మూలముల దౌర్బల్యమును సరకు గొనకయే శాస్త్రజ్ఞులు ఈ గణితములో కృషి చేయుచువచ్చిరి. భౌతిక, ఖగోళిక ప్రత్యవేక్షణలందు సంభవించు భేదములను గురించిన సంభావ్యతా సిద్ధాంతమును గౌస్, లాప్‌లాస్ ఇద్దరును తమ గ్రంథములందు చర్చించిరి.

ఈ సిద్ధాంతము కనిష్ఠవర్గ విధానమున కత్యంత సన్నిహితమగుటచే అధిక ప్రాయోగిక మహత్వము నార్జించుకొన్న సాధనముగా రూపొందినది. గణితమూలక భౌతిక శాస్త్రమునందు మేక్స్‌వెల్, బోల్ట్జ్‌మన్, గిబ్స్ — ఈ ముగ్గురును సంభావ్యతా వాదమును సాంఖ్యిక చలన శాస్త్రావసరములకై ప్రవేశపెట్టిరి. సాంప్రదాయిక నిర్వచనమునందు ఇమిడియున్న సమాన సంభావ్యతాయుక్త సంఘటనలనుకాక ఇతరమైన సంఘటనల గురించి చెప్పుటలో గల ఇబ్బందులను దాటుటకై చేయబడిన ప్రథమ ప్రయత్నము బెర్ట్రాండ్ రసెల్, ఫ్యాంకరే రచనలలో కానవచ్చును. 1850 నుండి పౌనఃపున్యమునకు సంబంధించిన భావములను సంభవనీయతా నిర్వచనమునకు ఆధారముగా గొనుటకు అనేక ప్రయత్నములు గావింపబడినవి.

సాంఖ్యిక పద్ధతి వైజ్ఞానిక పద్ధతియే: సాధ్యసంభవములగు ప్రత్యేక అవిశ్లేష్యసంఘటనల, లేదా ప్రత్యవేక్షణల సంకలనమునే మనము సాంఖ్యకలోకము లేదా, విశ్వము అందుము. దానిని ప్రతిరూపక్షేత్రము అని కూడ యందుము. నాణెము నొకపరి యెగురవేయుటలో ఈ క్షేత్రము తల, తోకయను రెండు ప్రత్యవేక్షణలచే సంఘటితము. ప్రయోగము మూడు నాణెముల నొకేసారి ఎగురవేయుట యగునేని ప్రత్యవేక్షణ లోకము నాలుగు వివిధ ఫలములచే (అనగా 3 తలలు, 2 తలలు - ఒక తోక, ఒక తల - రెండు తోకలు, 3 తోకలు) సంఘటితము.

ప్రయోగము వ్యక్తుల పొడవును కనుగొనుటయగునేని, పొడవులు కొలువవలసియున్న వ్యక్తుల పొడవులన్నిటి సమూహాములు లోకమగును. అట్టి లోకములు సాంఖ్యక సందర్భయుక్తములై యుండును. లోకమందుగల కొందరు వ్యక్తులే పరీక్షకు గురిచేయబడిరనుకొందము. ఇట్టి ప్రయోగమునకు లోకమునుండి ఒక మచ్చును తీయుటయని కూడ చెప్పుదురు. ఇట్టి మచ్చు, లేదా ప్రతిరూపము కొన్ని సమయములలో లోకముయొక్క సాంఖ్యక ప్రతిబింబమని కూడ వ్యవహరింపబడుచున్నది; ఏలన, కొన్ని విధముల చూచినచో ఈ మచ్చు లోకమునకు సరియైన ప్రతిబింబము కాకపోయినను లోకముయొక్క లక్షణములు కొంతవరకు ఈ ప్రతిబింబమునకు కలవు. కాలము లేమిచే, సాధన పరిమితిచే, లేదా ఇతర హేతువులచే నూటికి నూరుపాళ్లు మనము లోకమును గురించిన సమాచారమును సేకరించు స్థితిలో సాధారణముగ నుండము. కాని కార్య నిర్వహణకై ప్రతిరూపమునందు గల సమాచారమే లోకమును గురించిన మన నిర్ణయమునకు ఆధారము. అందువలన ఇట్టి ప్రక్రియయందు మన నిర్ణయము ప్రమాదాధీనమైయుండును; ఏలన, మనము వ్యక్తులనన్నిటిని పరీక్షకు గురిచేయలేదు. కావున ప్రతిరూపము మన కందిచ్చిన అసంపూర్ణ సమాచారము నాధారముగా గొని లోకము విషయమైన ఊహలను నిష్కర్షించుటలో సంభవించు ప్రమాదముల నిరూపణ అత్యావశ్యకము. ఇట్టి ప్రమాద గణనము చేయకయే, భావి అనుభవము కూడ వెనుకటి అనుభవమువలెనే ఉండునను నమ్మకము మీదనే ఆధారపడియున్న సామాన్య వ్యాప్తి పద్ధతి అసంతృప్తికరమగు పద్ధతి యగుచున్నది. అందువలన పూర్వానుభవము చాల ఎక్కువగా నున్నపుడే సాధారణ వ్యాప్తిప్రకారము క్రొత్త విషయముల సూత్రీకరించుచున్నారు. ప్రతిరూపము నుండి లోకమును వివేచించుటను సాంఖ్యక వ్యాప్తి పద్ధతియని చెప్పవచ్చును. సాంఖ్యక పద్ధతిలో మనమూహించిన సిద్ధాంత ప్రతిరూపము మున్ముందు ఉపయోగ్యమా కాదా అను విషయ నిర్ణయము ప్రతిరూపములోని ఫలితములో ప్రమాదములను ఎట్లు సూచించుచున్నవో వాటినిబట్టి జరుగును.

సాంఖ్యక వ్యాప్తి పద్ధతిమీద విషయ నిర్ణయము చేయుట సాంఖ్యక శాస్త్రములో ఒక ముఖ్యాంశము. ప్రయోగమును పదే పదే నిర్వహించుచు, తాత్కాలిక నిర్ణయములను చేయుచు, కాలక్రమమున నిగూఢ జ్ఞానమును ఆర్జింతుము. కొంచెము ఆలోచించితిమేని సాంఖ్యక శాస్త్ర

విధానము వైజ్ఞానిక పద్ధతితో తత్త్వతః సమానమై యున్నదని తెలియగలదు.

సాంఖ్యిక నిర్ధారణ: అంచనా వేయుట, ఊహల విషయములో నిర్ణయమునకు వచ్చుట, అను రెండు ముఖ్యాంశములు కలిసి సాంఖ్యిక నిర్ధారణ ప్రకరణమైయున్నది. ఒక లోకమును గురించి కొన్ని విషయములు తెలియనిచో, ఆ విషయముల గురించి ఒక నిర్ణయమును చేయుటకు ఆ లోకమునుండి ఉచితరీతిని ఒక మచ్చును తీసికొందుము. అనగా ఏ ప్రయోగ విధానము ననుసరించుట ఉత్తమమగునో అట్టి ప్రయోగమును నిర్వహింతుము. ప్రతి రూపములోని వివరములనుబట్టి నిర్ణయము చేయుదుము. సాంపుల్ మారినపుడు నిర్ణయము అదే అగుటగాని, మారుటకాని జరుగవచ్చును. నిర్ణయ విధానములోని ప్రమాదము మాత్రము అదుపులో నుంచబడియుండును.

మనమొక ఊహను చేసినపుడు ఆ ఊహ సరియైనప్పటికి త్రోసిపుచ్చుటయో, లేదా సరికాకపోయినను దానిని నిజమని స్వీకరించుటయో జరుగు ప్రమాదములు రెండు విధములై యున్నవి. ఒక దానిని తగ్గించుటకు ప్రయత్నము చేసినచో రెండవది పెరుగును. కనుక ఈ రెండింటిలో ఏది ఎక్కువైన ప్రమాదమో దానిని తగిన రీతిని అదుపులో నుంచు పద్ధతిమీద సాంఖ్యక నిర్ణయము చేయవలయును. మచ్చుయొక్క పరిమాణము పెరిగిన కొలది ప్రమాదముల నియంత్రణ అంతకంతకు ఎక్కువ సాధ్యమగును.

ఆర్. ఏ. ఫిషర్ అంచనావేయు సందర్భములో ఒక మనోహరమైన ఉద్దేశమును ప్రవేశపెట్టెను. లోకమునకు సంబంధించిన విలువ యొకటి మనకు తెలియనిచో, ఆ విలువను అంచనా వేయుటలో మనము తీసికొన్న మచ్చులో ఆ విలువను గురించి ఉండే సమాచారమును ఫిషర్ నిర్వచించియున్నాడు. మచ్చులోని ఫలితములమీద నాధారపడియుండు రాశిని స్టాటిస్టిక్ అందురు. అంచనా వేయుటకు ఇట్టి స్టాటిస్టిక్‌ను వాడుదురు. అంచనా వేయుచున్న విలువను గురించి స్టాటిస్టిక్‌లోనున్న సమాచారమును గూడ ఫిషర్ నిర్వచించియున్నాడు. వీటి మూలముగా ఉత్తమరీతిని అంచనా వేయుటకు కొన్ని నియమములను సూత్రీకరించవచ్చును. మచ్చులోని సమాచారమంతయు ఏ స్టాటిస్టిక్‌లో నిమిడియుండునో ఆ స్టాటిస్టిక్‌ను అంచనాకు ఉపయోగించిన యెడల, అంచనా పద్ధతి ఉత్తమ విధాన సూత్రములకు బద్ధమైయుండును. సాంఖ్యక నిర్ధారణ ప్రకరణములో ఇదియొక మనోహర ఘట్టము. సి. ఆర్. రావు, ఎచ్. క్రమేర్‌లు ఈ విషయములో ఉత్తమ విధానక్రమ మెట్టిదో తెల్పియున్నారు.

కొన్ని ముఖ్యమైన లోకములు: ఒక లోకములోని వ్యక్తులు సంఖ్యలైనపుడు అవి కలసియుండక విడివిడిగా ఉండవచ్చును; లేదా వాస్తవిక సంఖ్యల అంతరమునందు కలిసి యున్నవై యుండవచ్చును. సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని శీలమునందు మనకు సాధారణముగ తారసిల్లు లోకముల కొన్నిటిని ఇక్కడ చెప్పుదుము.

(ఏ) బెర్నౌలీ లోకము: 'జయము', 'అపజయము' అను మాటలచే సంకేతించబడు రెండు అంశములుగల లోకము,

(బి) ద్విపదలోకము: 0, 1, 2,... మొదలు n వరకుగల పూర్ణసంఖ్యలమ అంశములుగాగల లోకము. n బెర్నౌలీ ప్రయోగములు కలిసిన లోకము ఒక ద్విపద ప్రయోగము. ఇట్టి ప్రయోగమందు వచ్చిన జయముల సంఖ్యలుగల లోకము ద్విపదలోకము.

(సి) పాయిసాన్ లోకము: ఈ లోకమును గురించిన ఒకే ఒక ప్రత్యవేక్షణ ఫలితము శూన్యముతో సహా ధనాత్మక పూర్ణాంకములలో నేదియైన కావచ్చును. ఈ లోకము అనేక భౌతిక సంఘటనలయందు విశేష ప్రాముఖ్యము కలిగియున్నది. ఒక పుస్తకమునందు ప్రతి పుటకు గోచరించు అచ్చు తప్పుల సంఖ్యలు, సమాన విశాల భూములందు తాకిన బాంబు ఆఘాతముల సంఖ్యలు, వస్తువుల విఘటనమువలన సమాన కాల వ్యవధులలో వెలువడు కణముల సంఖ్యలు, సమానకాల వ్యవధులందు స్విచ్ బోర్డును చేరు టెలిఫోన్ పిలుపుల సంఖ్యలు మొదలైనవి పాయిసాన్ లోక విధానమున కలవని మన అనుభవము తెల్పుచున్నది.

(డి) సరళ లోకము: సరళ (నార్మల్) లోక ఘటకములగు విలువలు వాస్తవిక సంఖ్యల విస్తారమంతట అవిరతముగ వ్యాపించియుండును. ఒక సరళ విన్యాస ప్రకారమునకు గాస్ ప్రమాద నియమమని కూడ పేరు గలదు. కొన్ని సందర్భములలో ప్రమాదముల విలువలు సరళ లోక పద్ధతిని అనుసరించియుండునని కేంద్ర పరిమితి సిద్ధాంత సహాయముచే నిరూపించవచ్చును. ఈ సిద్ధాంతము చాల పరిస్థితులలో యదృచ్ఛా హేతు బాహుళ్యము యొక్క సంకలిత ప్రభావము ఒక సరళ లోకముతో సంవదించు మూల్యముల నొసంగునదిగా రూపొందును. ప్రమాద హేతువులు కానివి కూడ సరళ నియమముతో సంవదించు ఫలితముల నొసంగునవి ప్రకృతిలో కలవు.

సంభావ్యతా విభజనము - యాదృచ్ఛిక చలరాశులు: లోకాంశములతో సంబద్ధములై ప్రత్యవేక్షణల ఒక నియత

గణము ఒక ప్రయోగమందు వచ్చుటకు గల సంభావ్యతా సాంద్రతను నిరూపించుచు, మనము సంభావ్యతా సంస్థను తీసికొందము. ఒక లోకమును దాని సంభావ్యతా సంస్థతో కూడ పరిగణించి నపుడు దాని నొక విభజనము అందుము. అట్టి విభజనను వర్ణించు చలరాశికి యాదృచ్ఛిక చలరాశి యనిగాని స్టొకేస్టిక్ చలరాశియనిగాని పేరు. సాంఖ్యక శాస్త్రానుశీలన పరులకు ఉపయోగ్యమగునట్టి సంభావ్యతా కోష్టకములందు అనేక విధములగు విభజనలు గణించబడి నవి. ఇట్లు సంభావ్యతల కోష్టకమును ఒక విభజన యొక్క వర్ణనమని యనవచ్చును. సాధారణముగ ఒక విభజన యొక్క రూపము దాని మధ్యమానము, మాపాంకము, మాధ్యకము మొదలగు కేంద్ర గుణములు, ఏదో ఒక కేంద్ర గుణమునుండి ఇరుప్రక్కలకు దాని విస్తరణము, మరియు లోకము యొక్క విషమత (స్క్యూనెస్), దాని శిఖరత మున్నగు విలువల ద్వారా వర్ణించబడు చుండును.

బహుయాదృచ్ఛికరాశి లోకములు, వాటి సమన్వయము, ప్రతీపగమనము : ఒకప్పుడు జత చేయబడిన రాశులను మనము పరీక్షింపవలసివచ్చును. ఒకే లోకముగ రూపొందిన n రాశుల సమూహమును సమీక్షించవలసి యుండును. అనగా ప్రత్యవేక్షణల జంటలుగా గాని, లేదా n మూల్యములుగా గాని ఉల్లేఖించవలసి యుండును. లోకము రెండుకాని ఎక్కువ సంఖ్యగాని గల రాశుల సమూహమైనపుడు, సమన్వయముగాని, ప్రతీపగమనము గాని గణించుట మనకు అవసరమగుచుండును.

ఇటీవల ప్రాయోగికులు n యాదృచ్ఛిక రాశుల సమూహము యొక్క గణితమును అసంఖ్యాకమైన రాశుల లోకమునకు తర్కవాదము ననుసరించి విస్తరింపచేయుటలో విజయమును గాంచిరి. ఈ విస్తరణము యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అని పిలువబడుచున్నది.

ప్రయోగ విధానము: మన మిదివరకే చూచినట్లు ఒక ఉచితప్రయోగవిధానము ననుసరించి ప్రతిరూపమును సాధించు ప్రకరణమును ప్రయోగ విధానము అందుము. ప్రయోగ విధానమునకు ఆధారములగు మూడు ముఖ్య నియమములు గలవు. అవి యేవన:

(1) యాదృచ్ఛికీకరణము, అనగా ప్రమాద విస్తార మూల్య నిరూపణమును సవ్యముగా గణించుటకై ఈ నియమమును పాటించవలసియున్నది.

(2) పునరావృత్తి అనగా ప్రయోగమును మరల మరల గావించుట. ప్రయోగ ప్రమాదములను తగ్గించుటయే ఈ నియమము యొక్క లక్ష్యము.

(3) స్థానిక నియంత్రణ : నిర్దిష్ట కారణముల ఫలితముగ వచ్చు లోపములను సాధ్యమైనంతవరకు తొలగించి, ఉత్తమ నిర్ణయమును సాధించుటకీ నియమము సాధనము.

వినియోగము-కొన్ని సులభమైన ప్రయోగ విధానములు : (ఏ) అన్నింటిలో యాదృచ్ఛిక ప్రతి రూపణ విధానము అతి సులభమైన ప్రయోగ విధానము. దీనికి అతివిస్తృతమైన ఉపయోగము కలదు. ఈ విధానములో మన ప్రతిరూపమందు ప్రవేశించుటకు ప్రతి అంశమునకు సమానావకాశము ఈయబడునట్లు ప్రత్యవేక్షణలు గావించబడవలసియున్నది. అనగా ప్రయోగములను ఆ రీతిని నిర్వహించవలసి యున్నది. ప్రయోగమును గావించునపుడు వ్యక్తిగత పక్షపాత దోషము రాకుండుటకై ప్రాయోగికుల ఉపయోగార్థము యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల కోష్టకములు నిర్మించబడినవి.

ఎరువుల, బీజముల విభిన్న ప్రభావముల శోధించుటకు ఉద్దిష్టమైన క్షేత్ర ప్రయోగములందు యాదృచ్ఛిక కృత ఖండములు లేదా లాటిన్ సమచతురస్రములు అను పేరు గల విధానములు వాడుకలో నున్నవి. వాటిని గురించి కొంత తెలిసికొందము.

(బి) యాదృచ్ఛికీకృత ఖండ విధానము: ఈ విధానమందు ఎన్నుకొనబడిన ఖండముల సంఖ్య n లో ప్రతి ఖండము k ఉపఖండములుగా విభజించబడును. ఈ ఉపఖండములు (సాధారణముగానిది వ్యవసాయ శాస్త్ర ప్రయోగములందు అనుసరించబడును) విత్తనములు, ఎరువులు మొదలైన వాటియందు గన్పట్టు ప్రభేదములు శోధించుటకు ఉపయోగించబడుచున్నవి. ప్రతి ఖండములో నున్న ఉపఖండమునకు ఒక వేరు వేరు రకపు విత్తనము, లేదా ఒక రకపు ఎరువు యాదృచ్ఛికముగ వినియోగింపబడును. ఒక ఖండమందుగల ఉపఖండముల సంఖ్య తీసికొన్న భిన్న జాతుల ఎరువుల, లేదా విత్తనముల సంఖ్యకు సమానముగా నుండును. దీని ప్రయోజన మేమన ప్రతి భిన్న జాతియు ఒకే ఒక ఉపఖండములో గోచరించును.

ప్రత్యవేక్షణలందు కన్పట్టు మొత్తపు భేదములో కొంత భాగము విదితకారణములకు ఆరోపించి, తక్కిన దానిని ప్రమాద భాగముగా తీసికొని, విషయ వివేచనము చేయుదుము. ప్రతిరూప గ్రహణమం దిమిడియున్న అనిశ్చితతకు ప్రమాదభాగము కొలత కర్రగా నుపయోగించుచున్నది. ఒక కారణము తెచ్చి పెట్టిన భేదమును ఈ కొలత కర్రతో కొలిచి చూడగా వచ్చిన నిష్పత్తి సందర్భాను సారముగ తీసికొనబడిన హద్దును అధిగమించినచో, దానికి ప్రయోగములో వచ్చు విలువలలో నున్న యాదృచ్ఛిక భేదములు

మాత్రమే కారణముకాక మనము ఆదిలో ఊహించిన కారణమును బట్టి దానికి కేటాయించిన భేదభాగము సరిగా లేదని సాధారణముగా నిర్ణయింపవలసియుండును. అనగా మన ఊహ సరిగా లేదని నిర్ణయించుదుము. ఇదెట్లనగా వివిధములైన ఎరువులు కనపరచు ప్రభావములలో ఏమియు భేదము లేదని మనము ఆదిలో ఊహచేసి మొత్తపు భేదమును దాని ప్రకారము పంచిపెట్టినపుడు పైన చెప్పబడిన నిష్పత్తి ఎన్నుకోబడిన హద్దును దాటినచో, ఎరువుల ప్రభావములలో భేదములున్నవని మన నిర్ణయము. విత్తనముల రకములలో భేదములున్నవా అను విషయమును నిర్ణయించవలసివచ్చినపుడు కూడ పై విధముగనే ఎరువుల స్థానే విత్తనములతో ప్రయోగమును జరిపి, నిర్ణయమును చేయుదుము. అనగా కొన్ని ఎరువులు మరికొన్నిటికన్న మేలైనవని తాత్కాలికముగ నిర్ధారణ చేసి ముందుకు సాగుదుము. ఈ నిష్పత్తి మూల్యము తక్కువగా కన్పట్టుచో ఈ ప్రయోగమును ఆధారముగా గొనిన యెడల ఏ రకము వాడుక చేసినను అసలు పంటలో భేదములు లేవని నిర్ణయించుదుము.

(సి) లాటిన్ చతురస్రము: ఇది యాదృచ్ఛికీకృత ఖండముయొక్క విధానములలో నొక విశిష్ట పక్షము. ఇది ఒక ఖండమందుగల ఉపఖండముల సంఖ్య ఖండముల సంఖ్యకు సమానమగునపుడు సంభవించును. ఇదిగాక ఆ ఖండముల ఉపఖండములనీ క్రింది విధమున చూపుదుమేని విత్తనములలోను (ఎరువులలోను) ఒక

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

లాటిన్ చతురస్రము
చిత్రము 422

వరుసలోనున్న ఒకే ఒక ఉపఖండములో, అటులనే ప్రతి స్తంభములో ఉన్న ఒకే ఒక ఉపఖండములో వచ్చునట్లు అంకితమైయున్నవి. రకముల సంఖ్య వరుసల సంఖ్యకు, స్తంభముల సంఖ్యకు సమానముగా నుండును. లాటిన్ చతురస్రములను పలురకములుగా నేర్పాటు చేయవచ్చును. వీటిలో దేనిని తీసికొని ప్రయోగము జరుపవలెనో నిశ్చయించుటకు యాదృచ్ఛికీకరణము గావించవలెను.

యాదృచ్ఛికీకృత ఖండ విధానమునకును, లాటిన్ చతురస్ర విధానమునకును సంబంధించు ప్రయోగములలో వచ్చు ఫలితములలోగల మొత్తపు భేదమును ఇదివరకే తెలిసియున్నట్టియు, పైగా ఊహింపబడినట్టియు కారణముల ప్రకారము భాగములుగా విడగొట్టి ప్రమాద భాగమును లెక్కించుటకు భేదవిశ్లేషణము అని పేరు,

(డి) క్రమాత్మక ప్రతి రూపకరణము: రెండవ ప్రపంచ సంగ్రామ కాలమున వాడుకలోనికి తేబడిన ప్రతి రూపకరణ రచన ఇది. మామూలుగా ప్రతి రూపమును తీసికొను విధానమునందు వ్యయము మొదలైన వాటిని గణనలోనికి తీసికొని, ఒక గరిష్ఠ అనుకూల సంఖ్యవద్ద ప్రతిరూప ప్రమాణము ముందుగనే నిశ్చయించబడుచున్నది. ఈ నూతన విధానమునందు ప్రతిరూప ప్రమాణము ముందుగా స్థిరీకరింపబడదు. ఊహింపబడిన ఒక విషయమును అంగీకరించుటయందుగాని, నిరాకరించుటయందుగాని ప్రమాదములను తగిన హద్దులలో ఉంచు పద్ధతిని అనుసరించి, మచ్చులోని వస్తు సంఖ్యను ఒక దాని తరువాత నొకటిగా పెంచుచుపోయి ప్రత్యవేక్షణ నిర్వహించి, ప్రతి ప్రత్యవేక్షణను దానికి పూర్వము నిర్వహించబడిన దానితో మేళవించి, మునుపటి కన్న మరియొకటి ఎక్కువగాగల ప్రతిరూపములును వరుసగా సంపాదించుచు, ప్రయోగమును చేయుటలో ముందునకు సాగుచుందుము. ప్రతి దశ యందును అనుమత ప్రమాదముల దృష్టిలో మన ఊహ అంగీకార్యమా ? లేదా ? అని పరీక్షించబడును. ఏ దశ యందైనను ఒక నిర్ణయము ప్రాప్తమగునపుడు ఆ ప్రయోగము ముగియును. కానిపక్షమున, మరియొక ప్రత్యవేక్షణను గావించి, పూర్వపు వాటితో మేళవించి, తిరిగి పరీక్ష గావించబడును. ఇంకను నిర్ణయము లబ్ధము కానిచో మరియొక ప్రత్యవేక్షణ చేయబడును; ఇటులనే ఈ ప్రక్రియ కొనసాగించబడును. ఇట్లు ప్రతిరూపము యొక్క ప్రమాణము ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశిగా రూపొందును. ప్రతిరూపకరణ ప్రయోగ పర్యవసానమున గాని, మచ్చుయొక్క సంఖ్య ఎంతో తేలదు. దీని వలన లాభమేమన, సాధారణముగ గావించబడు పరీక్షలోకన్న ఎక్కువ శ్రమ, వ్యయము అరుదుగా కలుగుటకు వీలున్నప్పటికి సాధారణముగ ఈ నూతన విధానములో సగటుమీద పరీక్షణ శ్రమ చాల తగ్గియుండును. ఈ ప్రతి రూపకరణ ప్రక్రియ మన శోధన విధాన మెంత ఉచితమైనదో తెలిసికొనుటకు 'కార్యకర లక్షణము' అను దానిని నిర్వచించి, దానిని రేఖా చిత్రరూపమున ప్రదర్శించి ప్రయోగ విధాన యోగ్యతను ముందుగా రూఢి చేసికొనుట జరుగవలెను.

సాంపిల్ సర్వేలు : ఒక లోకమునకు చెందిన ఒకటి గాని, అంతకన్న ఎక్కువగాని లక్షణముల మూల్యములను అంచనా వేయవలసిన సందర్భములలో సాంపిల్ సర్వేలు జరుపబడును. ఈ సర్వేలు భూ-భౌతిక శాస్త్ర విషయములకు సంబంధించియో, లేదా వ్యవసాయ శాస్త్రమునకు సంబంధించియో. లేదా ఆర్థిక, సాంఘిక విషయములకు సంబంధించియో ఉండవచ్చును. ఇట్టి సర్వేల సాధారణ లక్షణములను కొన్నింటిని ఇక్కడ చెప్పనగును,

(ఏ) ఏ లోకము యొక్క గుణముల పరీక్షకై సర్వే జరుపవలెనో ఆ లోకములోని ప్రతి అంశము (లేదా వ్యక్తు)ల జాబితాను తయారు చేయుట.

(బి) అంశముల ఏ గుణములను గురించి వివరముల తీసికొనవలెనో నిశ్చయించుట.

(సి) మచ్చును ఏ ఏ దశలలో ఏ రీతిని గ్రహించవలయునో అట్టివివరములను నిర్ణయించుట.

(డి) లోకములోని అంశములను ఎట్లు ఉపగణముల లోనికి విడదీసినచో, ఒకే ఉపగణములో అంశముల యొక్క గుణములందు భేధములు తక్కువగనుండునో అట్లు ఉపగణములలోనికి విడదీయుట.

(ఇ) అందుబాటులోనున్న కాలమునకు, సాధన సామగ్రికి అనురూపమగునట్లు మచ్చుయొక్క సైజును నిర్ణయించుట.

(ఎఫ్) ఈ క్రింది వానిని పోలియుండు ఇతర ప్రక్రియలను నిర్ణయించుట (i) సముదాయమును సేకరించుటకై పోస్టు ద్వారా ప్రశ్నావళిని పంపుట; లేదా కొంతమంది వ్యక్తుల ముఖాముఖిని కలిసికొని వారినుండి సమాచారమును సంపాదించి ఈ పనికై సిద్ధపరుపబడిన షెడ్యూలలో ఆ సమాచారమును సంగ్రహించుట.

(ii) కోష్టకరణ ప్రక్రియా నిర్ణయము.

(iii) అంచనా పద్ధతుల నిర్ణయము మొదలైనవి.

జీవిత వ్యయ సూచిక సంఖ్యల తయారుచేయుటకుపయోగపడు గృహాదాయ వ్యయపట్టిక లట్టి సర్వేలకు సాధారణ దృష్టాంతము. మన దేశమందు గావింపబడు సర్వేలలో ప్రధానమైనవి రెండు గలవు. అవి : జాతీయ సాంపిల్ సర్వే; గ్రామీణ ఋణ విషయముల సర్వే. ఒక విశిష్ట సమస్యా పరిష్కారమునకు తగినట్లు రచించబడిన ప్రతిరూపణ విధానము సాధారణముగ ఇతర ప్రయోజనములకు పనికిరాదు. ఎటులైనను ఒక విశిష్ట ప్రయోజనమునకై ఒక సాంపుల్ తీయబడుచున్నది కనుక ఆ ప్రయోజనమునకై కావలసిన వివరములు లేకుండా పైగా మిగతా వివరములు కొన్ని సేకరించబడుట తరుచు జరుగును. వలన, దీనికగు అదనపు వ్యయము చాల తక్కువ; ఎక్కువ సమాచారమును సేకరించుటవలన మొదట ఉద్దేశించబడని ఇతర లక్షణములను గురించి కూడ అంచనాలను కట్టు ఉద్దేశము కలుగుచుండును. సమాచార దారిద్ర్య గ్రస్తమైన భారతదేశము వంటి దినదినాభివృద్ధిని గాంచుచున్న దేశమందు యోజన కర్తలు, ఆర్థిక నీతి విధాతలు అనేక వివరములకై ఎక్కువ ఆసక్తిని చూపుచుండుట సహజము. అందువలన ఈ ఆనుషంగిక సమాచారమును వాడుట తటస్థించును. దీని ఫలముగా వాదోపవాదములు తల యెత్తును. సహజముగ చాలమంది సాంఖ్యకశాస్త్రజ్ఞులు దీనిని అనుమతించరు. కాని తాత్కాలిక వాస్తవిక సమస్యలతో పని గలిగియున్న మరికొందరు సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞులు వీటి ఉపయోగమును సమర్థింతురు. కానిచో, ఈ వ్యవహారమందు ఎంత అనుభవమును సంపాదించినవారైనను ఊహనే ఆధారముగా తీసికొనవలసియుండునుగదా! ఒక సర్వేను ఏకాగ్రప్రయోజనము కలిగి యుండునట్లు చేయుటయు, బహుళప్రయోజనములకై ఉపయోగించు పోకడలను నివారించుటయు వాంఛనీయమైన విషయములు.

సాంఖ్యిక వస్తుగుణ నియంత్రణము : వస్తు నిర్మాణము పెద్ద పెట్టున జరుగుచున్నప్పుడు నిర్మిత వస్తువుల గుణములు ఒక నిర్దిష్ట ప్రమాణముతో సంవదించునట్లు ఉండవలెను. కాకపోయినచో తయారైన వస్తువుల సముదాయములో అధిక భాగము నిరాకరించబడవలసివచ్చును. ప్రతివస్తువును పరీక్షించుట ఆచరణ యోగ్యము కాదు కనుక, ప్రతిరూప పరీక్ష ఆవశ్యకము. ఒక క్రమము ననుసరించి అప్పటప్పట తయారగుచున్న వస్తువులనుండి యాదృచ్ఛికముగ మచ్చులను గ్రహించి పరీక్షించుట ఆవశ్యకము.

గుణ భేదమునకు గల కారణములన్నిటిని తెలిసినంత వరకు గుర్తించి, వాటిని వాంఛిత గుణపూర్తిని ప్రదర్శించునట్లు ఉత్పత్తి ప్రక్రియను సవరించిన పిమ్మట సాంఖ్యక పద్ధతులను ఉపయోగించి గుణ నియంత్రణ గావించవచ్చును. అప్పటప్పట ఉత్పత్తి యొక్క మధ్యమాన ప్రమాణ విచలనముల గణించి అనేక విధములగు నియంత్రణ పటముల నిర్మింతురు. నియతకాల వ్యవధిలో గ్రహించబడిన ప్రతిరూపముల వివరములను బట్టి ఉత్పత్తి నియంత్రణ పరిమితులలో సాగుచున్నదో లేదో పరీక్షించబడును. నియంత్రణ కానరామి, ఉత్పత్తి ఆపివేయబడును. దానిని మరల కొనసాగించుటకు పూర్వము వివిధ ఘటక ప్రక్రియలు, వాడబడు ద్రవ్యముల నాణ్యతలు పరీక్షకు గురిచేయబడును.

మధ్యమాన మహత్వ నియంత్రణ, భేద విస్తార నియంత్రణ, దోషశాత నియంత్రణ అను మూడు ముఖ్యములైన నియంత్రణలు వస్తువుల భారీ ఉత్పత్తియందు ఉపయోగములో నున్నవి.

ఉత్పత్తిదారుల, వినియోగదారుల హాని భయములు : గుణ నియంత్రణకై చేయు ప్రతిరూప పరీక్షలు కాక మరియొక విధమైన ప్రతిరూప పరీక్షలు కలవు. దోషము గల్గి అసంతృప్తికరమైన వస్తువుల కొనుటనుండి వినియోగదారులను ఇవి ఎక్కువ నష్టమునుండి రక్షించును. ఇట్టి వాటిలో ఏక ప్రతిరూపణము అని పేరుగల ప్రక్రియ ఈ క్రిందిది. విక్రయశాలయందు వస్తుసముదాయము అనేకములగు ప్రోగులుగా పడియుండుట జరుగును, ప్రతి ప్రోగులోని వస్తువుల సంఖ్య ఒకటియే అయిఉండును. ఉచిత సంఖ్య గల వస్తువ్యక్తుల యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపమును ఒక ప్రోగునుంచి తీసికొని, వానిలో దోషయుతములు ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యకు తక్కువైనప్పుడెల్ల ఆ యావత్తు ప్రోగును కొనుచు, అసంతృప్తికరమైన వస్తువుల సంఖ్య అంతకు మించినప్పుడు ప్రోగులో ప్రతి వస్తువును పరీక్షించి మరీ కొనుచు పోవు పద్ధతిని ఏక ప్రతి రూపణ విధానమందురు. వాడుకదారు చెడ్డ వస్తువుల వదలివేయుటకై, పైన చెప్పినట్లుగాని, మరియే విధమైన ప్రక్రియనుగాని జరిపించుచో ఆ విధానములో దుష్ట వస్తు స్వీకరణ సంభావ్యతకు వినియోగదారుని హాని భయము (రిస్క్) అని పేరు.

తన ఉత్పత్తి ప్రక్రియ నియంత్రణకు లోబడియుండిన సందర్భములో వినియోగదారుడు వస్తు సముదాయమును కొనకుండ నిరాకరించుటకు గల సంభావ్యతకు ఉత్పత్తిదారుని హాని భయము అని పేరు. వివరముల విస్తరించుట కిచ్చోట అవకాశము లేదు.

సూచీ సంఖ్యా సిద్ధాంతము : కాలముతో మారుచున్న రాశుల గతిని సూచించునవియే సూచీ సంఖ్యలు. 1960 లో ఒక వస్తువుయొక్క ధర P_1 అయి, 1940 లో దాని ధర P_2 అయినచో, 1940 లో ధరను ఆధారముగా గొనినచో 1960 లో దాని సూచి (P_1/P_2) 100 అగును. అనగా కాల గతితో ధర ఎన్ని శాతములు పెరిగినదో సూచించు సంఖ్య సూచీ సంఖ్య. A, B లు అను రెండు ప్రదేశములలో 1940 లో ఒక వస్తువు ధరలు P_{2a}, P_{2b} అయి 1960 లో ఆ చోట్ల ధరలు P_{1a}, P_{1b} అయి 1940 లో ధరలను నూరు క్రింద భావించి సూచ్యంకముల లెక్కించినచో 1960 లో A వద్ద $\frac{P_{1a}}{P_{2a}} \times 100$, B వద్ద $P_{1b}/P_{2b} \times 100$ లభించును. అసలు ధర 1960 లో A వద్ద B వద్ద కంటె ఎక్కువగా నుండ వచ్చునని ఈ క్రింది ఉదాహరణమువలన స్పష్టమగును.

$P_{1a} = 400,\ P_{2a} = 250;\ P_{1b} = 210,\ P_{2b} = 75$

1960 లో A వద్ద సూచ్యంకము $= \frac{400}{250} \times 100 = 160$

1960 లో B వద్ద సూచ్యంకము $= \frac{210}{75} \times 100 = 280$

ధర సూచ్యంకము

A వద్ద	400	160
B వద్ద	210	280

దీనిని బట్టి తేలుచున్న విషయమేమన ఒక ప్రదేశమందు సూచ్యంకములు కాలక్రమమును బట్టి మారుచున్న పోకడను తెలియజేయుటకు వీలైయున్నవియే కాని, వివిధ ప్రదేశములలో ఏకకాలమందు గల భేద నిర్ణయమును చేయుటకై పోల్చి చూచుకొనుటకు అనువైనవి కావు. సాధారణముగ సూచ్యంకములు సమూహముల విలువలకే అన్వయించునుగాని భౌతిక రాశులకు అన్వయించవు. దృష్టాంతమునకు జీవన వ్యయసూచి సముచ్చిత వ్యయమునకు అన్వయించును. ఏ ఏ వస్తువులు ఏ ఏ నిష్పత్తులలో సముచ్చయించబడవలయునో అను నిర్ణయముపై జీవన వ్యయ సూచి ఆధారపడియుండును. వాటి సముచ్చిత ధన మూల్యమును లెక్కించుటకు పూర్వము, ఏ ఏ వస్తువులను ఎన్నుకొని వాటిని ఏ ఏ మొత్తములలో కూర్చవలయునో నిర్ణయము చేయుట ఆవశ్యకము. ఏ సూచి విషయమునందైనను ఇదే ప్రక్రియ ఉపయోగించబడును. వస్తువులన్నిటిని చేర్చుట సాధ్యముకాదు కనుక ఎన్నుకొన్న వస్తు జాతులను వస్తు లోకముయొక్క ప్రతి రూపముగా పరిగణించనగును. ఇందువలననే సాంఖ్యక సమాలోచన సూచి సంఖ్యల స్వభావమును గుర్తించుట ఆవశ్యకమగుచున్నది. వేరు వేరు సముచ్చయ ప్రక్రియలు సూచికి వేరు వేరు విలువలనిచ్చును. ఆధారముగా గొనబడు సంవత్సరమును కూడ ఉచితరీతిని ఎన్నుకొనవలెను. కనుక సూచి సంఖ్య గణనలో సముచ్చయము చేయబడిన వస్తువులు, వాటి రాశి భారములు, ఎన్నుకొనబడిన ఆధార సంవత్సర ఔచిత్యము ముందుగా నిర్ణయింపబడవలయును.

ఒక సూచి సంఖ్య ఆదర్శముగా భావింపబడుటకు కాలపరివర్తన పరీక్ష, కారణాంశ పరివర్తన పరీక్ష, వస్తు పరివర్తన పరీక్ష అను మూడు ప్రయోజకములను ఇర్వింగ్ ఫిషర్ సూచించియున్నాడు.

ఆర్థికశాస్త్ర సంబంధమైన పరిశోధనలందు సాధారణ ధరల సూచ్యంక పరంపరను పెట్టి ధన మూల్యముల పరంపరను భాగించగా వచ్చిన నిష్పత్తి పరంపరను వాడు చుందురు. దీని ఉద్దేశమేమనగా ధరల పెరుగుదలవల్ల వచ్చు భేదములను సర్దుబాటుచేసి పరిశోధనలలో వీలైనంత నిజమైన విలువలను వాడుట. ఏ శ్రేణి పరంపరను ఏ సూచ్యంక పరంపరచేత భాగించవలెను అను విషయమును చేయదలచిన పరిశోధననుబట్టి నిశ్చయము చేయవలెను.

జనాభా - జీవిత సాంఖ్యికము : వ్యక్త్యనుసారముగ ఒక లోకమును గురించిన సమాచారముల్లేఖించబడినప్పుడు ఆ ప్రక్రియను జనాభా గణన యందుము. ఇందు ప్రతిరూపము సంపూర్ణమై యున్నది. లోకము అతి విస్తృతమైనచో జనాభా గణన యందనేక కష్టములున్నవి. వీనిలో ముఖ్యమైనవి మూడున్నవి :

మొదటిది : జనాభా లెక్కకు ద్రవ్యము, కాలము, మనుష్యుల కుమ్మక్కు మొదలగు సాధన సంపద ఎంతయో కావలెను. తరుచుగా నిది అందుబాటులో నుండదు. రెండవది : అతి దక్షమైన సంవిధాన సన్నివేశముల సహాయమును, ఏకైక విధాన విన్యాసములను కల్పించినగాని, ఒకే విషయమును రెండుసార్లు లెక్కించుటయో లేదా లెక్కించబడవలసిన విషయముల విడచి వేయుటయో మున్నగు ప్రమాదములు సంభవించును.

మూడవది : పని చేయవలసియున్న వ్యక్తుల సంఖ్య పెద్దదై ఉండుటచే ఈ పనికై నియోగించబడిన వ్యక్తులలో అనేకుల సామర్థ్యము గీటున కందకపోవచ్చును.

సరిగా నిర్వహించగల్గినచో, జనాభా గణన విధానమే మిక్కిలి కోరతగినదియను విషయమున సందేహమేమాత్రమును లేదు. ఇది సాధ్యము కాదేని ఉచితరీతిని గ్రహించబడిన మచ్చును పరిశీలించుట ఉత్తమ వికల్పము.

భారతీయ ప్రభుత్వము ప్రతి పది సంవత్సరములకు ప్రజల జనాభా వివరములను సేకరించియున్నది. ఇప్పట్ల అన్నిటికన్న చివరది 1931 వ సంవత్సరమున తీసిన జనాభా. మ్యూనిసిపల్ రిజిష్టర్లు, జాతీయ రిజిష్టర్లు తక్కిన లిఖితముల సహాయము తీసికొని తయారు చేయబడిన జాబితాల నాధారణముగాగొని, గణకులు ఇంటింటికి తిరిగి ఒక నియత దినమున సమాచారమును సేకరింతురు. నేడు భారతీయ జనాభా గణన చాల విలువైనది యగుటయేకాక, అందుల్లేఖితములైన అనేక విషయములు చాలవరకు విశ్వసనీయమైన సమాచారములని చెప్పవచ్చును.

ఇందు కూర్చబడు సమాచారములు వయస్సు, ఆడ, మగ వ్యక్తుల నిరూపణ; కుటుంబముల జీవనాధారములు, ఆర్థికముగ పాటుబడు వ్యక్తుల సంఖ్య మొదలైనవి. మరియు పట్టణ, గ్రామీణ ప్రాంతముల క్రింద వివరములు విడివిడిగా నీయబడును.

అనేకమైన సంస్థలచే వారి వారి ప్రయోజనములకై ఉపయోగించబడుటయేకాక, జనాభా లెక్కలు, వయస్సు ఆడ, మగ వ్యక్తుల సంఖ్య మొదలైన వాటికి సంబంధించి, జనుల జీవిత సమాచారమునకు ముఖ్యమైన మూలగ్రంథ మగుచున్నది.

ఆరోగ్యశాఖవారు జనన, మరణ సమాచారములను సేకరింతురు; దీనినుండి స్థూలములు, ప్రామాణికములు అగు రెండు రకముల జనన, మరణ రేట్లు లెక్కించబడును. 15 మొదలు 45 ఏండ్ల వరకు మధ్యనున్న వయోవర్గములోనుండు స్త్రీల సంఖ్యమీద పుట్టుక రేటు ఆధారపడియుండును. ఈ జనాభా లెక్కలు జీవిత సాంఖ్యకమందు ఉపయోగపడుట వీటి ప్రాముఖ్యమునకు ఇంకొక కారణ మగుచున్నది.

పశు సంపద జనాభా : దేశమందలి ప్రతి రాష్ట్రము యొక్క పశుసంపద జనాభాగణనను భారతీయ వ్యావసాయిక పరిశోధన సమితి ఆర్థికశాస్త్ర, సాంఖ్యకశాస్త్ర ఆధికారిక సంస్థల సహాయమున నిర్వహించుచున్నది.

భీమా సాంఖ్యికము : లోకమందు కన్పట్టు మరణగతిని గ్రహించుటకు సంభావ్యతా సిద్ధాంతము విస్తరించబడినది. భీమాకు పునాది అయిన ప్రధాన సాంఖ్యక శాస్త్ర విషయము సామూహిక భయహాని నివారణ సిద్ధాంతము. క్రొత్త పాలసీల వలన కలిగిన రాబడులు, డబ్బు తిరిగి ఇచ్చివేయవలసిన పాలసీల డిమాండ్లు, సంభావ్యత పోకడగల యాదృచ్ఛిక సంఘటనలు, వీనిని ఆధారముగా గొని ప్రీమియమ్ కోష్టకములు నిర్మించబడును. భీమా కంపెనీ పనిచేయుచున్న కాలము ఎక్కువగు కొలది దాని భంగ ప్రమాదము తగ్గుచుండునని సంభవనీయతాశాస్త్ర పరిశోధకులు నిర్ధరించిరి.

విద్యావిషయక సాంఖ్యికశాస్త్రము : విద్యా, మనశ్శాస్త్రములు రెండును సాంఖ్యక శాస్త్రమునకు మరి రెండు వినియోగక్షేత్రములు. ఈ అనుశీలన వలన ఉద్గతమైన ప్రధాన భావమును ఇట్లు చెప్పవచ్చును. పిల్లల మతి సామర్థ్యము రెండు భాగములుగ నుండును. మొదటిది మొత్తపు సామాన్య సామర్థ్యము, లేదా బౌద్ధికగుణ్యాము. రెండవది ఒక విషయమును నేర్చుకొనుటయందు, లేదా ఒక ప్రత్యేక కార్యాంశమందు వ్యక్తికి గల విశిష్టశక్తి. మనో

మాపన శాస్త్రమందు వ్యక్తుల విశిష్టశక్తులను నిర్ణయించుటకు శోధనలు ఉపకల్పించి, వీటి నాధారముగా వ్యక్తులకు మార్కులు నీయుదురు. ఈ నిర్ణయ విధానమునకు కారణాంశ విశ్లేషణ అని పేరు. ఇట్టి సాంఖ్యక పరిశోధనలు మానవుని మేధాశక్తికి సంబంధించినవగుటచే అవి కొన్ని యిబ్బందుల నెదుర్కొనవలసి వచ్చుచున్నది. ఆ విషయములనిచ్చట విపులముగా వ్రాయ వీలుపడదు.

అర్థమితి శాస్త్రము : పరిమాణాత్మకమైన ఆర్థికశాస్త్రానుశీలన యొక్క ఆవశ్యకత క్రమముగా అధికమగుచున్నది. ఇందలి తొలి ప్రయత్నములు సాంఖ్యక శాస్త్ర నియమములను వివేచన చేయకయే ఆ గణన పద్ధతులను వినియోగించుటలో కడచినవి. గత రెండు దశాబ్దములలో ఈ కార్యమందనేక లోపములు గుర్తించబడినవి. అర్థమితి సిద్ధాంతము నేడు దృఢమైన ఆధారములపై నిర్మించబడియున్నది. మిక్కిలి వ్యాప్తములైనట్టియు, గణితములో నుండు సమీకరణముల రూపములతో వ్రాయబడినట్టియు, ఆర్థికశాస్త్రములోని అంశములు ఈ అర్థమితి శాస్త్రములో నెట్టి విషయమునకైనను పునాదులు. ఈ పునాదులపై నిర్మించవలసినది సాంఖ్యక విషయము. అదియును ఇటీవల వెలుగు చూచిన విశిష్టభాగము. అదెట్లన: అనేకమంది వ్యక్తులు ఒకే సందర్భములో పూర్తిగా నిర్ణీతమైన విధమునగాని, పూర్తిగ స్వతంత్రముగ గాని ప్రవర్తించరు. ఒకే వ్యక్తి వేరు వేరు కాలములందు కొంతవరకైనను భేదించు ప్రవర్తనను చూపును. మొత్తము ప్రవర్తనలలో సంభావ్యతా క్రమము ఇమిడియుండునని తలంచుటయు, అట్టి క్రమము నొకదానిని ఆరోపించుటయు ఉచితమేనని టి. హావెల్మో విశదీకరించియున్నాడు. దీనిని శాస్త్రజ్ఞులు కూడ అంగీకరించియున్నారు. సంభావ్యతను వర్తింపజేసి లభ్యమైన సంఘటనలను పరీక్షించి, నిర్ణయముల చేయుట మొదలు పెట్టినంతనే సాంఖ్యకశాస్త్రములో విహరించుట యగుచున్నది. కాని దీని నిర్దుష్టముగా జరుపు పద్ధతులు తెలియక కొంత కాలము అసమ్మతమైన సందర్భములందు కూడ సాధారణ ప్రతీపగమన పద్ధతులనే వాడుచుండిరి. దీనికి కారణము ఆర్థిక చలరాశులు ఒక దానిపై నొకటి పరస్పర ప్రభావము కల్గినవన్న విషయము లెక్కచేయక పోవుటయే. అప్పుడప్పుడు అసహజములైన ఫలితములు వచ్చుటవలన మూలవిషయములను పునఃపరిశీలన చేసి ఆర్థిక చలరాశుల పరస్పర ప్రభావ గుణమును ఒక కారణముగా గుర్తించినారు. పైగా ఒకే ఆర్థిక చలరాశియొక్క మూల్యపరంపరలోని విలువలను యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపములోని విలువలుగా తలంచుట తరచు దోషయుక్తమైయుండును. పలన ప్రక్క ప్రక్కన వచ్చు విలువలు సాంఖ్యక సంబంధ రహితములై యుండకపోవుట సాధారణముగ జరుగుచుండును. దీనిని స్వయం సంబంధము అని చెప్పుదురు. ఒకే పరంపరలో నుండు స్వయం సంబంధ గుణముచేతను, రెండు పరంపరలలో నుండు పరస్పర ప్రభావ గుణముచేతను సాధారణ ప్రతీపగమన పద్ధతి చాల సందర్భములలో దోషయుతమై వదలివేయవలసి వచ్చును. ఆర్థికరాశుల సంబంధ సమీకరణమును నైర్మాణిక సమీకరణమందురు. ఇట్టి సమీకరణములోని నిశ్చిత విలువలను సరియైన పద్ధతులలో అంచనావేయుట ఎట్లు? అన్న విషయమునందు చాల పరిశోధనలు జరిగినవి. ఇప్పటికిని జరుగుచున్నవి కూడ. ఈ అంచనా పద్ధతి సాంఖ్యకశాస్త్రములో ఒక విశిష్ట భాగముగ రూపొందుచున్నది.

ఆర్థిక విషయ పరిశీలనయందు ఒక ప్రతికృతిని నిర్మించుట, దానిని బట్టి లభ్యములగు ఫలితముల పరీక్షించి కర్తవ్యమును నిర్ణయించుట ప్రస్తుత కాలములో పరిపాటిగా నున్నది. దేశాభివృద్ధిని ఏ మార్గములో సాధించవలెను అను విషయమును ఆలోచించునపుడు అనేక విధములైన ప్రతికృతుల నిర్మించి, అవి చూపు మార్గములను అనుసరించుటలో గల కష్ట ప్రమాదముల పోల్చి చూచి, ఒక మార్గమును ఎన్నుకొనుటయే కదా యోజనలోని ముఖ్యాంశము.

నీతి విధాన ప్రయోజనమునకు, పన్నులు విధించుటకు, యోజనలకు ఉపయోగపడుచుండుటచేత, ప్రస్తుత కాలములో ప్రభుత్వములు అర్థమితిశాస్త్రమును ఆదరించుచున్నారు.

అర్థనవిశ్లేషణానుశీలన అర్థమితి శాస్త్రములో ముఖ్యభాగము.

ప్రజనన శాస్త్రము ; జీవన మాపనము, ప్రోబిట్ విశ్లేషణ: సాంఖ్యక క్షేత్రప్రయోగములనండగా గొని ప్రజననశాస్త్ర పక్షములు కొన్ని అనుశీలనకు గురియైనవి. వృక్షశాస్త్రమందట్టి ప్రయోగముల విన్యాసము, విశ్లేషణ ఆర్. వి. ఫిషర్ చేత ఎక్కువగా అభివృద్ధి నొందించబడినవి.

కారణాంశముల పరస్పర ప్రభావమును, పాలిజీన్ల లంకెలను అంచనా వేయుటకు, రక్తవర్గములను విశ్లేషణ చేయుటకు, సాంఖ్యకశాస్త్రము తోడ్పడుచున్నది.

మానవ జాతులయొక్క విశిష్టతలను పరిశోధించుటలో కూడ సాంఖ్యక పద్ధతులు ప్రవేశపెట్టబడినవి. వివేచనాత్మక విశ్లేషణ అను పేరుగల సాంఖ్యక పద్ధతి దీనికై వాడుక చేయబడుచున్నది. ఈ వివేచన ప్రకరణములో

మనుష్యుల పుర్రెలకు చెందిన కొలతలను ఉపయోగించుచున్నారు.

ఔషధములను వేరువేరు మోతాదులలో వాడినప్పుడు రోగులు, ప్రయోగమునకు గురియగు జంతువులు చూపు ఫలితముల పరీక్షను ప్రోబిట్ విశ్లేషణ యందుము. దీనిలో లాగ్ నార్మల్ లోకము యొక్క సంభావ్యతా విధానము సాధారణముగా మనకు తారసిల్లును.

కాలశ్రేణి : కాలాను క్రమము ననుసరించి నిర్దేశింపబడు ప్రత్యవేక్షణల క్రమమును ఎద్దానినైన కాలశ్రేణియందుము, ప్రదేశ క్రమమున విన్యస్తమైన ప్రత్యవేక్షణల పరంపర కూడ ఈ జాతికి చెందిన శ్రేణియే. కాలమును సమభాగములలోనికి విభజించి, ఈ కాలభాగములలో ప్రతిదాని యందును ఒక ప్రత్యవేక్షణ కావించినచో, వేరువేరు ప్రత్యవేక్షణలు వేరువేరు లోకములకు చెందియుండును. అనగా మనకు వచ్చిన ప్రత్యవేక్షణలకు బదులుగ, యాదృచ్ఛిక హేతువులచే నింకొకప్రత్యవేక్షణల పరంపర వచ్చియుండ వచ్చును. ఇట్లు మనకు లభ్యమైన పరంపర అనేక పరంపరల సంకలనమైన లోకమునుండి వచ్చియున్నది. ఈ లోకమునకు ఒక సంభవనీయతా క్రమమును మనమారోపించినచో, మనకు లబ్ధమగు ప్రత్యవేక్షణ పరంపర ఒక మచ్చు అని భావించనగును. ఈ మచ్చు యొక్క సైజు ఒకటి మాత్రమే. ఏలన, అన్ని పరంపరలలో మనకు లభ్యమైనది ఒక పరంపరమాత్రమే.

ఇట్టి ఏక పరంపర అయిన కాలశ్రేణిని సాధారణముగ తేలిక పద్ధతులలో పరీక్షించెదరు. ఇట్టి పరీక్ష సామాన్య ప్రయోజనములకు సరిపడియుండుట చేత, అచ్చటితో నది ముగియుచుండును. కాని, కొన్ని అవసరములకు ఇట్టి పరీక్ష అసంతృప్తికరమై యుండును.

ప్రతికాల శ్రేణియందును మూడు భాగములుండును. (1) ఉన్ముఖత, లేదా దీర్ఘకాలపు పోకడ, (2) చక్ర భాగము (3) యాదృచ్ఛికావశేషము. సాధారణ విశ్లేషణలో యాదృచ్ఛికావశేషభాగము పరీక్షింపబడుచుండుటలేదు.

ఉన్ముఖతను నిర్ణయించుటలో అనేక అనుశీలనలు నెలకొల్పబడినవి. ఉన్ముఖత బహుపదమని నిర్దేశించి ఈ నిర్దేశ దృష్టిలో దానిని అంచనా వేయ యత్నముగావించ వచ్చును. ఉన్ముఖత చల మధ్యమ విధానములో తరుచుగా అంచనా వేయబడుచున్నది. కాలశ్రేణి ఆదిలో లఘు ప్రమాణమూల్యమై, తుదకొక ఉన్నత హద్దు నందికొను పెరుగుదలను సూచించు నపుడు ఉన్ముఖత యొక లాజిస్టిక్ రేఖావిధముగ నున్నదని అనుకొనవచ్చును. అన్ని పక్షములందును అంచనా వేయుటకు పూర్వము ఉన్ముఖత ఎట్టిదని తలంచబడినదో నిర్దేశించుట అవశ్యకము. ఇట్టి నిర్దేశము లేనిదే ఆ పోకడను అంచనావేయుటకు వీలులేదు.

తరువాత కాలశ్రేణియొక్క చక్ర ఘటకము వైపు మన దృష్టిని మరల్చి చూతము. కాలశ్రేణిలో ప్రచ్ఛన్నమై చక్ర భాగములుండవచ్చునని శాస్త్రవేత్తల ఊహ. సూర్యుని మచ్చల ఉద్రేకతీవ్రతకు సంబంధించిన ఆవృత్తికాలము శాస్త్రజ్ఞులను; ఉత్పత్తి, ధరలు మొదలగువానితో సంబంధించిన వ్యాపార చక్రములు అర్థిక శాస్త్రజ్ఞులను ఆకర్షించినవి.

చక్రభాగములో ఋతుపరిణామము నాశ్రయించి యుండు భాగమునకు ఋతుభాగము అని పేరు. అనేక కాలశ్రేణులలో ఈ భాగమును అంచనా వేయవలసిన అవసరము కల్గుచుండును.

ఇక మూడవభాగము యాదృచ్ఛికావశేషశ్రేణి, ఇది వాస్తవికముగ సంభావ్యతాగణన నాధారముగా గొని పరిశోధన చేయబడవలసిన శ్రేణి.

అవశేష కాలశ్రేణి లక్షణములను లోతుగా పరీక్షించుటకు గావించబడు అనుశీలనలు వాటి సంఖ్య యందు, గాంభీర్యమందు ఇటీవల అమితాభివృద్ధిని గాంచినవి.

యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు : కాలపథములో సంభావ్యతా నియమముల ననుసరించి వికాసమును చెందు విషయము యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ యని చెప్పబడును.

ఇది బహురాశి సంభావ్యతా విభజనమునకు అసంఖ్యాక బహుళీకృత రూపము.

కనుక అనంత పారిమాణిక క్షేత్రమందు సంభావ్యత నెట్లు భావింతుమో ఆ భావము యొక్క పరీక్ష యావశ్యకము.

కొన్ని సమయములందైనను మనము అట్టి సంభావ్యతలనుగ్గడించుట నిరర్థకము కాదని కోల్మోగరాఫ్ చూపెను. ఇంతేకాక, అణుసంఖ్య అపరిమితమైనపుడు సాంప్రదాయిక భౌతిక చలన శాస్త్రము సాంఖ్యక చలనశాస్త్రమునకు చోటిచ్చినట్లే, బహురాశి సంభావ్యతా విధానము అసంఖ్యాక రాశి క్షేత్ర సంభావ్యతా విధానమునకు దారి చూపినది.

గత పదునైదు వత్సరములలో యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల అనుశీలనయందు సాంఖ్యక ఫలిత ప్రకరణము ప్రవేశపెట్టబడినది.

ఈ ప్రక్రియలలో : (1) పెరుగున్న, లేదా వృద్ధిపొందుచున్న ప్రక్రియలు; (2) స్థావర ప్రక్రియలు అను రెండు ముఖ్యమైన విధములున్నవి.

వృద్ధి ప్రతికృతులు కాలశ్రేణి. భీమా సిద్ధాంతము, ప్రసరణము, కణముల విఘటన, వార్తాప్రసార శాస్త్రము, నిలవ జేయుట, ఆనకట్టులోని జలపరిమాణము మొదలైనవి. ఇట్టి అనేక సమస్యలు రానురాను యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల దృక్పథమునుండి అనుశీలింపబడుచున్నవి. క. నా. భూ.

సిరీజ్ : సూర్యుని కుటుంబమందు మనకు పరిచితమైన బుధుడు, శుక్రుడు, భూమి మొదలుకొని ప్లూటోవరకు ఉన్న గ్రహములే కాక, చాల లఘు గ్రహముల సమూహమును ఉన్నది (చూ. లఘుగ్రహములు - పు. 483). ఈ లఘుగ్రహముల సమూహము కుజ, గురు గ్రహముల కక్ష్యల మధ్యనున్నది. కుజ, గురు గ్రహముల మధ్య ఒకప్పుడుండిన గ్రహ మొకటి బ్రద్దలై, ఈ లఘుగ్రహములు ఏర్పడినవి అని ఖగోళజ్ఞుల విశ్వాసము. సూర్యుని చుట్టు పరిభ్రమించు గ్రహముల దూరముల క్రమమును పరిశీలించినచో, కుజునికి, గురునికి మధ్య చాల ఎడము గోచరించునను భూతార్థము పై కల్పనను పోషించుచున్నది.

వందలకొలది ఉన్న ఈ లఘుగ్రహములలో ఇదివరకు కనుగొనబడిన వాటిలో మిక్కిలి పెద్దదైన దానికి సిరీజ్ అని పేరు. ఇది 1801 లో కనుగొనబడినది. లెక్క గట్టిన దాని కక్ష్య కుజ, గురు గ్రహముల కక్ష్యల మధ్యనున్నది. సూర్యునినుండి దీని సగటు దూరము 415,211,000 కి. మీ. దాని కక్ష్యా వికేంద్రత 0.079. నక్షత్రములకు సాపేక్షముగ సూర్యుని చుట్టు అది 1681 రోజులలో ఒక భ్రమణమును పూర్తిచేయును. ఇది లఘుగ్రహములలోకెల్ల పెద్దది కాని, మిక్కిలి ప్రకాశవంతమైనది కాదు. దాని వ్యాసము 756.39 కి. మీ. అది కక్ష్యలో సూర్యునికి అటు వైపు నున్నప్పుడు ఒక చిన్న దూర దర్శనిలో మనకు తెలిసీ తెలియక ఉండును. అ. న.

సూర్యప్రజ్ఞప్తి : సూర్యప్రజ్ఞప్తి (సూర్యుని గురించిన జ్ఞానము) జైనుల ఉపాంగ గ్రంథములో ఒకటి. ఇది ఖగోళ, విశ్వశాస్త్రముల వివరించు గ్రంథము.

జైనులకు ఖగోళ గణిత శాస్త్రములు మతానుశీలనోపయోగములగు శాస్త్రములు. వారి ముఖ్య గ్రంథములు గణితమును ప్రశంసించుచు వాటి విషయముల పేర్కొనునే గాని ప్రత్యక్షముగా గణిత శాస్త్ర విషయముల చర్చించవు. ఉపాంగములలో కొన్ని ఖగోళ, విశ్వోల్లేఖన శాస్త్రముల కంకిత మొనర్చబడినవి గలవు. ఇవియే 'సూర్యప్రజ్ఞప్తి', 'చంద్ర ప్రజ్ఞప్తి', 'జంబూ ద్వీప ప్రజ్ఞప్తి'. అనునవి. మొదటివి రెండును విషయ సామ్యము కలవి. ఇవి సూర్యుని, చంద్రుని, నక్షత్రముల చలనములను వర్ణించును.

సూర్య ప్రజ్ఞప్తి, చంద్ర ప్రజ్ఞప్తి గ్రంథములలోని విశ్వోల్లేఖన భారతీయపురాణములందు, వేదాంగ జ్యోతిషమందు ఉన్న విషయములకు సదృశమైనది. కాని ఉత్తరాయణము ధనిష్ఠ (శ్రవిష్ఠ) నుండి అభిజత్తునకు స్థాన వినిమయమును చెందినది. అందువలన సూర్య ప్రజ్ఞప్తిలో నీయబడిన ఖగోళ శాస్త్ర విషయములు వేదాంగ జ్యోతిషమందు కననగు వాటికన్న కొన్ని శతాబ్దముల వెనుకవి. కాని క్రీ. పూ. 4 వ శతాబ్దములలో జీవించిన భద్రబాహువు దీనికొక వ్యాఖ్యానము వ్రాసినాడందురు. కనుక సూర్యప్రజ్ఞప్తి క్రీ. పూ. 5 వ శతాబ్దమునకు చేరినదనవచ్చును.

సూర్య ప్రజ్ఞప్తి ప్రకారము సూర్యుడు, చంద్రుడు, గ్రహములు, నక్షత్రములు ఇవి అన్నియు మేరు పర్వతము చుట్టు చదును ఆకారము గల భూతలమునకు సమానాంతర తలములందు భ్రమించుచున్నవి. ఈ భ్రమించు మూర్తులలో సూర్యుడు అన్నిటికన్న దగ్గరగను, నక్షత్రములు అన్నిటికన్న దూరముగనుఉన్నవి. భూమియొక్క గుండ్రముగానున్న చదును తలము నాలుగు ఖండములుగ విభక్తమైయున్నది. ఇందలి ప్రతి ఖండము 24 గంటలలో సమాన అహర్నిశా ప్రమాణము కలదిగా నుండవలెను. కనుక, విశ్వము గురించి ఊహించిన జైన గణితజ్ఞులు ప్రత్యేకముగ సూర్య చంద్ర నక్షత్రముల జతలయొక్క ఆవశ్యకత నూహించిరి. ఈ జతలు ఒక వ్యాసపు కొనల నమరియున్న ఒకే కక్ష్యయందు భ్రమించును. ప్రతి భూఖండము పై ఉదయాస్తమయములు ఏకాంతరముగ ప్రదర్శించుచుండును. మామూలు 27 నక్షత్రములకు అభిజిత్తును చేర్చి 28 నక్షత్రములనిరి. గ్రహముల పరిచయము వారికి కలదు. కాని వీటి చారముల జ్ఞానము పొందుపరుపబడలేదు.

సూర్య, చంద్ర చారముల సంపూర్ణానుశీలనకు వారు యత్నించిరి. భూమధ్య రేఖకు ఉత్తరమునుండి దక్షిణము వైపు సూర్యుని వ్యక్త చలనమునకు వారిచ్చిన వివరణ ఈ క్రిందిది. సూర్యుని కక్ష్య ఒకే వృత్తమును అనుసరించలేదు. అది 183 ఏకకేంద్రవృత్తములగు కక్ష్యలందు ఒక్కొక్క అయనమునకు ఒక్కొక్క కక్ష్య చొప్పున చలించుచుండును. అన్నిటికన్న లోపల వృత్తములో సూర్యుడున్నప్పుడు అది కటకాయనమగును. అన్నిటికన్న బయటనున్న వృత్తములో నున్నప్పుడు మకరాయనము సంభవించును. ఇట్లే చంద్ర చారమునకు ఒక్కొక్కటి 13 రోజులు వ్యాప్తిగల రెండు అయనములును, సమాన సంఖ్యకల ఏకకేంద్రీయ వృత్తములును ఆరోపించబడినవి.

సౌర, చాంద్ర, నాక్షత్ర, సావన, కార్మ (సివిల్) వత్సరముల వారు గుర్తించిరి. ప్రధానముగ చాంద్ర మానము ఆధారముగా గల వారి పంచాంగము సూర్య చారమునకు సంబంధితమైయున్నది. అందువలన యుగము యొక్క 5 సంవత్సరములలో రెండు ప్రత్యేకము 13 మాస ములు గలవి యగును.

ఏక కేంద్రీయ ఏకాంతర ద్వీప సముద్ర వలయముల క్రింద చదునుగానున్న భూబింబము విభక్తమైనట్లు వర్ణించ బడినది. ఈ గ్రంథమందలి గణితము ప్రశంసనీయ కౌశల మును, భిన్నాంక నిర్వహణము నందలి గ్రంథకర్తకు గల సామర్థ్యమును తెలియజేయును. పెద్ద సంఖ్యలకు వర్గ మూలము కనిపెట్టు విధము వారికి తెలిసియుండెను.

సూర్య చంద్రుల జతలున్నవను జైనుల కల్పన భారత ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులచే నిర్దాక్షిణ్యముగ ఖండింపబడినది. వేదాంగ జ్యోతిషము కాని, పురాణములు కాని ఈ కల్పన నంగీకరించలేదు. సరస్వతి

సూర్యసిద్ధాంతము : ఇది యొక అపౌరుషేయ సిద్ధాంత గ్రంథము. కాబట్టి సాటి ఇతర గ్రంథములకు ప్రాముఖ్యము తగ్గినది. ఇందు భగణములు మహాయుగము నకు ఇవ్వబడియుండుటచే ప్రస్తుత కాలమునకు గ్రహ స్ఫుటము చేయగా లభించు ఫలితములు ఆదరణీయము లగుచున్నవి. దీని నిర్దిష్టకాలము కృతయుగాంతము ; అనగా క్రీ. పూ. 3102 లో ప్రారంభించిన కలియుగమునకు పూర్వము 21,60,000 సంవత్సరములు. ఇంత ప్రాచీనత నమ్మదగినదికాదని కొందరి అభిప్రాయము.

దీనికి అర్వాచీనములగు గ్రంథములు కొన్ని కలవు. వానిలో ముఖ్యములయినవి: (1) కలియుగాది నిర్దిష్ట కాలముగాగల ఆర్యభటీయము ; (2) క్రీ. పూ. 551 నిర్దిష్ట కాలముగాగల బ్రహ్మగుప్తుని ఖండ ఖాద్యకము ; (3) శాలివాహనశకము నిర్దిష్టకాలముగాగల రెండవ భాస్కరా చార్యుని సిద్ధాంత శిరోమణి. సూర్యసిద్ధాంత సారాంశము క్రింద ఇవ్వబడినది.

కృతయుగాంతమున గ్రహగతుల రహస్యమును తెలిసి కొనుటకై మయాసురుడు సూర్యుని గురించి తపస్సు చేసెను. అపుడు సూర్యభగవానుడు తన అంశ పురుషుని మయాసురునికి గ్రహగతి రహస్యమును ఉపదేశించుమని ఆదేశించెను. కాబట్టి ఈ గ్రంథమునకు 'సూర్యసిద్ధాంత' మని పేరు కలిగినది. ఈ శాస్త్రము పూర్వము సూర్యునిచే చెప్పబడెను. కాని యుగపరివర్తనమువలన లోపము చెందుటచే దీనిని మరల సూర్యాంశ పురుషుడు మయా సురునికి ఉపదేశించెను.

కాలము రెండు విధములు. ఒకటి ప్రపంచ సృష్టి స్థితిలయములకు కారణము ; రెండవది గణితగోచరము. స్వస్థసుఖాసీనుడగు మానవుని ఉచ్ఛ్వాస నిశ్వాసముల మధ్యకాలమునకు 'ప్రాణ' మని పేరు. ఇది 4 సెకనుల ప్రమాణము ; దీనికి మూర్తమనికూడ పేరు. ఒక సెకనులో $\frac{1}{33750}$ భాగమునకు త్రుటి యని పేరు. ఇది 'అమూర్త' కాలము.

6 ప్రాణములు = 1 వినాడి (విఘటి) ; 60 వినాడులు = 1 నాడి (ఘటి) ; 60 ఘటికలు = 1 దినము ; 30 దినములు 1 నెల. ఈ కాలమానము నాక్షత్ర, సౌర, చాంద్రము లని మూడు విధములు. 12 సౌర మాసములు = 1 సౌర సంవత్సరము. ఇది దేవమానములో ఒక దినము, లేదా అహోరాత్రము ; 360 దేవ అహోరాత్రములు = 1 దేవ సంవత్సరము. దేవతలకును, అసురులకును కాలమానము సమానము. దేవతలు ఉత్తర ధ్రువవాసులు ; అసురులు దక్షిణ ధ్రువవాసులు. వీరి రాత్రింబవళ్లు వ్యత్యస్తముగా నుండును.

12000 దేవసంవత్సరములు = 4,320,000 సౌర సంవత్స రములు. ఇవి సంధ్యా, సంధ్యాంశలతో ఒక 'చతుర్యుగము' అగును. అవి . కృత, త్రేతా, ద్వాపర, కలియుగములు : 4, 3, 2, 1 నిష్పత్తిలోనుండును. ఈ గణితమానము ప్రకా రము ఇప్పుడు ప్రచారములోనున్న సూర్య సిద్ధాంతము క్రీ. శ, 1960 సంవత్సరమునకు 25,97,061 సంవత్సరము లకు పూర్వము సూర్యాంశ పురుషునిచే మయాసురునకు ఉపదేశింపబడినది. ప్రతి యుగములోను ఆరవభాగము సంధ్యాశయగును ; అది యుగమానములో చేరియుండును. 71 మహాయుగములు లేదా చతుర్యుగములు = 1 మన్వంత రము = 306,720,000 సౌరసంవత్సరములు. ప్రతి మన్వంత రమునకు కడపట ఒక కృతయుగ కాలము సంధికాలము ; ప్రతి మన్వంతరాంతమున జలప్రళయము కలుగును.

14 మన్వంతరములు = 71 × 14 = 994 మహా యుగములు.

15 సంధికాలములు = 17,28,000 × 15 సంవత్సరములు = 6 మహాయుగములు.

సంధికాలముతో 14 మన్వంతరములు = 100 మహా యుగములు = 1 కల్పము.

సృష్టికర్తయగు బ్రహ్మకు ఒక కల్పకాలము పగలు, ఒక కల్పకాలము రాత్రి. బ్రహ్మ యొక్క ఆయుర్దాయము 100 సంవత్సరములు. అందు రెండవ అర్ధభాగములో మొదటి కల్పము ఇప్పుడు జరుగుచున్నది ; ఇందు సంధి

కాలముతో 6 మన్వంతరములు జరిగిన తరువాత 7 వ మనువగు వైవస్వమని మన్వంతరములో 27 మహాయుగములు ముగిసిన పిదప 28 మహాయుగములో కృతయుగాంతమున ఈ గ్రంథము ఉపదేశింపబడెను. చరాచరములను సృష్టించుటకు 47,400 దేవసంవత్సరములు కావలయును. తారా గ్రహములు తమతమ కక్ష్యలలో సృష్ట్యాదిలో భ్రమణము చేయుటను ప్రారంభించెను. అట్లు ప్రారంభించిన తరువాత కృతయుగాంతము వరకు గతించిన సంవత్సరములు 1,953,720,000.

1960 వరకు సృష్టికాల గతాబ్దములు - 1,956,317,061.

గ్రహస్థితులు: ఈ కృతయుగాంతమునందు మధ్యగత గ్రహములు అన్నియు మేషాదియందు ఏకీభవించి యుండెను. వాని పాత మందోచ్చలు ఇతర స్థానము లందుండెను. తారాగ్రహ కక్ష్యలు రవి కక్ష్యను ఖండించు బిందువునకు 'పాతము' అని పేరు. చంద్రపాతములను రాహుకేతువు లందురు. మందోచ్చ అనగా గ్రహకక్ష్యలో భూమికి అతి దూరములో నుండు బిందువు; శీఘ్రోచ్చ అనగా గ్రహకక్ష్యలో భూమికి అతి సమీపములోనుండు బిందువు.

భగణములు: ఇవి అన్నియు ఒక మహాయుగమునకు ఈయబడినవి:

తారాగ్రహములు : బిందువులు		భగణములు
1. రవి, బుధ, శుక్రగ్రహములు	...	4,320,000
2. కుజ, గురు, శనుల శీఘ్రోచ్చములు	...	4,320,000
3. చంద్రుడు	...	57,753,336
4. కుజుడు	...	2,296,832
5. గురుడు	...	364,220
6. శని	...	146,568
7. చంద్ర మందోచ్చ	...	488,203
8. బుధ శీఘ్రోచ్చ	...	17,937,060
9. శుక్ర శీఘ్రోచ్చ	...	7,022,376
10. నాక్షత్ర	...	1,582,237,828
11. చంద్రపాతము	...	232,238
12. బుధపాతము	...	488
13. శుక్రపాతము	...	903
14. కుజపాతము	...	214
15. గురుపాతము	...	174
16. శనిపాతము	...	662
17. సావన లేదా సౌరదినములు	...	1,577,917,828
18. చాంద్రదినములు	...	1,603,000,080

గ్రహగతులన్నియు అపసవ్యములు, పాతములు సవ్యగతులు కలవి.

ఒక కల్పము (1000 మహాయుగములు) లో రవి, కుజ, బుధ, గురు, శుక్రుల మందోచ్చల భగణములు క్రమముగా 387; 204; 368; 900; 535; 39 సంఖ్యలు కలవియై యుండును.

భూ కర్ణము; భూ పరిధి:

భూ కర్ణము = 1600 యోజనములు;

భూ పరిధి $= 1600 \sqrt{10}$. యోజనములు.

స్వదేశపరిధి: భూ పరిధి × లంబజ్యా. ప్రధానయామ్యోత్తర రేఖ ఉజ్జయినీ, ఉత్తర ధ్రువముల గుండ వెళ్లును.

దేశాంతరము: గణితాగత కాలమునకు ఆలస్యముగా చంద్రగ్రహణము ప్రారంభించిన ప్రదేశము ప్రధాన రేఖకు తూర్పునను, ముందుగ గ్రహణ ప్రారంభమయిన ప్రదేశము పశ్చిమమునను ఉండును.

గ్రహముల పరమ విక్షేపములు: చంద్ర, కుజ, బుధ, గురు, శుక్ర, శనులకు క్రమముగా 270, 90, 120, 60, 120, 120 లిప్తలు పరమ విక్షేపములు.

గ్రహముల గతి హేతువులు: అదృశ్యరూపములగు శీఘ్రమందోచ్చ పాతములు గ్రహముల గతి హేతువులు. వాని వాత రశ్మి జాలములచే గ్రహములు ప్రాక్పశ్చిమము గాను, సవ్యాప సవ్యములుగాను ఆకర్షింపబడును. మరియు 'ప్రవహము' అని పేరు గల ఒక వాయువు గ్రహములను మందోచ్చలవైపు ఆకర్షించుచున్నది. [ఇచట న్యూటన్‌కు అనేక సహస్రాబ్దములకు పూర్వము గ్రహ భ్రమణములకు కారణము ఒక ఆకర్షణ వాయువని చెప్పబడినది. గ్రీక్ జ్యోతిష గ్రంథములలో ఈ విషయము కనబడదు. కాని, పాశ్చాత్య శాస్త్ర ప్రాధాన్యమును ఉత్కర్షించు మహనీయులు ఈ ముఖ్యవిషయమును గమనింపలేదు.]

జ్యా సాధనము: రాశి లిప్తల (1800) యొక్క $\frac{1}{8}$ భాగమునకు మొదటి జ్యా యగును; ($\sin$ of $3\frac{3}{4}^{\circ} = 225'$). రెండవ జ్యా (sine) కనుగొనుటకు మొదటి జ్యాను దానిచే భాగించిన పిమ్మట భాగఫలమును జ్యా (225) లో తీసివేసి మొదటి జ్యా తో చేర్పవలయును.

మూడవ జ్యా కనుగొనుటకు మొదటి రెండు జ్యా పిండములను మొదటి జ్యా పిండముచే భాగించి, వచ్చు భాగ ఫలముల మొత్తమును మొదటి జ్యా పిండములో తీసివేసి, వచ్చు శేషమును రెండవ జ్యా పిండముతో కూడవలయును. ఇట్లే అన్ని జ్యా పిండములను క్రమముగా కనుగొనవచ్చును. 6 వ జ్యా కనుగొనుటకు మొదటి 5 జ్యాలను మొదటి జ్యాతో భాగించగా వచ్చు భాగ ఫల

ముల మొత్తమును మొదటి జ్యాలో తీసివేసి, వచ్చు సంఖ్యను 5 వ జ్యాతో కూడవలయును.

24 జ్యాల వలన 90° ల వరకు జ్యా కనుగొనవచ్చును. ప్రతి జ్యా $3\frac{3}{4}^\circ$ యొక్క గుణకమయి యుండును. 23° యొక్క జ్యా కనుగొనుటకు 6 జ్యా $= 21^\circ$, 7 జ్యా $= 24\frac{3}{4}^\circ$. వీని యందుండి అనుపాతములో ఇష్ట జ్యా సాధనము చేయవచ్చును.

ఈ జ్యా విలువలు పూర్ణాంకములు; వీనిని 3438 చే భాగించిన నవీన జ్యా పథకము లభించును.

[జ్యా $= \frac{1}{2}$ Chord : జీవ = Sine of an angle)

గ్రహస్ఫుటము: ఇష్టదినము వరకు కృతయుగాంతము నుండి అహర్గణము సాధించి, అనుపాతముచే మధ్య గ్రహములు, పాతమందోచ్చలను ఇష్టదినమునకు సాధింప వలయును. తరువాత దృక్తుల్యముగా నుండునట్లు గణిత మూలమున గ్రహసాధనము చేయు విధానము ఈయబడినది. మందోచ్చ నుండి గ్రహమును తీసివేసిన 'మంద కేంద్రము' లభించును. అట్లే శీఘ్రోచ్చనుండి శీఘ్ర కేంద్రము లభించును. ఈ కేంద్రములుండు పాదములను నిర్ణయముచేసి వాని జ్యాలను కనుగొనవలయును.

గ్రహకక్ష్యలన్నియును 'విలోపములు': ఇచ్చట వాటిని వృత్తములుగా తీసికొనుటచే స్ఫుటగ్రహములు దృక్సిద్ధము లగుటకు మధ్యగ్రహములకు మంద, శీఘ్ర సంస్కారములు చేయుదురు. యుగ్మపాదాంతమున రవి మందపరిధి యొక్క అంశలు 14°, చంద్రునికి 32°; ఓజ (బేసి) పాదాంతమున ఇవి క్రమముగా $13^\circ\ 40'$, $31^\circ\ 40'$ అగును. కుజాది గ్రహములకు క్రమముగా మంద పరిధ్యంశలు 75, 30, 33, 12; 49 యుగ్మపాదాంతమునను, 72, 28, 32, 11, 48 ఓజ పాదాంతమునను ఉండును.

మందపరిధి, శీఘ్రపరిధి: కుజాది గ్రహములకు క్రమముగా శీఘ్రపరిధ్యంశలు 235, 133, 70, 262, 39 యుగ్మ పాదాంతమునను, 232, 132, 72, 260, 40 ఓజ పాదాంతమునను నుండును.

వీనినుండి గ్రహకక్షయందు అభీష్ట స్థానమున మంద, శీఘ్ర పరిధ్యంశలను అనుపాతమున కనుగొనవచ్చును. వీనికి 'స్ఫుట పరిధ్యంశ' అని పేరు.

తరువాత 'మందఫల'ము కనుగొనుటకు, శీఘ్రఫల సాధన విధానమునకు సూత్రములు సూర్యసిద్ధాంతమునందీయబడినవి.

ఉత్తమ గ్రహములకు 'శీఘ్రఫలము' గ్రహముల 'వార్షిక అతివర్తనము'ను అధమ గ్రహములకు సూర్యుని నుండి 'అంతరము'ను సూచించును.

'శీఘ్రకేంద్రము' నుండి 'శీఘ్ర భుజకోటి ఫలముల' సాధించి వానినుండి 'శీఘ్రకర్ణము'ను సాధింపవలయును.

రవిచంద్రుల స్ఫుటస్థితి కనుగొనుటకు మధ్యగ్రహములకు మాంద పరికర్మ ఒక్కసారి చేసిన చాలును. ఇతర గ్రహములకు శీఘ్ర, మాంద, మాందశీఘ్ర పరికర్మలు క్రమముగా చేసిన స్ఫుటగ్రహము లభించును. శీఘ్ర, మాంద పరికర్మలు గ్రహకేంద్రము మొదటి 6 రాశులందుండిన ధనాత్మకముగాను, తరువాత 6 రాశులందుండిన ఋణాత్మకముగాను ఉండును. తారాగ్రహముల శీఘ్ర కేంద్రములు నాలుగవ పరికర్మయందు క్రమముగా 164, 144, 130, 163, 115 అంశలుండిన వాని వక్రగతి ఆరంభించును; అవియే వీని చక్రశేషము లైన వక్రగతి నివర్తించును. 164° యొక్క చక్రశేషము $= 360^\circ - 164^\circ = 196^\circ$. తరువాత గ్రహముల స్వస్వపాతముల ఆధారముగా చేసికొని విక్షేపముల కనుగొను విధానము వివరింపబడినది.

విక్షేపము $= \delta$ అయిన, గ్రహముయొక్క దైనిక భ్రమణవృత్త త్రిజ్యా $= R\ \cos\ \delta$ = ద్యుజ్యా. ఇందు దివ్య గోళముయొక్క త్రిజ్యా $= R$.

అహోరాత్రమానమును కనుగొనుటకు:

శ్లో॥ 'క్రాంతిజ్యా విషువద్భాఘ్నీ క్షితిజ్యా ద్వాదశోద్ధృతా।
త్రిజ్యా గుణా హోరాత్రార్ధ కర్ణాప్తా చర జాసవః॥'

క్రాంతిజ్యా $= R\ \sin\ \delta$.

విషువద్భ $= 12\ \tan\ z$.

ఇందు $z = \phi + \delta$. విషువద్దిన మయినందున $\delta = 0$ కాబట్టి $z = \phi$. వీని రెంటిని గుణించి, 12 చే భాగించిన $\sin\ \delta\ \tan\ \phi$ లభించును. దీనికి 'క్షితిజ్యా' = 'కుజ్యా' అని పేరు.

దీనిని 'ద్యుజ్యా'చే భాగించిన వచ్చు ఫలితముయొక్క ధనుస్సు యొక్క 'జీవ'కు 'చరజాసువు' అని పేరు.

నవీన సిద్ధాంతరీత్యా $\cos\ h = -\tan\ \phi\ \tan\ \delta$.

$h = 90 \pm \theta$ అయిన

$$\cos\ h = \cos\ (90+\theta) = \frac{R\ \sin\ \delta\ \tan\ z}{R\ \cos\ \delta} =$$

$$= \tan\ z\ \tan\ \delta = \tan\ \phi\ \tan\ \delta$$

$\sin\ \theta = \tan\ \phi\ \tan\ \delta$ = చరజాసువులు.

దీనిని దినార్ధమునకు చేర్చి, 2 చే గుణించిన అహః పరిమాణము లభించును. క్రాంతి (δ) దక్షిణముననుండిన అది ఋణాత్మకమగును.

దిక్సాధనము: అంబుతల ప్రదేశమున ఒక ద్వాదశాంగుళ శంకువును స్థాపించి, అది కేంద్రమునందుండునట్లు అభీష్ట

వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తము గీయుము. శంకుచ్ఛాయ పూర్వాపరాహ్నములందు వృత్తమును స్పృశించు బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువుల చేర్పు జ్యాకు లంబ విదళన రేఖ నిర్మించుము. ఈ రేఖ దక్షిణోత్తర దిశల సూచించును. కేంద్రముగుండ వెళ్లు లంబరేఖ తూర్పు, పడమర దిశల నిర్దేశించును.

అయనాంశ :

శ్లో॥ త్రింశత్కృత్యో యుగే భానాం చక్రం ప్రాక్పరి లంబతే॥ 3-9.

'ఒక మహాయుగము (4320000 సం॥) నందు భచక్రము 600 సారులు పూర్వ దిశలో భ్రమణము చేయును'. ఇందువలన విషుబిందువునకు చలనము కలదని మన పూర్వీకులు గ్రహించిరి. అదియే అయనాంశకు మూలము. నవీన సిద్ధాంత రీత్యా అయనాంశ యొక్క విలువ సంవత్సరమునకు 50 వికలలు. పశ్చిమగతి గలిగి వ్యాఖ్యాత వివరించినట్లు విషుబిందువునకు చలనము పశ్చిమముననే గాని, పూర్వమునందు కాదు. బ్రహ్మసిద్ధాంతము నందు విషుచలనము పశ్చిమదిశయందని చెప్పబడినది. ఈ రెండు విషయములను సమన్వయము చేయుటకుగాను మన సిద్ధాంతులు ప్రాక్పశ్చిమ స్పందనమును శాస్త్రబాహ్యవాదమును బలపరచిరి. ఇట్లు చేయుటకంటె 'ప్రాక్పరిలంబనము' పొరబాటనియు, 'పశ్చిమ పరిలంబనము' సరియనియు వక్కాణించి యుండిన ప్రశంసనీయముగా నుండెడిది. లేదా ప్రాక్ అనగా పూర్వము - వెనుక అని అర్థము చేయవచ్చును. ఒక మహా యుగమున విషుబిందువునకు 600 భగణములు అనుట కూడ సరియగు విలువ నివ్వదు. ఈ పొరబాటు లెట్లు ఏర్పడినవో ఊహించుట దురవగాహము. విషుబిందుచలనమును మన పూర్వీకులు గుర్తించిరని మనము దృఢముగా నమ్మవచ్చును.

దేశ నిరూపణము : 3 — 14, 15 శ్లోకములు అభీష్ట ప్రదేశము యొక్క అక్షాంశమును కనుగొను విధానమును వివరించును.

అక్షాంశము = నతము + క్రాంతి.

$\phi = z + \delta$. ఇందు z = నతాంశ

δ = క్రాంతి ; ϕ = అక్షాంశము

విషు వృత్తమునకు ఉత్తరమున క్రాంతి ధనాత్మకముగాను, దక్షిణమున ఋణాత్మకముగాను తీసికొనవలయును.

పలభము : విషువద్దినమునందు మధ్యాహ్న శంకుచ్ఛాయకు 'పలభ' మని పేరు.

రవిస్ఫుటము : మధ్యాహ్నమున సూర్యుని నతమును తెలిసికొని అక్షాంశనుండి తీసివేసిన, రవి తాత్కాలిక క్రాంతి లభించును. దీనిని పరమాపక్రమ (ω) తో అనుపాతము చేసిన రవియొక్క స్ఫుటము లభించును.

రవియొక్క అగ్రము : ఆధునికులు అగ్రమును ఉత్తరమునుండి కొలుతురు. మన పూర్వీకులు తూర్పునుండి కొలుచుచుండినట్లు తోచుచున్నది.

$$\text{జీవ} \left[\text{అగ్రము}\right] = \frac{\text{జీవక్రాంతి}}{\text{కోజీవ అక్షాంశ}}$$

ఆధునిక రీత్యా ఇది $\sin \delta = \cos \phi \sin A$ అగును.

కాని అగ్రమును ఉత్తరమునుండి కొలిచిన

$\sin \delta = \cos \phi \cos A$ లభించును.

తరువాత సాయన రాశిమానములు, లగ్న మధ్య లగ్న సాధన విధానములు వివరింపబడినవి.

గ్రహణములు : ఆర్యుల వైదికకర్మలు గ్రహణములపై ఆధారపడి ఉన్నవి. గ్రహణకాలము గొప్ప పుణ్యకాలముగా పరిగణింప బడుచున్నది. అప్పుడు ఆర్యులు విశేషముగా దానములు చేయుదురు. ఆహార నియమమును పాటింతురు. చంద్రగ్రహణము పూర్ణిమ యందును, సూర్యగ్రహణము అమావాస్యయందును సంభవించును. అట్టి తిథులందు శ్రాద్ధకర్మ చేయవలసి వచ్చినచో గ్రహణానంతరము చేయుదురు. కాబట్టి గ్రహణకాల స్ఫుటమునందెక్కువ శ్రద్ధను మన పూర్వీకులు వహించిరి. గణితాగత ఫలితములు దృక్సిద్ధముగా నుండవలయునని చాల శ్రద్ధ వహించిరి. ఇందు వారి సామర్థ్యము ప్రశంసనీయము.

కొన్ని అంశములందు హెచ్చు తగ్గులుండినను సూర్యసిద్ధాంతగణితాగతఫలితములు నవీన విధానమునకు రమారమి సరియగును.

నవీన సిద్ధాంతము ప్రకారము రవిమండల వ్యాసము 695240 కి. మీ. చంద్రమండల వ్యాసము 1738 కి. మీ. కాని, సూర్యసిద్ధాంతమునందవి 6,500; 480 యోజనములున్నట్లు చెప్పబడినది (యోజనము = 12.87 కి. మీ.). కాని, వాని కోణీయ వ్యాసములు ఆధునిక విలువలకు సమానమగుటచే కట్టకడపటి ఫలితములు ప్రమాదరహితములై యున్నవి. చంద్రుని కోణీయవ్యాసము 32 కలలు,

భూచ్ఛాయాశంకు లేదా సూచి యొక్క పొడవును, చంద్రకక్షవద్ద దాని వ్యాసమును కనుగొను విధము ఇవ్వబడినది.

శ్లో॥ భానోర్భార్ధే మహీచ్ఛాయా తత్తుల్యేఽర్క సమేఽపి వా।
శశాంక పాతే గ్రహణం కియద్భాగాధికోనకే॥ 4-6.

'భూచ్ఛాయ రవికి ఆరురాశుల దూరములోనుండును. చంద్రపాతము (రాహుకేతువులు) రవికిగాని, భూచ్ఛా

యకుగాని సమానమయినపుడు లేదా కొంత హెచ్చు తగ్గుగా నున్నపుడు సూర్యగ్రహణముకాని, చంద్రగ్రహణముకాని ఏర్పడును.' అమావాస్యనాడు రవిచంద్రులేక స్థానగతులై యుందురు; పున్నమనాడు షడ్రాశి అంతరములో నుందురు.

శ్లో॥ ఛాదకో భాస్కరస్యేందు రధఃస్థో ఘనవద్భవేత్ ।
భూచ్ఛాయాం ప్రాఙ్ముఖశ్చంద్రో విశత్యస్య భవేదసౌ॥ 4-9

సూర్యగ్రహణమునందు చంద్రబింబము రవిబింబమును కప్పివేయును. చంద్రగ్రహణమునందు చంద్రుడు భూచ్ఛాయయందు ప్రవేశించును.

గ్రహణ ప్రమాణము కనుగొను విధానము వివరింపబడినది. పౌరాణికుల అభిప్రాయములకును, సిద్ధాంత విమర్శకును వ్యత్యాసముండునట్లున్నను, విమర్శించినచో మొత్తమును సమన్వయము చేయవచ్చును.

వలన (డిఫ్లెక్షన్): నిర్వచనము: ఆధునిక మార్గములో వలన V అయిన $\sin V = \sin z \sin \delta$. ఇది సూర్యగ్రహణ సాధనమునందు ఉపయోగింపబడును.

సూర్యగ్రహణము: ఇందు మొతట అతివర్తనము (లంబనము) సాధింపవలయును. రవి మధ్యలగ్నమునందుండునపుడు అతివర్తనము లేదు. ఇతర స్థానములందు రవికి విక్షేపములోను, ధ్రువకములోను కలుగు అతివర్తనమునకు సూత్రములు వివరింపబడినవి.

చంద్రగ్రహణము సంభవించునపుడు భూమిపై అన్ని చోట్లలోను గ్రహణము కనబడును. కాని సూర్యగ్రహణమునకు అట్లుకాదు. అప్పుడు చంద్రబింబము రవికి, భూమికి మధ్య వచ్చుటచే ఒకచోట కనబడు సూర్యగ్రహణము మరియొకచోట కనబడక పోవచ్చును. కాబట్టి సూర్యగ్రహణ సాధనము కష్టతరమని సులభముగా ఊహింపవచ్చును.

శ్లో॥ నచ్ఛేద్యక మృతే యస్మాద్భేదా గ్రహణయోః స్ఫుటాః ।
జ్ఞాయంతే తత్ప్రవక్ష్యామి ఛేద్యక జ్ఞానముత్తమమ్॥ 6-1

ఛేద్యక జ్ఞానము, లేదా సూర్యచంద్ర గ్రహణ జ్ఞానము సులభము కానందున ఛేద్యక విధానము పూర్ణముగా ఆరవ అధ్యాయమునందు వివరింపబడివది. సప్తమాధ్యాయమున తారాగ్రహముల విషయము వివరింపబడినది. రెండు తారాగ్రహముల సమాగమము 'గ్రహయుద్ధ' మనియును, చంద్రునితో ఒక గ్రహము చేరిన 'సమాగత' మనియు, రవితో చేరిన 'అస్తంగత' మనియు చెప్పుదురు.

జయింపబడిన గ్రహము వివర్ణముగాను, కాంతిహీనముగాను దక్షిణదిశ యందుండును. జయము పొందిన గ్రహము కాంతిమంతముగాను, స్థూలముగాను ఉత్తర దిశ యందుండును; దక్షిణవైపులో నుండినను పెద్దదిగా నుండును. దగ్గరనుండు గ్రహములు రెండును కాంతిమంతములైన, అపుడు వానికి 'సమాగమము' అనియు, రెండును కాంతిహీనములైన 'విగ్రహ' మనియు చెప్పుదురు. శుక్రుడు ఎల్లప్పుడును జయము పొందిన గ్రహము. (చూ. గ్రహణములు - పు. 248).

నక్షత్ర వివరణము: ఒక నక్షత్ర ప్రమాణము 800 కలలు. ప్రతి నక్షత్ర భోగమును 10 చే గుణించి గత నక్షత్రములతో చేర్చిన ఇష్ట నక్షత్రయోగతార (ముఖ్య నక్షత్రము) యొక్క ధ్రువకము లభించును. క్రింది పథకమునందు ఈ విషయములు వివరింపబడినవి:

నక్షత్రము	యోగతార ధ్రువకము			విక్షేపము
	రా.	అం.	లిప్తలు	
అశ్విని	0	8	0	10° ఉ
భరణి	0	20	0	12° ఉ
కృత్తిక	1	7	30	5° ఉ
రోహిణి	1	39	30	5° ద
మృగశిర	2	3	0	10° ద
ఆరుద్ర	2	7	20	9° ద
పునర్వసు	3	3	0	6° ఉ
పుష్యమి	3	16	0	0° ఉ
ఆశ్లేష	3	19	0	7° ద
మఘ	4	9	0	0° ఉ
పుబ్బ	4	24	0	12° ఉ
ఉత్తర	5	5	0	13° ఉ
హస్త	5	20	0	11° ద
చిత్త	6	0	0	2° ద
స్వాతి	6	19	0	37° ఉ
విశాఖ	7	3	0	1°-30 ద
అనూరాధ	7	14	0	3° ద
జ్యేష్ఠ	7	19	0	4° ద
మూల	8	1	0	9° ద
పూర్వాషాఢ	8	14	0	5°-30 ద
ఉత్తరాషాఢ	8	20	0	5° ద
అభిజిత్	8	26	40	60° ఉ
శ్రవణము	9	10	0	30° ఉ
ధనిష్ఠ	9	20	0	36° ఉ
శతభిషము	10	20	0	0-30 ద
పూర్వాభాద్ర	10	26	0	24° ఉ
ఉత్తరాభాద్ర	11	3	0	26° ఉ

నక్షత్రము	యోగతార ధ్రువకము			విక్షేపము
	రా.	అం.	లిప్తలు	
రేవతి	11	29	5	0°-0 ఉ
అగస్త్య	3	0	0	80° ద
మృగవ్యాధ	2	20	0	40° ద
అగ్ని	1	22	0	8° ఉ
బ్రహ్మహృదయ	1	22	0	20° ఉ
ప్రజాపతి	1	27	0	38° ఉ
అపాంవత్స	6	0	0	3° ఉ
ఆపః	6	0	0	9° ఉ

తారాగ్రహముల ఉదయాస్తమానములు : కుజ, గురు, శనులు పశ్చిమ దిశయందు అస్తమింతురు; తూర్పుదిశ యందు ఉదయింతురు; శుక్ర, బుధ, చంద్రులు పశ్చిమ దిశ యందు ఉదయింతురు; తూర్పున అస్తమించుదురు; బుధ, శుక్రులు వక్రించునపుడు దీనికి వ్యతిరేకముగా జరుగును.

కుజ, గురు, శనులు రవి కంటె మందగతి గల గ్రహ ములు; చంద్ర, బుధ, శుక్రులు శీఘ్రగతి గలవి.

రవి అస్తమించిన తరువాత తారా గ్రహములు అస్త మించు కాలమునకు, రవి ఉదయించుటకు పూర్వము తారాగ్రహములు ఉదయించు కాలమునకు 'కాలాంశ' అని చెప్పుదురు. కుజ, గురు శనులకు క్రమముగా 17, 11, 15 కాలాంశలు; శుక్రునికి వక్రించినపుడు 8 కాలాంశలు; ఋజుగతిలో 10 కాలాంశలు. బుధునికి వక్రములో 12 కాలాంశలు; ఋజుగతిలో 14 కాలాం శలు. అభిజిత్తు, బ్రహ్మహృదయ, స్వాతి, శ్రవణ, ధనిష్ఠ యొక్క విక్షేపములు అధికమయినందున అవి అస్తంగత ములు కావు. చంద్రుడు 12 అంశముల అంతరములో ఉదయాస్తమానములు పొందును.

వ్యతీపాత వైధృతులు : రవి, చంద్రులు ఒకే అయ నమునందున్నపుడు, లేదా వాని ధ్రువకముల మొత్తము ఒక మండలము (360°) అయినపుడు వానికి 'క్రాంతి సామ్యము' ఏర్పడినచో 'వైధృతి' యోగ మేర్పడును. రవి, చంద్రులు వేరు వేరు అయనములందుండి, వాని ధ్రువములు 6 రాశులకు సమాన మగునపుడు క్రాంతి సామ్యము ఏర్పడిన 'వ్యతీపాత' యోగ మేర్పడును.

మరియొక విధమున 'పాత' యోగ మేర్పడును: రవి, చంద్రుల ధ్రువకముల మొత్తమును లిప్తలుగా మార్చి 800 చే భాగించిన ఏర్పడు భాగఫలము 16, 17 లకు మధ్య నుండిన 'వ్యతీపాత' యోగ మేర్పడును.

సమానబలము గల రవిచంద్రుల కిరణ సంయోగము వలన లోకనాశనకరమగు అగ్ని ఏర్పడును. అప్పుడు ఏ శుభ కార్యములు చేయకూడదు.

ఇట్లే గండాంతము లందును, మూడు రాశి సంధు లందును శుభకార్యములు వర్జ్యములు.

సృష్టి వివరణము : సర్వాంతర్యామి యగు సంకర్ష ణుడు జలమయమగు ఈ విశ్వమునందు తన శక్తిని ప్రయో గించెను. తమోమయమగు విశ్వమునందు అది హిరణ్మ రూపమగు అండముగా ఏర్పడెను. అందు వాసుదేవుడు అనిరుద్ధుడై ఆవిర్భవించెను; తన్ను తానే సృజించుకొనెను.

హిరణ్య గర్భుడగు వాసుదేవుడు వేదములను పఠించెను. తమోవృతమగు విశ్వములో అతడు ఆదిత్యుడై ఆవిర్భ వించి చీకటిని పోగొట్టెను. మొట్టమొదట ఆవిర్భవించుటచే 'ఆదిత్యు' డని నామము. అంధకారము నాశనమగుటచే 'సూర్యుడ' నియు, 'సవిత' అనియు పర్యాయ నామ ములు. "అదిత్యవర్ణం తమసస్తుపారే" అని శ్రుతి వాక్యము. ఇతడు 'ప్రకాశాత్మ, తమోహంత, వేద త్రయాత్మకుడు, కాలాత్మ, కాలకృత్'. అతని మూడు పాదములు అగోచరములు. ఒక పాదము సకల చరాచర రూపమున ప్రకటితము.

"త్రిపాదూర్ధ్వ ఉదైత్పురుషః పాదోస్యేహా భవత్పునః"
శ్రుతి వాక్యము.

ఇందు సృష్టికిగాను అహంకారాత్ముడగు బ్రహ్మను సంకర్షణుడు సృజించెను; అహంకారమూర్తియగు బ్రహ్మ మనస్సునుండి చంద్రుని, కన్నులనుండి సూర్యుని సృజించెను. ఈ సూర్యుడు మన అండమునకు వెలుగు నిచ్చును. ఇంతకు ముందు వివరించిన ఆదిత్యుడు విశ్వతేజోమూర్తి. ఒక పట్టణమును వెలిగించుటకు పలుదీపములు కావలయును గదా!

అటుపై ఆకాశము, వాయువు, అగ్ని, జలము, పృథ్వి అను పంచభూతము లేర్పడెను. ఈ అగ్నియే సూర్య చంద్రులు; తరువాత కుజాదిగ్రహములు, ద్వాదశరాశులు, సప్తవింశాత్మకమగు నక్షత్రములు, దేవాసురమనుష్యులు, సిద్ధులు క్రమముగా సృజింపబడిరి.

ఇదియే బ్రహ్మాండము : సుషిరము. ఇందు అన్ని లోక ములు ఇమిడి యున్నవి. దీని మధ్య మనభూమి ధారణా త్మకమగు బ్రహ్మయొక్క శక్తిచే నిలిచి యున్నది. భూగో ళము యొక్క ఉత్తరధ్రువమునందు ఋషులు, దేవతలు వసింతురు.ఇదియే మేరు పర్వతము. సుర శత్రువులగు అసు రులవాసస్థానము దక్షిణధ్రువము. దీనికి దక్షిణ 'మేరు'వని పేరుగలదు. మేరు మధ్యభాగమున మేఖలాకారముగ

మహోదధి కలదు. అందు ద్వీపములు, దేవనిర్మిత నగరములు కలవు. మేరువునకు సమానదూరములో (వృత్త పాదము) నాలుగు పట్టణములు కలవు. అవి తూర్పున యమకోటి, దక్షిణమున లంక, పడమట రోమక, ఉత్తరమున సిద్ధపురి, అవి అన్నియు భూనిరక్షరేఖపై నుండును. అచట విషువచ్ఛాయ ఉండదు. వీని అక్షాంశ శూన్యము; మేరువు అక్షాంశ 90°.

భూగోళ వివరణము: మేషాదియందు దేవతలకును, తులాది యందు అసురులకును సూర్య దర్శన మగును. మేషాది మూడు రాశులందు రవి సంచరించునపుడు మేరు వాసులకు పూర్వాహ్ణము; కటకాది మూడు రాశులందుండు నపుడు అపరాహ్ణము. దక్షిణధ్రువవాసులకు అపుడు రాత్రి. తరువాత ఆరు రాశులందు సూర్యుడుండు నపుడు దేవతలకు రాత్రి; అసురులకు పగలు. కాబట్టి దేవాసురులకు ఒక అహోరాత్రము మనకు ఒక సంవత్సరము.

భూమి గుండ్రముగా నుండుటచే ప్రతి వ్యక్తియు ఇతరుల కంటె తానే ఎత్తుగా నున్నట్లు తలచు కొనును. మేరు వాసులకు గ్రహములు అపసవ్యముగా తిరుగు నట్లును, అసురులకు సవ్యముగా తిరుగునట్లును కనబడును. నిరక్ష ప్రదేశమున అహోరాత్రములు సమానము. కటకాయన దినమున ఉత్తర అక్షాంశ $66\frac{1}{2}°$ గల ప్రదేశములో పగలు 60 గడియలు, దక్షిణ అక్షాంశ $66\frac{1}{2}°$ గల ప్రదేశములో రాత్రి 60 గడియలు. ఉత్తర, దక్షిణ ధ్రువములనుండి $23\frac{1}{2}°$ దూరప్రదేశములలో దినమానము, 'సతత దినము' కను గొను విధానము ఇవ్వబడినది.

కక్ష్యా వివరణము:

చంద్ర కక్ష్య	...	324000	తదుపరి
బుధ శీఘ్ర కక్ష్య	...	1043209	తదుపరి
శుక్ర శీఘ్ర కక్ష్య	...	2664637	తదుపరి
రవి బుధ శుక్రుల మధ్య కక్ష్య	...	4331500	తదుపరి
కుజ కక్ష్య	...	8146909	తదుపరి
చంద్ర మందోచ్చ	...	38328484	తదుపరి
గురు కక్ష్య	...	51375764	తదుపరి
రాహు కక్ష్య	...	80572864	తదుపరి
శని కక్ష్య	...	127668225	తదుపరి
నక్షత్ర కక్ష్య	...	259890012	తదుపరి
బ్రహ్మాండ కక్ష్య	...	18712080864000000	

మన శాస్త్రజ్ఞుల సిద్ధాంతము విశ్వము అనంతము కాదనియు, బ్రహ్మాండ మనియు తెలియుచున్నది. ఇది నవీన సిద్ధాంతమును అనుసరించి యుండుట ప్రశంస నీయము. కదా? విలోపజ్యామితిలో 'అంతరాళమానరాశి' యొక్క విలువ కనుగొనబడినది. కాని, ఇందీయబడిన ఇతర కక్ష్యల ప్రమాణములు నవీన సిద్ధాంతమునకు సరికావు.

విశ్వము: ఆర్యులు భగవంతుని 'అఖిలాండ కోటి బ్రహ్మాండనాయకు' డని వర్ణింతురు. బ్రహ్మాండము అఖిలాండ కోటి యను జ్ఞానము శాస్త్ర విమర్శన వలన కలిగినదా, లేదా అను చర్చ ఇచట అనవసరము; చర్చించియు ప్రయోజనము కనపడదు. విశ్వము గురించి అట్టి అద్భుతాభిప్రాయము మన పెద్దలకుండుట ప్రశంసనీయము కదా?

చీకటి రేయి ఆకసము వంక చూచిన తెల్లని చార ఒకటి కనబడును. అది కొన్ని చోట్ల వెడల్పుగను, కొన్ని చోట్ల సన్నముగను ఉండును, దేవకన్నియలు ఆకసమును అలికి ముగ్గు పెట్టిరా యని పామరులకు తోచవచ్చును. అందుగల వంకరల గమనించిన వారు ముగ్గు పెట్టుటలో మానవసోదరీమణులంత నేర్పరులు కారని యోచింపవచ్చును. లేదా అది మిట్ట పల్లములుగల పర్వతసీమలో ప్రవహించు ఒక కొండ వాగువలె నుండును. అందులకే కాబోలు దానికి 'ఆకాశగంగ' అని మన పెద్దలు పేరిడిరి. అది కశ్యప నక్షత్రమండలము, వృషభరాశి. అగస్త్య మండలము, విశ్వామిత్ర మండలము గుండ వెళ్లును. అందు కోట్లకొలది నక్షత్రములు కలవు. వానిలో కొన్ని గోచరములు, తక్కినవి అగోచరములు.

మన సౌరకుటుంబము, నక్షత్రగణము అన్నియు దానిలో చేరినవి. ఈ బృందమును 'నీహారిక' (క్షీరపథము) అని చెప్పుదురు. బ్రహ్మాండమునం దిట్టి నీహారికలు కోట్లకొలది కలవు. మన నీహారిక చిదక గొట్టిన ఒక గోళమువలె నుండును. నిరక్ష వ్యాసము 30,000 పరిశకములు; ధ్రువ వ్యాసము 5000 పరిశకములు. మన సౌరకుటుంబము ఈ 'నీహారిక' లో కేంద్రమునందుండక ఒక వైపున 8000 పరిశకములు తొలగి యుండును.

[ఒక పరిశకము = 3.26 జ్యోతిర్వత్సరములు = 19.150,000,000,000 మైళ్లు*.]

సృష్టికాలములో విశ్వమంతయు ఉదజని వాయువుతో నిండినట్లును. అది ఘనీభవించి అచటచట నీహారికలుగా మారినట్లును అభినవ పరిశోధన వలన తెలియుచున్నది. అది వైదిక మతమునకు సరిపోవుట ప్రశంసనీయము.

పరిశోధన వలన నీహారిక లన్నిటిని బృందములుగా విభజింప వచ్చుననియు, మన నీహారిక ఒక 'స్థానిక బృందము' నకు చేరినదని తెలియుచున్నది. దీని పరిసరప్రాంతముల కాంతిమయ ప్రదేశము కలదు. దాని వ్యాసము 60,000 పరిశకములు. అందు అనేక నక్షత్ర బృందములు కలవు.

* 1 మైలు = 1.6093 కి. మీ.

అవియును, మన సౌరబృందమును ఈ నీహారికలో 200 కోట్ల సంవత్సరకాలములో భ్రమణము చేయుచున్నవి. మన స్థానిక బృందములో 19 నీహారికలు కలవు. మనకు చాల దగ్గరగా నుండు నీహారిక 10 లక్షల పరిశక ముల దూరములో నున్నది. దీనిని నాళిక అని కూడ చెప్పుదురు.

మరియొక స్థానిక బృందము కన్యారాశిలో 25 లక్షల పరిశకముల దూరములో నున్నది. పాలమార్ పర్వత వేధశాలలో పరిశోధన వలన 100 కోట్ల పరిశకముల దూరములోనుండు నీహారికలు గుర్తింపబడినవి. మన సౌరబృందము సెకనునకు 225-3 కి. మీ. చొప్పున మన స్థానిక బృందములో భ్రమణము చేయుచున్నది. ఈ ప్రయాణములో మనకు క్రొత్త నక్షత్రములు కనపడును; పాతవి మరుగుపడును.

నీహారికలు స్థిరములుగాక విశ్వమునందు ఒకటి నుండి ఒకటి దూరముగా పరుగిడుచున్నవి. ఆ వేగము రెండు నీహారికల పరస్పరదూరమునకు అనుపాతములో నుండును.

రెండు నీహారికల మధ్యదూరము ఒక కోటి పరిశక ములు హెచ్చు అయిన వాని మధ్య 'అపసరణ' వేగము 160·93 కి. మీ. వంతున ఎక్కువయగును. సప్తర్షి మండ లములో నుండు ఒకనీహారిక మనకు 16 కోట్ల కి. మీ. దూరములో నుండును. దాని అపసరణ వేగము సెకనుకు 21565 కి. మీ. మరియొక నీహారిక (M 31) మనకు 25 లక్షల పరిశకముల దూరములో నున్నది. దాని అపసరణ వేగము సెకనునకు 128·74 కి. మీ. ఇట్లు నీహారికలన్నియు అపసరణ వేగముతో జరుగుచుండిన వానికి విశ్వమునందు చోటుకలదా యను సందేహ మేర్పడును. దానిని తీర్చు టకు శాస్త్రజ్ఞులు 'విశ్వవ్యాకోచవాద' మును ప్రతిపా దించిరి. సృష్ట్యాదియందు విశ్వమెట్లుండెను? నీహారిక లన్నియు ఒకటిగా గుమిగూడి యుండవలయునుగదా? అవి స్థిరములుగా నుండక అతి స్వల్ప అపసరణ వేగము కలవిగ నుండవలయును. ఆ సంభవము 700 కోట్ల సంవత్సరములకు పూర్వము జరిగి యుండవలయును.

మహర్షి మార్కండేయుని అనుభవము: మార్కం డేయుడు చిరంజీవి. ప్రళయకాలములందు కూడ అతడు సజీవుడు. ఒక ప్రళయకాలములో అతడేకాకియై సంచ రించుచుండెను. విశ్వమునందు లోకములుగాని, చరా చరములుగాని లేవు. ఎచట చూచినను జలముతప్ప మరేమి యును కనబడలేదు. విశ్వమంతయు తిరుగుచుండగా ఒక చోట భగవంతుడు శిశురూపములో వటపత్రముపై పవ ళించి యుండెను. విశ్వశూన్యతను గురించి ఆ మహర్షి శిశువును అడిగిన, ఆ శిశువు నోరు తెరచి లోపలికి వెళ్ల మనెను. కుక్షియందు సకలలోకములు ఇమిడియుండుటను మార్కండేయుడు చూచి, విస్మయానందభరితుడై భగ వంతుని లీలావిశేషమును ప్రశంసించెను.

ఆధునిక శాస్త్రజ్ఞులు వర్ణమాలా విశ్లేషణ యంత్ర ముతో అనేక సంవత్సరములు పరిశోధించి, విశ్వములోని నీహారికల (లోకములు)న్నియును ఆదియందు ఒకచోట నుండి అధికమగు ప్రతిసరణ వేగముతో బయలు వెడలి, ప్రస్తుత స్థితిని పొందినట్లు కనుగొనిరి. ఈ సిద్ధాంతము ప్రతిపాదించుటలో ఎక్కువ పరిశ్రమ చేసిన వారిలో హబ్బుల్ అగ్రగణ్యుడు.

ఈ సిద్ధాంతము మార్కండేయుని అనుభవమునకు సరియగుచున్నది. అతడెట్లు కనుగొనెనో మనకు దురవ గాహము. కాని విషయము ప్రశంసనీయమనుటకు సంది యము లేదుకదా? ఇట్టి అద్భుత విషయములు మన పురాణ పరిశోధకుల కంటికి అగోచరము లాయెగదా? యని మనము చింతిలవలసియున్నది.

ప్రళయమునందన్ని లోకములు భగవంతుని యందిమిడి పోయి, సృష్టిని ప్రారంభించినపుడు అతనిలోనుండు లోక ములు బయటకు వచ్చును. ఇట్టి ప్రపంచ సంకోచ వ్యాకోచములు క్రమముగా జరుగుచుండునని మన పౌరాణిక గాథ.

భగవంతుడు శంఖ చక్రధారి: శంఖమునందు రేఖలు బయటనుండి బయలుదేరి కేంద్రమునందు చేరును. ఇది ప్రళయ రహస్యమును గుర్తించు చిహ్నము. చక్రము నందు రేఖలు కేంద్రమునుండి పరిధికి వెళ్లును. ఇది సృష్టి రహస్యమును గుర్తించు చిహ్నము.

యంత్ర ప్రకరణము: దివ్యగోళ యంత్రము జ్యోతి ష్కులు వాడు యంత్రములలో ప్రధానము; దివ్యగోళ మును అన్ని విధములలోను నిరూపించును. అందు క్షితిజము, క్రాంతి వృత్తము, విషువృత్తము, ధ్రువబిందు వులు, యామ్యోత్తర వృత్తము, గ్రహములు, ముఖ్య నక్షత్రములు గుర్తింపబడును.

ఇది 'స్వయంవహ' యంత్రము; కాలసాధనమునకు ఈ యంత్రము ఉపయోగకరము. ఇందు జలము, పాద రసము, తైలము ఉపయోగించి స్వయంవహ యంత్ర ముగా చేయవలయును. ఇది గురూప దేశమున నేర్చుకొన వలెను. నిర్మాణ ప్రక్రియ పరమ రహస్యము. నిర్మాణ క్రమము అంతరించినపుడు మరల సూర్యభగవానునిచే ఉపదేశింపబడును. కాలజ్ఞాన సాధనములగు యంత్రము

లనేకములు కలవు. అవి శంకు, యష్టి, ధనుస్సు, చక్రము, ఛాయా యంత్రము.

కపాల, మయూర, నర, వానర యంత్రములు మరి కొన్ని కలవు.

కపాలయంత్రము తామ్రముతో నిర్మింపబడును. అడుగున రంధ్రముండును. నిర్మల జలము నందుంచిన అది 60 గడియలలో మునిగిపోవలయును.

శుద్ధముగా సూర్యుడు ప్రకాశించు దినమున కాల నిర్ణయమునకు నరయంత్రమును వాడుదురు. **ఆచార్య**

సూర్యుడు : మనకు కనబడు అంతరాళములో అనంతములైన నక్షత్రములున్నవి. కాని వానిని సాధారణముగ రాత్రి వేళలలోనే మనము చూడకలుగుచున్నాము. దీనికి కారణమేమి ? మనము అమిత తేజోవంతుడగు సూర్యునికి సమీపమున నుండుటచే మనకు తక్కిన నక్షత్రములు పగటిపూట కనబడవు. మనకు సమీపమున నుండు సూర్యుడు కూడ ఒక నక్షత్రమే.

రవి సౌరకుటుంబము యొక్క కేంద్రమూర్తి. అతని గురుత్వాకర్షణశక్తి గ్రహగమనములకు కారణము. సూర్యుని వలె మరియొక నక్షత్రమునకును కుటుంబ మొకటి యుండవచ్చునను ఊహను నవీన పరిశోధన పోషించుచున్నది. నక్షత్రములలో పెక్కింటికంటె సూర్యుని పరిమాణము, దీప్తియు చాల తక్కువ.

ద్రవ్యరాశి, పరిమాణము : సూర్యగోళ వ్యాసము 31′ 59″·3 (సుమారు 1392730 కి. మీ.); భూవ్యాసమునకు రమారమి 109·30 రెట్లు హెచ్చు.

న్యూటన్ ఆకర్షణ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సూర్యుని ద్రవ్యరాశి భూద్రవ్యరాశికి 333,420 రెట్లు హెచ్చని నిర్ణయించియున్నాడు. సూర్యగోళ ఘన పరిమాణము భూఘనపరిమాణమునకంటె 13,00,000 రెట్లు హెచ్చు. కాబట్టి సూర్యగోళ ద్రవ్య సాంద్రత భూద్రవ్య సాంద్రతలో పాతికపాలే, దీనిని బట్టి సూర్య గోళములోని ద్రవ్య మంతయు వాయువు రూపములో నున్నదని మనము ఊహింపవచ్చును. ఈ విషయమును ఖగోళ భౌతిక విశ్లేషణము వలన రుజువు చేయవచ్చును.

రవిబింబతలము యొద్ద గురుత్వాకర్షణ బలము భూతల గురుత్వాకర్షణ బలమునకు 27·91 రెట్లు హెచ్చు. 150 పౌండ్లు బరువుగల మనుష్యుడు రవి తలములో సుమారు $2\frac{1}{2}$ టన్నులు తూగును.

భౌతిక లక్షణములు : **కాంతి మండలము :** సూర్యుని నల్లటి అద్దములో చూచినప్పుడు కనబడు వలయాకార సూర్య బింబమునకు కాంతి మండలమని పేరు. ఈ మండలతలము బియ్యపు గింజలు పరచినట్లు ఉండును. ఈ బింబము యొక్క కాంతి తీక్ష్ణత దానియొక్క పరిధి భాగమునుండి కేంద్రము వైపు పోయినకొలది హెచ్చుచుండును. పరిధి పరిసరములలో కాంతి తీక్ష్ణత మిక్కిలి తక్కువగ నుండును. మరియు పరిధి తేజో వర్ణము కేంద్ర వర్ణముకంటె అరుణ తరముగ నుండును. ఈ విషయమును సూర్యుని పూర్ణగ్రహణ కాలములో బాగుగ చూడవచ్చును. భూమివలె సూర్యతలము కూడ వాతావరణముచే కప్పబడి యున్నది. పరిధినుండి వెలువడు వెలుతురు కేంద్రము నుండి వెలువడు జ్యోతికంటె ఎక్కువ వాతావరణమును దాటవలసి యుండుటయే పై భేదములకు కారణము.

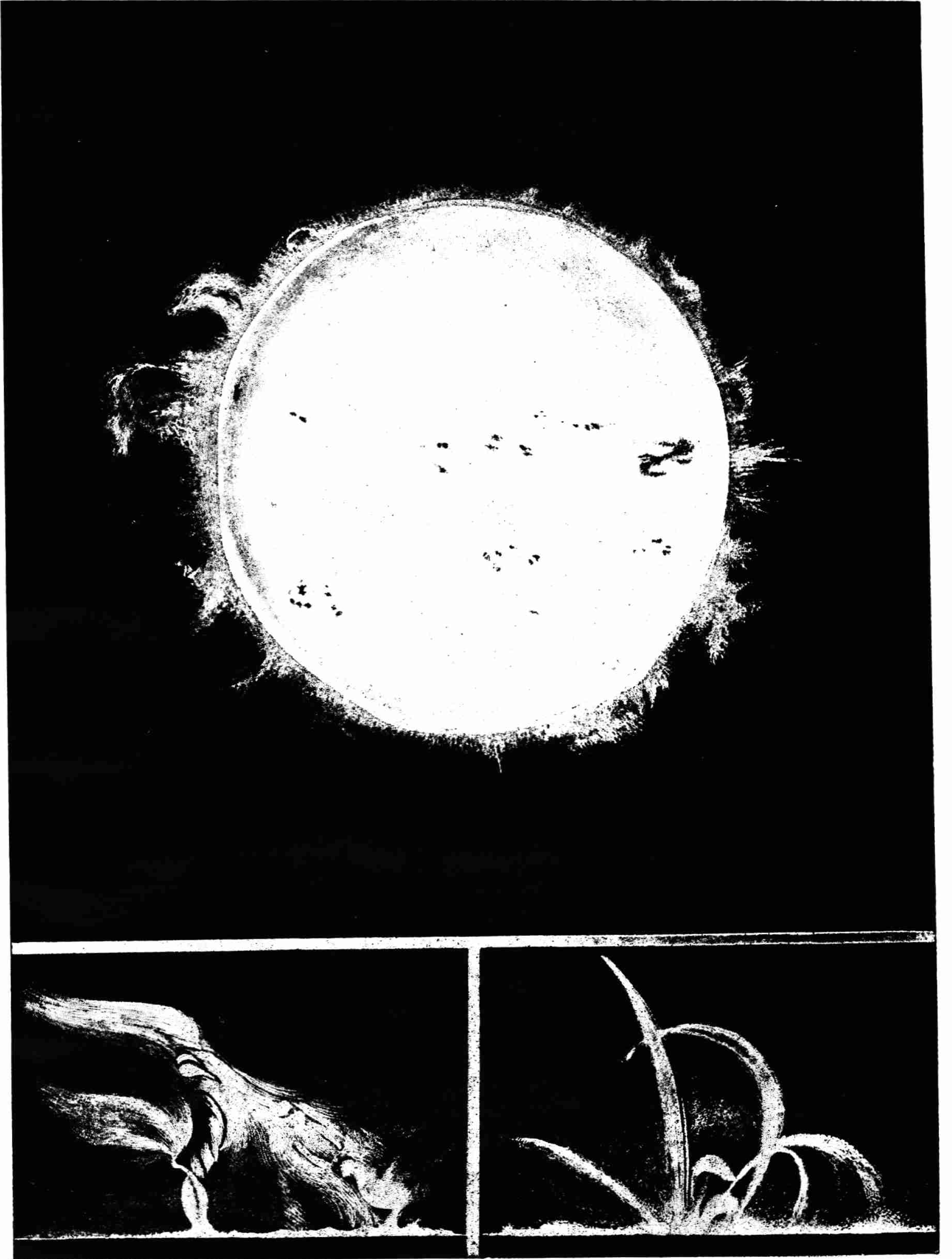
(బియ్యపు) కణములవలె నుండు భాగములు కొన్ని నిముసముల కంటె అధిక కాలము నిలిచియుండవు. అవి మరుగుపడిన వెంటనే క్రొత్త కణములు ఆ భాగములలో మరల మరల ఏర్పడుచుండును.

దూర దర్శనితో కాంతి మండలమును పరిశీలించినపుడు కాంతి హీనములైన భాగములు అక్కడక్కడ మచ్చలవలె కనబడును. వీనినే సూర్య కళంకములు అని పిలుతురు. వీటి పరిసర ప్రాంతములలో దీప్తిమంతమైన ప్రదేశములు కానవచ్చును. వీటికి ప్రభలు అని పేరు. వీటిని సాధారణముగ సూర్య బింబము యొక్క అంచుల యందే చూడవచ్చును.

కాంతి మండలము సూర్యునిలో మిక్కిలి మనోహరమైన భాగము. ఈ మండలము యొక్క అడుగు భాగమునందు ప్రేషము సముద్ర తల వాతావరణ ప్రేషములో $\frac{1}{10}$ పాలుండును. ఈ ప్రాంతములోనే సౌర వర్ణమాలలోని విచూషణ రేఖలు కలుగుచున్నవని నేడు శాస్త్రజ్ఞులు గణిత రీత్యా విశ్వసించుచున్నారు.

వర్ణమండలము : ప్రత్యావర్తన స్తరమునకు వెలుపల నుండు ఆవరణమునకు వర్ణమండలమని పేరు. ప్రత్యావర్తన స్తరము క్రమేణ కాంతి మండలములో కలిసిపోవుటచే ఈ రెండింటిని కచ్చితముగ విభజింపలేము. కాంతి మండలము యొక్క అడుగు పొరయే ప్రత్యావర్తన స్తరము.

సూర్య, చంద్రుల వ్యక్త వ్యాసములు (భూమినుండి చూచినప్పుడు) ఇంచుమించుగ సమానముగ నుండును. కాబట్టి పూర్ణ సూర్య గ్రహణ వేళలో చంద్ర బింబము కొన్ని క్షణములు సౌర గోళమును కప్పివేయును. కాంతి మండలమునుండి వెలువడు వెలుతురు నిరోధింపబడుటచే సూర్యుని బాహ్య భాగములు గోచరమగును. అప్పుడు సూర్యుని పరిధి భాగమును వర్ణమాలా దర్శ



సౌర కళంకములు, వర్ణమండలము, సౌర జ్వాలలు

Blank Page

క్రముతో అనుశీలించినచో, ఒక కాంతి రేఖావర్ణమాల కొన్ని క్షణములు మాత్రమే ఏర్పడును. ఇదియే వర్ణమండలము యొక్క వర్ణమాల. దీనికి స్ఫురిత వర్ణమాలయనికూడ పేరు.

సూర్యునిలోనుండు మూల ద్రవ్యములలో అధిక భాగము వర్ణమండలములో నున్నది. కాని వర్ణమండలము యొక్క కాంతి రేఖా వర్ణమాలయు, సూర్యుని కృష్ణ రేఖా వర్ణమాల యును భౌతిక పరిస్థితులలో వేరు వేరుగ నుండుటచే ఒక తీరున నుండవు.

వర్ణమండలము యొక్క స్ఫురిత వర్ణమాలను వివరముగ పరిశీలించినచో వర్ణమండలములో సాంద్రతను గురించి తెలిసికొన వీలగును. ఎత్తుతో సాంద్రత చాల నిదానముగ తగ్గుచుండును.

రసెల్ వర్ణమండలము యొక్క అధో భాగములోని ప్రేషము 0.0001 మిల్లిమీటర్లని గణించెను. తరువాత నుండు ప్రత్యావర్తన స్తరములో ప్రేషము హెచ్చు చుండును.

శిఖలు : అప్పుడప్పుడు వర్ణమండలము నుండి తేజోమయమైన జ్వాలలు వెలువడుచుండును. ఇవి పెద్ద అగ్ని జిహ్వలవలె నుండును. వీనికే 'శిఖ' లని పేరు. ఇవి చాల వరకు 32,000 మొదలు 48,000 కి.మీ. ఎత్తునకు వ్యాపించును. సాధారణముగ 161,000 కి.మీ. ఎత్తును పొందుట అరుదు. కాని కొన్ని 322,000 కి.మీ. కొన్ని 483,000 కి.మీ. ఎత్తుకు పోయినట్లు శాస్త్రవేత్తలు కనుగొనియున్నారు.

వర్ణమాలా దర్శకముతో శిఖలను పరీక్షింపవచ్చును. దూరదర్శని సహాయముతో వాని ఛాయా చిత్రములను తీయవచ్చును. వీని వర్ణమాల వర్ణమండలము యొక్క స్ఫురిత వర్ణమాలవలె నుండును. కాని ఆ రెండు వర్ణమాలల లోని రేఖల సాపేక్షిక తీక్ష్ణతలలో భేదములు బహుశః కానవచ్చును. మరియు వివిధ శిఖల వర్ణమాలలలోను భేదము లుండవచ్చును. సూర్యునియందు కొన్ని సమయము లందు శిఖలు కనుపించవు. మరికొన్ని వేళలలో 20, 30 వరకు కనబడును.

సౌర జ్వాలలు : కొన్ని శిఖలలోని పరిణామము చాల ఆశ్చర్యకరమైనది. ఇవి అత్యధిక కాంతితో పైకి లేచు చుండును. వీని తేజో తీక్ష్ణత బహు శీఘ్రముగ వృద్ధిని పొందుచుండును. అంత శీఘ్రముగనే తగ్గుచుండును. వీనినే సౌర జ్వాలలు లేదా వర్ణమండల ఉద్భేదనములు అని చెప్పుదురు. కొందరు శాస్త్రజ్ఞులు వీనిని సౌరగోళములో నొక ప్రత్యేక సంభవముగ పరిగణించుచున్నారు.

సౌర జ్వాలలు రవి కళంకముల పరిసరములలో ఏర్పడు చుండును. వీటి జీవిత కాలము సుమారు 30 నుండి 60 నిమిషముల వరకు నుండును. ఇవి రవి కళంకములను పరిశీలించునపుడు కనుగొనబడెను.

సౌర జ్వాలలు అతినీలలోహిత (అల్ట్రా వైలట్) వికిరణమునకు మూలకారణమనియు, భూమి యొక్క అయనావరణము పై ఈ వికిరణము కారణముగ రేడియో ప్రసారక్షీణతలు కలుగుచున్నవనియును శాస్త్రజ్ఞులు కనుగొనియున్నారు. ఇందు ఒక అయస్కాంతిక సంక్షోభము కలుగునట్లు శాస్త్రజ్ఞులు ఊహించిరి. కాని ప్రతి సౌర జ్వాలల సంభవానంతరమున సంక్షోభము లేర్పడుట లేదు.

ముకుటము : పూర్ణసూర్యగ్రహణకాలములో సూర్యుని చుట్టు కిరీటము వలె నుండు కాంతి నొక దానిని చూడవచ్చును. దీనికే ముకుటమని పేరు. దీని కాంతి చంద్ర కాంతిలో సగము పాలుండును. పూర్ణగ్రహణ సమయములోనే గాక ఇతర వేళలలో ముకుటమును అనుశీలించుటకు ముకుటదర్శకము అను సాధనమును వాడుదురు.

ముకుటము యొక్క తేజోతీక్ష్ణత సూర్యుని పరిధి భాగములో నధికముగ నుండి పరిధి నుండి దూరము పోయిన కొలది శీఘ్రముగ తగ్గుచుండును. దీని అంతర్భాగము కొంచము పీతవర్ణమును, బాహ్యాభాగము ముత్యమువలె శ్వేతవర్ణమును కలిగియుండును.

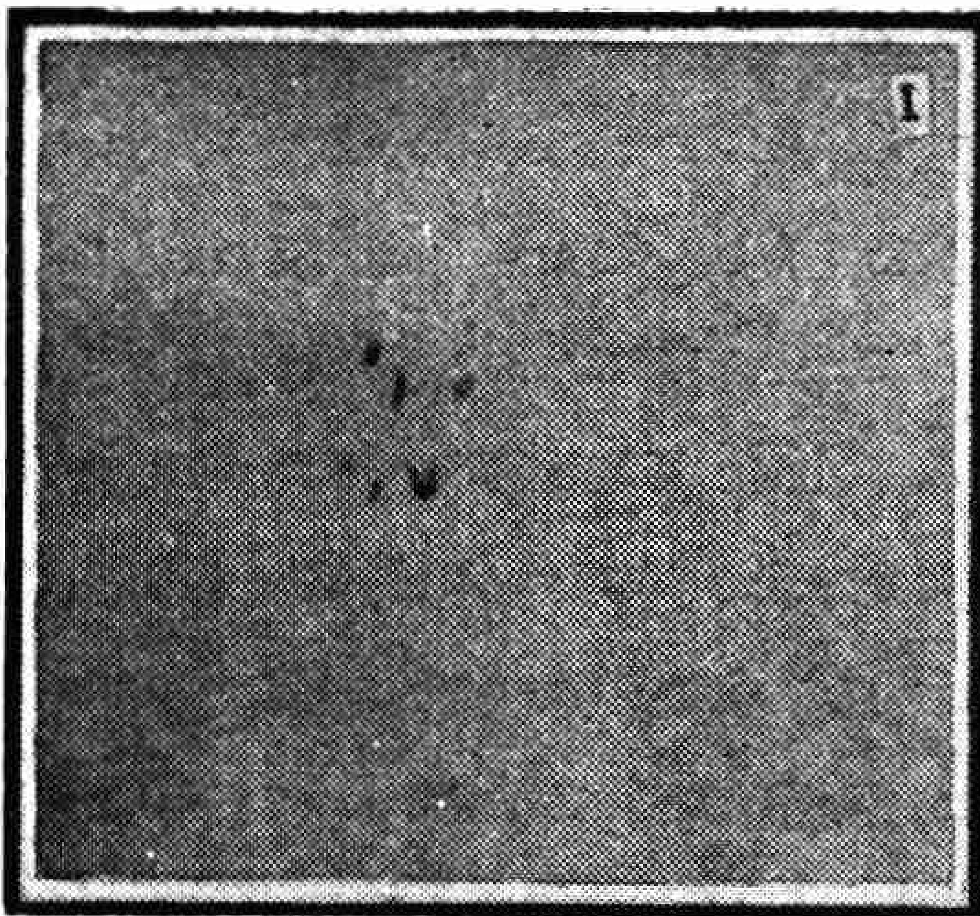
రవి కళంకములు ఎక్కువగ నుండునపుడు ముకుటము సుమారు ఒక సౌరవ్యాస పరిమాణము కలదిగానుండును ; తక్కువగ నుండునపుడు నిరక్షరేఖా ప్రాంతము నుండి కిరణ పుంజములు పెక్కు సౌర వ్యాసముల పొడవు వ్యాపించి యుండును. 1878 వ సంవత్సరములో కానబడిన రెండు కిరణ పుంజములు సుమారు 1,448,400 కి.మీ. (సుమారు 10 సౌర వ్యాసములు) వ్యాపించినవి.

ముకుటము యొక్క తాపక్రమము సుమారు 10 లక్షల డిగ్రీలు. ఈ తాపక్రమము వికీర్ణమగుట లేదు. అట్లయినచో సౌర బృందమంతయు ఆ తాపతీక్ష్ణతకు ఆవిరియై పోయి యుండును. పై తాపక్రమమునకు పెక్కు కారణములను ప్రతిపాదించి యున్నారు. వానిలో ఒకటి : సూర్యుడొక పెద్ద అయస్కాంతము. సౌర వాతావరణములోని ద్రవ్య ఖండములన్నియు కొంత శక్తిని పొంది అధిక వేగముతో చలించుచున్నవి. ఈ వేగమే పై తాపక్రమమునకు కారణము. రెండవది : పొంగుచుండు సౌరగర్భము నుండి వెలువడు శబ్దతరంగములే ముకుటము యొక్క అధిక తాపక్రమమునకు కారణము. పొంగుచుండు పెద్ద వాయు కణములు గొప్ప ధ్వనితో రవి తలము వైపు ప్రయాణము చేయుచుండును.

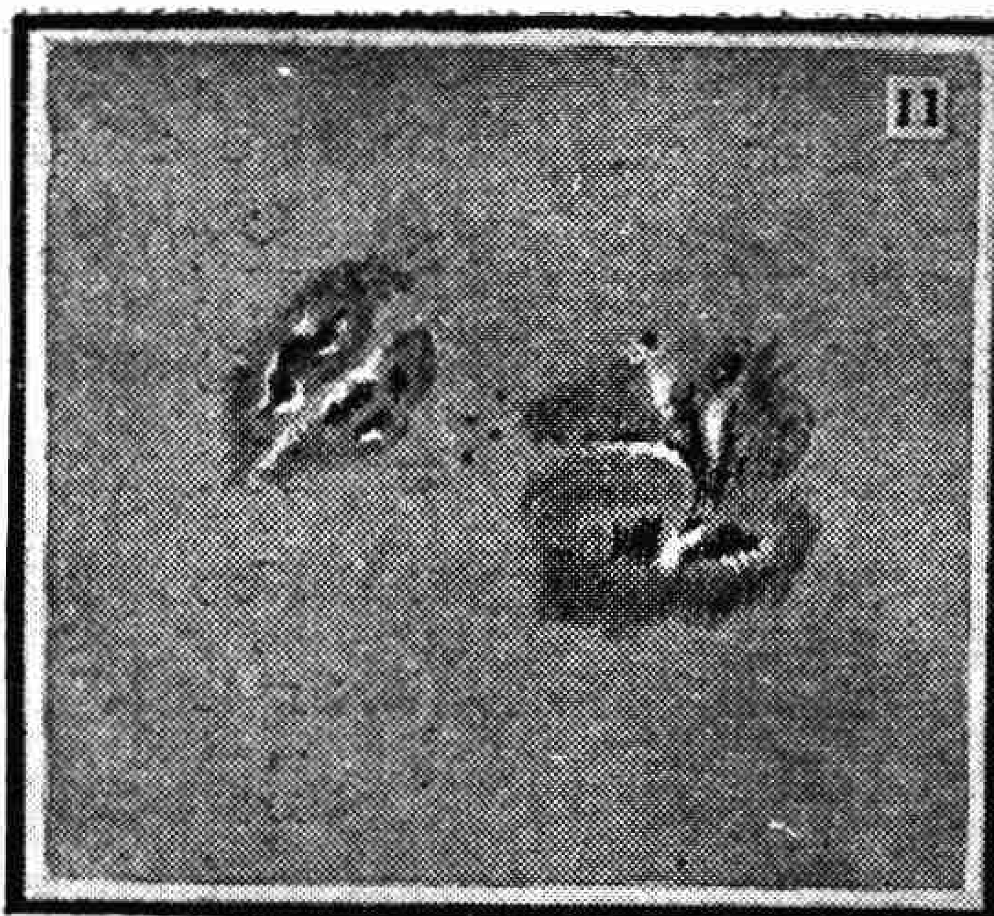

చిత్రము 423 సూర్యకళంకము

రవి కళంకములు : రవిమండల మంతయు సంక్షోభములో నున్న వాయువులతో కూడి యుండుటచే కొన్ని చోట్లలో కొంత భాగము తటాలున పైకి లేచు చుండును. ఇట్లు బహిర్గత భాగములు అల్ప పీడనమునకు లోనగుటచే వ్యాకోచనము చెందును. అప్పుడవి చల్లబడి రవి మండలముపై బడును. పరిసరముల కంటె ఇవి చల్లగనుండుటచే తక్కువ కాంతిమంతముగ నుండును. కాంతి మండలమును దూరదర్శనితో పరిశీలించినచో సాపేక్షకముగ కాంతి హీనములైన ఈ ప్రదేశములు మచ్చలవలె కానవచ్చును. వీనినే సూర్యకళంకములని చెప్పుదుము. ఇవి సాధారణముగ గుంపులుగ కనబడుచుండును. వీని రూపస్థానములు దిన దినము మారుచుండును. రవికళంకము యొక్క మధ్యభాగము నలుపుగ నుండును. దీనిని ప్రతిచ్ఛాయ యనియు, దీనిని పరివేష్టించి యుండు భాగమును ఉపచ్ఛాయ యనియును పిలుతురు. ఉపచ్ఛాయ అంత నల్లగ నుండదు. ఇది ప్రతిచ్ఛాయయందు వేరువేరు దిశలనుండి ఏక స్థానాభిముఖములైన సన్నని తీగల ఆకృతిని కలిగి యుండును (చూ. చిత్రములు 423, 424).

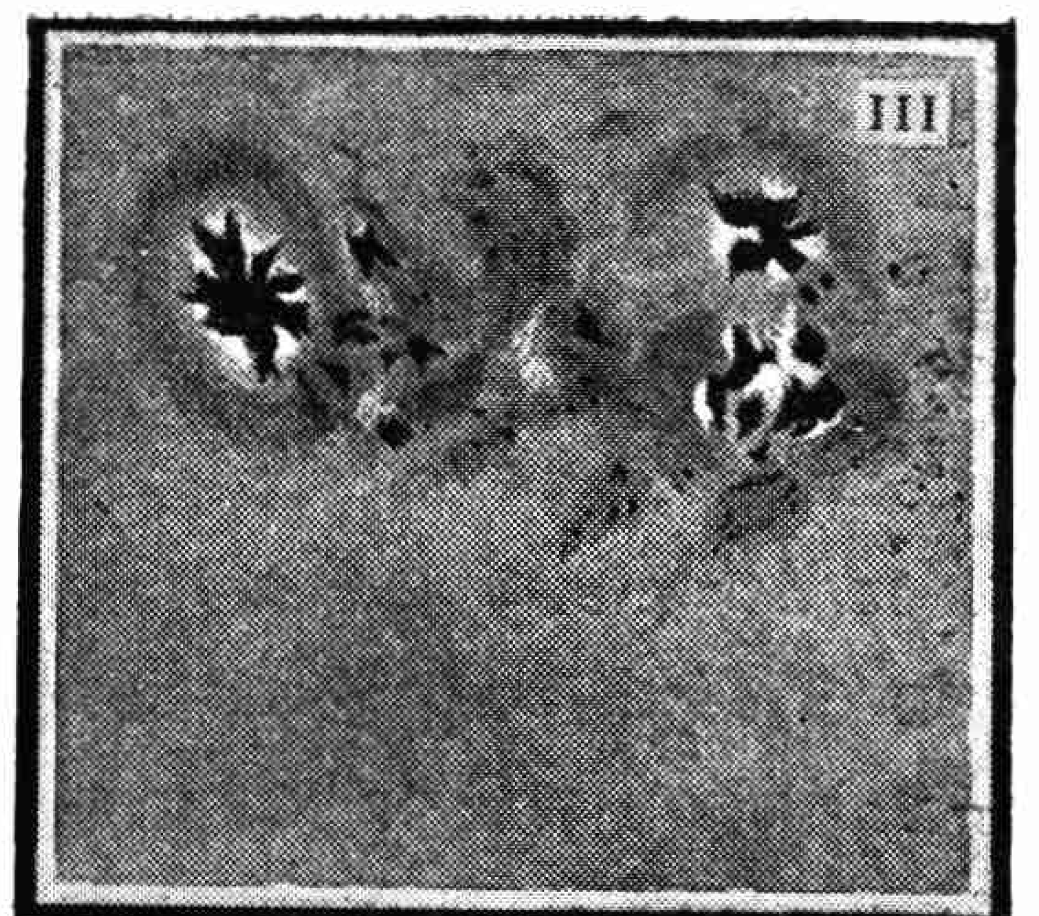
రవి కళంకముల జీవిత కాలములు కొన్ని గంటలు మొదలు పెక్కు దినముల వరకు నుండును. రవి కళంకము



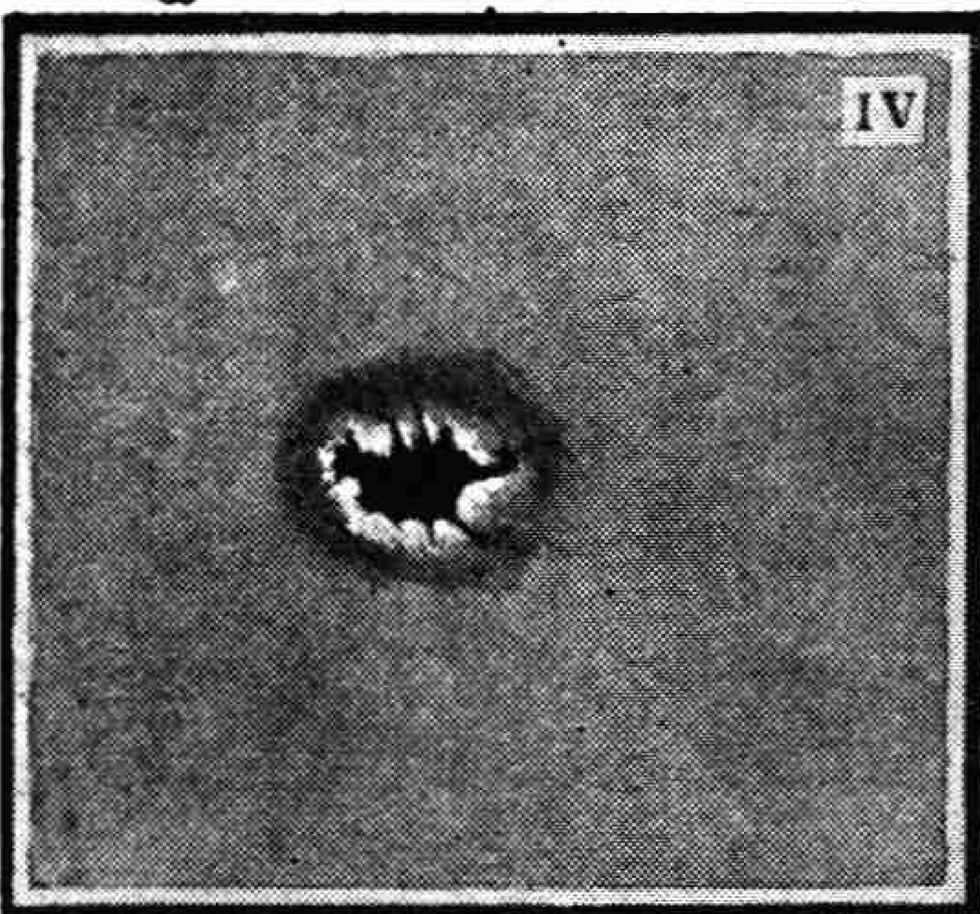
20. అక్టోబరు 1884.



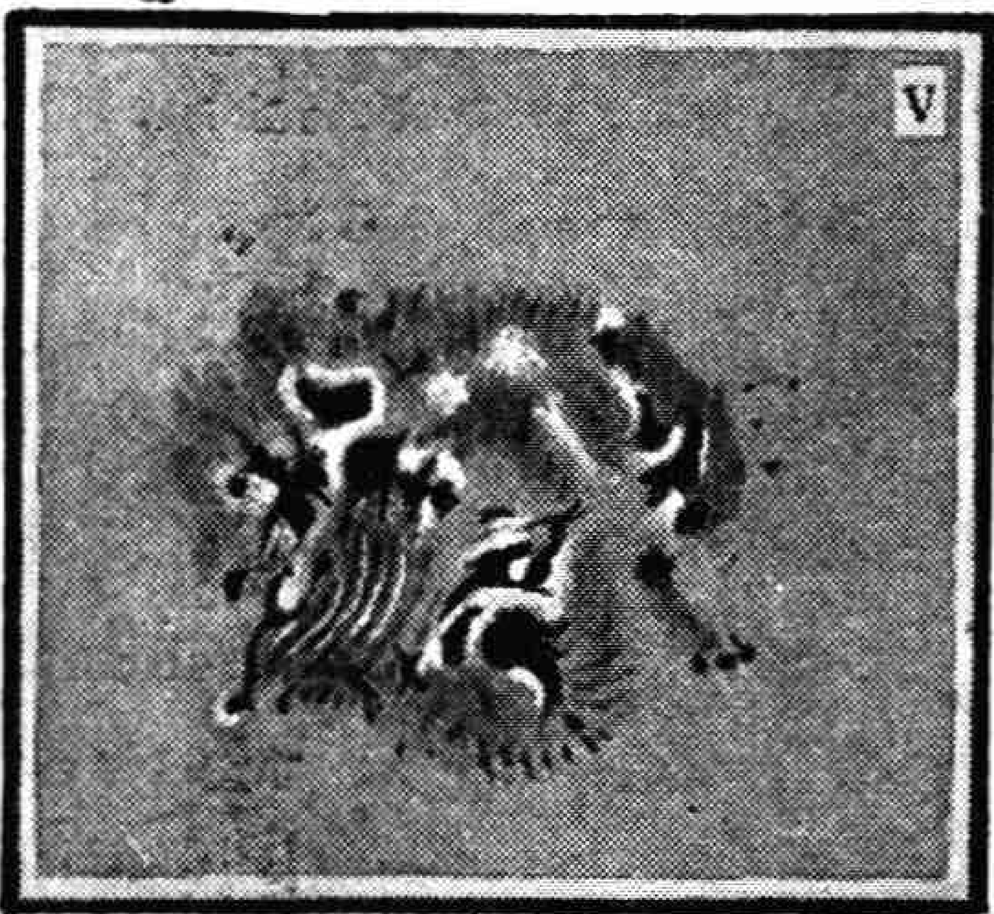
15. సెప్టెంబరు 1884.



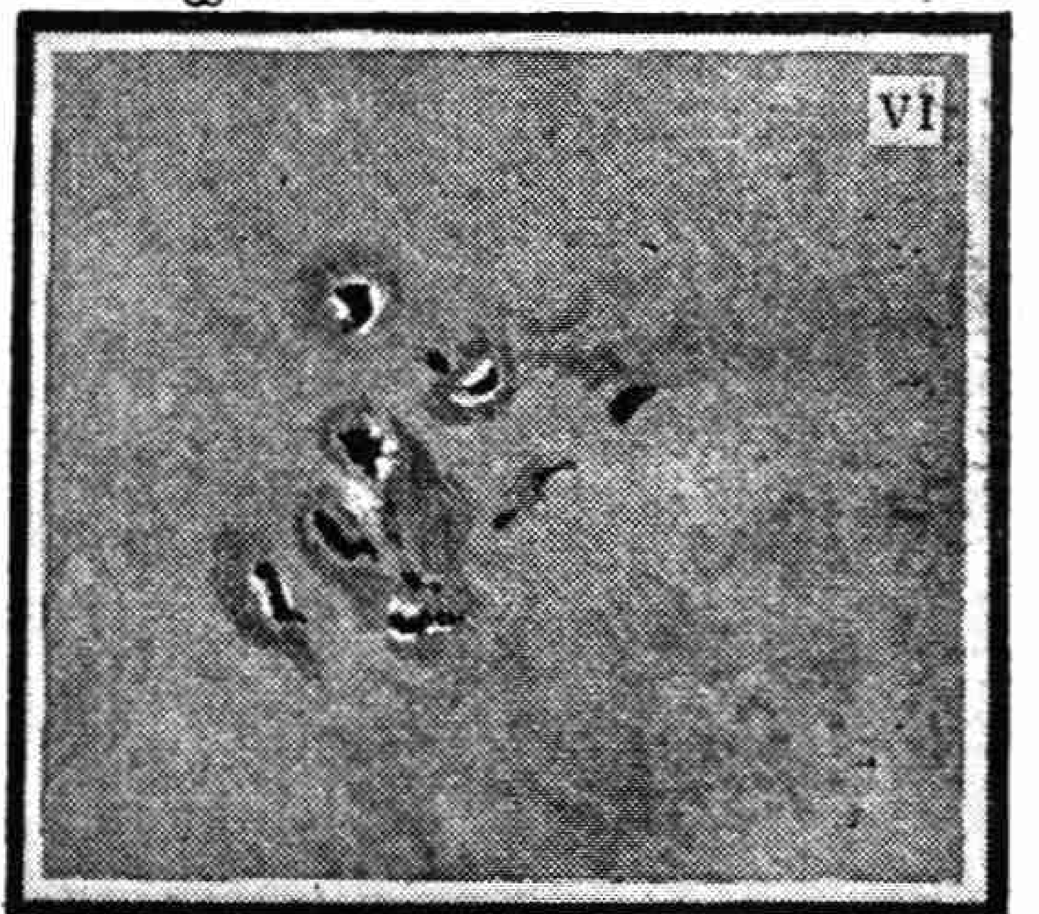
9. ఆగష్టు 1883.



14. మే 1884.



17. నవంబరు 1882.



21. మే 1894.

చిత్రము 424 **పలువిధములైన** సూర్యకళంకములు

లలో అనేకములు చాల చిన్నవి. కొన్ని చాల పెద్దవి. 1946 వ సంవత్సరములో కనుపించిన రవి కళంకము 99,780 కి.మీ. నిడివియు, 57000 కి.మీ. వెడల్పును కలిగియుండినది. చిన్న కళంకముల వ్యాసములు సుమారు 482 కి. మీ. వరకును, పెద్ద కళంకముల వ్యాసములు సుమారు 80, 96 వేల కి. మీ. వరకు నుండును. చిన్న కళంకములు ఒకటి రెండు దినముల పిదప అదృశ్యములగు చుండును. పెద్దవి కొన్ని వారములు కనబడు చుండును.

ఈ సూర్యకళంకములు సూర్యుని దక్షిణోత్తర ధ్రువ లందు అధికముగ కనబడవు. నిరక్షరేఖ కిరువైపుల సుమారు 35° అక్షాంశము వరకు అవి ఎక్కువగా కనుపించు చున్నవి.

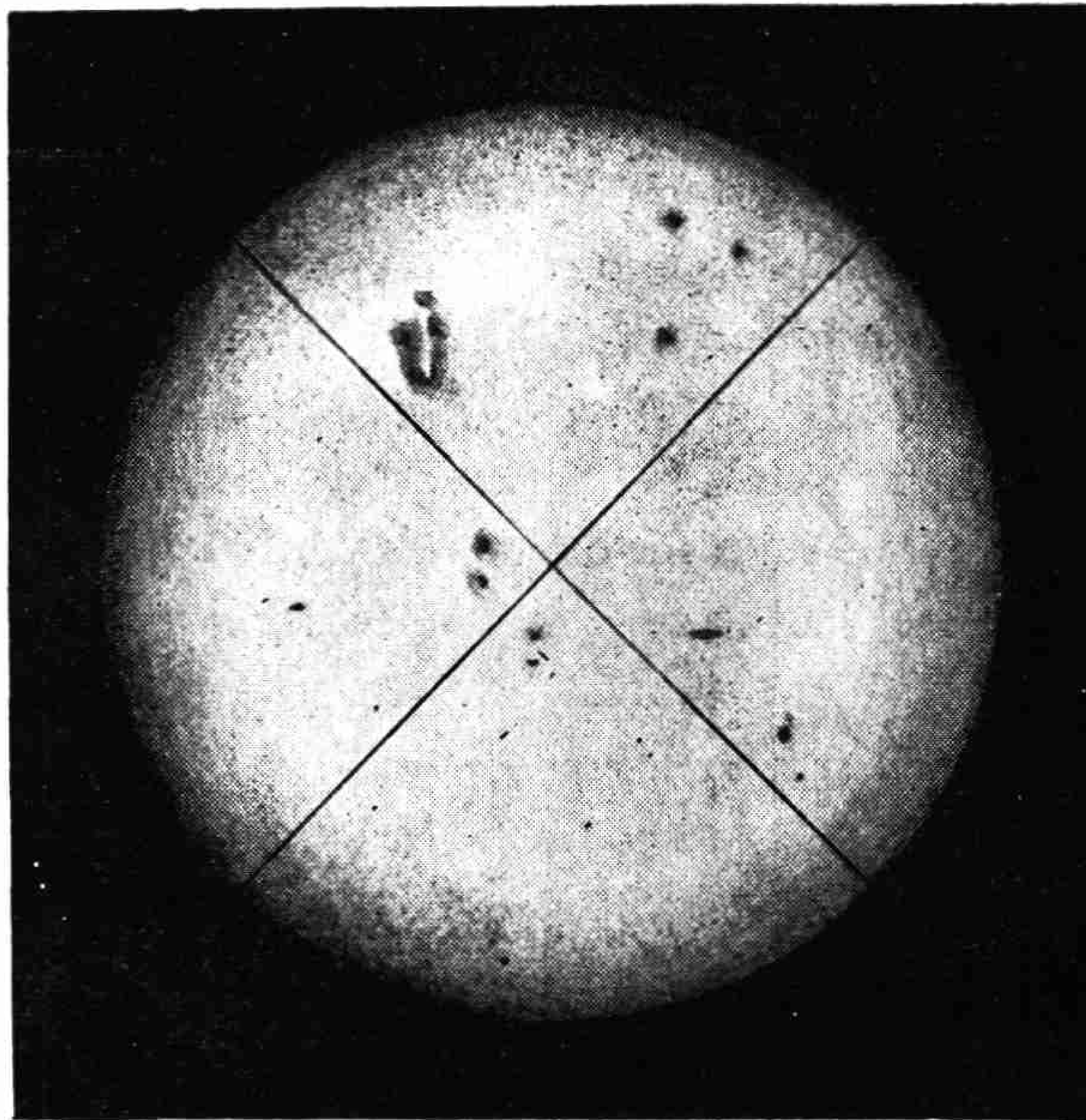
ఆవర్తనకాలము : సగటున 11 సంవత్సరముల కొక పర్యాయము రవికళంకములు ఎక్కువయగు చున్నవి. అవి వృద్ధిపొందిన పిదప వాని సంఖ్య క్రమేణ క్షీణించి, మరల క్రమముగ హెచ్చుచుండును. రవి కళంకముల ఆవర్తనమును మొట్టమొదట కనుగొనిన శాస్త్రజ్ఞుడు ష్వాబ్ (1843). ఇతడు పెక్కు సంవత్సరములు రవి మండలమును పరీక్షించి సూర్యకళంకములు కనపడుటలో, మరుగుపడుటలో నొక నియమము ఉండునట్లు కనుగొనెను. రవి కళంకముల సంఖ్య 4½ సంవత్సరములు హెచ్చును, తరువాత 6½ సంవత్సరములు తగ్గుచుండును.

తాపక్రమము : రవి కళంకముల తాపక్రమము వానిని పరివేష్టించి ఉండు రవితలము యొక్క తాపక్రమము కన్న సుమారు 1500-2000°C తక్కువగ నుండును. అవి సహజముగ కాంతిమంతమైనవే. కాని పరిసర ప్రాంత అపేక్షయా, ఇవి నల్లగ కనబడుచుండును.

కళంకములు - కాంత క్షేత్రములు : రెండు కళంకముల యొక్క చలనములు వ్యతిరేకముగ నుండినచో, వాని కాంత క్షేత్రములును వ్యతిరేక దిశలలో నుండును. కళంకములు తరచుగ జతలుగ, వ్యతిరేక ధ్రువత్వముతో కనబడును. ఉత్తరార్ధ గోళములోని చలనములకు వ్యతిరేకముగ దక్షిణార్ధ గోళములోని చలనములుండును. ఉత్తరార్ధగోళములోని కళంకముల ధ్రువత్వము దక్షిణార్ధ గోళములోని కళంకముల ధ్రువత్వమునకు వ్యతిరేకముగ ఉండి, క్రమేణ వాని ధ్రువత్వములు తలక్రిందులుగ మారుచుండును. కావున రవి కళంకముల ఆయస్కాంతిక ఆవర్తనకాలము 11 సంవత్సరముల ఆవర్తన కాలమునకు రెండు రెట్లని (అనగా 22 సంవత్సరములని) విశదమగుచున్నది.

రవి కళంకములు, భౌమ్య సంభవములు : రవి కళంక భగణమునకును, భౌమ్యాయస్కాంత క్షోభములకును, సంబంధమున్నది. రవి కళంకముల సంఖ్య ఎక్కువగ నున్నప్పుడు క్షోభములు అధికమై, తక్కువగ నున్నప్పుడు తక్కువగ నుండును. కాని, ఈ సంభవములలో ఏ నియమములేదు. అయస్కాంత క్షోభములను దిక్సూచిలోని కంపనములనుండి కనుగొనవచ్చును. వాటి సంభవానంతరము టెలిగ్రాఫ్ తంతులు, రేడియోలు పనిచేయవు.

రవి కళంకములు ఎక్కువగ నున్నప్పుడు భూమి పొందు తేజోష్ణతలు ఎక్కువగను, తక్కువగ నున్నప్పుడు మిక్కిలి తక్కువగను నుండును. వీటి ఫలితముగ భౌమ్య సంభవములగు వర్షపాతము. క్షామము మొదలగు వాటి ఆవర్తనము రవి కళంకముల ఆవర్తన కాలమును అనుసరించి యుండును.



చిత్రము 425 సూర్యునిపై కళంకములు గరిష్ఠ సంఖ్యలో నున్న దినము (12-8-1917)

సూర్యుని పరిభ్రమణము : సూర్య కళంకములను అవేక్షించి, సూర్యుడు తనలో తాను తిరుచున్నాడని తెలిసికొన వచ్చును. సూర్యుని నిరక్షరేఖా ప్రాంతములో పరిభ్రమణము సుమారు 25 దినములు పట్టును. రవి కళంకములు పశ్చిమ దిశ నుండి తూర్పు దిశవైపు జరుగుటచే సూర్యుడు తన అక్షముపై అప్రదక్షిణముగ తిరుగుచున్నాడని మనకు తెలియుచున్నది. ధ్రువప్రాంతములలో 34 దినములు పట్టును.

సూర్యుడు తన అక్షముపై పరిభ్రమణము చేయు చున్నాడని మొదట గెలీలియో కనుగొనెను.

సూర్యునిలోని మూలద్రవ్యములు : సౌర వర్ణమాలలోని కృష్ణరేఖల నుండి సూర్యునిలో మూలద్రవ్యముల ఉనికిని తెలిసికొనవచ్చును. ఇంతవరకు 67 మూలద్రవ్యములను సూర్యునిలో గుర్తించియున్నారు.

సౌరజ్వాలల వర్ణమాలలోని D_3 పీత రేఖ భౌమ్యమూల ద్రవ్యరేఖలకు వేరుగ నుండుచే అది యొక నూతన పదార్థమని గుర్తించవలెనని శాస్త్రజ్ఞులు కనుగొని, దానికి హీలియమ్ అని పేరిడిరి. అది భూలోకములో కూడ రశ్మ్యుద్గార మూలద్రవ్యముల నుండి ఉత్పన్నమగు చున్నట్లు ఇప్పుడు కనుగొనబడెను.

సూర్యవికిరణము, తాపక్రమము : సూర్యుడు ప్రతిసెకను నకు 3.79×10^{33} అర్గుల శక్తిని తేజోష్ణతారూపములో నిరంతరముగ వికిరించు చుండును. సూర్యుని అంతర్భాగములలో తాపక్రమము 2 మొదలు 4 కోట్ల డిగ్రీల (కేవలము) వరకును ఉండును.

సౌరశక్తి : సూర్యుడు నిరంతరము వెదజల్లు తేజోష్ణములు ఎట్లు పుట్టుచున్నవి అను విషయము చాలకాలముగ చర్చనీయాంశమైయున్నది. దీనికి సమాధానముగ అనేక వాదములు ప్రతిపాదింపబడినవి. అందు నేటి శాస్త్రజ్ఞులకు విశ్వాస పాత్ర మగుదాని నొకటి వివరింతము.

సూర్యుని అంతర్భాగములో మహత్తర తాపక్రమములో ద్రవ్య సంచయము శక్తిగ పరివర్తనము చెందుచున్నది. నాలుగు హైడ్రోజన్ కేంద్రకములును, రెండు ఋణ విద్యుత్కణములును సూర్యుని అంతర్భాగములోని తాపక్రమములో ఒక హీలియమ్ పరమాణువుగా మారును.

నాలుగు ధన విద్యుత్కణముల ద్రవ్యరాశి ఒక హీలియమ్ పరమాణువుయొక్క ద్రవ్యరాశికంటె కొంచము అధికముగనుండును. ఈ అధికముగనున్న ద్రవ్యరాశియే శక్తిరూపమును పొందుచున్నదని నేటి శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. ఒక గ్రాము హైడ్రోజన్‌లోని పరమాణువులు హీలియమ్‌గ మారునపుడు సుమారు 6.6 వేల కోట్ల కాలరీల శక్తి జనించుచున్నది. ఈ రీతిగ ప్రతిక్షణము అసంఖ్యాకములైన హీలియమ్ పరమాణువులు ఉత్పన్నములగుచుండుటచే లభించు శక్తి రవి గోళము నుండి నిరంతరముగ వికిరింపబడుచున్నది.

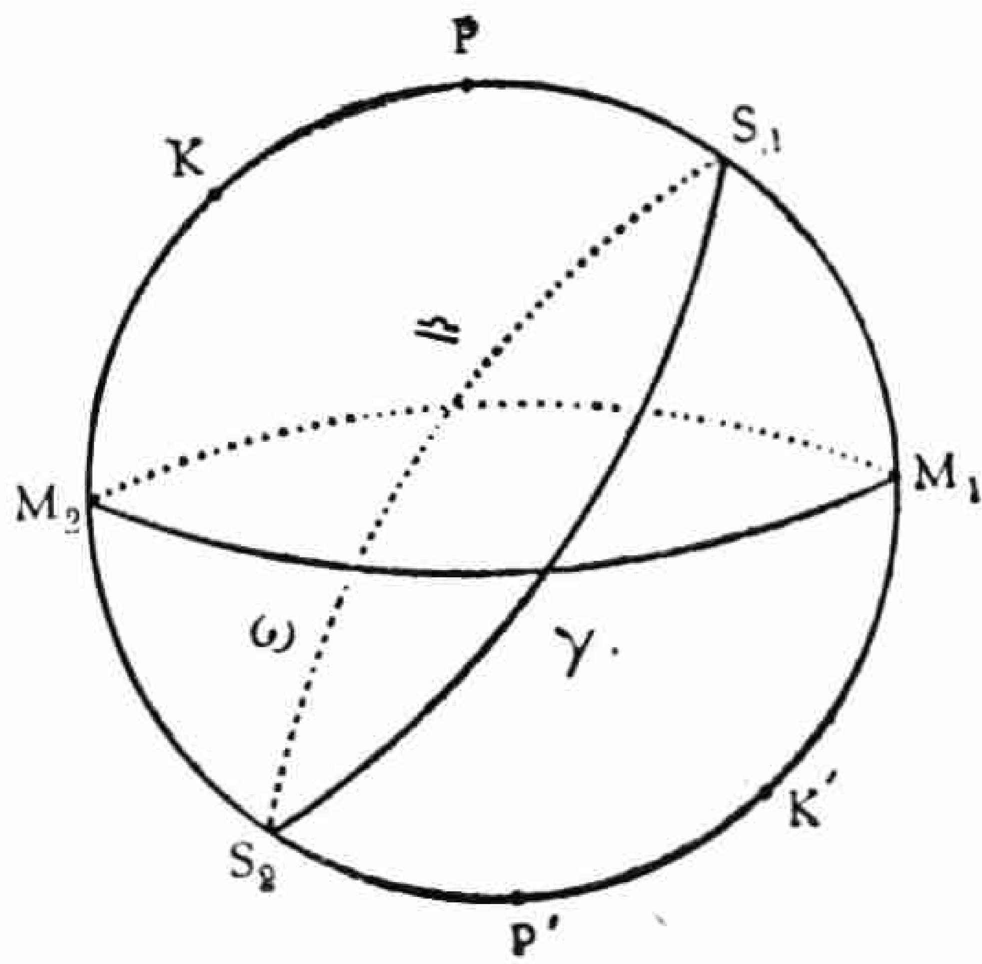
సూర్యుని భవిష్యత్తు : సూర్యుడు పైకి వికిరించు శక్తికి ప్రభవస్థానము దానికేంద్రమున హైడ్రోజన్ అనవరతముగ హీలియమ్ క్రింద పరివర్తించు ప్రక్రియ గనుక సూర్యుడు ఇట్లే ఎప్పటికిని ప్రకాశించుచు ఉండనేరడు. ఎంతో కొంత కాలమునకు ఈ ప్రక్రియకు అక్కరకు వచ్చు హైడ్రోజన్ సామగ్రి వ్యయమైపోవును. సూర్యుడు ఈ వరకు మనిన 5000 మిలియన్ల వత్సరములలో సూర్యగోళమందు తొలిని ఉండెడు హైడ్రోజన్ రాశిలో సగము వ్యయమై పోయినను, ఇంక మరి 5000 మిలియన్ల సం॥ముల వరకు హైడ్రోజన్ సామగ్రి సరిపోవునని మదింపువేయబడినది. ఇపుడొక ప్రశ్న ఆవిర్భవించవచ్చును. సూర్యుని హైడ్రోజన్ రాశి పూర్ణముగ పరివర్తన ప్రక్రియయందు వ్యయమగు సరికి, సూర్యుడు ఏ అవస్థలో ఉండును? ఈ ప్రశ్నకు సమాధానమును పడయవలెనన్న తాపక్రమము అత్యున్నత తీక్ష్ణతలో ఉండు సూర్యకేంద్రము సమీపముననే, ముఖ్యముగా తాపకేంద్రకీయ ప్రతిక్రియలన్నియు జరుగుచున్న భూతార్థమును జ్ఞాపకముంచికొనవలెను.

ఇట్లు పరివర్తన కార్యపోషకమగు ఇంధనము యొక్క లోపము మొట్టమొదట సూర్యకేంద్ర మండలమందు పొడసూపును. అనగా ఇచ్చట అందుబాటులోనుండిన హైడ్రోజన్ యంతయు హీలియమ్‌గా మారిపోయి యుండును. ఈ పరిస్థితి సూర్యగోళ మధ్యమమున కొత్త విన్యాసము నొకదానిని జనింపజేయునని మనమూహించ వచ్చును. ఇదివరకు కేంద్రమందు వ్రేలుచున్న ఉన్నత తాపక్రమ మండలము కేంద్రకీయాగ్నిని సంరక్షించగల ఇంధనము మెండుగాగల పై పొరల వైపు కదలును. ఈ క్షేత్రముకూడ కాలగతిని హైడ్రోజన్ రిక్తమైనపుడు హైడ్రోజన్ దహన మండలపు పొర గోళోపరితలము వైపు జరుగును. ఇట్టి పొరల తరబడి జరుగు హైడ్రోజన్ దాహము కారణముగ సూర్యుని శరీరముతోపాటు దాని దీప్తికూడ క్రమముగ నెక్కువగును. అనగా ఈపొర లేర్పడిన కొన్ని వందల మిలియన్ల ఏండ్లలోగా సూర్యగోళ వ్యాసము బుధ్రుని కక్ష్యా వ్యాసముతో సమానమగు స్థితి సంభవించును. దీప్తి మునుపటి దానికి 20 ఇంతలు పెరుగును. ఈ దీప్తికి భూతలముపైనున్న సముద్రములు తీవ్రముగ మరుగ మొదలిడును. అటుపిమ్మట సూర్యుడు సంకోచించుటకు ప్రారంభించి, క్రమముగా దీప్తిని కోలుపోయి, చివరకు చిల్ల పెంకువలెనగును. కాని, ఇట్టి అత్యాహితము సంభవించుట కింకను 5 వేల మిలియన్ల కాలము పట్టును. అందువలన ఇంత వేగము సంతాసమునకు కారణ మగపడదు.

కె. ఎస్. వి. న.

సౌరకాలము : సౌరకాలమునకు నామాంతరము సావనకాలము. భూమి సూర్యునిచుట్టు వార్షికపథములో భ్రమించుచుండుటచేత, సూర్యుడు భూమిచుట్టు తిరుగు చున్నట్లు మనకు గోచరించుచున్నదని తెలిసికొంటిమి

గదా! సూర్యుడు తన వ్యక్తగతియందు మార్చి 21 వ తేదీనాడు మేషాది బిందువును చేరును. ఉత్తరార్ధగోళము లోని వారికి ఈ సమయము వసంత ఋతు ప్రారంభ సమయ మగుటచే దీనిని వసంత సంపాతము (వెర్నల్ ఈక్వినాక్స్), లేదా వసంతవిషువు అని అందురు. చిత్రము 426 లో దివ్యధ్రువముల (P, P') నుండి,



చిత్రము 426

క్రాంతివృత్త ధ్రువముల (K, K') నుండి, పోవుచున్న గురువృత్తము విషువృత్తమును M_1, M_2 బిందువుల వద్దను, క్రాంతివృత్తమును S_1, S_2 బిందువుల వద్దను స్పర్శించుచున్నదని అనుకొందము. S_1, S_2 లను అయన బిందువులు (సొలిస్టికల్ పాయింట్స్) అని అందురు.

సూర్యుడు తన వ్యక్తగతియందు జూన్ 22 వ తేదీనాడు S_1 వద్దకు వచ్చును. ఈ సమయమును కటకాయనము (సమ్మర్ సొల్‌స్టైస్) అని అందురు. అట్లే సూర్యుడు తులాది బిందువునకు, S_2 బిందువు వద్దకు వరుసగా సెప్టెంబరు 23, డిశంబరు 22 తేదీలలో వచ్చును. ఈ సమయములను వరుసగా తులాసంపాతము (ఆటమనల్ ఈక్వినాక్స్), మకరాయనము (వింటర్ సొల్‌స్టైస్) అని వ్యవహరింతురు. పై చిత్రము నుండి దిగువ విషయములు గ్రహింపవచ్చును.

దినమునకు సుమారు 1° చొప్పున పెరుగుచుండును. విషువుల వద్ద, అయనముల వద్ద సూర్యుని విషువాంశ మనకు తెలియును. కావున ఏ దినమునకయినను సూర్యుని విషువాంశను మనము కనుగొనవచ్చును.

సూర్యుడు యామ్యోత్తర రేఖను చెంది ఉత్తమ ప్రతరణమును చేయు సమయమును సౌర మధ్యాహ్నమనియు, అధమ ప్రతరణము చేయు సమయమును సౌర అర్ధరాత్రి యనియు అందురు. రెండు అనుక్రమ సౌర మధ్యాహ్నముల మధ్యకాలమును, లేదా రెండు అనుక్రమ సౌర అర్ధరాత్రముల మధ్యకాలమును ఒక సౌర దినము అని అందురు. ఈ సౌర దినమును 24 గంటలుగను, ప్రతి గంటను 60 నిముషములుగను, ప్రతి నిముషమును 60 సెకనులుగను విభజించిరి.

ఈ సౌర కాలమునకు, వ్యావహారిక కాలము (మాధ్యమిక సౌర కాలము) నకు కొలది వ్యత్యాసముకలదు. సౌర మధ్యాహ్న సమయమున సూర్యుని నతకాలము '0' కనుక ఆయాసమయములందలి సూర్యుని నతకాలములు ఆయాసమయముల సౌరకాలములను సూచించును. వ్యక్త సౌరకాలము — మాధ్యమిక సౌరకాలము = కాలాంతరమానము. సౌరమానకాలము (సావనకాలము) అర్ధరాత్రినుండి ప్రారంభమగును. భారతీయ సిద్ధాంతులలో కొందరు సూర్యోదయమునుండియు, కొందరు అర్ధరాత్రి నుండియు కాల ప్రారంభము తీసికొందురు. ఎమ్. వి. సు.

సౌర కుటుంబము : సూర్య కుటుంబములో గ్రహములు, లఘుగ్రహములు, ధూమకేతువులు, ఉల్కలు కలవు. సూర్యుని గురుత్వాకర్షణశక్తి గ్రహాదులను వాని

సూర్యుని స్థానము	సూర్యుడు ఆ స్థానమునకు వచ్చు దినము	ఆ దినమున విషువాంశ	సూర్యుని భోగము	క్రాంతి
γ	మార్చి 21	0	0	0
S_1	జూన్ 22	$\gamma M_1 = 90°$	$\gamma S = 90°$	ω (ఉత్తర)
♎	సెప్టెంబరు 23	γ ♎ విషువృత్తము మీద = 180°	γ ♎ క్రాంతి వృత్తము మీద = 180°	0
S_2	డిశంబరు 22	$\gamma M_2 = 270°$	$\gamma S_2 = 270°$	ω (దక్షిణ)

ω క్రాంతివృత్త ప్రవణకోణము (ఆబ్‌లిక్విటీ).

ఈ పట్టిక నుండి ఒక సంవత్సర కాలములో అనగా 365·25 దినములలో సూర్యుని భోగవిషువాంశలు 0° నుండి 360° వరకు పెరుగుచుండునని తెలియుచున్నది. ఇవి ఒక క్రమ పద్ధతిలో ఉపచయ మొందవు. విషువాంశ

వాని కక్షలలో నుంచుచున్నది.

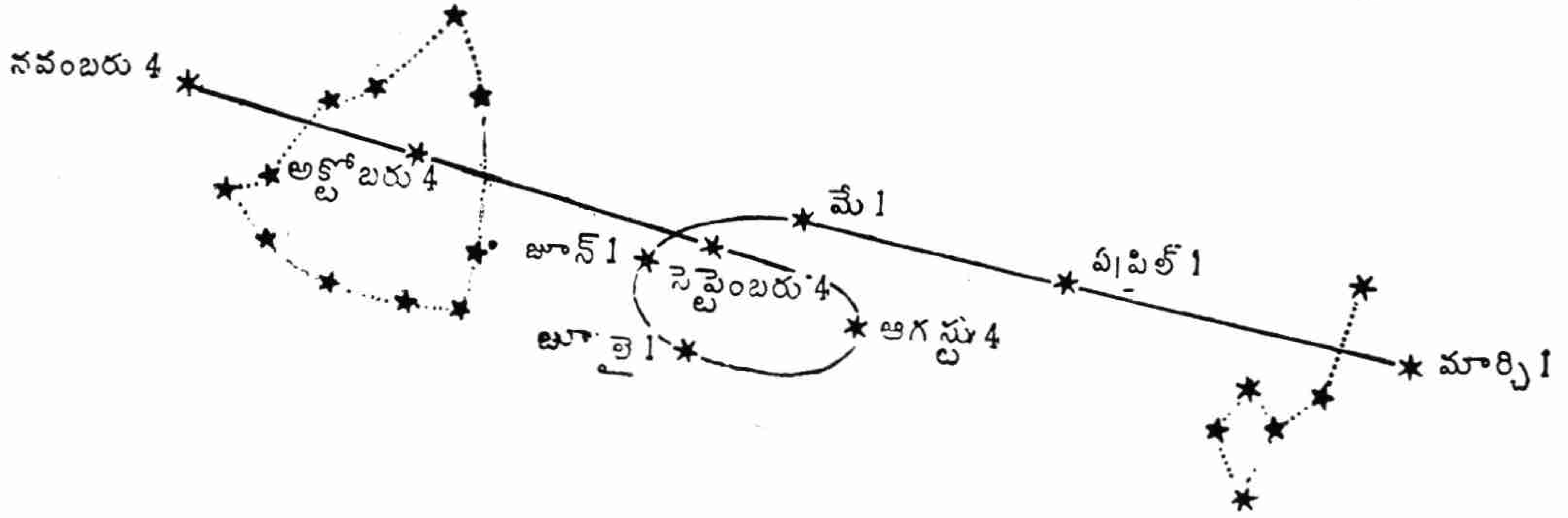
గ్రహములు : సూర్యుని చుట్టు నియత కక్షలలో సంచరించు నభోమూర్తులకు గ్రహములని పేరు. బుధ, శుక్ర, భూమి, కుజ, గురు, శని, ఇంద్ర, వరుణ, యమగ్రహములే

కాక అసంఖ్యాకములగు లఘుగ్రహములు కూడ సూర్యుని చుట్టు పరిభ్రమించుచున్నవి.

గ్రహములు అంతర్గ్రహములు, బాహ్య గ్రహములు అని రెండు విధములు. గ్రహకక్షలు భూకక్షకు లోపల నున్నచో ఆ గ్రహములు (బుధ, శుక్ర గ్రహములు) అంతర్గ్రహములు; వెలుపలనున్నచో అవి (మిగిలినవి) బాహ్య గ్రహములు. లఘు గ్రహముల కక్షలన్నియు (మూడింటివి తప్ప) భూకక్షకు బాహ్యముగనే యున్నవి.

గ్రహములు స్వయంప్రకాశకములు కావు; అవి సూర్య కాంతి పరావర్తనము చేతనే ప్రకాశించుచున్నవి.

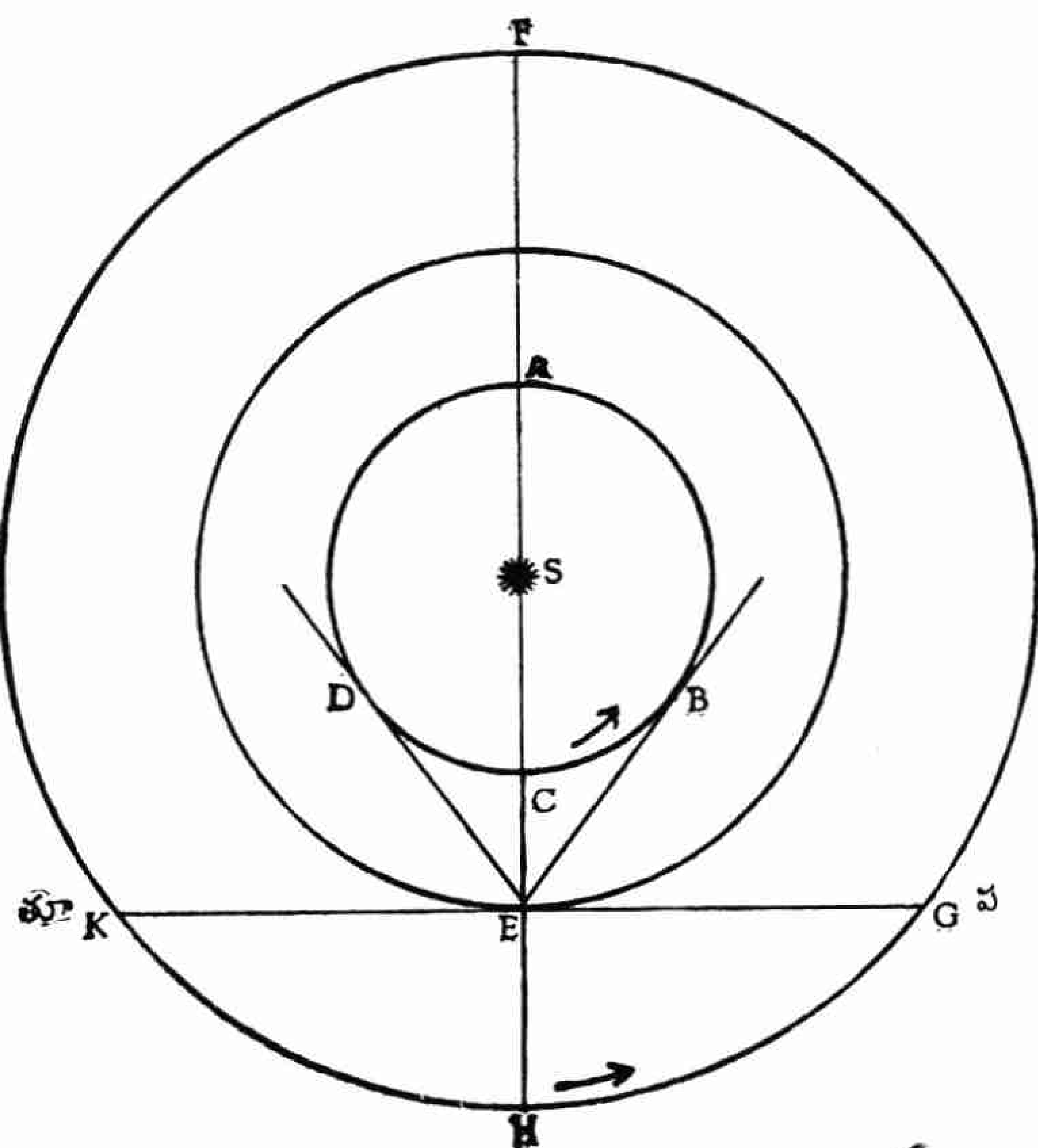
గ్రహచారము: భూలోక ప్రేక్షకునికి గ్రహములు గగనములో సంచరించు మార్గములు నక్షత్రాపేక్షయా ఋజుగతియని చెప్పబడును. కాని సావకాశముగా గ్రహముల నవలోకించినచో అవి కొలదికాలము ఋజు గతిని కలిగియుండి, పిమ్మట కొలది కాలము స్తంభించి యుండి, తరువాత పడమటి దిశలో వెనుకకు వెళ్ళి, పిదప తూర్పుదిశలో మరల ప్రయాణము చేయు చున్నట్లు గోచరించును. పశ్చిమ దిశగా సంచరించు నప్పుడు గ్రహముల గతి వక్రగతి అని చెప్పబడును (చూ. చిత్రము 428).



చిత్రము 427 గ్రహచారము

చిత్రము 427 లో భూలోక ప్రేక్షకునికి గోచరమగు గ్రహచారము చూపబడినది. గ్రహము మార్చి 1 నుండి జూన్ 1 వరకును, ఆగస్టు 4 నుండి నవంబరు 4 వరకు ఋజు గతిని; జూన్ 1 నుండి ఆగస్టు 4 వరకు వక్రగతిని పొంది యున్నది.

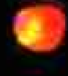
గ్రహముల వక్రగతులు సాపేక్షములేగాని వాస్తవములు కావు. గ్రహము, భూమి ఇవి రెండును రవి చుట్టు తిరుగు చున్నవి. భ్రమణ స్థితిలోనున్న భూమినుండి భ్రమణము చేయుచున్న గ్రహమును చూచుటచే గ్రహగతులలో పై మార్పులు కనపడుచున్నవి. సౌర ప్రేక్షకునికి ఇట్టి మార్పులు కన్పింపవు. చిత్రము 428 లో అంతర్వృత్తము అంతర్గ్రహ కక్షను, బాహ్య వృత్తము బాహ్య గ్రహకక్షను, మధ్యవృత్తము భూకక్షను, E భూమిని, S సూర్యుని సూచించును.



చిత్రము 428 గ్రహచారము

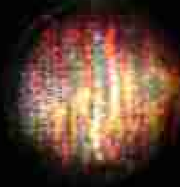
పడమరనుండి తూర్పు వైపుండును. అప్పుడు గ్రహగతి

గ్రహసూర్యులచే భూమివద్ద నేర్పడు కోణమునకు అంతరము అని పేరు. అంతర్గ్రహము A వద్దను, భూమి E వద్దను ఉండునప్పుడు అంతరము విలువ 0°. అప్పుడు గ్రహము ఉత్తమ యోగములో ఉన్నదని చెప్పుదురు. C వద్ద నుండునప్పుడు కూడ అంతరము విలువ 0°. అప్పుడు గ్రహము అధమ యోగములో ఉన్నదని యందురు. B, D ల వద్ద అంతరము గరిష్ఠ మగుటచే దానిని గరిష్ఠాంతరము అని చెప్పుదురు.

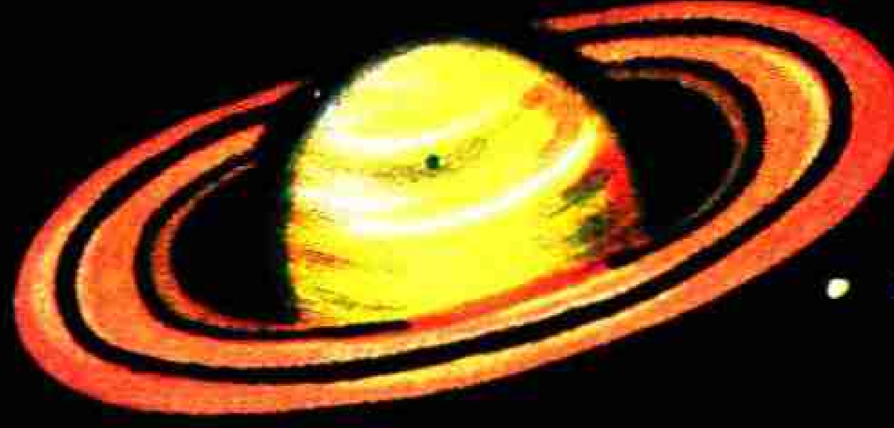

ప్లూటో


నెప్ట్యూన్




యురేనస్




శని

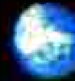



గురుడు




అంగారకుడు




భూమి




శుక్రుడు


బుధుడు



[illegible]

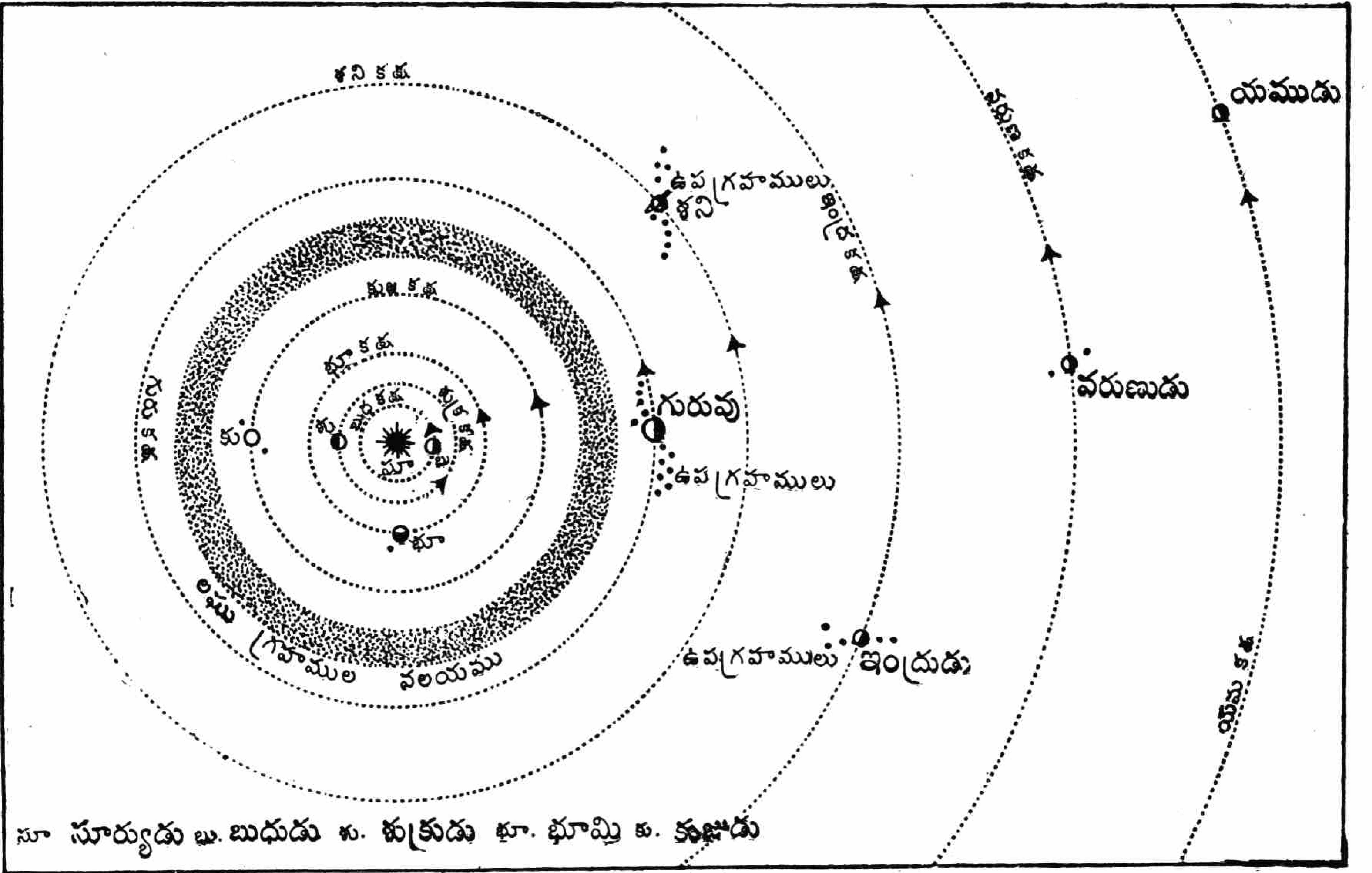
Blank Page

బాహ్య గ్రహము F వద్ద యోగములో నుండునప్పుడు అంతరము 0°. H వద్ద షడ్భాంతరములో నుండునప్పుడు అంతరము 180°. G, K ల వద్ద పాదస్థములో నుండునప్పుడు అంతరము 90°.

ఇక బాహ్యయోగమునుండి అంతర్గ్రహచారమును గమనింతము. మొదట గ్రహము తూర్పు దిశగా పయనమగును. దాని విషువాంశ హెచ్చుచుండును; కొంత కాలము తరువాత తగ్గి, గ్రహము స్తంభించిపోవును. అప్పుడా స్థలములో గ్రహము స్థిరముగానున్నదని చెప్పుదురు. అంతరము గ్రహకక్ష పరిమాణముపై ఆధారపడియుండును. తరువాత గ్రహము పశ్చిమదిశగా ప్రయాణము చేయ నారంభించును. అప్పుడు దాని విషువాంశ తగ్గుచుండును.

రెండుగ్రహములు స్తంభించియున్నప్పుడు, వాటి అంతరము యొక్క విలువ $\cos^{-1}\left\{\frac{\sqrt{ab}}{a+b-\sqrt{ab}}\right\}$ అని చూపవచ్చును. ఇచ్చట $2a$, $2b$ లు ఆ గ్రహకక్షల వ్యాసములు.

నాక్షత్ర, పారిషద ఆవృత్తులు : నక్షత్రాపేక్షయా ఒక గ్రహము సూర్యునిచుట్టు ఒక పర్యాయము తిరుగుటకు పట్టు కాలమునకు నాక్షత్ర ఆవృత్తి కాలము, లేదా భగణ కాలము అని పేరు. భూమ్యాపేక్షయా రెండు అనుయాయి యోగముల, లేదా షడ్భాంతరముల మధ్య కాలమునకు పారిషద కాలము అని పేరు.



చిత్రము 429 గ్రహముల కక్షలు, ఉపగ్రహములు

అప్పుడు గ్రహము వక్రగతి కలిగియున్నదని వ్యవహరింతురు. వక్రగతి కాలార్ధ సమయములో అంతర్గ్రహము అంతరయోగములోను, బాహ్యగ్రహము షడ్భాంతరములోను ఉండును. అటుపిదప గ్రహము రెండవ పర్యాయము స్తంభించి, మరల తూర్పుదిశగా పయనము సాగించి, తుదకు బాహ్యయోగమును పొందును. ఋజుగతికాలము వక్రగతి కాలముకంటె హెచ్చుగనే ఉండును.

పారిషదకాలము : నిర్వచనము : E, P లు భూమి యొక్కయు, గ్రహము యొక్కయు నాక్షత్ర కాలములను, S గ్రహ పారిషద కాలమును సూచించినచో

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{P}-\frac{1}{E} \quad \text{(అంతర్గ్రహములకు)}$$

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{E}-\frac{1}{P} \quad \text{(బాహ్యగ్రహములకు)}$$

గ్రహముల నాక్షత్ర, పారిషద భ్రమణ కాలములు దిగువ పట్టికలో పేర్కొనబడినవి.

గ్రహము	నాక్షత్ర కాలము	పారిషద కాలము	భ్రమణ కాలము
బుధుడు	88 దినములు	116 దినములు	88 దినములు
శుక్రుడు	225 దినములు	584 దినములు	?
భూమి	1 సం॥రము	—	23 గం. 56 ని.
కుజుడు	1·88 సం॥లు	780 దినములు	24 గం. 37 ని.
గురుడు	11·86 సం॥లు	399 దినములు	9 గం. 50 ని.
శని	29·46 సం॥లు	378 దినములు	10 గం. 14 ని.
ఇంద్రుడు	84·01 సం॥లు	370 దినములు	10 గం. 8 ని.
వరుణుడు	164·80 సం॥లు	368 దినములు	15 గం. 8 ని.
యముడు	248·83 సం॥లు	367 దినములు	?

గ్రహస్థానములు - బోడ్ సూత్రము : రవికిని, గ్రహములకును గల మధ్యదూరములు ఒక నియమము ననుసరించి యున్నవని బోడ్ 1772 లో ప్రతిపాదించెను. ఈ నియమము ప్రకారము 0, 3, 6, 12, 24, 48, ... అను శ్రేఢిలోని సంఖ్యలకు 4 కలుపగా లభించు శ్రేఢి 4, 7, 10, 16, 28, 52, ... వీటిని 10 చే భాగించగా లభించు నూతన సంఖ్యలు గ్రహసూర్యుల సరాసరి మధ్య దూరములను (భూ, సూర్యుల మధ్యదూరము = 1) సూచించును. ఈ సూత్రము ప్రకారము లభించు దూరములు.

బు	శు	భూ	కు	ల.గ్ర	గు	శ	ఇం	వ	య
0·4	0·7	1	1·6	2·8	5·2	10·0	19·6	38·8	77·2

ఈ సూత్రము వరుణ యమగ్రహములకు వర్తింపదు; గ్రహదూరములను జ్ఞప్తియందుంచుకొనుటకు తోడ్పడుచున్నది.

గ్రహముల కక్షలు : గ్రహముల కక్షలన్నియు అల్ప వికేంద్రతగల విలోపములు. ఒక గ్రహము సూర్యునికి అతి సమీపముగా నున్నప్పుడు అది పరిహేళి యందును, అత్యంత దూరముగానున్నప్పుడు అపహేళియందును ఉన్నదని చెప్పుదురు. సూర్యుడు విలోపముల కేంద్రమందుగాక, కొంచెము ప్రక్కగానుండుటవలన గ్రహసూర్యుల దూరములలో కొద్దిగా మార్పులు వచ్చుచుండును.

గ్రహముల కక్షాతలములు ఇంచుమించు క్రాంతి వృత్తతల మందే ఉన్నవి. క్రాంతి వృత్తతలమునుబట్టి గ్రహకక్షాతలములనతులు కొలుతురు. గ్రహకక్షాతలముల నతులలో యమకక్షాతలనతియే అన్నింటికన్న ఎక్కువయినది. (17°.9). లఘుగ్రహముల కక్షలు అధిక వికేంద్రతలు కలిగియుండుటయే కాక క్రాంతి వృత్తమునకు మిక్కిలి ఏటవాలుగా నుండును.

వేగము : ఒక గ్రహకక్షలో నాభినుండి r యూనిట్ల దూరములో గ్రహవేగము v అయినచో, $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$. $2a$ కక్షయొక్క దీర్ఘాక్షము. ఏ గ్రహము తన నిర్దిష్ట విలోపాకార కక్షయందు రవి చుట్టు సమవేగముతో భ్రమణము చేయుటలేదు. కాని గ్రహసూర్యులను కలుపు ఋజురేఖ సమానకాలములో సమాన వైశాల్యములను ఏర్పరచును. కావున గ్రహము రవిని సమీపించు కొలది దాని వేగము హెచ్చుచుండును (చూ. భూభ్రమణము పు. 448).

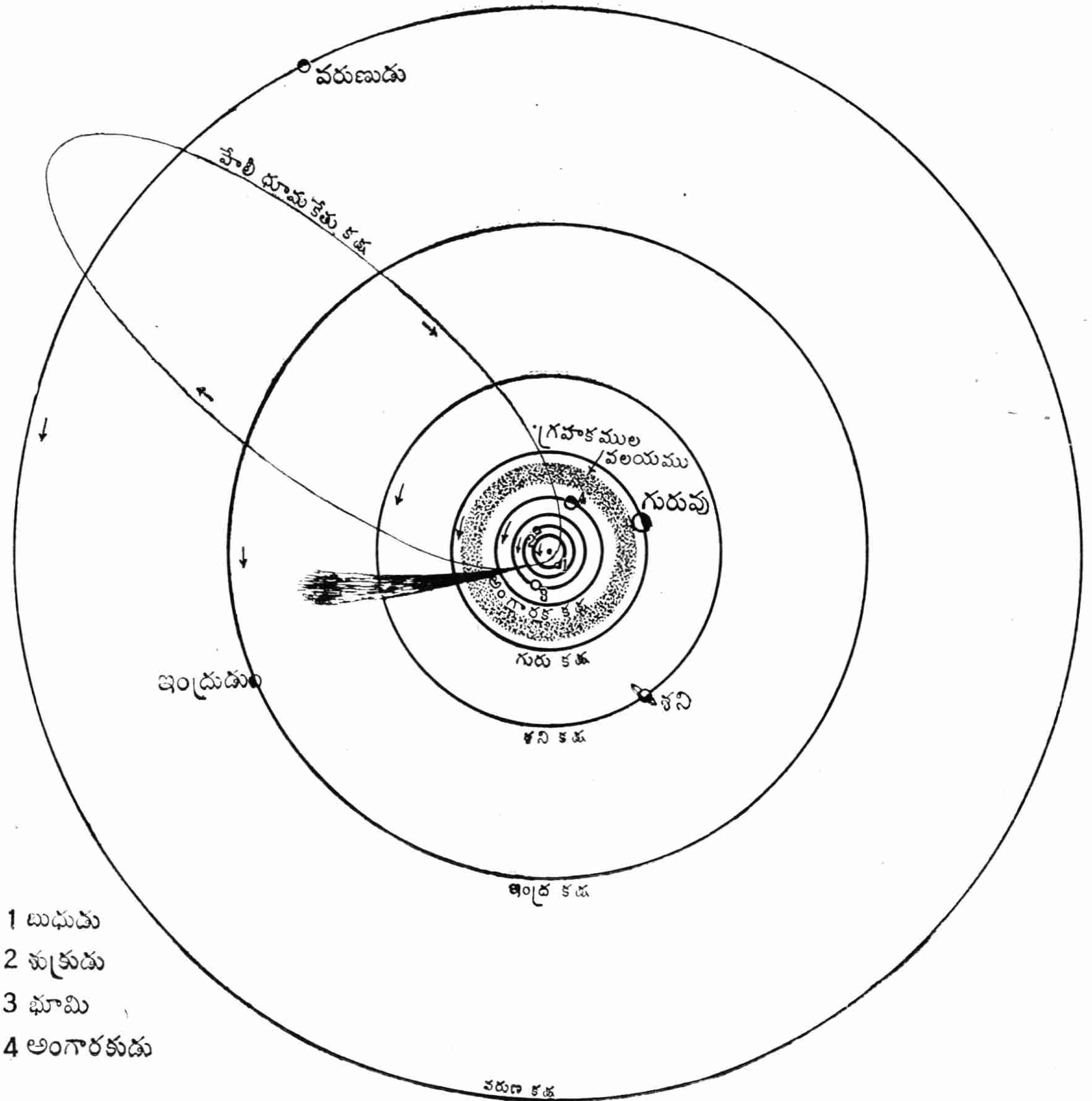
ద్రవ్యరాశి - పరిమాణములు : ఒక గ్రహము యొక్క ద్రవ్యరాశిని కనుగొనుటకు దాని ఉపగ్రహముయొక్క ఆవృత్తికాలము, దూరమును (ఆ గ్రహమును బట్టి) ఉపయోగింతురు. ఇప్పుడు m = గ్రహద్రవ్యరాశి, M = సూర్యుని ద్రవ్యరాశి, d = గ్రహమునుండి ఉపగ్రహము యొక్క సరాసరి దూరము, D = భూ, సూర్యుల సరాసరి మధ్యదూరము, t = ఉపగ్రహము యొక్క సరాసరి ఆవృత్తికాలము, T = భూమ్యావృత్తి కాలము అయినచో $\frac{m}{M} = \frac{T^2}{t^2} \cdot \frac{d^3}{D^3}$ అను సూత్రము లభించును. దీనిని ఉపయోగించి గ్రహముల ద్రవ్యరాశులు గణింతురు. గ్రహములలో మిక్కిలి తక్కువ ద్రవ్యరాశి కలది బుధగ్రహము ; అత్యధిక ద్రవ్యరాశి కలది గురుగ్రహము.

ఒక దూరదర్శని నాభీయతలములో ఏర్పడు గ్రహబింబముయొక్క నిజరేఖీయ పరిమాణములను మైక్రోమీటర్ సహాయముతో కొలువగా లభించు విలువలను దూరదర్శని యొక్క నాభీయదూరముతో భాగించినచో గ్రహము యొక్క వ్యాసము వర్తుల మానములో లభించును. ఈ విలువను, భూగ్రహదూరమును గుణించినచో వ్యాసము యొక్క విలువ రేఖీయపరిమాణములో లభించును.

ఒక గ్రహముయొక్క ద్రవ్యరాశిని దాని ఘనపరిమాణముచే భాగించినచో గ్రహసాంద్రత లభించును. సాధారణముగ గ్రహముల సాంద్రతలు ద్రవ్యరాశులు భూసాంద్రతతోను, ద్రవ్యరాశితోను పోల్చుచుందురు.

గ్రహతల భౌతికలక్షణములను గురించి తెలిసికొనుటకు గ్రహతలమువద్ద గురుత్వాకర్షణబలము (భూతల గురుత్వాకర్షణ బలమును బట్టి) తోడ్పడుచున్నది. ఉదా : ఒక వస్తువు గురుగ్రహతలములో భూతలములో కంటె 2·64 రెట్లు అధికభారము కలిగి యుండును.

సౌర కుటుంబ ఉత్పత్తి : సౌర కుటుంబముయొక్క ఉత్పత్తిని గురించి అనేక వాదములు ప్రతిపాదింప బడినవి. వానిలో ముఖ్యమయిన వాదములను మాత్రము పేర్కొందుము.



చిత్రము 430 సౌరకుటుంబము

నీహారికావాదము : దీనిని లాప్లాస్ ప్రతిపాదించెను. ఆదికాలములో సూర్య కుటుంబము వ్యాపించియున్న ప్రాంతమంతయు నీహారికారూపమూలవస్తువుతో నిండి యుండెను. క్రమేణ వికిరణమువలన అది చల్లబడి, గురుత్వాకర్షణచే సంకోచించినది. తత్ఫలితముగా దాని కోణీయవేగము హెచ్చి, అది భ్రమణము చేయనారంభించినది. కాలక్రమేణ పరిధి ప్రాంతీయవస్తువులు వీడిపోయి, చల్లబడి, సంకోచమునొంది భ్రమణము చేయ నారంభించినవి. అవియే గ్రహరూపములను పొందియున్నవని లాప్లాస్ ప్రతిపాదించెను. కాని ఈ వాదమునకు గణితశాస్త్ర రీత్యా అనేక ప్రతిబంధకములున్నవి.

స్రోతో వాదము : సౌరగోళము యొక్క సరిహద్దుప్రాంతములు వాయుమయములు. ఒక నక్షత్రము ముందొక కాలములో సూర్యుని సమీపమునకు వచ్చినప్పుడు పై ప్రాంత

ములలో స్రోతస్సు లేర్పడియుండవలెను. నక్షత్రము యొక్క గతి వేగమువలన ఇవి సూర్యునినుండి విడిపడి,

నీరు, అమోనియమ్, మిథేన్ వాయువులు గ్రహములుగా నేర్పడినవని నేటి శాస్త్రజ్ఞుల విశ్వాసము. కే. ఎస్. వి. న.

గ్రహము	వ్యాసము మైళ్ళ * లో	ద్రవ్యరాశి	సాంద్రత (భూమి = 1)	గురుత్వాకర్షణ శక్తి (భూమి = 1)	సరాసరి వేగము మై. సె.	కక్షవికేంద్రత	తాపక్రమము C°
బుధుడు	3,012	0·04	0·85	0·34	30	0·206	191
శుక్రుడు	7,584	0·81	0·85	0·84	22	0·007	69
భూమి	7,917	1·00	1·00	1·00	18·5	0·017	17
కుజుడు	4,220	0·11	0·72	0·38	15	0·093	—37
గురువు	86,000	316·94	0·25	2·64	8	0·484	—146
శని	72,500	94·9	0·13	1·14	6	0·0559	—179
ఇంద్రుడు	30,900	14·7	0·25	0·96	4	0·0471	—207
వరుణుడు	33,000	17·2	0·40	1·4	3	0·009	—220
యముడు	3,700?	?	?	?	3	0·249	—226

కాలక్రమేణ సంకోచమును పొంది, గ్రహరూపములను పొందెను. ఇదియే ఈ వాదములోని ప్రధానాంశము. నక్షత్రము దూరముగా పోవుకొలది దాని గురుత్వాకర్షణ బలము క్షీణించుటచే, ఈ గ్రహములు సూర్యాకర్షణశక్తికి లోనై, సూర్యునిచుట్టు తిరుగుచున్నవి. గ్రహములు పరిహేళివద్ద ఉన్నప్పుడు పై విధముగనే గ్రహములుకూడ ఉపగ్రహములుగా వీడిపోవును. గ్రహములు, ఉపగ్రహములు తుల్యత గల స్థానములను చేరినప్పుడు సంభవించినదే నేటి సౌర **కుటుంబము.**

బృహన్నవీనస్ఫోటవాదము: ఇదియే నేటి వాదము. నక్షత్రముల నడుమనుండు అంతరాళములో హైడ్రోజన్ మేఘములు గుమికూడియున్నవనియు, అవి చల్లబడుటచే నక్షత్రము లేర్పడుచున్నవనియు నేడు శాస్త్రజ్ఞులు విశ్వసించుచున్నారు. కొన్ని కోట్ల సంవత్సరములకు పూర్వము సూర్యుడు ఒక గొప్ప నవీనముతో కూడియుండవలయుననియు, అప్పుడు నవీనము (నోవా) చెదరినపుడందుండి బయలుదేరిన వాయువులు సౌరగోళ పరిసర ప్రాంతములో నుండు వాత మేఘములతో కూడి ప్రస్తుతపు సౌర కుటుంబము ఆవిర్భవించినదనియును, ఈ వాదము యొక్క సారాంశము. ఈ మిళితము వలన ఏర్పడిన పౌర దూరములో ఘర్షణవలన మార్పుచెంది, తుదకు గోళరూపమును పొందినది. సూర్యుడును, గోళమును ఒకే తీరున ఒక అయస్కాంత ప్రదేశములో భ్రమణముచేయుచుండినపుడు కొన్ని యుగముల తర్వాత, గోళములో రాసాయనిక మార్పులేర్పడి అందుండి వెలువడిన ఖనిజములు,

* 1 మైలు = 1.6093 కి. మీ.

సౌరాతివర్తనము: రవి బింబమువద్ద భూమి యొక్క వ్యాసార్ధము ఏర్పరచు చిన్నకోణము సూర్యుని యొక్క అతివర్తనము (లంబనము) ను గుర్తించును. సూర్యుడు చాల దూరములో నుండుటచే భూ వ్యాసార్ధము ఏర్పరచు కోణము అతి స్వల్పమైనందున, దానిని కొలుచుటకు శక్యముగాదు. అందువలన భూమి కక్ష యొక్క వ్యాసార్ధము నాధారముగ చేసికొని, ఇది రవి బింబము యొద్ద ఏర్పరచు కోణమును సూర్యుని యొక్క అతివర్తనముగ తీసికొందురు. దీని యొక్క విలువ 8″. 79 లేదా సుమారు 1,496,704,483 కి. మీ. గా అంగీకరింపబడినది. సూర్యునికిని, భూమికిని మధ్యగల ఈ దూరమే ఖగోళ శాస్త్రములో కొలతలకు యూనిట్‌గా తీసికొనబడెను.

ఈ అతివర్తనమును నిశ్చయించు పద్ధతులను కొన్నిటిని ఇక పరిశీలించుదము.

విపథన గుణకము నుండి: భూ వేగమునకు, జ్యోతిర్వేగమునకును గల నిష్పత్తికే విపథన గుణక మందురు (చూ. విపథనము పు - 507). ఒక స్థిర నక్షత్రము యొక్క నిరూపకములలో విపథనము వలన కలుగు మార్పుల నుండి ఈ గుణకము యొక్క విలువను తెలిసికొనవచ్చును. జ్యోతిర్వేగము, విపథనగుణకము తెలిసినపుడు భూమి యొక్క వేగమును కనుగొనవచ్చును.

v = భూమి యొక్క వేగము ; c = జ్యోతిర్వేగము.

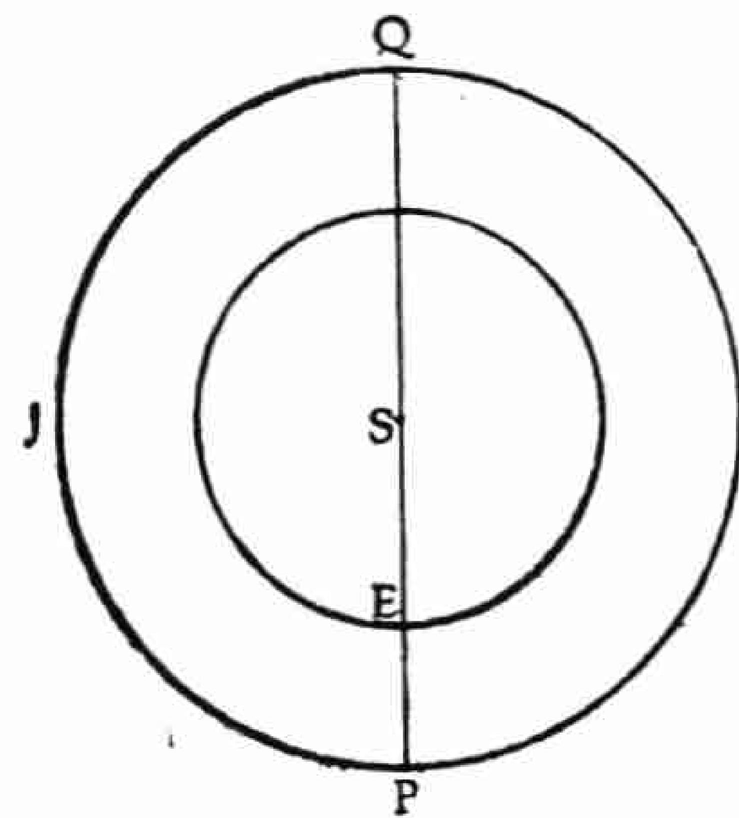
$k = \frac{v}{c}$ = విపథన గుణకము ;

d = సూర్యునికిని, భూమికిని గల మధ్యదూరమయినచో

$$2\pi d = 365\tfrac{1}{4} \times v, \text{ లేదా } d = (365\tfrac{1}{4}) \times \left(\frac{v}{2\pi}\right).$$

గురువు యొక్క ఉపగ్రహ గ్రహణావలోకనమునుండి: గురు గ్రహమునకు నాలుగు పెద్ద ఉపగ్రహములు కలవు. ఇవి గురుకక్ష్యా తలములోనే భ్రమణము చేయును. ప్రతి భ్రమణములో ఈ యుపగ్రహములు గురుచ్ఛాయ యందు మరుగువడుటను గ్రహణములందురు. ఈ యుపగ్రహ గ్రహణారంభ కాలమును, అంతిమ కాలమును నిర్దోష ముగ గణింపవచ్చును. కాని వీని అవలోకిత కాలముల కును, గణిత కాలములకును కొంత వ్యత్యాసముండునట్లు రమ్మర్ (1675) మొట్టమొదట కనుగొనెను ఈ భేదము నకు కారణము గురుని నుండి వెలుతురు భూమిని చేరు టకు పట్టుకాలమే. ఇక ఈ పద్ధతిలోని ముఖ్యాంశము లను గమనింతము.

గురుగ్రహము భూమి (E)కి షడ్భాంతరము P లో నుండునపుడు సంభవించు గ్రహణమును పరీక్షింతము. అప్పుడు గురునకును, భూమికిని గల మధ్య దూరము EP. గ్రహ ణము యొక్క అవలో కిత, గణిత కాలముల భేదము వెలుతురు EP దూరము పోవుటకు తీసి కొనుకాలము (t_1). అటు లనే గురుడు భూమికి సమాగమములో నుండు నపుడు సంభవించు ఉపగ్రహ గ్రహణము యొక్క అవ లోకిత, గణిత కాలముల భేదమే వెలుతురు EQ దూరము ప్రయాణము చేయుటకు పట్టుకాలము (t_2). ఈ రెండు కాలముల భేదార్ధమే $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ వెలుతురు SE అను దూరమును (అనగా భూమికిని, సూర్యునికిని గల మధ్యదూరమును) కడచుటకు పట్టుకాలము.



చిత్రము 431

ఈ కాలమును జ్యోతిస్సమీకరణము అని పిలుతురు. దీని నుండి జ్యోతిర్వేగమును, తదుపరి సూర్యునికిని, భూమికిని గల మధ్యదూరమును తెలిసికొనవచ్చును.

కుజుని అతివర్తనము నుండి: భూమికి షడ్భాంతరముగ నుండునపుడు కుజుని అతివర్తనమును కనుగొనవచ్చును. ఈ అతివర్తనము భూమికిని, కుజునికి గల మధ్యదూరము అనగా రవి భూములకును, రవి కుజులకును గల మధ్య దూరముల భేదము నిచ్చును. ఇది $E = (b - a)$ అను కొనుము.

కెప్లర్ మూడవ సిద్ధాంత ప్రకారము - కాలవర్గ ములు దూరముల ఘనములకు సమ సంబంధ సామ్య ములో నుండును. కావున, కుజుని నాక్షత్ర ఆవృత్తి (p) ని నాక్షత్ర సంవత్సరము (y) తో పోల్చిన ఎడల

$$\frac{p^2}{y^2} = \frac{b^3}{a^3}$$

అనగా రవి నుండి ఆ రెండు గ్రహముల దూరముల నిష్పత్తి లభించును. ఇందుండి రవికిని, భూమికిని గల మధ్య దూరమును తెలిసికొనవచ్చును.

ఇట్లు రవియొక్క అతివర్తనము 8″.94 అని నిర్ణయింప బడెను.

లఘుగ్రహముల ప్రత్యవేక్షణనుండి: పై విధముగ ఒక లఘుగ్రహము భూమికి షడ్భాంతరముగ నుండునపుడు నిర్ణయింపబడిన లఘుగ్రహ అతివర్తనము నుండియు సౌరాతివర్తమును కనుగొనవచ్చును.

లఘుగ్రహ అవలోకనమువలననే సౌరాతివర్తనము యొక్క విలువ చాల శుద్ధముగ నిర్ణయింపబడినది. లఘు గ్రహములన్నిటిలో రవి యొక్క దూర నిర్ణయమునకు మిక్కిలి యుక్తమైనది ఈరోసు. 1901 వ సంవత్సరములో ఈరోసు భూమికి షడ్భాంతరముగ సుమారు 4.83 కోట్ల కి. మీ. దూరములో నుండినపుడు అనేక వేధశాలలు ఈ లఘుగ్రహ ప్రత్యవేక్షణలో సహకరించి తీసిన ఛాయా చిత్ర పటముల నుండి సౌరాతివర్తనము యొక్క విలువ 8″.806 అని నిర్ణయింపబడినది. తదుపరి 1931 వ సంవత్సర ములో ఈ లఘుగ్రహము భూమికి సుమారు 257.495 లక్షల కి. మీ. దూరములో సంచరించుచున్నపుడు అనేక వేధ శాలల సహకారముతో ఛాయా చిత్ర పద్ధతి నుపయోగించి స్పెన్సర్ జోన్స్ (ఇంగ్లండు వేధశాల సర్వాధికారి) సౌరాతివర్తనము యొక్క విలువ 8″.790 ± 0″.001 అని కనుగొనెను. ఈ విలువ కనుగుణముగ భూమికిని, రవికిని గల మధ్యదూరము ముందే చెప్పబడినది.

రవిబింబ శుక్రతరణము: శుక్రుని కక్ష భూమియొక్క మార్గమున కంతరములో నున్నది. కొన్ని వేళలలో ఈ గ్రహము సూర్యునికిని, భూమికిని మధ్య వచ్చునప్పుడు సూర్యబింబముపై చలించు చుక్కవలె కనబడును. ఈ సంభవమునే శుక్రతరణమని చెప్పుదురు. అప్పుడు గోచర మగు రవిబింబ లక్షణములు వివిధ ప్రదేశ ప్రేక్షకులకు వేరువేరు విధములుగ నుండును. అదియుగాక తరణా రంభ కాలము, అంతిమ కాలము భేదపడుచుండును. రవి బింబముపై శుక్రుని తరణ పథమును వేరుపడు

చుండును. ఈ వ్యత్యాసములకు కారణము ఆ నభో మూర్తుల మధ్య దూరభేదమే.

ఈ తరణముల ఆవర్తన కాలములు సక్రమముగ నుండవు. ఇవి 8 సంవత్సరములకొక పర్యాయమో, లేదా $121\frac{1}{2}$ లేదా $105\frac{1}{2}$ వర్షములకొక పర్యాయమో మారి మారి సంభవించుచుండును. కొన్ని తరణదినములు క్రింద పేర్కొనబడి యున్నవి.

దినములు	ఆవర్తనకాలము
డిశంబరు 6 (1631)	
4 (1639)	8 సంవత్సరములు
జూన్ 5 (1761)	$121\frac{1}{2}$ సంవత్సరములు
3 (1769)	8 సంవత్సరములు
డిశంబరు 8 (1874)	$105\frac{1}{2}$ సంవత్సరములు
6 (1882)	8 సంవత్సరములు
జూన్ 7 (2004)	$121\frac{1}{2}$ సంవత్సరములు
5 (2052)	8 సంవత్సరములు
డిశంబరు 10 (2117)	105 సంవత్సరములు
8 (2125)	8 సంవత్సరములు

పై సారణినుండి రానున్న తరణ దినములను ఊహింప వచ్చును. కాని తరణములు ఆ దినములలో సంభవించునా యను ప్రశ్నను రవి శుక్రుల స్థితులనుండియే నిర్ణయింప శక్యమగును.

రవిబింబ శుక్ర తరణమును నవలోకించి హాలీ రవి యొక్క దూరమును నిర్ణయించెను.

ఇతర మార్గములు : శుక్ర గమనములో భూమివలన కలుగు సంక్షోభమునుండి రవియొక్క అతివర్తనమును కనుగొనవచ్చును. శుక్రుడు భూమికి అతి సమీపములో నొక విలోపీయ కక్షలో సంచరించుచున్నప్పుడు భూమి యొక్క గురుత్వాకర్షణ శక్తి ప్రభావమువలన ఆ విలోపీయ పథమునుండి కొంత తప్పిపోవును. శుక్ర సంచారములో గలుగు ఈ సంక్షోభములనుండి భూ సూర్యుల ద్రవ్యరాశుల నిష్పత్తిని; తదుపరి కెప్లర్ మూడవ సిద్ధాంత ప్రయోగమువలన భూ సూర్యుల మధ్య దూరమును నిశ్చయింప వచ్చును. అదే విధమున ఈరోసు లఘుగ్రహ గమనములో భూమ్యాకర్షణ శక్తిచే కలుగు సంక్షోభముల నుండియు రవియొక్క అతివర్తనమును అతి శుద్ధముగ నిర్ణయింపవచ్చును.

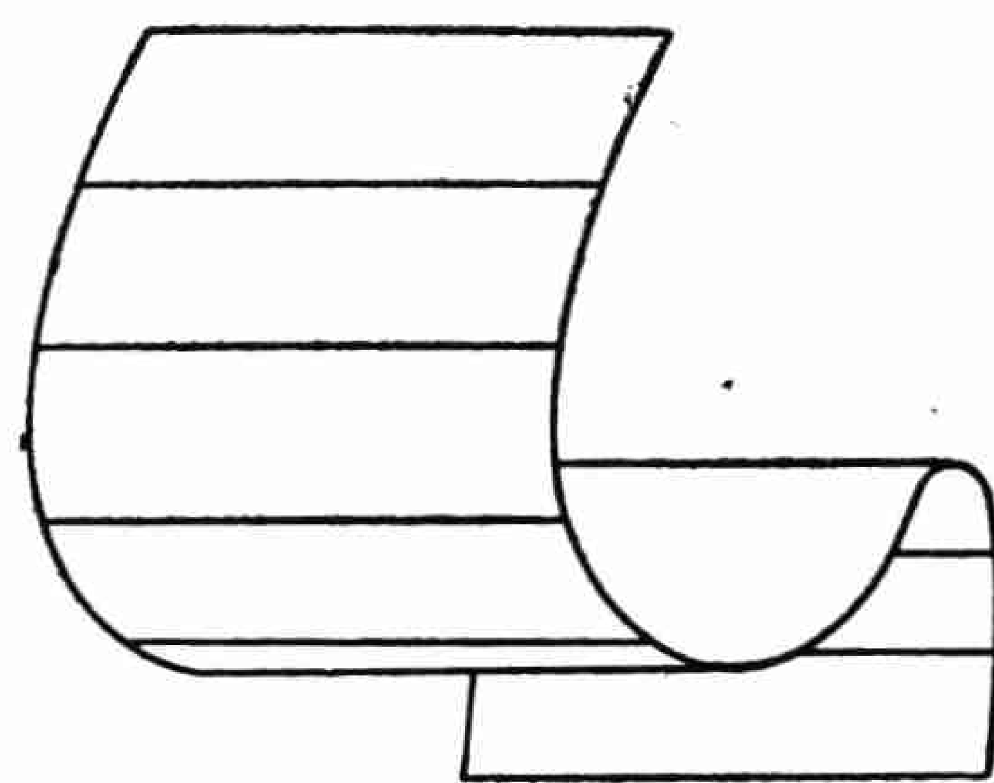
మరియొక పద్ధతి నక్షత్రములయొక్క వర్ణమాలలోని రేఖల స్థితి మార్పులనుండి వాటి వేగములు విదితమగుట నాధారముగగొన్నది. ఏదేని యొక ఋతువులో భూమి స్వకక్షీయ గమనములో నొక నక్షత్రమును సమీపించినచో, ఆరు నెలల పిదప యా నక్షత్రమునుండి తిరుగు మొగ మగును. ఈ యాగమన, ప్రత్యక్ గమనములవలన వర్ణ మాలలోని రేఖల స్థితులలో గోచరమగు మార్పులనుండి భూవేగము నిర్ణయింపవచ్చును. ఈ వేగ సహాయమున సౌరాతివర్తనమును కనుగొనవచ్చును.

భూమి ఒకప్పుడు జూలై నెలనుండి డిశంబరు వరకు సూర్యునికి సమీపములో సంచారము చేయుచుండును. మరియొకప్పుడు (డిశంబరు నెలనుండి జూలైవరకు) రవి నుండి దూరముగా వెళ్ళుచుండును. ఇందుచేత సౌర వర్ణ మాలలోని రేఖల స్థలభ్రష్టత్వమునుండి పై విధమున భూమియొక్క గతి వేగమును, భూ సూర్యుల మధ్య దూరమును నిర్ణయింపవచ్చును.

భూ సూర్యుల మధ్యదూరమే ఖగోళ శాస్త్రములోని మూలదూరము ; నభోమూర్తుల దూరములను కొలుచుటకు వాడబడు జ్యోతిర్మాన యూనిట్. సూర్యునియొక్క రేఖీయ పరిమాణములను, రవితలముపై గోచరమగు సంభవముల పరిమాణములను కొలుచుటకు పై దూరము మూలాధారమై యుండుటయేగాక సూర్యుని ద్రవ్య రాశి, సాంద్రత - వీని నిర్ణయమునకు కూడ అవశ్యకమై యున్నది.

కె. ఎస్. వి. న.

స్తూపము, (సిలిండర్) : ఒక ఋజురేఖ ఎల్లప్పుడును ఒకే దిశలో నుండి (అనగా ఒక దత్తరేఖకు సమానాంతరముగ నుండి) చలించినచో అది జనింప చేయు వక్రతలమునకు స్తూపతలము (సిలిండ్రికల్ సర్ఫేస్) అని పేరు (చూ. చిత్రము 432).

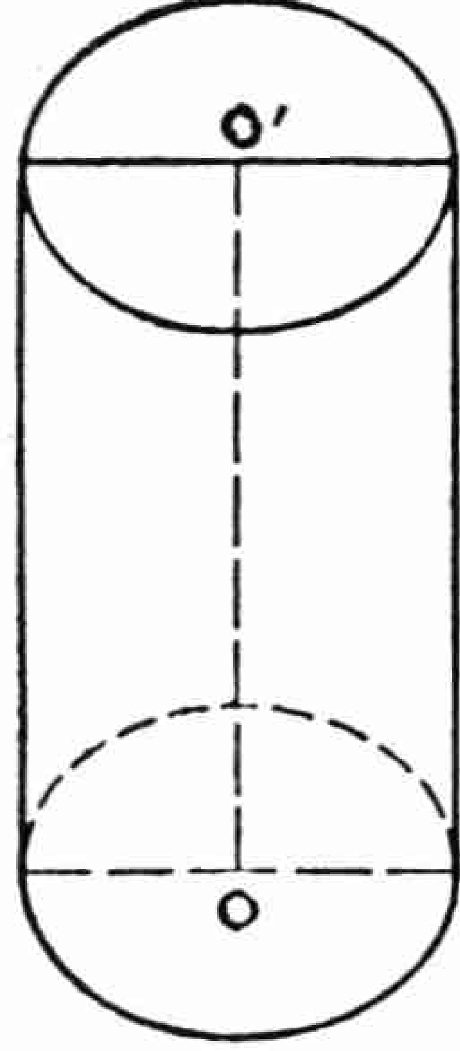


చిత్రము 432 స్తూపతలము

దత్త ఋజు రేఖకు లంబమైనటువంటి ఏ సమతలముచే స్తూపతలమును ఖండించినను, ఖండన వక్రములన్నియు సర్వసమముగ ఉండును. ఈ ఖండన వక్రమునకు ఆ స్తూపము యొక్క నియతరేఖ (డైరెక్ట్రిక్స్) అనిపేరు. నియతరేఖ వృత్తము అయినచో ఈ స్తూపమును లంబవృత్త స్తూపము (రైట్ సర్క్యులర్ సిలిండర్) అందురు. ఇటువంటి స్తూపము భ్రమణ వక్ర తలము.

దత్తరేఖ దిశను నిర్ణయించు కోటిజ్యాలు, l, m, n అయినచో, అట్టి స్తూపముల సమీకరణములన్నియు $l \frac{\partial z}{\partial x} + m \frac{\partial z}{\partial y} = n$ అను ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణమును తృప్తిచేయును.

పైన వివరించినది నిరూపక జ్యామితిలోని నిర్వచనము. ప్రాథమిక జ్యామితియందు స్తూపము అనగా పైన వివరించిన వక్రతలముచేతను రెండు సమాంతర తలములచేతను సీమితమైన ఘనరూపము. ఆ సమాంతర తలములను పీఠములందురు. సమాంతర తలములు జనక రేఖ (జనరేటింగ్ లైన్) లకు లంబముగ ఉన్నచో అది లంబవృత్త స్తూపము (చూ. చిత్రము 433). లేనిచో అది తిర్యక్ స్తూపము అనబడును. ఎటులైనను స్తూపము యొక్క ఘన పరిమాణము $V = Ah$. ఇచ్చట A పీఠ వైశాల్యము ; h సమాంతర తలముల మధ్యఉన్న లంబదూరము.

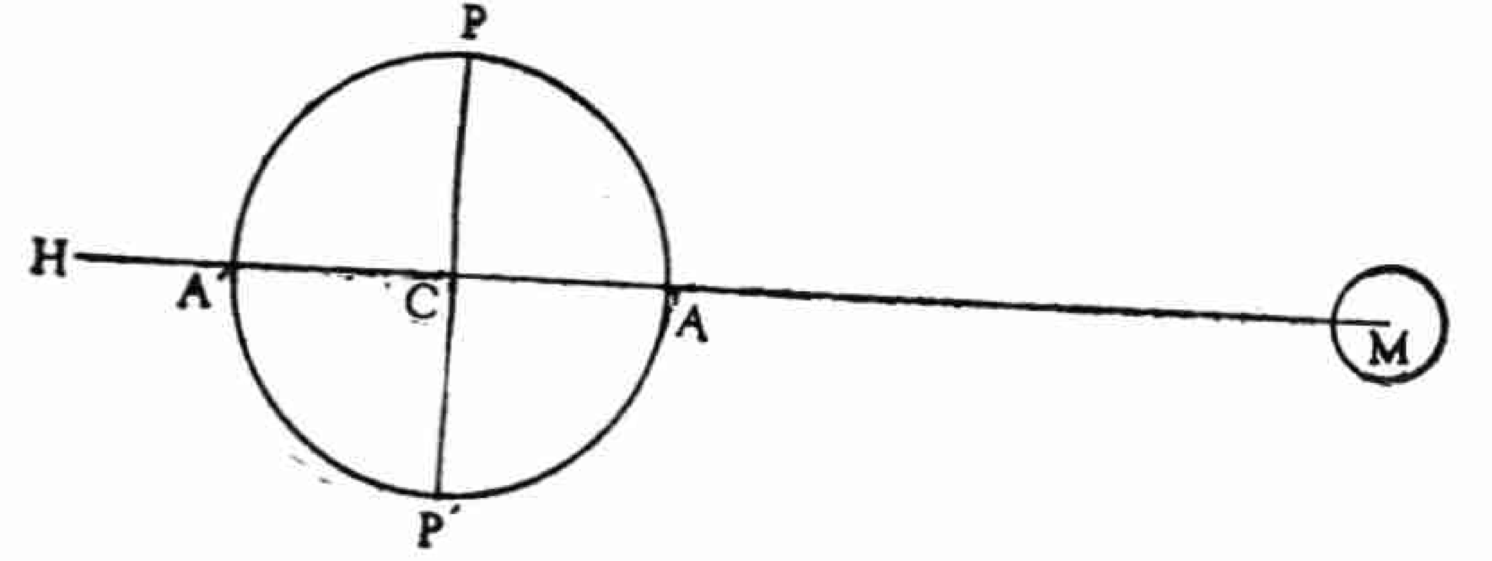


లంబవృత్త స్తూపము
చిత్రము 433

లంబవృత్త స్తూపముయొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $2\pi rh + 2\pi r^2$. ఇచ్చట r పీఠము యొక్క వ్యాసార్ధము. పా. ల. నా.

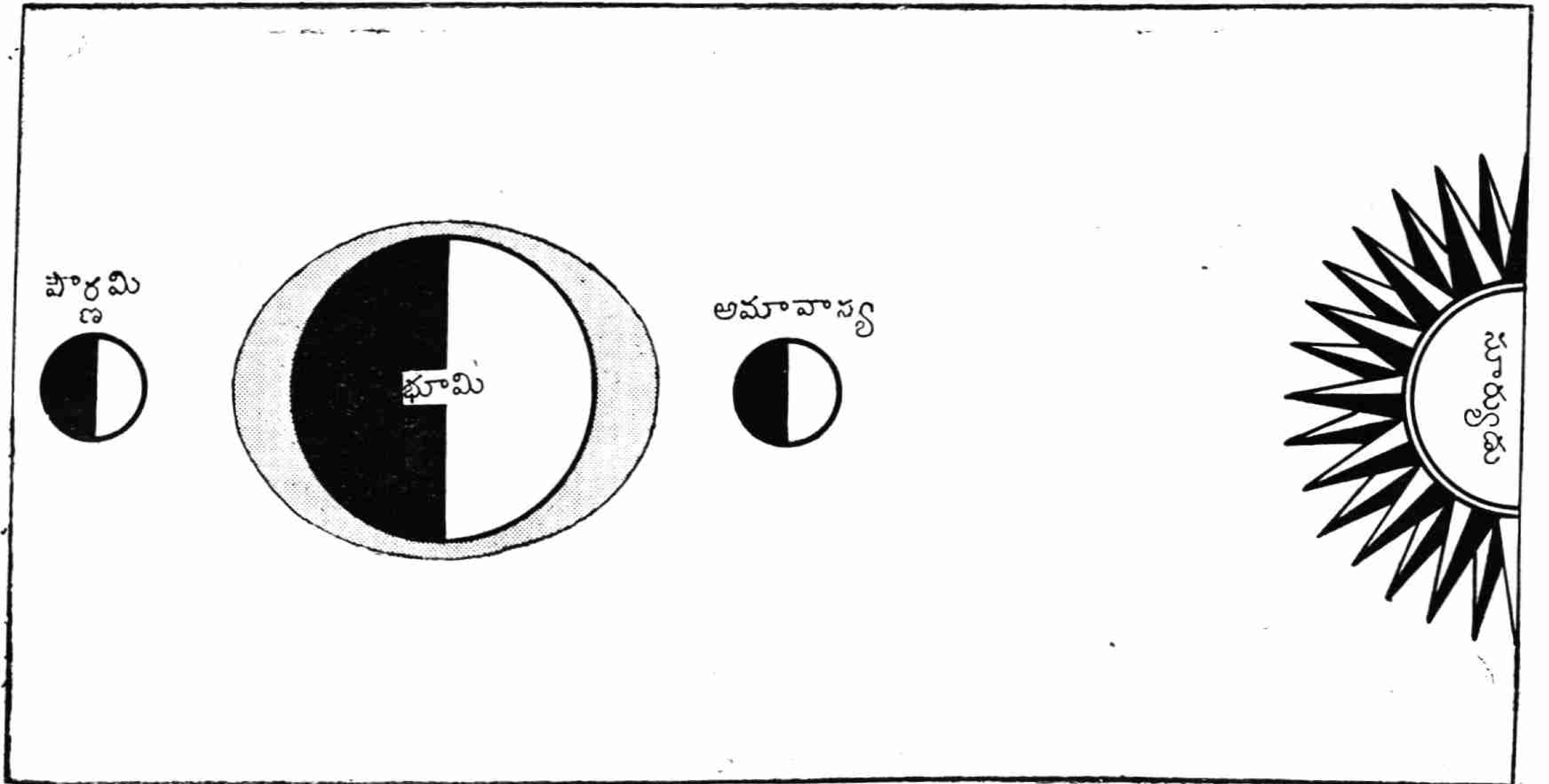
స్రోతస్సులు : నభోమూర్తులలో భూమికి మిక్కిలి దగ్గరగా నున్నది చంద్రమండలము. చంద్రుని ద్రవ్యరాశి అత్యల్పమయినను సామీప్యము వలన భూమిపై చంద్రుని ఆకర్షణబలము తక్కిన నభోమూర్తుల ఆకర్షణ బలముల కంటె ఎక్కువగా నుండును. ఈ బలము భూమిపై అన్ని చోట్ల సమానముగా నుండదు. ఆ వ్యత్యాసము వలన సముద్రమునందు స్రోతస్సులు (టైడ్స్) ఏర్పడుచున్నవి.

భూగోళ కేంద్రము C, చంద్రమండల కేంద్రము M, భూవ్యాసము ACA′, చంద్ర కేంద్రము M గుండ వెళ్ళును (చూ. చిత్రము 434).



చిత్రము 434

భూమిపై చంద్రమండలముయొక్క ఫలిత ఆకర్షణ యొక్క విలువ $= \frac{K \cdot M \cdot m}{CM^2}$. ఇందు K ఒక స్థిరాంకము ; M, m లు భూ చంద్రుల ద్రవ్యరాశులు. ఈ ఆకర్షణ బలమువలన భూమి భూచంద్రుల గురుత్వకేంద్రము వైపు జరుగుచుండును. చంద్రోప బిందువు A వద్ద ఆకర్షణ బలము C వద్దనుండు ఆకర్షణ బలముకంటె ఎక్కువ. కాబట్టి A బిందువు C బిందువుకంటె ఎక్కువ బలముతో M వద్దకు లాగబడుచున్నది. C కంటె A′ చంద్రమండలము M కు దూరముగ నుండుటవలన, A′ వద్ద



చిత్రము 4రం వసంత కాల స్రోతస్సులు

నుండు ఆకర్షణబలము C వద్ద గల ఆకర్షణ బలము కంటె తక్కువ.

PCP' వ్యాసము ACA' కు లంబముగా నుండినచో MC, MP, MP' రమారమి సమాన విలువలు కలవి. P వద్ద నుండు ఆకర్షణబలము పరస్పర లంబములగు రెండు భాగములను చేసి, ఒకదానిని CM కు సామ్యముగాను, రెండవ దానిని CM కు లంబముగాను విభజింపవచ్చును. CM కు సామ్యముగానుండు బలములు ఏకీభవించి, భూమి యొక్క AA' భాగమును లాగును. సముద్రమునందు నీరచట ఉబ్బును. CM కు లంబముగా నుండు బలములు P నుండి C వైపుగ జలమును లాగును. ఇట్లే సూర్యుని ఆకర్షణ శక్తికూడ పనిచేయును.

రవిచంద్రులు భూమియొక్క నిరక్షతలమునకు 28° కంటె ఎక్కువ దూరములో నుండరు. ఏకీభవించిన వారి ఆకర్షణ బలము పున్నమినాడు, అమావాస్యనాడు ఎక్కువ ఉద్రేకముతో సముద్రజలము నాకర్షించును. అప్పుడు స్రోతస్సులు ఏర్పడును.

స్రోతోజనక బలముయొక్క విలువ : భూమియొక్క ఒక్కొక్క భాగమునందును స్రోతస్సులు కల్గించు బలము పనిచేయుచుండును. గతిశాస్త్ర సూత్రములను అనుసరించి సూక్ష్మీకరించిన, A వద్దనుండు ఆకర్షణబలము

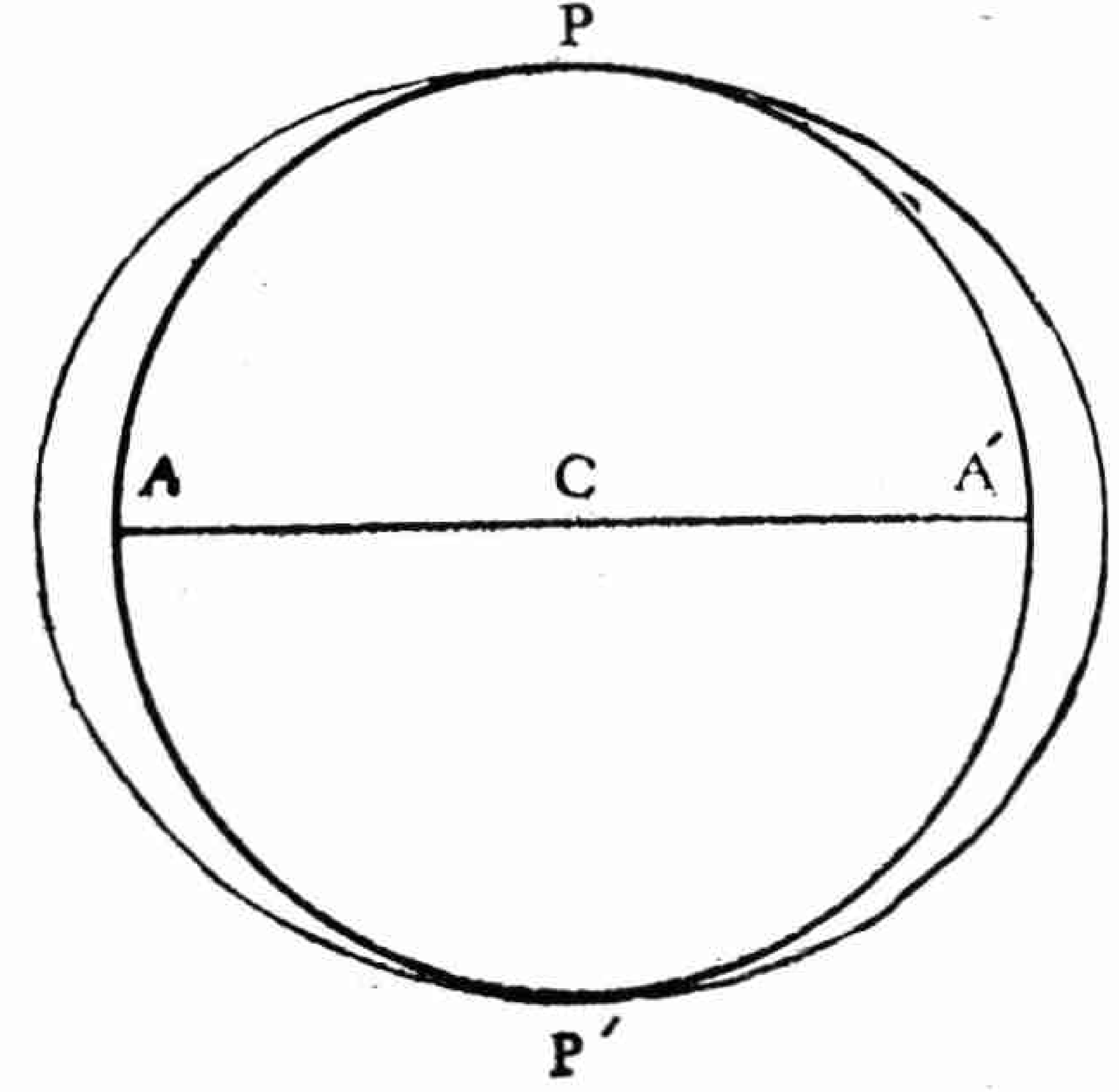
$$= \frac{K \cdot m \cdot 2CA}{CM^3}$$

భూగోళమునందలి మార్పు : రవిచంద్రుల ఆకర్షణ బలమువలన భూమిపై AA' బిందువులవద్ద నున్న జలము ఆకర్షించబడుటచే P, P′ అను ధ్రువములవద్ద నుండు జలమంతయు నిరక్ష ప్రదేశమునకు ఆకర్షింపబడును. ఈ ఆకృష్ట జలభాగములకే స్రోతస్సులని పేరు.

అష్టమినాడు రవిచంద్రులు పరస్పరము 90° లో నుందురు ; వారి ఆకర్షణబలము A, A′ ల వద్ద మందముగా నుండుటచే ఆనాడు స్రోతోమాంద్యత సంభవించును.

స్రోతస్సుల ఘర్షణవలన భూమిపై కలుగు మార్పులు : ద్రవద్రవ్యముల ప్రధాన లక్షణము స్నిగ్ధత; వాటి ఆకారములందు మార్పుఏర్పడునపుడు స్నిగ్ధతవలన మార్పులకు నిరోధము ఏర్పడి, చలనశక్తిలో కొంతభాగము ఉష్ణముగా మారును. ఈ ఘర్షణవల్ల స్రోతోతరంగములు చంద్రోప బిందువులు A, A′ (చూ. చిత్రము 436) వద్ద కొంత ముందుకు వెళ్ళును. చంద్రమండలము వీటిని AA' వద్దకు లాగుటచే ఒక యుగ్మము (కపుల్) ఏర్పడును. ఇందువలన భూమియొక్క కోణీయవేగము తగ్గి, భూభ్రమణకాలము క్రమేణ ఎక్కువగును.

స్రోతస్సుల ఘర్షణవలన దినమానము ఎక్కువ యగుచున్నది. చంద్రమండలముచే ఏర్పడు యుగ్మము భూమిపై



చిత్రము 436

ఒక వైపున ప్రవర్తించి, భూభ్రమణకాలమును ఎక్కువ చేయగా, భూమిచే నేర్పడు యుగ్మము చంద్రమండలముపై ఎదుటివైపున ప్రవర్తించి, దాని భ్రమణకాలమును ఎక్కువ చేయవలెను. ఇందుచేత కలుగు అంతిమ పర్యవసానము వలన భూమినుండి చంద్రమండలము యొక్క దూరము క్రమేణ ఎక్కువ యగుచున్నది ; దాని భ్రమణ కాలము అనగా చాంద్రమానమాసము ఎక్కువయగుచున్నది. కొన్ని యుగముల కాలములో స్రోతస్సుల ఘర్షణవలన చంద్రమండల, భూమండలముల భ్రమణకాలములు సమానములగునని తెలియుచున్నది. దినమానము, మాసమానము రెండును సమానములై 14,000 గంటల ప్రమాణము కలవై యుండును.

అప్పుడు భూమి చంద్రునివైపు ఏకముఖముతో తిరుగుటచే చంద్రప్రేరితస్రోతస్సులు భూమియందుండవు. స్రోతస్సుల ఘర్షణచే కలుగు భ్రమణమాంద్యత కలుగదు. ఇట్లు జరుగుటకు 500 కోట్ల సంవత్సరములు పట్టునని డాక్టర్. ఏ. జాఫ్రీ ఊహించియున్నాడు. ఇట్టి పరిస్థితులలో చంద్రాకర్షణబలము ప్రస్తుతపు బలములో మూడవవంతు ఉండును. కాని రవ్యాకర్షణ శక్తి అట్లే మారకయుండుటచే దానికి ఎక్కువ ప్రాముఖ్యము కలుగును. చంద్రజన్య స్రోతో తరంగములు భూమిపై ఎదుటివైపున ప్రవహించుట కారంభించును. అపుడు చంద్రమండలము భూమివైపు ఉపగమించును.

చంద్రమండలాకారము : చంద్రమండలము భూమివైపు ఏకముఖముగా నుండుటకు కారణము స్రోతోఘర్షణమని విశదమయినది. చంద్రమండల స్రోతో జనకశక్తికంటె

భూమియొక్క స్రోతో జనకశక్తి చంద్రబింబము వద్ద 20 రెట్లు ఎక్కువ. ఆదికాలములో చంద్రమండలములో నీరుండియుండవచ్చును. కాని ప్రస్తుత పరిస్థితులను బట్టి చంద్రమండలమంతయును కరగిన ఖనిజములతో నిండి, భూమ్యాకర్షణశక్తిచే ప్రబల స్రోతోతరంగము లేర్పడి యుండును. దానివలన క్రమేణ చంద్రమండల భ్రమణ కాలము మాంద్యతనుచెంది, చంద్రమండల మిప్పుడు భూమి వైపు ఏకముఖముగా నున్నది.

రవిమండల జనిత స్రోతోతరంగ ఘర్షణబలము బుధ, శుక్ర మండల భ్రమణకాలములలో క్రమేణ మాంద్యతను కలిగించి, అవి రవివైపు ఏకముఖముగా తిరుగుటకుగల కారణమును తెలుపుచున్నవి. వరుణగ్రహముకూడ అట్లే యుండునేమో ? ఆచార్య

స్వదేశకాలము - ప్రమాణకాలము : స్వదేశ మధ్యాహ్న రేఖను సూర్యుడు ఉత్తమ ప్రతరణముచేయు నప్పుడు మధ్యాహ్నమనియు, అధమ ప్రతరణముచేయు నప్పుడు అర్ధరాత్రి యనియు చెప్పుదురు. ఇవి ప్రతి ప్రదేశముపై ఆధారపడియుండును. ఇట్టి కాలమునకు స్వదేశకాలము అని పేరు. ఇప్పుడు పగలు 3 గంటలు అనుట అర్థములేని వాక్యము. స్థలమును నిర్దేశించినగాని అర్థములేదు. అన్ని స్వదేశకాలములకును సంబంధము ఏర్పరుచుటకుగాను ప్రమాణ మధ్యాహ్న రేఖలను వాడుదురు.

పూర్వము ఉజ్జయినీ (అవంతి) రేఖను మన సిద్ధాంతులు ప్రమాణ రేఖగా స్వీకరించిరి. ఇప్పుడు గ్రీనిచ్ దగ్గర నుండు రేఖను పంచాంగ ప్రమాణరేఖగా తీసికొను చున్నారు. భూమి 24 గంటలలో ఒక పూర్తి పరిభ్రమణము చేయును ; అనగా 360 డిగ్రీలు తిరుగును ; కాబట్టి 15 డిగ్రీలకు 1 గంట, లేదా, 1 డిగ్రీకు 4 నిమిషముల వంతున కాలమానము ఏర్పడును.

భూమియంతయు 24 ప్రమాణకాల మండలముగా విభజన చేయబడినది. గ్రీనిచ్‌కు పూర్వదిశలో 15 డిగ్రీలకు ఒక రేఖ చొప్పున, పశ్చిమదిశలో 15 డిగ్రీలకు ఒక రేఖ చొప్పున ప్రమాణ రేఖలు తీసికొనబడినవి. ప్రతి ప్రమాణ రేఖకు ఇరువైపుల $7\frac{1}{2}$ డిగ్రీల వరకు గడియారములు ఒక కాలమును గుర్తించును. ఉదాహరణమునకు గ్రీనిచ్ రేఖకు ఇరువైపులను $7\frac{1}{2}$ డిగ్రీలవరకు గ్రీనిచ్ కాలమును వాడుదురు. ఈ మండలములో స్వదేశ కాలము ఆయా చోట్లకు తగినట్లు నిర్ణయింపబడెను.

గ్రీనిచ్‌కు తూర్పున $7\frac{1}{2}$ డిగ్రీలు మొదలు $22\frac{1}{2}$ డిగ్రీల వరకు మధ్య ఐరోపా కాలము వాడుదురు. ఈ మండలములో నుండు గడియారము లన్నియు గ్రీనిచ్ కాలము కంటె ఒక గంట ఎక్కువ చూపించును.

కరాచీ ప్రమాణకాలము గ్రీనిచ్ కాలముకంటె 5 గంటలు ఎక్కువ; ఇండియా ప్రమాణకాలము $5\frac{1}{2}$ గంటలు ఎక్కువ ; ఢాకా ప్రమాణకాలము $6\frac{1}{2}$ గంటలు ఎక్కువ. ఇండియాయొక్క ప్రమాణ రేఖ గ్రీనిచ్‌కు తూర్పున $82\frac{1}{2}$ డిగ్రీలలో నున్నది. గ్రీనిచ్ కాలముకంటె మద్రాసు స్వదేశకాలము 5 గంటల 21 నిముషములు ఎక్కువ ; కలకత్తా స్వదేశకాలము 5 గంటల 53 నిముషములు ఎక్కువ ; వాషింగ్‌టన్ స్వదేశకాలము 5 గం. 8 ని. తక్కువ.

తారీఖు రేఖ : గ్రీనిచ్ కాలము ఆదివారము పగలు 12 గంటలు తీసికొందము. అక్కడనుండి పడమరగా పోయినచో ప్రతి 15 డిగ్రీలకు ఒక గంట వంతున ప్రమాణ కాలము తగ్గుచుండును. పడమర 180 డిగ్రీల దూరమున ప్రమాణకాలమును గ్రీనిచ్‌నుండి గణించినచో అప్పుడు శని - ఆది అర్ధరాత్రియగును. తూర్పుగా వెళ్ళినచో 180 డిగ్రీల దూరమున ఆది - సోమ అర్ధరాత్రి యగును. 180° రేఖాంశకు పశ్చిమమున ఆదివారము, తూర్పున సోమవారము ప్రారంభమగును. ఇదియొక సందిగ్ధావస్థ. ఈ రేఖ మహాసముద్ర మధ్యమున వెళ్ళుచుండుటచే వాడుకలో జనులకు ప్రమాణకాలము విషయమున సంశయము కలుగలేదు. జన సంచార ప్రదేశములగుండ వెళ్ళినప్పుడు ఈ రేఖను కొంత తూర్పుగాగాని, కొంత పడమరగా గాని సవరించి ఆ దేశభాగమంతటిలో కాల సంశయము లేకుండునట్లు చేయబడినది. గ్రీనిచ్‌కు 180 డిగ్రీల దూరమున నుండు రేఖకు తారీఖు రేఖ యని పేరు.

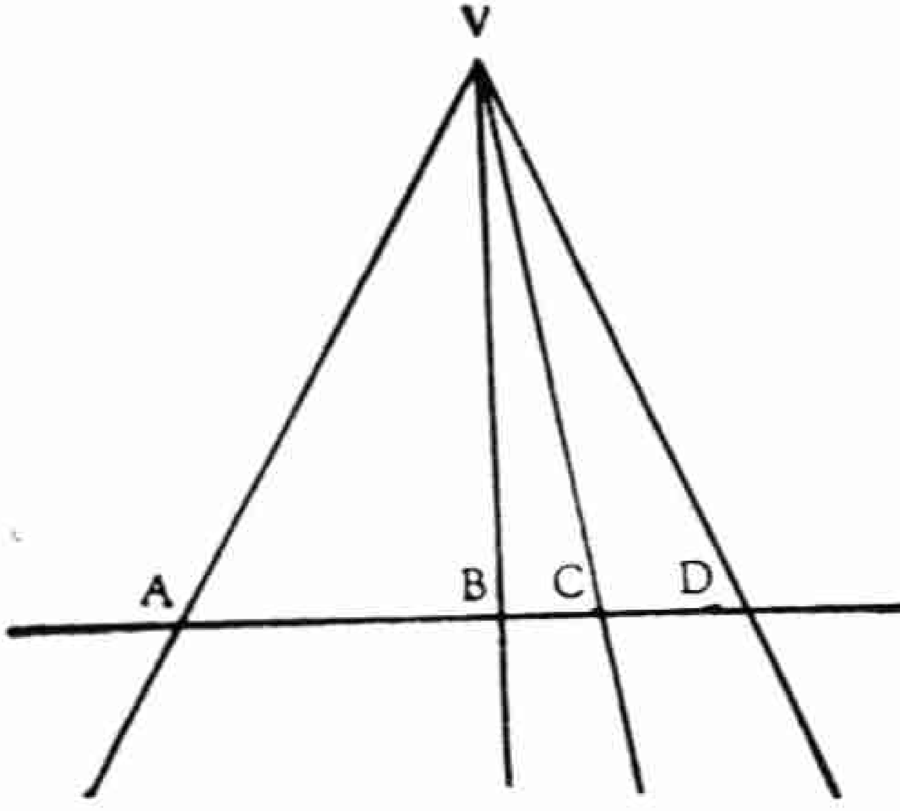
పశ్చిమమునుండి తూర్పువైపు తారీఖు రేఖను దాటు నపుడు నావలు, విమానములు ఒకరోజు అధికముగా గణించవలయును ; తూర్పునుండి పశ్చిమముగా దాటు నప్పుడు ఒకరోజు తగ్గించి వ్రాసికొనవలెను. పశ్చిమ ప్రమాణరేఖలను దాటునప్పుడు ఒక్కొక్క గంట వంతున గడియారములోని కాలమును తగ్గించుకొనవలయును ; తూర్పు ప్రమాణ రేఖలను దాటునప్పుడు ఒక్కొక్క గంట వంతున ఎక్కువ చేసికొనవలయును. ఆచార్య

స్వరాత్మకచ్ఛేదము : (నిర్వచనము) ఏక రేఖీయ బిందువులు నాలుగు స్వరాత్మక వరుస యగుటకు $(ABCD) = -1$

ఇప్పుడు $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} = -1$

అనగా $\frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD} = -\frac{AB - AC}{AD - AC} = \frac{AB - AC}{AC - AD}$

కాబట్టి AB, AD ల స్వరాత్మక మధ్యమము AC. ఇప్పుడు A, C బిందువులు B, D బిందువుల యొక్క సంయుగ్మములు.



చిత్రము 437

VA, VB, VC, VD ఋజురేఖలు V గుండ వెళ్లిన, వీనిని $V(ABCD)$ చే గుర్తింపవచ్చును. వీనికి శలాక (పెన్సిల్) అని పేరు. వీని ఛేదము $ABCD$ స్వరాత్మక రాజి అయినచో $V(ABCD)$ ని స్వరాత్మక శలాక అందురు. VA, VC ల యొక్క సంయుగ్మరేఖలు VB, VD లు (చూ. చిత్రము 437).

కొన్ని సిద్ధాంతములు : $(ABCD) = 1$, AC యొక్క మధ్యబిందువు O అయిన, $OB \cdot OD = OC^2 = OA^2$.

$(ABCD) = -1$, లేదా $(AC, BD) = -1$ అని వ్రాయుట వాడుక.

$(ABCD) = -1$ అయినందున

$$\frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD}; \text{ లేదా } \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$$\therefore \frac{AB+BC}{AB-BC} = \frac{AD+CD}{AD-CD}.$$

AC యొక్క మధ్యబిందువు O.

కాబట్టి $AB + BC = 2\ OC$

$AB - BC = 2\ OB$

$AD + CD = 2\ OD$

$AD - CD = 2\ OC$

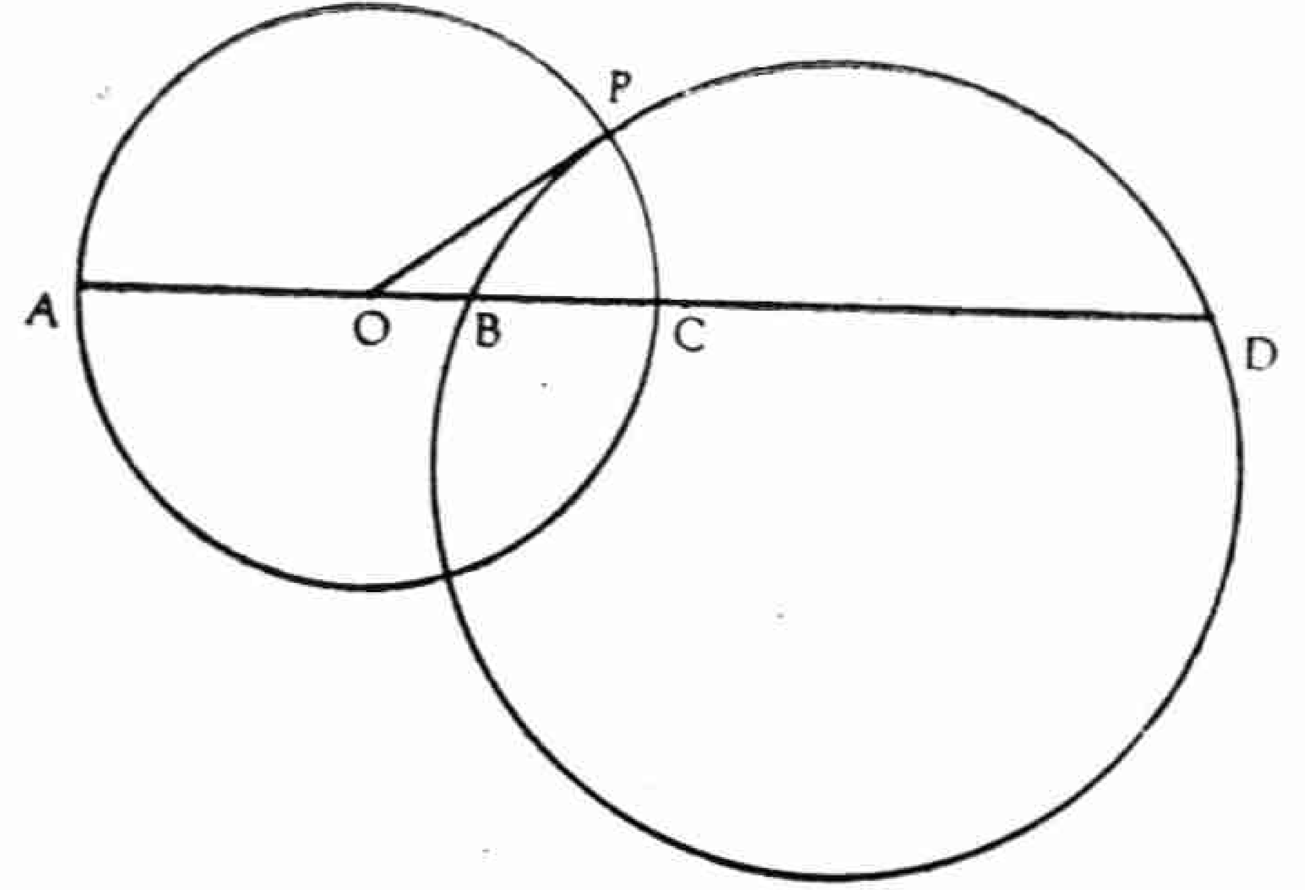
$$\therefore \frac{2\ OC}{2\ OB} = \frac{2\ OD}{2\ OC}; \text{ అనగా } OB \cdot OD = OC^2.$$

నిర్వచనము : రెండు వక్రములు ఖండించుచోట స్పర్శ రేఖలు లంబములైన, ఆ వక్రములు సమకోణీయములు అని చెప్పుదురు.

సిద్ధాంతము 1 : $(AC, BD) = -1$ అయిన, AC వ్యాసముగా గల వృత్తము B, D ల గుండ వెళ్లు అన్ని వృత్తములకు సమకోణీయము.

AC వ్యాసముగా గల వృత్తము B, D బిందువుల గుండ వెళ్లు వృత్తమును P లో ఖండింపనిమ్ము. AC యొక్క మధ్య బిందువు O అయిన $OB \cdot OD = OC^2 = OA^2 = OP^2$ (చూ. చిత్రము 438).

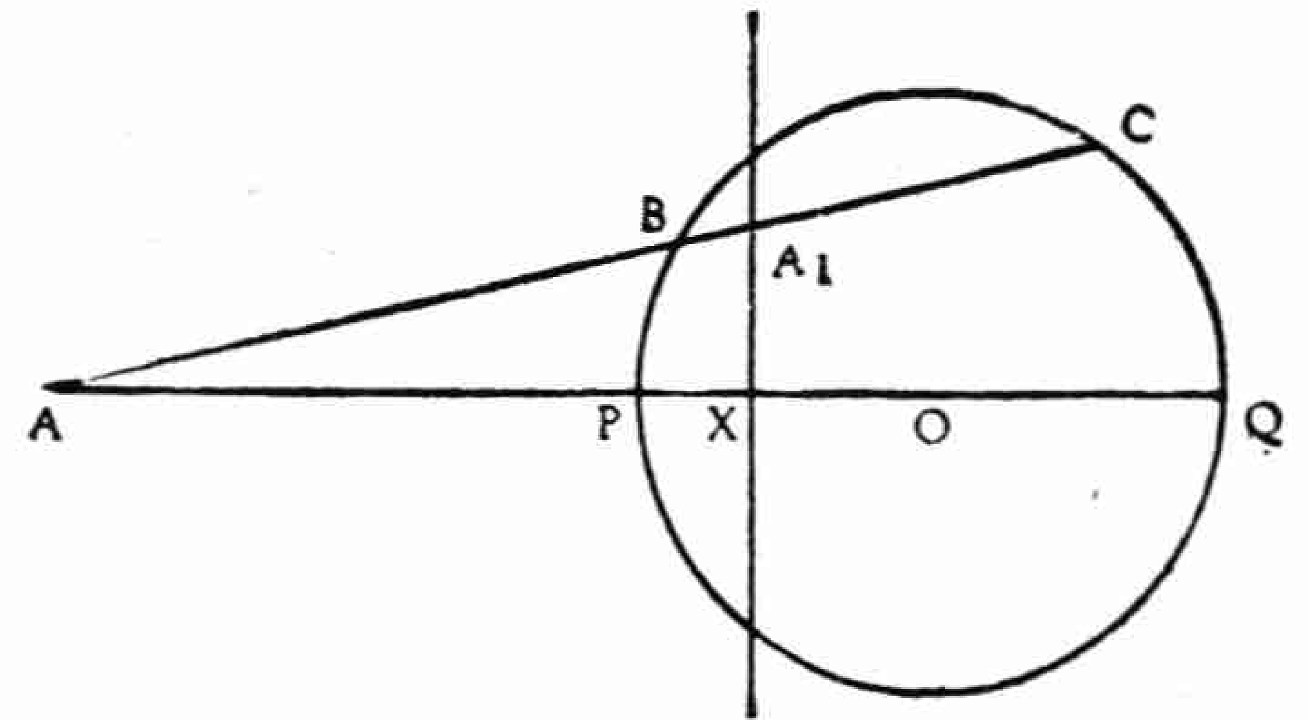
కాబట్టి B, D బిందువుల గుండ వెళ్లు వృత్తమునకు OP ఒక స్పర్శ రేఖ. కాబట్టి వృత్తములు APC, BPD సమకోణీయములు.



చిత్రము 438

సిద్ధాంతము 2 : A బిందువుగుండ వెళ్లు వృత్త జ్యాలు A వద్ద A యొక్క ధ్రువరేఖను ఖండించుచోట స్వరాత్మకముగా విభజింపబడును.

(O) వృత్తము యొక్క జ్యా BC బిందువు A గుండ వెళ్లును. A యొక్క ధ్రువరేఖ BC ని A_1 లో ఖండింపనిమ్ము. (O) వృత్తమునకు A గుండ PQ వ్యాసము తీసికొనుము. అది A యొక్క ధ్రువరేఖను X లో ఖండింపనిమ్ము (చూ. చిత్రము 439).



చిత్రము 439

ఇపుడు $OP^2 = OX \cdot OA$

కాబట్టి $(AX, PQ) = -1$

అందుచే PQ వ్యాసముగా గల వృత్తము AX గుండ వెళ్లు వృత్తము లన్నిటికిని సమకోణీయము.

$\angle A\ XA_1 = 90°$. కాబట్టి AA_1 వ్యాసముగా గల వృత్తము X గుండ వెళ్లును. ఈ వృత్తము PQ వ్యాసముగా గల వృత్తమునకు సమకోణీయము. PQ వ్యాసముగా గల వృత్తము B, C బిందువుల గుండ వెళ్లును. కాబట్టి AA_1 వ్యాసముగా గల వృత్తము B, C ల గుండ వెళ్లు వృత్తములకు సమ కోణీయము.

అందుచే $(AA_1, BC) = -1$.

సిద్ధాంతము 3: ఒక స్వరాత్మక రాశి $(ABCD)$ లో D అనంతమునకు వెళ్లిన AC యొక్క మధ్యబిందువు B.
$ABCD = (AC, BD) = -1$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

లేదా $\frac{AB}{BC} - \frac{AD}{CD} = \frac{AC+CD}{CD}$; D అనంతమునకు

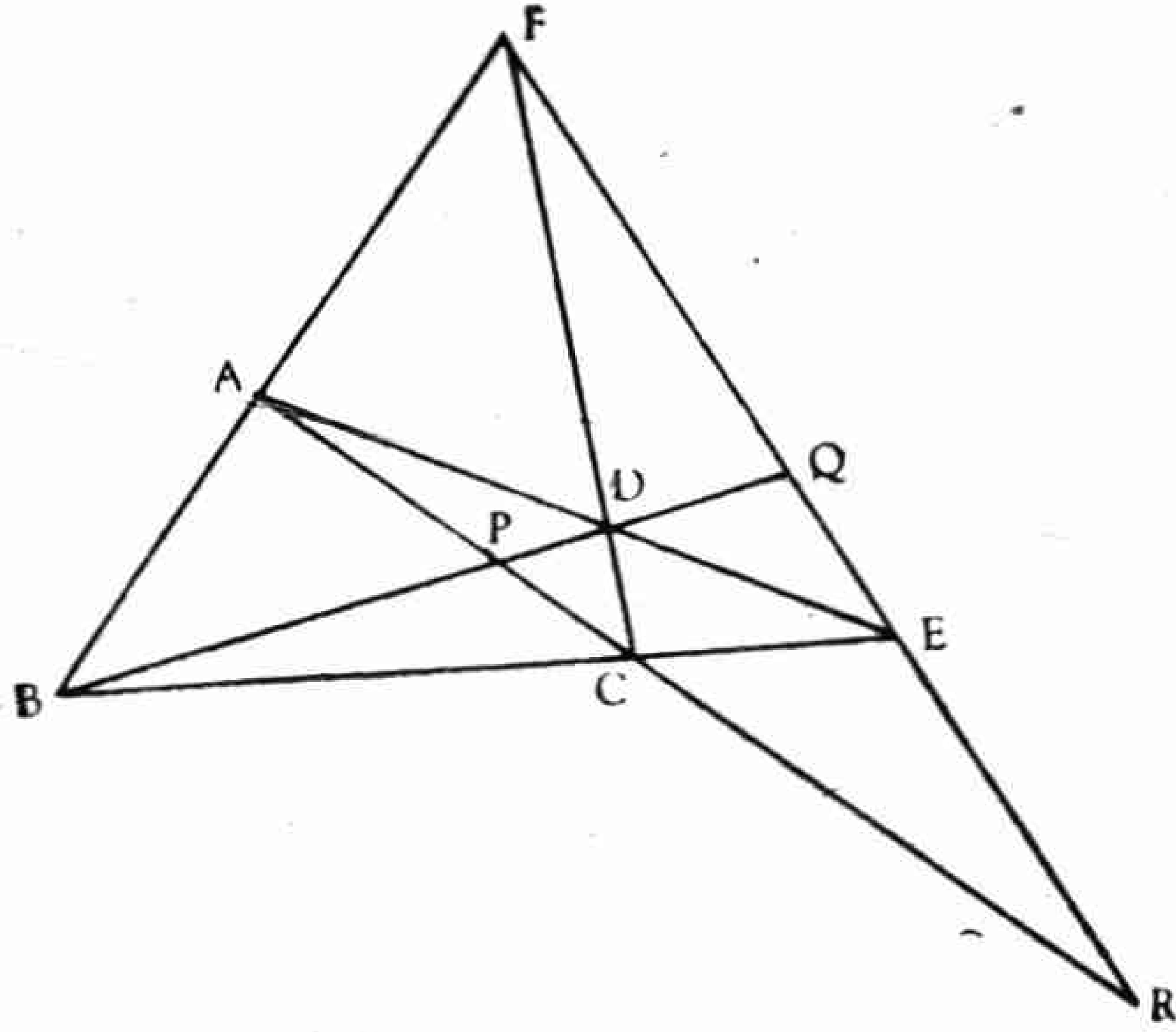
పోవునపుడు $\frac{AC}{CD} \longrightarrow 0.$

$\therefore \frac{AB}{BC} = 1.$ అనగా AC యొక్క మధ్యబిందువు B.

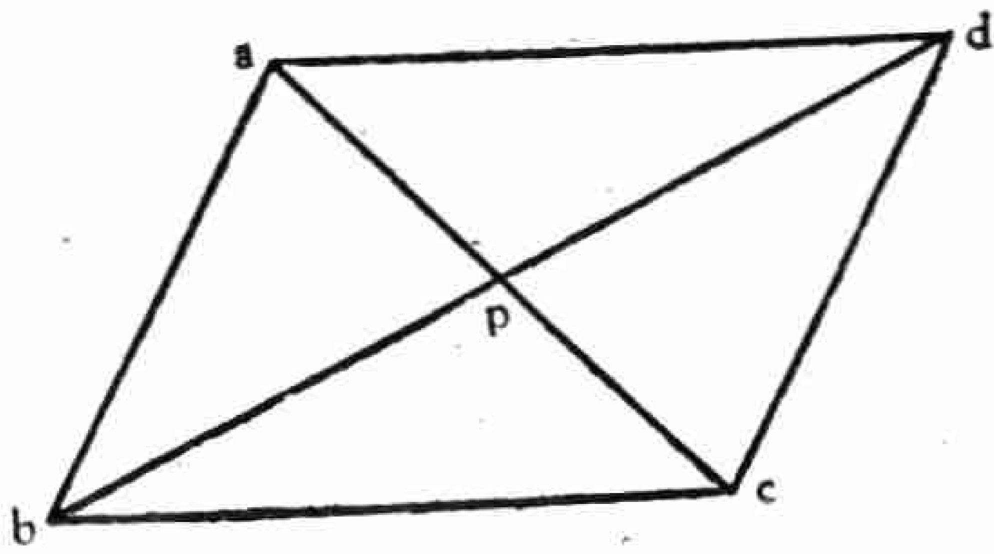
సిద్ధాంతము 4: $ABCD$ ఒక చతుర్భుజము, దాని మూడు వికర్ణములలో ప్రతి వికర్ణము తక్కిన రెండింటిచే స్వరాత్మకముగా విభజింపబడును.

AB, BC, CD, DA చతుర్భుజము యొక్క భుజములు.

A, B, C, D, E, F దానియొక్క ఆరు శీర్షములు.



చిత్రము 440



చిత్రము 441

ప్రతి రెండు భుజములు ఒక శీర్షము ఇచ్చును. AC, BD, EF లు వికర్ణములు, AC వికర్ణము BD, FE వికర్ణములను క్రమముగా P, R బిందువులలో ఖండించును. BD వికర్ణము FE ని Q లోను, AC ని P లోను ఖండించును.

$(BD, PQ) = (AC, PR) = (FE, QR) = -1$
అని చూపవలయును.

FE ని అనంతరేఖగా విశేషము చేయుము. అప్పుడు $abcd$ ఒక సామ్యచతుర్భుజము. ac, bd వికర్ణముల మధ్య బిందువు p.

కాబట్టి $(BD, PQ) = (AC, PR) = -1$
$(AC, PR) = -1$ అయినందున
$B\ (AC, PR)$ ఒక స్వరాత్మక శలాక.

కాబట్టి దాని ఛేదము (FE, QR) స్వరాత్మకము. ఆచార్య

హర్షల్, సర్ విలియమ్ (1738 - 1822): హర్షల్ సార్వకాలిక ఖగోళశాస్త్రవేత్త; ఖగోళశాస్త్రములో పరిశోధనలకు ఒరవడి పెట్టినవాడు అతడే. హర్షల్ హానోవర్ (జర్మనీ) లో జన్మించెను. బాల్యము నందే ఖగోళశాస్త్ర వ్యాసంగమునందు అభిరుచి కలిగినను, అతడు తన కాలమును ఎక్కువగా సంగీతాధ్యయనమునకే వినియోగించెను; 1757 లో ఇంగ్లండుకు తరలిపోయి, చర్చిలో ప్రవేశించి, 26 సంవత్సరములు గానవిద్యను బోధించెను. 1773 లో అతడు తన దృష్టిని ఖగోళశాస్త్రము వంకకు మరల్చెను; 1781 మార్చి 13 వ తేదీన ఇంద్రగ్రహమును ఆవిష్కరించెను (చూ. సమీక్ష - పు. 85, ఇంద్రుడు - పు. 153).



హర్షల్
చిత్రము 442

ఈ నూతనగ్రహమును మొదట ధూమకేతువని పొరపడినను, అతడు తరువాతి పరిశోధనల వలన అది యొక గ్రహమని నిర్ధారణ చేయగలిగెను. ఈ ఆవిష్కరణము తరువాతి వరుణ, యమగ్రహముల ఆవిష్కరణములకు దారి తీసినది (చూ. ఆడమ్స్, జాన్ కౌచ్ - పు. 143, లవెరియా - పు. 484)

హర్షల్ అత్యంత అధికీకరణ సామర్థ్యముకల పెద్ద పెద్ద దూరదర్శనులను నిర్మించెను; 40 అంగుళముల (101.6 సెం. మీ) దూరదర్శని సాహాయ్యముతో రెండు ఇంద్రుని ఉపగ్రహములను, రెండు శని ఉపగ్రహములను వెలుగులోనికి కొనితెచ్చెను; శనిగ్రహాభ్రమణమును, శని కంకణములను పరిశోధించి, అమూల్యవిషయములను కనుగొనెను; ఉత్తర ఖగోళమున గల నక్షత్రములను సర్వేచేసి,

వేలాదినక్షత్రముల పట్టికలను తయారుచేసెను. అసంఖ్యాకములైన యుగళ తారల, నీహారికల, తారాగుచ్ఛముల ఆవిష్కరణము హర్షల్ ఖగోళశాస్త్రమునకు కావించిన నిర్వాహములలో మహత్తమమైనది.

ఇంద్రగ్రహ ఆవిష్కరణముతో హర్షల్ పేరు చిరస్థాయి అయ్యెను. అతనికి అనేక సమ్మానములుకూడ లభించినవి. మూడవ జార్జిరాజు ఆస్థానములో హర్షల్ ఖగోళశాస్త్రవేత్తగా నియమింపబడి, తరువాత సర్ బిరుదముచే పత్కరింపబడెను.

హర్షల్ అనునది ముగ్గురు సుప్రసిద్ధ ఖగోళశాస్త్రవేత్తల కుటుంబనామము. అతని సోదరియు, కుమారుడును కూడ ఖగోళశాస్త్రజ్ఞులుగా కీర్తిని ఆర్జించిరి.

కారొలీన్ లుక్రేషియా హర్షల్ (1750 - 1848) : ఈమె సర్ విలియమ్ హర్షల్ సహోదరి; ఖగోళశాస్త్ర పరిశోధనలలో సోదరునకు ఎంతయో తోడ్పడినది. ఈమెకూడ జర్మనీలోనే పుట్టి, ఇంగ్లండులో స్థిరనివాసము ఏర్పరుచుకొనెను. ఈమె స్వయముగా కొన్ని నీహారికలను, తారాగుచ్ఛములను, 8 ధూమకేతువులను ఆవిష్కరించెను. ఈ ధూమకేతువులలో ఒకటి నేటికి తెలిసినంతవరకు కనిష్ఠ ఆవర్తన కాలము (3.3 సంవత్సరములు) కలది; మరియొకటి 151 ఏండ్ల తరువాత 1939 లో మరల కనిపించెను. తాను, తన సోదరుడు కలసి ఆవిష్కరించిన నీహారికల, తారాగుచ్ఛముల జాబితాను ప్రకటించినందులకు ఆమెకు రాయల్ ఎస్ట్రానామికల్ సొసైటీ బంగారు పతకమును బహూకరించెను. ఆ సొసైటీ సభ్యత్వము కూడ ఆమెకు లభించెను.

సర్ జాన్ ఫ్రెడరిక్ విలియమ్ హర్షల్ (1792 - 1871) : విలియమ్ హర్షల్ కుమారుడైన ఇతడు దక్షిణ ఖగోళమును దూరదర్శనితో సర్వేచేసి, ప్రపంచఖ్యాతిని గడించెను. ఇతడు ఇంగ్లండులో జన్మించి, కేంబ్రిడ్జిలో విద్యాభ్యాసము చేసెను; ఖగోళశాస్త్రముమీది అభిరుచివలన న్యాయశాస్త్ర అధ్యయనమును విరమించెను. అతడు యుగళతారలగూర్చి విశేషపరిశోధనలు కావించి, వాటి పరిమాణములను కొలుచుటలో తన తండ్రి ప్రారంభించిన కృషిని కొనసాగించెను; రమారమి 3,350 నూతన యుగళ తారలను ఆవిష్కరించెను. స్వయముగా 525 నీహారికలను ఆవిష్కరించి, 2,307 నీహారికల జాబితాను ప్రకటించుటయే కాక; అతడు గుడ్‌హోప్ వేధశాలలో 4 సంవత్సరములు అవిరళకృషి చేసి, దక్షిణ ఖగోళమండలమును సర్వే చేసెను; ఆప్రాంతములో దాదాపు 2,300 తారాక్షేత్రములలో 70,000 తారలను లెక్కించెను. 1864 లో హర్షల్ తన కడపటి గ్రంథమును ప్రకటించెను; 5079 నీహారికల, తారాగుచ్ఛముల జాబితా కల ఆ ఉద్గ్రంథము నేటికిని ప్రమాణగ్రంథముగా పరిగణింపబడుచున్నది.

విక్టోరియారాణి అతనిని ప్రభువు(లార్డ్)ని చేసి, అనేక విధముల సన్మానించెను. 1871లో అతడు మరణించెను. అతని భౌతిక దేహము వెస్ట్‌మినిస్టర్ అబ్బీలో న్యూటన్‌కు దగ్గరగా ఖననము చేయబడెను. అ. వెం

హామిల్టన్, సర్ విలియమ్ రోవాన్ (1805 - 65) : బ్రిటిష్ గణిత, ఖగోళశాస్త్రవేత్త. డబ్లిన్ నగరమున 1805, ఆగస్టు 4 న ఇతని జననము. 14 ఏండ్ల ప్రాయము వచ్చుసరికి ఇతడు 14 భాషలు నేర్చెను. 17 ఏండ్ల ప్రాయమున గొప్ప గణితశాస్త్రవేత్తగ ప్రసిద్ధికెక్కెను.

డబ్లిన్ యూనివర్సిటీలో విద్యను అభ్యసించుచు పట్టభద్రుడు కాక పూర్వమే ఖగోళశాస్త్ర ప్రొఫెసర్ గ 1827 లో నియమింపబడెను. ఆ తరువాత రాయల్ ఎస్ట్రానమర్ అయ్యెను.

చతుష్కములను (క్వాటర్నియన్స్) ను కల్పించి వికసింపచేయుట ఇతని ఖ్యాతికి ముఖ్యకారణము. హోడోగ్రాఫ్ ను కల్పించి దాని కాపేరును పెట్టినది కూడ ఇతడే. చాక్షుషశాస్త్రము (ఆప్టిక్స్) లో పరిశోధనచేసి, శాంకవ వక్రీభవనము (కానికల్ రిఫ్రాక్షన్) లోని వివిధ విశేష ధర్మములను హామిల్టన్ వివరించెను. గతిశాస్త్రమందలి వ్యాపకపద్ధతులు (జనరల్ మెతడ్స్ ఆఫ్ డైనమిక్స్) ఇతని ముఖ్యరచన. 1865, సెప్టెంబర్ 2 వ తేదీన డబ్లిన్ నగరమున హామిల్టన్ మృతి నొందెను. పా. ల. నా.

హాయిల్ - నార్లీకర్ గురుత్వాకర్షణ వాదము : మొట్టమొదట వెలుగు చూచిన గురుత్వాకర్షణవాదము (గ్రావిటేషన్ తియరీ) న్యూటన్ 1666 లో ప్రతిపాదించినది. దీని ప్రకారము జగత్తులోని ఒక్కొక్క కణమునకు ఒక ద్రవ్యరాశి (మాస్) అను వాస్తవ సంఖ్య ఉన్నది. ఇది ఆ కణ జడత్వముయొక్క కొలత అని భావించవచ్చును. ఇది ఒక స్థిరరాశి. ఒక్కొక్క కణము జగత్తులోని మరి ఒక్కొక్క కణమును ఆకర్షించుచున్నది: ఈ ఆకర్షణ బలము ఆ రెండు కణములను చేర్చు ఋజురేఖ దిక్కులో నుండును. బలముయొక్క పరిమాణము ఆ కణములయొక్క ద్రవ్యరాశుల లబ్ధమునకు అనుపాతముగను, వాటి మధ్యనున్న దూరపు వర్గమునకు విలోమముగను ఉండును. అనగా రెండు కణముల ద్రవ్యరాశులు m_1, m_2, వాటి మధ్యదూరము r అయితే, వాటి పరస్పర ఆకర్షణబలము γ, $m_1 m_2/r^2$ కు సమానముగా నుండును. ఇచ్చట γ ఒక స్థిరరాశి.

పైన వివరించిన గురుత్వాకర్షణ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి, కెప్లర్ కనిపెట్టిన గ్రహచలన విషయముల నన్నిటిని న్యూటన్ ప్రతిపాదించెను. ఇదియే కాక గ్రహములచుట్టు ఉపగ్రహముల చలనములు, ధూమకేతువుల చలనములు, సముద్రము యొక్క స్రోతస్సులు - ఇవన్నియు న్యూటన్ ప్రతిపాదించిన సిద్ధాంతముయొక్క పర్యవసానములుగ విశదపరచబడినవి. అన్నిటికంటె అత్యాశ్చర్యమైనది పై సిద్ధాంతము నుపయోగించి క్రొత్తగ్రహములగు నెప్ట్యూన్, ప్లూటోలను కనిపెట్టినది. యురేనస్ (ఇంద్రుడు) గ్రహమును కనిపెట్టిన తరువాత, దాని చలనమును గణించిరి. అయితే గణన చలనమునకును, దృష్టి చలనములకును అతి స్వల్పవ్యత్యాసములుండెను. వీటిని ఆధారముగ పెట్టుకొని ఆడమ్స్ (చూ. పు. 148) అను ఆంగ్ల గణితజ్ఞ యువకుడును, లవెరియా అను ఫ్రాన్స్ దేశపు గణితజ్ఞ యువకుడును యురేనస్‌కు బహిరాకాశమునందు ఎచ్చటనైన అనావిష్కృతమైన మరియొక గ్రహము ఉన్నచో, ఇటువంటి వ్యత్యాసములు వచ్చునని గణించిరి. వీరు గణించిన చోటుకు దూరదర్శని త్రిప్పినప్పుడు ఈ క్రొత్త గ్రహము నెప్ట్యూన్ (వరుణ) దొరికెను. ఇటులనే వరుణుని చలనములోని వ్యత్యాసములనుండి ప్లూటో అను మరియొక గ్రహము గణనముచేతనే 1930 లో కనిపెట్టబడినది. ఈ సంభవములనుండి న్యూటన్ గురుత్వాకర్షణ వాదమునకు సంపూర్ణ నమ్మకము కలిగి ఈ వాదము అద్వితీయముగా 20 వ శతాబ్దము వరకు విజ్ఞాన జగత్తులో ఏలుచుండెను.

ఐన్‌స్టయిన్ సాపేక్షతావాదము : 1914 లో ఐన్‌స్టయిన్ తన ప్రత్యేక సాపేక్షతావాదమును (చూ. పు. 386) ప్రతిపాదించెను. దీనియొక్క విశేష అంశములేమనగా (1) ఒక వ్యక్తి కొలుచు దూరములకును, కాల అంతరములకును సంబంధమున్నది. ఇద్దరు వ్యక్తులకు పరస్పర సాపేక్షతా చలనమున్నచో, వారు ప్రక్కనఉన్న ఏ రెండు సంభవముల (ఈవెంట్స్) మధ్యనుండు కాల అంతరము dt ను, నిడుపు అంతరము ds ను కొలిచినచో, వారి కొలతలు వేర్వేరుగ నుండవచ్చును. అయితే $ds^2 - c^2\ dt^3$ అను విలువ ఇద్దరికి ఒకటిగనే ఉండును. ఇచ్చట c అనునది వెలుతురుయొక్క వేగము. కనుక నిడుపులు, కాల అంతరములు ఇవి రెండింటికిని స్వతః ప్రాముఖ్యము లేదు. ఇవి రెండును చేరిన $ds^2 - c^2\ dt^2$ అను చతుః పరిమాణిక మింకౌస్కి జ్యామితి దూరమునకే యథార్థమున్నది. (ii) పై వాదము పర్యవసానముగ ఒక కణముయొక్క ద్రవ్యరాశి స్థిరసంఖ్య కాదు. దాని వేగము పెరుగగా దాని ద్రవ్యరాశియును పెరుగును. దీనినుండి ఏ కణమైనను వెలుతురు వేగముతోనో దానికంటె ఎక్కువ వేగముతోనో చలింపజాలదు అని చూపించవచ్చును.

ఐన్‌స్టయిన్ 1912 లో తన విశాలీకృత సాపేక్షతావాదమును (జనరలైజ్డ్ రెలిటివిటీ) ప్రతిపాదించెను. దీనియందు గురుత్వాకర్షణ సిద్ధాంతము ఒక అంశము. దీని ముఖ్య భావము లేమనగా : ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య సాపేక్ష త్వరణమున్నచో, వారి దృష్టిలో గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రములు ఉన్నట్లు కనబడును. ఇది నిజమైన గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రమా? లేదా త్వరణమువలన సంభవించినదా? అని ఏ పరీక్షవలనను కనిపెట్టుట సాధ్యము కాదు. ఉదా ; ఒక వ్యక్తి ఒక లిఫ్ట్‌ను ఉపయోగించి పైకెక్కునప్పుడు త్వరణము వలన అతని బరువు ఎక్కువైనట్లు తోచును. నిజముగనే భూమ్యాకర్షణము ఎక్కువ అయినదా ? లేదా త్వరణమువలన అతని బరువు ఎక్కువైనట్లు తోచుచున్నదా అని ఏ పరీక్ష వల్లను కనుగొనుట సాధ్యము కాదు. భూమ్యాకర్షణ త్వరణమువలన ఒక కృత్రిమ గ్రహము (ఎర్త్ సాటిలైట్) స్వేచ్ఛగా భూమిని చుట్టునప్పుడు, దానియందున్న వస్తువులన్నింటికిని బరువులేనట్లు తోచును. ఏ పరీక్షచేసినను ఆకర్షణ రహిత ఆకాశములో ఉన్నట్లే వారికి అగపడును.

ఐన్‌స్టయిన్ వాదములో త్వరణమునకు ఎటుల చోటు లేదో అటులనే బలమునకును స్థానములేదు. ఒక వస్తువు మరియొక వస్తువుపై ప్రయోగించు బలమునకు బదులుగా, అచ్చట విశ్వముయొక్క వక్రత అను భావము ప్రవేశించుచున్నది. విశ్వము అనగా ప్రదేశ నిరూపకములు x, y, z లు, కాల నిరూరూపకము t యు చేరిన మింకౌస్కి చతుః పరిమాణిక జగత్తు. ఇదియే వాస్తవమైనది ; అందరికి ఉమ్మడి అయినది. దీనియందు రెండు దగ్గర బిందువుల మధ్య దూరము $\Sigma\Sigma g_{ij}\ dx^i\ dx^j$ అను రూపమును కలిగి యుండును. ఇచ్చట x, y, z, t కి బదులు x^1, x^2, y^3, x^4 అను సంకేతములనుపయోగించియున్నాము. దీనియందు g_{ij} అను గుణకములుస్థిర సంఖ్యలైనచో ఈవిశ్వమును చిపిట విశ్వము అనెదము. ఎట్టి నిరూపకములు తీసికొనినను ఇది సాధ్యము కాకపోయినచో, ఈ విశ్వమునకు వక్రత ఉన్నదనెదము. ఈ వక్రతను పూర్తిగా వర్ణించుటకు R^{ij} అను ఒక టెన్సార్ కావలెను. ఉదా : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\ dt^2$ అని తీసికొనినచో, ఇచ్చట గుణకములన్నియు స్థిర సంఖ్యలు. కనుక ఇది చిపిట ఆకాశము. ఇది గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము లేనప్పుడు ఉన్న పరిస్థితి.

గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము ఉన్నప్పుడు g_{ij} గుణకములు స్థిరరాశిగా ఉండవు. ఈ విశ్వమునందు A, B అను రెండు

బిందువులున్నచో, వాటిని చేర్చు ఋజురేఖ ఈ విశ్వములో నుండదు. అయితే A, B బిందువులను చేర్చు అన్ని వక్రములలో ఒక హ్రస్వతమ రేఖ (జియోడెసిక్) ఉండును. ఇట్టి హ్రస్వతమ రేఖయే కణముయొక్క పథమును వివరించును. అయితే ఇది మింకౌస్కి చతుః పరిమాణిక రేఖ. దీనినుండి ఒక్కొక్క వ్యక్తియు తనకు అన్వయించిన దేశ కాల నిరూపకమునకు మార్చి, తన దృష్టిలో ఆకణము యొక్క చలనము ఎటులుండునో నిర్ణయించగలడు.

పైన వివరించిన సిద్ధాంతము, న్యూటన్ సిద్ధాంతము ఎన్నోవిధములలో వేరైనను, గురుత్వాకర్షణము అతి ప్రబలమైనట్టి స్థలములలోనే వాటి మధ్యనున్న వ్యత్యాసము కొలుచుట సాధ్యమగుచున్నది. సాధారణ పరిస్థితులలో అవి తెలియజేయు విషయములలో వ్యత్యాసమే లేదు. వ్యత్యాసము ఉన్నటువంటి మూడు విషయములలో అతి జాగ్రతగా చేసిన పరీక్షలు ఐన్‌స్టయిన్ వాదమునే రుజువుపరచినవి.

ఏకీ కృతక్షేత్ర వాదము: ఐన్‌స్టయిన్ తన అంత్యకాలములో మరియొక వాదమును ప్రతిపాదించెను. దీనికి ఏకీకృత క్షేత్రవాదము (యూనిఫైడ్ ఫీల్డ్ థియరీ) అని పేరు. దీని ఉద్దేశ మేమనగా గురుత్వాకర్షణమును విద్యుదయస్కాంత బలక్షేత్రమును ఒకే క్షేత్రము యొక్క అంశములుగా భావించవలెననుటయే. గురుత్వాకర్షణముయొక్క ఫలితముగా g_{ij} గుణకములు ఉద్భవించుచున్నవి. ఇవి $g_{ij}=g_{ji}$, $(i, j=1, 2, 3, 4)$ అనుగుణములు కలిగినవి.

కనుక వీటి సంఖ్య 10. వీటికి బదులుగా ఐన్‌స్టయిన్ $ds^2=h_{ij}\,dx^i\,dx^j$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$ అని తీసికొనెను. అయితే ఇచ్చట $h_{ij}\neq h_{ji}$. వీటిని $h_{ij}=g_{ij}+k_{ij}$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇవి $g_{ij}=g_{ji}$ అనియు $k_{ij}=-k_{ji}$ అను సమీకరణములను తృప్తి చేయును. కనుక g_{ij} అను గురుత్వాకర్షణ వాదమునకు కావలసిన 10 ఫలములే కాక, $k_{ij}=-k_{ji}$, $k_{rr}=0$ అను 6 క్రొత్త ఫలములు దొరకెను. వీటిని విద్యుదయస్కాంత క్షేత్రమును వర్ణించుటకు ఐన్‌స్టయిన్ ఉపయోగించి, ఏకీకృత క్షేత్రవాదమును నిర్మించెను. దీనిని పూర్తిగా వృద్ధి చేయుటకు మునుపే అతడు మరణించెను. ఇతరులు దీనిని వృద్ధి చేయుచున్నారు. కాని దీనియందు కొన్ని అంశములు తృప్తికరముగా లేవు. దీని యొక్క పర్యవసానములు పరీక్షించు స్థితి ఈ వాదము పొందలేదు.

హాయిల్ - నార్లీకర్ గురుత్వాకర్షణవాదము: డాక్టర్ ఫ్రెడ్ హాయిల్ కేంబ్రిడ్జిలో సెయింట్ జాన్స్ కాలేజీలోని గణితశాస్త్ర పండితుడు. వయస్సు ఇప్పుడు (1965 లో) 49 ఉండవచ్చును. ఇతడు జగత్ సృష్టి శాస్త్ర అన్వేషణలో ప్రసిద్ధిపొందిన వాడు. జగత్తులోని మందాకినులన్నియు ఒకటినుండి ఒకటి పారిపోవుచున్నవి అను వ్యాకోచత్ జగద్వాదము ఇప్పటి విజ్ఞానుల సమ్మతము పొందియున్నది. చాలకాలము తరువాత జగత్తు ఖాళీ అయిపోదనియు, దూరపు జగత్తులు మరుగై పోవుచున్నను, అదే కాలములో కణముల సృష్టియును జరుచున్నదనియు, కనుక జగత్స్వరూపము ఒకే విధముగ నుండును అను వాదము ఇతడు ప్రతిపాదించినది.

డాక్టర్ జయంత్ విష్ణు నార్లీకర్ భారత దేశీయుడు. ఇతడు 1938 లో మహారాష్ట్రములోని కొల్హాపురమున జన్మించెను. ఇతని తండ్రి వి. వి నార్లీకర్ చిరకాలము బెనారస్ విశ్వవిద్యాలయములో గణిత పండితుడైఉండెను. అతడును సాపేక్షతా వాదము, విశాలీకృత సాపేక్షతా వాదము విషయమైఎన్నో వ్యాసములు వ్రాసియున్నాడు. జయంత్ విష్ణు నార్లీకర్ వారణాసిలోను, కేంబ్రిడ్జిలోను చదివి ఇప్పుడు (1965) కింగ్స్ కాలేజీలో పండితుడైయున్నాడు.



చిత్రము 443
నార్లీకర్

వీరిద్దరు ప్రతిపాదించిన క్రొత్త గురుత్వాకర్షణవాదము 3-11-1964 లో ప్రచురితమైన లండన్ రాయల్ సొసైటీ ప్రొసీడింగ్స్‌లో ప్రకటించబడినది.

వస్తుగతి శాస్త్రములో ఒక వస్తువుయొక్క చలనమును కనిపెట్టుటకు స్వల్ప తమ కార్యనియమము అను పద్ధతి కలదు. ఇచ్చట కార్యము అనునది ఒక చయన ఫలము $\int L\,ds$. ఎన్నో సాధ్యములగు చలనములలో, ఒక కణము అనుసరించు చలనముపై చయనము విలువ స్వల్పతమముగ చేయునటువంటిది అనునదియే ఈ పద్ధతి.

ఐన్‌స్టయిన్ అనుసరించు కార్యము (ఆక్షన్) L లో $\Sigma\, m_a \int da$ అను ఒక పదమున్నది. ఇచ్చట m_a ఒక కణముయొక్క ద్రవ్యరాశి; a అనునది దాని చతుః పరిమాణిక పథము. హాయిల్ — నార్లీకర్ ఈ పదమునకు బదులు $-\lambda \sum_{b\neq a} \int\int G(A, B)\, da\, db$ అను పదమును ఉపయోగించెదరు. ఇచ్చట a, b అనునవి రెండు కణముల విశ్వపథములు; m_a, m_b ఆ కణముల ద్రవ్యరాశులు, A, B ఈ రెండు పథములలోని బిందువులు. $G(A, B)$ అనునది

ఒక గ్రీన్ ఫలము. ఇది $G(A, B) = G(B, A)$ అను గుణము కలది. దీని ద్వారా ఒక్కొక్క బిందువు x అందును ఒక ద్రవ్యరాశి క్షేత్రము కల్పించవచ్చును. దీని విలువ $m(x) = -\lambda \sum_{a} \int G(X, A)\, da$. దీనియొక్క అర్థమేమనగా ఒక స్థలములోని ద్రవ్యరాశి అన్ని ఇతర స్థలములలోనున్న కణముల చలనముపై ఆధారపడి యున్నదనుటయే. మునుపటి గురుత్వాకర్షణ వాదములలో, ఒక కణముయొక్క ద్రవ్యరాశి దానియొక్క ప్రత్యేక గుణము; ఇతర కణములతో సంబంధములేనిది.

హాయిల్ — నార్లీకర్ వాదము ప్రకారము లోకములో ఒకే కణమున్నచో, దాని గమనము లేదా ద్రవ్యరాశి గురించి మాటలాడుటలో అర్థము లేదు. రెండు కణములైన ఉండవలెను.

ఇప్పుడున్న విశ్వములో సౌరకుటుంబము తప్ప మిగిలిన అన్ని మూర్తులను తొలగించినచో దాని పర్యవసానమేమగును అని అడిగెదము. న్యూటన్ ప్రకారము ఒక వ్యత్యాసము తెలియదు. ఐన్‌స్టయిన్ వాదము ప్రకారము అనంతములోని విశ్వము చిపిట అని ఒప్పుకొనినచో ఒక వ్యత్యాసమును తెలియదు. అయితే హాయిల్ — నార్లీకర్ వాదము ప్రకారము ఇది పెద్ద విపరీతమును కలిగించును. విశ్వసాంద్రత సగము అయినపుడు కూడ గురుత్వాకర్షణ, విశ్వవక్రత ఇవి రెండు చాల హెచ్చగును. కనుక సూర్యుని స్థైర్యమునకు దానిలోపలి ప్రేపము చాలా ఎక్కువ కావలెను; దానినుండి ప్రవహించు శక్తి లక్షల కొలది ఎక్కువయి భూమిని, ఇతర గ్రహములను క్షణములో కాల్చి వేయును.

హాయిల్ - నార్లీకర్ వాదములోని మరియొక క్రొత్త భావము గురుత్వాకర్షణము ఒక ఋణాత్మకశక్తి భాండారము అనుటయే. ఈ భావము నుపయోగించి, 'క్వాసర్స్' అను మహత్తయిన ద్రవ్యరాశి (సూర్యుని కంటే పది లక్షల వంతు ద్రవ్యరాశి) గల ఇటీవల కనిపెట్టిన నభోమూర్తులు ఎందుకు ముకుళించలేదో చెప్పియున్నారు. వీటి వ్యాసార్థము, ష్వార్జ్‌చైల్డ్ వ్యాసార్థము కంటే తక్కువైనందువలన ఐన్‌స్టయిన్ వాదము ప్రకారము ఇవి ముకుళించి యుండవలెను.

ఐన్‌స్టయిన్ వాదము సరియైనదని రుజువుచేయుటకు బుధుని పరిహీలియన్ చలనమువంటి విషయములున్నవి. వీటిని హాయిల్ - నార్లీకర్ వాదము రుజువుచేయునా? లేదా మార్చునా? అని అడుగవచ్చును. దీనికి వారి బదులేమనగా వారి వాదమునకును ఐన్‌స్టయిన్ వాదమునకును ఉన్న వ్యత్యాసము $N(N-1)$ కును, N^2 కును ఉన్న వ్యత్యాసమే. ఇచ్చట N అనునది జగత్తులోని కణముల సంఖ్య. N పెద్ద సంఖ్య అయినందువలన, కనిపెట్టి నటువంటి వ్యత్యాసమేమియు ఉండజాలదు అనుటయే.

ఇంతవరకు హాయిల్ - నార్లీకర్ వాదము, ఐన్‌స్టయిన్ వాదము — ఈ రెండింటిలో ఏది సత్యము అని పరీక్షించు విషయములు చర్చకు రాలేదు. ఆ. స.

హెచ్చుతగ్గులు (ఇనీక్వాలిటీస్): వాస్తవ సంఖ్యలకు అన్వయించిన ఒక ముఖ్యధర్మమేమనగా, వాటిలో ఏ రెండు వేర్వేరు సంఖ్యలు a, b తీసికొనినను, ఆ రెండింటిలో ఒకటి మరొకటి కంటే హెచ్చు లేదా ఎక్కువైనది అనుటయే. a, b లలో a ఎక్కువయితే $a > b$ అని వ్రాసెదము. దీనిని చదువు విధము 'a సంఖ్య b కంటే ఎక్కువ'. దీని అర్థమేమనగా $a - b$ ఒక ధనాత్మక సంఖ్య. ధనాత్మక సంఖ్యలు శూన్యముకంటే ఎక్కువైన సంఖ్యలు. కనుక $a > b$ అనగా $a - b > 0$ అన్నమాట. ఈ భావమునే $b < a$ (b సంఖ్య a కంటే తక్కువ) అనియు, $b - a < 0$ అనియు వ్రాయవచ్చును. ఋణాత్మక సంఖ్యలు శూన్యము కంటే తక్కువైనవి.

వాస్తవసంఖ్యలన్నియు ఒక ఋజు రేఖ (ఉదా: x అక్షము) పై ఎట్లు అమర్చవచ్చునో సమీక్షలో (పు. 7) వివరించి యున్నాము. ఈ పద్ధతి ప్రకారము ఆ రేఖలో a, b సంఖ్యలకు అన్వయించిన బిందువులు A, B అయినచో, B బిందువునకు A కుడివైపు నున్నచో $a > b$ లేదా $b < a$ అనెదము. B బిందువునకు A ఎడమవైపున్నచో $a < b$ లేదా $b > a$ అనెదము. A, B ఏకీభవించినచో, a, b రెండు ఒకేసంఖ్య. దీనిని $a = b$ అని వ్రాసెదము. ఒక ఋజురేఖపై నున్న సంఖ్యలలో, ఏదైన ఒకటి మరొక దానికి కుడివైపున నుండవలెను కదా! కనుకనే పైన వివరించిన ధర్మము.

హెచ్చుతగ్గు లేదా పెద్ద చిన్న భావము సంకీర్ణసంఖ్యల (కాంప్లెక్స్ నంబర్స్) కు అన్వయించదు. ఏలన అట్టి సంఖ్య ఒక్కొక్కటియు ఒక వాస్తవసంఖ్యాద్వయము.

ఉదా: (i) $a = -20$, $b = -5$ లో ఏది చిన్నది? ఏది పెద్దది? ఇచ్చట -5 కుడివైపున నున్నది. కనుక $-5 > -20$, లేదా $a - b = -20 - (-5) = -20 + 5$ ఋణాత్మకము. కనుక $a < b$ అనగా $b = -5$ పెద్దది.

(ii) $a = -\frac{1}{20}$, $b = -\frac{1}{5}$ లలో ఏది పెద్దది? ఏది చిన్నది?

ఇచ్చట $-\frac{1}{20}$ కుడివైపున ఉన్నది.

కనుక $-\frac{1}{20} > -\frac{1}{5}$. లేదా

$a-b=\left(-\frac{1}{20}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=$

$\frac{15}{100}$ ధనాత్మకము కనుక $-\frac{1}{20} > -\frac{1}{5}$.

హెచ్చుతగ్గుల బీజగణిత సిద్ధాంతములు : వీటిలో కొన్నిటిని క్రింద ఇచ్చెదము. వీటి సత్యమును సులభముగా సరిచూడ వచ్చును.

(1) $a > b$ అయినచో, $a+c > b+c$; $a-c > b-c$; ఇచ్చట a, b, c ఎటువంటి వాస్తవిక సంఖ్యలైనను కావచ్చును.

(2) $a > b$, $c > 0$ ఇవి రెండు సత్యమైతే $ac > bc$; అయితే $a > b$, $c < 0$ అయినచో $ac < bc$. ఉదా :

$4 > 1$; $5 > 0$; కనుక $5 \times 4 = 20 > 5 \times 1 = 5$.

$4 > 1$; $-5 < 0$; కనుక $-20 < -5$.

(3) $a > b$ అయి a, b రెండు ధనాత్మకములు లేదా రెండు ఋణాత్మకము లైనచో, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; $a > b$ అయి a, b లలో ఒకటి ధనాత్మకము మరి ఒకటి ఋణాత్మకము అయినచో $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

ఉదా : $4 > 3$, రెండు ధనాత్మకములు. కనుక $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $4 > -3$; వీటిలో ఒకటి ధనాత్మకము, మరియొకటి ఋణాత్మకము. కనుక $\frac{1}{4} > \frac{1}{-3}$. ఇది సరియని సులభముగా చూడవచ్చును.

$$\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{-3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12} > 0.$$

(4) $a > b > 0$; m, n ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలైనచో $a^{m/n} > b^{m/n}$; $a^{-m/n} < b^{-m/n}$. ఉదా :

$a = 9,\ b = 4,\ 9^{\frac{1}{2}} = 3 > 2 = 4^{\frac{1}{2}};\ 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 4^{-\frac{1}{2}}$.

కొన్ని సమయములలో $a \geq b$ అను సంకేతమును వాడెదము. దీని అర్థము $a > b$ లేదా $a = b$ అనుటయే; మనము వాడు మరియొక సంకేతము $|a|$. దీని అర్థము $a, -a$ సంఖ్యలలో ఏది పెద్దదో అదియే అనుట. ఉదా : $|3\frac{1}{2}| = 3\frac{1}{2}$; $|-3\frac{1}{2}| = 3\frac{1}{2}$; a సంఖ్య ధనాత్మకమైతే $|a| = a$; a ఋణాత్మకమైనచో $|a| = -a$. కనుక ఎల్లప్పుడును $|a| \geq 0$; $a = 0$ అగునప్పుడు మాత్రమే $|a| = 0$ అగును.

కొన్ని ప్రసిద్ధ హెచ్చుతగ్గులు : ఒక సంఖ్య a ఋణాత్మకమైనను, ధనాత్మకమైనను దాని వర్గము a^2 ఎల్లప్పుడును ధనాత్మకము. $a = 0$ అగునప్పుడు మాత్రము $a^2 = 0$ అగును. దీనిని ఆధారముగ ఉంచుకొని కొన్ని హెచ్చుతగ్గు సిద్ధాంతములను నిర్మించెదము.

a, b ఎటువంటి వాస్తవ సంఖ్యలైనను $(a-b)^2 \geq 0$, అనగా $a^2 + b^2 \geq 2ab$. దీనిలో $a^2 = A$, $b^2 = B$ అని వ్రాసెదము. కనుక $A \geq 0$, $B \geq 0$. అప్పుడు పై విసమానత $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ అగుచున్నది. అనగా

సిద్ధాంతము 1 : ఏ రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలు A, B తీసికొన్నను, వాటి సంకలన మాధ్యమిక విలువ (అరిత్మెటిక్ మీన్), వాటి గుణకార మాధ్యమిక విలువకంటెతక్కువగా నుండదు. అనగా $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$

ఉదా : $A = 9$, $B = 4$, $\frac{9+4}{2} \geq \sqrt{9 \times 4}$; $6\frac{1}{2} > 6$.

$A = B$ అగునప్పుడే $\frac{A+B}{2} = \sqrt{AB}$ అగును.

సిద్ధాతము 2: n ధనాత్మక సంఖ్యలగు A_1, A_2, ... A_n ను తీసికొనినచో, వాటి సంకలన మాధ్యమిక విలువ వాటి గుణకార మాధ్యమిక విలువకు తగ్గదు; అనగా

$$\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} \geq \sqrt[n]{A_1 . A \dots A_n} \qquad (1)$$

$A_1 = A_2 = \dots = A_n$ అగునప్పుడు మాత్రమే పై విసమానత సమానత అగును.

ఉదా : $\frac{1+2+4}{3} = 2 \cdot 33 \dots$; $\sqrt[3]{(1 \cdot 2 \cdot 4)} = 2$.

ఇచ్చట $2 \cdot 33 \dots > 2$. (1) ను మరియు విశాలీకరించవచ్చును. (1) లో $A_1 = A_2 = \dots = A_m = x$ అనియు $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = A_n = y$ అనియు ప్రతిక్షేపించినచో మనకు దొరుకునది.

$$\frac{mx + (n-m)y}{n} \geq \left(x^m y^{n-m}\right)^{1/n} \qquad (2)$$

దీనిలో $m/n = r$ అని వ్రాసినచో $0 < r < 1$ అగుచున్నది. కనుక (2) ను

$$rx + (1-r)y \geq x^r y^{1-r} \qquad (0 < r < 1) \qquad (3)$$

అని వ్రాయవచ్చును. దీనిని మరియు విశాలీకరించి

$$\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_k y_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} \geq \left(y_1^{m_1} \cdot y_2^{m_2} \dots y_k^{m_k}\right)^{1/(m_1 + \dots + m_k)}$$

అని వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $y_1, y_2, \ldots y_k$ ధనాత్మక సంఖ్యలు. $m_1, m_2, \ldots m_k$ ధనాత్మక పూర్ణాంకములు.

కోషీ హెచ్చు తగ్గులు : తలములో దీని రూపము

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2 \qquad (4)$$

దీనిని సులభముగా చూడవచ్చును.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$
$$= (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$$

ఇచ్చట $(bc-ad)^2 \geq 0$ అగుటవలన, (4) యొక్క సత్యము విశదమగుచున్నది. అదియు కాక (4) లో సమత్వ సంకేతము కావలెనంటే $bc-ad=0$ అనగా $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అను నిబంధన విశదమగుచున్నది.

పైన వివరించిన కోషీ హెచ్చుతగ్గునకు ఒక జ్యామితీయ అర్థమున్నది. ఒక తలములో రెండు బిందువులు $P(a, b)$, $Q(c, d)$ తీసికొనెదము. మూలబిందువు $O(0, 0)$ అయినచో $OP = \sqrt{a^2+b^2}$, $OQ = \sqrt{c^2+d^2}$. బిందువులు P, Q మధ్య దూరము $PQ = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ అగుచున్నది.

OP, OQ రేఖలకు మధ్యనున్న కోణము θ అయినచో,

$$\cos^2\theta = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2\, OP \cdot OQ}.$$

కనుక $$\cos\theta = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{c^2+d^2}}$$

$\cos\theta \leq 1$ అను సిద్ధాంతము నుపయోగించి (4) పొందవచ్చును. దీనియందు '$=$' సంకేతము ఉండవలెనంటే $\theta = 0$ గా ఉండవలెను. అనగా $a/b = c/d$ గా ఉండవలెను.

పైన వివరించిన హెచ్చుతగ్గును త్రిపరిమాణిక ఆకాశమునకు విస్తరించవచ్చును. అప్పుడు దాని రూపము

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^3) \geq$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \qquad (5)$$

అగును. దీనియందు $=$ సంకేతము ఉండుటకు నిబంధన $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$. దీనినే n పరిమాణిక ఆకాశమునకు విస్తరించి

$$\left(\sum_1^n a_r^2\right)\left(\sum_1^n b_r^2\right) \geq \left(\sum a_r b_r\right)^2 \qquad (6)$$

అని చూపవచ్చును.

హోల్డర్ హెచ్చుతగ్గులు : $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$ అన్నియు ధనాత్మక సంఖ్యలై, p, q అను రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలు $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ అను నిబంధనలను తృప్తి చేసినచో

$$(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{1/p} \times$$
$$(b_1^p + b_2^p + \ldots + b_1)^{1/q}$$
$$\geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots \ldots + a_nb_n \qquad (7)$$

ఇచ్చట $p=2$, $q=2$ అయినచో మనకు కోషీ హెచ్చుతగ్గు దొరుకును.

త్రిభుజ హెచ్చుతగ్గులు : ఒక త్రిభుజము OPQ లో $OP + PQ \geq OQ$ అను విసమానత ఉన్నది. O అను బిందువు మూల బిందువుగను, P, Q యొక్క నిరూపకములు (x_1, y_1), (x_1+x_2, y_1+y_2) అనియు తీసికొనిన యెడల, $OP + PQ \geq OQ$ అనునది

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq$$
$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} \qquad (8)$$

అను రూపమును పొందుచున్నది.

ఇచ్చట $\geq$ కు బదులు $=$ సంకేత ఉండవలెనునంటే $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $k > 0$ గ ఉండవలెను.

దీనినే n — పరిమాణిక ఆకాశమునకు విస్తరించి

$$\left(\sum_1^n x_r^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^n y_r^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_1^n x_r^2 + y_r^2\right)^{1/2} \qquad (9)$$

అని వ్రాయవచ్చును.

మింకౌస్కి హెచ్చు తగ్గులు : ఇవియు ప్రసిద్ధమైనవి. దీనిలో మొదటిది

$$(a_1^p + a_2^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p)^{1/p} \geq$$
$$\left[(a_1+a_2)^p + (b_1+b_2)^p\right]^{1/p} \qquad (10)$$

ఇచ్చట $p > 1$ అయిన ఒక సంఖ్య. $p=2$ అయినప్పుడు ఇది త్రిభుజ హెచ్చు తగ్గు అగుచున్నది.

దీనియందును రెండు చలరాశులు (a_1, a_2), (b_1, b_2) కు బదులు $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ అని n చలరాశులు తీసికొని

$$\left(\sum_1^n a_r^p\right)^{1/p} + \left(\sum_1^n b_r^p\right)^{1/p} \geq \left\{\sum (a_r + b_r)^p\right\}^{1/p} \qquad (11)$$

అను సిద్ధాంతమును పొందవచ్చును. ఇది $p \geq 1$ అగునప్పుడు సత్యమని నిరూపించవచ్చును. $p < 1$ అగునప్పుడు పై హెచ్చుతగ్గులో $\geq$ కు బదులు $\leq$ అని వ్రాయవలెను.

ఫలముల కనిష్ఠతమ లేదా గరిష్ఠతమ విలువలను కనిపెట్టుట : x ఒక వాస్తవ చలరాశి అనియు, అది (a, b) అంతరములో ఉన్నదనియు అనుకొనెదము. అనగా $a \leq x \leq b$; $f(x)$ ఒక x యొక్క ఫలమనియు అనుకొనెదము. దత్త అంతరములోని x యొక్క ఒక్కొక్క విలువకును $f(x)$ ఒక వాస్తవ విలువను స్వీకరించుచున్న

దనుకొనెదము. అప్పుడు ఇట్టి విలువలలో $f(x)$ యొక్క కనిష్ఠతమ విలువ ఏది ? గరిష్ఠతమ విలువ ఏది ? అను ప్రశ్న తేలుచున్నది. దీని సాధనము అంతరీకరణ కలన శాస్త్రము నుపయోగించి సాధించవచ్చును ; లేదా హెచ్చు తగ్గుల నుపయోగించి సాధించవచ్చును.

కొన్ని సమయములందు ఇది అతి సులభమైన ప్రశ్న అగుచున్నది. (a, b) అంతరములో x ఎక్కువ కాగా $f(x) = y$ యు ఎక్కువగుచున్న దనుకొనెదము. అనగా $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ఈ అంతరములో ఎల్లప్పుడు $x \geq 0$ అనుకొనెదము. అప్పుడు x కనిష్ఠతమ విలువ అగు b ను స్వీకరించునప్పుడు $f(x) = y$ తన కనిష్ఠతమ విలువను స్వీకరించును. అనగా $f(x)$ యొక్క కనిష్ఠతమ విలువ $f(b)$. అటులనే $f(x)$ యొక్క గరిష్ఠతమ విలువ $f(a)$ అని విశదమగుచున్నది. ఇట్లు కాక అంతరములోని అన్ని బిందువులందును $\frac{dy}{dx} = f'(x) \leq 0$ అయినచో, x పెరుగగా, y తగ్గుచున్నది. కనుక ఇప్పుడు $f(x)$ యొక్క కనిష్ఠతమ విలువ $f(b)$, గరిష్ఠతమ విలువ $f(a)$ అగుచున్నది.

అయితే పైన వివరించినట్లుండక అంతరములో కొన్ని బిందువులందు $\frac{dy}{dx} > 0$ గను, మరికొన్ని బిందువులందు $\frac{dy}{dx} < 0$ గను ఉన్నచో, గరిష్ఠతమ విలువయో, కనిష్ఠతమ విలువయో అంతరము చివరలో ఉండదు. ఏదో ఒక మధ్య బిందువు $x' \, (a < x' < b)$ గా నుండును. దీనిని కనిపెట్టుటకు అంతరీకరణ కలనశాస్త్రములో క్రింద వివరించిన పద్ధతి ఉన్నది.

దత్త అంతరములో ఏ విలువలకు $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ అగునో కనిపెట్టుము. ఇవి $x_1, x_2, x_3, \ldots$ అనుకొనెదము. దీనిలో ఒకటైన x_p తీసికొనుము. δ అనునది ఒక అతిస్వల్ప సంఖ్య అయి, $f'(x_p - \delta) > 0$ గను, $f'(x_p + \delta) < 0$ గను ఉన్నచో x_1 బిందువు యొక్క సామీప్యములో $f(x)$ కు స్థానిక (లోకల్) గరిష్ఠతమ విలువ ఉన్నదనెదము. దీని అర్థమేమనగా δ తగినంత స్వల్పసంఖ్య అగునపుడు $(x_p - \delta, x_p + \delta)$ అంతరములో $f(x_p)$ గరిష్ఠతమ విలువ అనుటయే. ఇట్లు ఎన్నో స్థానములు $x_p, x_q, \ldots$ ఉండవచ్చును. స్థానిక గరిష్ఠతమ విలువలగు $f(x_p), f(x_q), \ldots$ లలో ఏది అన్నిటిలోను పెద్దదో అదే (a, b) అంతరములో $f(x)$ యొక్క గరిష్ఠతమ విలువ.

ఇట్లు కాక $x = x_r$ యందు $f'(x_r) = 0$ అయి, δ అతి స్వల్ప సంఖ్య అగునపుడు $f'(x_r - \delta) < 0$ గను, $f'(x_r + \delta) > 0$ గను ఉన్నచో, $f(x_r)$ ఒక స్థానిక కనిష్ఠతమ విలువ అనెదము. ఇట్టి స్థానిక కనిష్ఠతమ విలువలు $f(x_r), f(x_s), \ldots\ldots$ లలో ఏది అన్నిటిలోను చిన్నదో అదే (a, b) అంతరములో $f(x)$ యొక్క కనిష్ఠతమ విలువ.

$f'(x_p - \delta)$, $f'(x_p + \delta)$ యు వేర్వేరు సంజ్ఞలు (సైన్స్) కలిగినవి కాకపోయినచో, $f(x_p)$ కనిష్ఠతమ విలువ కానేరదు, గరిష్ఠతమ విలువయు కానేరదు.

ఈ సిద్ధాంతమును ఎట్లు ఉపయోగించవచ్చు ననుటకు ఒక దృష్టాంత మిచ్చెదము.

ఒక ప్రశ్న : చాల నిడుపైన గోడ ఒకటి ఉన్నది. దీనిలో కావలసినంత నిడుపును ఉపయోగించి ఒక గది నిర్మించవలెను. ఈ గదియొక్క విస్తీర్ణము 128 చ. మీ. లుగా ఉండవలెను. ఉన్నగోడలో ఎన్ని మీటరులు ఉపయోగించినచో, మిగిలిన **మూడు** గోడలు నిర్మించుటకు ఖర్చు కనిష్ఠతమమై యుండును ?

దత్త గోడలో y మీటరుల నిడుపును ఉపయోగించెదమనుకొందము. గది వెడల్పు x మీటరులు అనుకొందము. అప్పుడు గది విస్తీర్ణము $xy = 128$ చ. మీ. కనుక $y = 128/x$. మిగిలిన **మూడు** గోడలలో y నిడుపు గోడ ఒకటి, x నిడుప గోడలు రెండును నిర్మించవలెను. వీటి మొత్తము నిడుపు $2x + y = 2x + \frac{128}{x}$. నిర్మాణపు ఖర్చు దీనికి అనుపాతముగా ఉండుననుకొనవచ్చును. కనుక x ధనాంకమైనచో ఏ విలువకు $f(x) = 2x + \frac{128}{x}$ కనిష్ఠతమ మగును అనుటయే మన ప్రశ్న.

ఇచ్చట $f'(x) = 2 - \frac{128}{x^2}$. కనుక $f'(x) = 0$ యొక్క మూలములు $x^2 = 64$, $x = \pm 8$. x గది వెడల్పగుటచే $x = -8$ మూలమునకు అర్థములేదు. $x = 8 - \delta$ అగునపుడు $f'(x - \delta) = 2\left\{1 - \frac{64}{(8-\delta)^2}\right\}$. ఇచ్చట $\delta > 0$ అగుటచే $64 > (8-\delta)^2$; $\therefore \frac{64}{(8-\delta)^2} > 1$,

$\therefore f'(x - \delta) < 0$. అటులనే

$$f'(x + \delta) = 2\left\{1 - \frac{64}{(x+\delta)^2}\right\} > 0.$$

కనుక $x = 8$ అనునది $f(x)$ కు కనిష్ఠతమ విలువ ఇచ్చుచున్నది. $x = 8$ అగునపుడు $y = \frac{128}{x} = 16$. కనుక గోడలో 16 మీటరుల నిడుపును ఉపయోగించి, మరియొక గోడ 16 మీటరుల నిడుపుగను 2 వెడల్పు గోడలు 8 మీటరులుగను తీసికొనినచో మొత్తము 32 మీటరుల గోడలు నిర్మించవలెను. దత్తగోడలలో 16 మీటరులకు ఎక్కువగనో, తక్కువగనో తీసికొని విస్తీర్ణము 128 చ. మీటరుల గల గది కట్టవలెనంటే, మొత్తము 32 మీటరుల కంటే ఎక్కువ నిడుపుగల క్రొత్త గోడలను కట్టవలెను.

ఇదే ప్రశ్నను ఇప్పుడు హెచ్చు తగ్గుల పద్ధతిలో సాధించెదము. పు. 650 లో వివరించిన ప్రకారము A, B లు ధనసంఖ్యలైనచో $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{(AB)}$. ఇప్పుడు $A = 2x$, $B = \frac{128}{x}$ అని తీసికొనుము. $AB = 2x \times \frac{128}{x} = 256$ ఒక స్థిర సంఖ్య. $\frac{A+B}{2} = x + \frac{64}{x}$ అగుచున్నది. x విలువ ఏదైనను $x + \frac{64}{x} \geq 256$. కనుక $x + \frac{64}{x}$ తీసికొను కనిష్ఠతమ విలువ 256 కు తగ్గదు. ఈ విలువ పుచ్చుకొనుటకు $A = B$ అనగా $2x = \frac{128}{x}$ $\therefore x^2 = 64$, $\therefore x = 8$. అప్పుడు $x = 8$, $y = 2x = 16$, మొత్తము నిర్మించవలసిన గోడల నిడుపు $2x + y = 32$ మీటరులు. ఉదా: $x = 9$ మీటరులు తీసికొన్నచో $y = \frac{128}{9} = 14{\cdot}22$ మీటరులు.

$2x + y = 18 + 14{\cdot}222 = 32{\cdot}222$ మీటరులు. $x = 7$ అని తీసికొనినచో $y = \frac{128}{7} = 18{\cdot}2857$.

$$\therefore 2x + y = 14 + 18{\cdot}285\ldots = 32{\cdot}285\ldots$$

మరియొక ప్రశ్న: ఒక మనిషి ఒక స్థలము A నుండి బయలుదేరి ఒక నదిలో నీళ్లు ముంచుకొని మరియొక స్థలము B చేరవలెను. A, B లు నదికి ఒకేవైపున ఉన్నవనియు, నది గట్టు ఒక ఋజురేఖ అనియు తీసికొనవచ్చును. అతడు నడువవలసిన హ్రస్వతమ పథము ఏది ?

నది ఒడ్డును x అక్షముగను, మూలబిందువు ఉచితమైనట్లును తీసికొనినచో A యొక్క నిరూపకములు $(0, a)$ అనియు, B యొక్క నిరూపకములు (b, c) అనియు తీసికొనవచ్చును. అతడు A నుండి బయలుదేరి, నదియందు $P(x, 0)$ స్థలములో నీళ్లను తీసికొని B స్థలము చేరుగ వచ్చినట్లైతే అతడు నడచిన దూరము

$$y = \sqrt{(x^2 + a^2)} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2} \qquad (12)$$

అగుచున్నది. y కనిష్ఠతమమగుటకు

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} - \frac{(b-x)}{\sqrt{\{(b-x)^2 + c^2\}}}$$

ఇది శూన్యమగుటకు సమీకరణము.

$$x^2\{(a-x)^2 + c^2\} = (a^2 + x^2)(b-x)^2.$$

దీనినుండి $x = \frac{ab}{a+c}$ అగుచున్నది. ఇది నిజముగ హ్రస్వతమ పథము నిచ్చుచున్నదని చూపవచ్చును.

ఈ విలువ x కు ఏమి గుణమనగా $\frac{a}{x} = \frac{c}{b-x}$. కనుక నీళ్లు తీసికొను స్థలము P ఎట్టిదనగా AP, PB రేఖలు ఈ సమస్యలో x — అక్షముతో సమాన కోణములు చేయునటువంటిది. ఒక మనిషికి బదులు వెలుతురు కిరణమనియు, నదికి బదులు ఒక అద్దమనియు తీసికొనినచో, A నుండి బయలుదేరి అద్దమునందు ప్రతిబింబించి, B బిందువున చేరు పథము ఫర్మా సిద్ధాంతము ప్రకారము పతన కోణము, పరావర్తన కోణము సమముగ ఉండు గుణము కలది.

పై ప్రశ్నను హెచ్చు తగ్గుల నుపయోగించియు సాధించవచ్చును. త్రిభుజ హెచ్చు తగ్గుల సిద్ధాంతము (8) లో x_1, y_1 లకు బదులు x, a ను x_2, y_2 లకు బదులు $(b-x)$, c ను ప్రతిక్షేపించినచో

$$\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2} \geq \sqrt{b^2 + (a+c)^2}$$

అని లభించును. ఇచ్చట కుడిప్రక్కన స్థిర సంఖ్య ఉన్నది. కనుక x విలువ ఏదైనను పథముయొక్క నిడుపు ఈ స్థిర సంఖ్యకు తగ్గదు. అయితే $\frac{a}{x} = \frac{c}{b-x}$ అగునపుడు పథము నిడుపు ఈ విలువను తీసికొనును. ఇదే కనిష్ఠతమ విలువ. ఈ విలువ తీసికొనుటకు AP, PB రేఖలు x అక్షముతో సమానకోణములు చేయవలెను. **అ. స.**

హేలీ, ఎడ్మండ్ (1656 - 1742): హేలీ సుప్రసిద్ధ బ్రిటిషు ఖగోళశాస్త్రవేత్త. ఇంతవరకు కడసారిగా 1910 లో కనబడి, తిరిగి దాదాపు 1985 ప్రాంతమున కన్పించు తేజోవంతమైన ఒక ధూమకేతువునకు అతని పేరు పెట్టబడినది (చూ. ధూమకేతువులు - పు. 328). హేలీ లండన్‌లో జన్మించి, ఆక్స్‌ఫర్డ్ యూనివర్సిటీ క్వీన్స్ కాలేజీలో విద్యాభ్యాసము చేసెను. అతడు తన 20 ఏట సెయింట్ హెలీనా ద్వీపమునకుపోయి, దూర

దర్శని సహాయముతో దక్షిణార్ధగోళములోని నక్షత్రముల జాబితాను తయారుచేసెను. 1698 - 1702 సంవత్సరములలో అతడు అట్లాంటిక్ మహాసముద్రమునందంతటను అయస్కాంత విచలనమును అనుశీలించెను; ఇంగ్లీషు ఛానల్‌లోను, ఆడ్రియాటిక్ రేవులలోను స్రోతో ప్రవాహములను కూడ పరిశోధించెను. 1703 లో అతడు ఆక్స్‌ఫర్డ్‌లో జ్యామితి ఆచార్యుడుగా నియుక్తుడై, అచ్చట చాలకాలము ధూమకేతువుల గూర్చి అశేషకృషి చేసి, తన పరిశోధనా ఫలితములను క్రోడీకరించి, 'ఏ సినాప్సిస్ ఆవ్ కామెటరీ ఎస్ట్రానమీ' అను గ్రంథమును ప్రచురించెను. 1721 లో హేలీ గ్రీనిచ్‌లో రాయల్ ఎస్ట్రానమర్ పదవిని అధిష్ఠించి, జీవితాంతమువరకు చంద్రచారమును గూర్చి అనుశీలించెను.

ఇతడు న్యూటన్ (చూ. పు. 360) కు ప్రియమిత్రుడు; గురుత్వాకర్షణ అధ్యయనమునందు న్యూటన్‌కు మిక్కిలి ప్రోత్సాహమిచ్చుటయేగాక, తరువాతి కాలమున 'ప్రిన్సిపియా' గ్రంథ ప్రచురణకు ధనసహాయము కూడ చేసెను (చూ. ఖగోళశాస్త్ర సమీక్ష - పు. 83). ఆ. వెం.



సూచిక

అ

ఘ

చ

జ

ధ

న

ల

పారిభాషిక పదజాలము

GLOSSARY

అ

అంకగణితము – Arithmetic

అంకశ్రేఢులు – Arithmetical progressions

అంకిత వృత్తము – Graduatee

అంకెలు – Digits

అంగారకుడు – Mars

అంగారకోశ నీహారిక – Coalsack nebula

అంచనా – Estimate

అంతర అస్త్రప్రయోగము – Internal ballistics

అంతర ఏకాంతర కోణము – Alternate interior angle

అంతర కేంద్రము – In centre

అంతరకోణము – Inner angle

అంతరఖండ విక్షేపాస్త్రము – Intercontinental ballistic missile

అంతర సమీకరణము – Defference equation

అంతరీకరణ కలనము – Differential calculus

అంతరీకరణ గుణకము – Differential co-efficient

అంతరీకరణ జ్యామితి – Differential geometry

అంతరీకరణ నిష్పత్తి – Differential ratio

అంతరీకరణము – Differentiation

అంతరీకరణ సమీకరణము – Differential equation

అంతరీకకరణ సూత్రములు – Rules of differentiation

అంతర్గ్రహములు – Inner planets

అంతర్నక్షత్ర ధూళి – Inter stellar dust

అంతర్నక్షత్ర వాయువు – Inter stellar gas

అంతర్లిఖిత వృత్తము – Inscribed circle

అంతర్లుఠి – Evolute

అంతర్వృత్తము – Inner circle

అంతిమ అస్త్రప్రయోగము – Terminal ballistics

అంబుతలము – Horizontal plane

అకరణీయ – Rational

అకరణీయ చక్రీయ చతుర్భుజము – Rational cyclic quadrilateral

అకరణీయ సంఖ్య – Rational number

అకరణీయ సంఖ్యల వరుస – Sequence of rational numbers

అకరణీయ సంఖ్యల వరుసల అవధి – Limit of sequences of rational numbers

అక్షపరివర్తన – Change of axis

అక్షము – Axis

అక్షవిచలనము – Nutation

అక్షస్పందనము – Nutation

అక్షాంశము, అక్షాంశ రేఖ – Latitude

అగణ్య అనంత – Non-enumerably infinite

అగస్త్యుడు – Canopus

అగ్నిగోళము – Fire ball

అగ్రము – Amplitude

అచలరాశి – Invariant

అజిమత్ – Azimuth

అణుచలన సిద్ధాంతము – Kinetic theory

అతినవతార – Super nova

అతినీలలోహిత వికిరణము – Ultra-violet radiation

అతిపరాస – Hyperbola

అతిపరాస ఫలములు – Hyperbolic functions

అతిపరాసీయకక్ష్య – Hyperbolic orbit

అతి బృహత్తులు – Super giants

అతి వర్తనము – Parallax

అతి విభాజ్య సంఖ్యలు – Highly composite numbers

అదిశరాశి – Scalar

అదిశ రాశి క్షేత్రము – Scalar field

అధమ అవధి – Lower limit

అధమ ప్రతరణము – Lower transit

అధమ యోగము – Inferior conjunction

అధర దిక్కు – Vertically lower

అధికీకరణ సామర్థ్యము – Magnifying power

అద్భుత గణకులు – Mathematical prodigies

అనంత అవధి – Infinite limit

అనంత ఋజురేఖ – Infinite straight line

అనంత గుణోత్తర శ్రేఢి – Infiinite geometric progression

అనంతదూర రేఖ – Line at infinity

అనంత పదపరంపర సంకలనము – Summation of infinite number of terms

అనంత పరంపర – Infinite series

అనంత పరంపరదోషము – Infinite regression

అనంత పరంపరల ఉపసరణత – Convergence of infinite series

అనంత పారిమాణిక క్షేత్రము – Infinite dimensional space

అనంత బిందువులు – Infinite points

అనంతమునందున్న ఋజురేఖ – Straight line at infinity

అనంతములో ఉండు వర్తుల బిందువులు – Circular points at infinity

అనంత రేఖ – Infinite line

అనంత వర్తుల బిందువులు – Infiinite circular points

అనంత సంఖ్యలు – Infinite numbers

అనిశ్చిత చయనీకరణము – Indefinite integration

అనిశ్చిత ప్రథమ తరగతి సమీకరణము – Indeterminate equation of the first degree

అనిష్టాపత్తి – *Reductio ad absurdum*

అనుచరతార – Companion star

అనుపాతము – Proportion

అనుపాత సంబంధము – Proportionality

అనుభవగర్భిత – Empirical
అనురూప కోణములు – Corresponding angles
అనురూపత – Correspondence
అనులోమ అనుపాతము – Direct proportion
అనుషక్తములు – Concurrents
అనూరాధ – Scorpionis γ
అపకర్షణ – Repulsion
అపక్రమ భిన్నము – Improper fraction
అపజ్యా – Apogee
అపవర్తనాంకము – Greatest common measure
అపసరణత – Divergence
అపసరణ గుణకార పరంపర – Divergent multiple series
అపసరణ పరంపర – Divergent series
అపసవ్య – Anti-clock wise
అపహేళి – Aphelion
అపేక్షయా – With respect to
అబీజీయ – Non-algebraic
అబీజీయ సంఖ్యలు – Non-algebraic numbers
అబేకస్ – Abacus
అభిజిత్తు – Vega
అభిలంబ ఛేదనము – Normal section
అభిలంబ రేఖ – Normal
అభ్యుప గమనము – Approach
అమూర్త – Absolute
అమూర్త శక్మము – Absolute potential
అయన బిందువు – Solstitial point
అయనావరణము – Ionosphere
అయనీకరణము – Ionization
అయస్కాంత క్షేత్రము – Magnetic field
అయస్కాంత క్షోభములు – Magnetic perturbations
అయస్కాంత ధ్రువములు – Magnetic poles
అయస్కాంత స్థితి – Magnetic condition
అయుక్త భిన్నము – Improper fraction
అర్థనము – Demand
అర్థన విశ్లేషణ – Demand analysis
అర్థమితి శాస్త్రము – Econometrics
అర్థశాస్త్రము – Economics
అర్థ ఆవర్తన – Quasi periodic
అర్థ వృత్తము – Semi circle
అల్పకోణ త్రిభుజము – Acute angled triangle
అల్పకోణము – Acute angle
అల్ప ప్రతిరూపములు – Small samples
అల్ప వృత్తము – Small circle
అల్ప సప్తర్షులు – Ursa-minor
అవధి – Limit
అవధి బిందువు – Limiting point
అవధి భావము – Conception of limit
అవధి మూల్యము, అవధి విలువ – Limit value
అవయవి దర్శనము – Philosophy of organism
అవలోకనాత్మక – Observational
అవలోకనాత్మక ఖగోళ శాస్త్రము – Observational astronomy
అవశేషము – Residue
అవిచ్ఛిన్నత – Continuity
అవిచ్ఛిన్న ఫలములు – Continuous functions
అవిచ్ఛిన్న భిన్నములు – Continued fractions
అవిచ్ఛిన్న మార్పుల జ్యామితి – Geometry of continuous transformations
అవిదిత ఫలము – Unknown function
అవినాభావ వాదము – Theory of Null hypothesis
అవేక్షణ – Observation
అవ్యక్త గణితము – Algebra
అవ్యక్తఫల అంతరీకరణము – Implicit differentiation
అవ్యక్త ఫలములు – Implicit functions
అశ్వశిర నీహారిక – Horse head nebula
అశ్విని – Arietis, β, α
అసంపతనీయ సాధనము – Asymptotic solutton
అసంపాతములు – Asymptotes
అసంపాతీయ రేఖ – Asymptotic line
అసాధారణ బిందువులు – Singular points
అసాధారణ సాధనము – Singular solution
అస్త్ర ప్రయోగము – Ballistics
అస్థిర సమతా స్థితి – Unstable equillibrium
అష్టతలకము – Octahedron

ఆ

ఆంశిక – Partial
ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణము – Partial differential equation
ఆంశిక చయనీకరణము – Partial integration
ఆంశిక వ్యుత్పన్నము – Partial derivative
ఆకర్షణ – Attraction
ఆకాశకములు – Aerials
ఆకాశగంగ – Milkyway
ఆకాశము – Space
ఆకృతి గుణకము – Form co-efficient
ఆకృతి ఫలము – Form function
ఆఘాత తరంగములు – Shock waves
ఆచ్ఛాదిత చలతారలు – Eclipsing variables
ఆత్మా విరుద్ధము – Self consistant
ఆధార తత్త్వములు – Axioms
ఆధారము – Base
ఆధికారిక సాంఖ్యకీయ ప్రచురణ – Official statistics
ఆధీనతా గుణకము – Contiengency co-efficient
ఆధునిక గణితము – Modern Mathematics
ఆపాత బిందువు – Point of incidence
ఆపాతము – Incidence
ఆయత అతిపరాన – Rectangular hyperbola
ఆయతాక్షము – Rectangular axis

ఆయుధ శీర్షము – War head
ఆయుర్దాయ పట్టికలు – Mortality tables
ఆర్ద్ర – Orionis α
ఆవర్తన కాలము – Periodic time
ఆవర్తన గుణకము – Periodic co-efficient
ఆవర్తన-దీప్తి – Period luminosity
ఆవర్తన-దీప్తి వక్రము – Period-luminosity curve
ఆవర్తన ధూమకేతువు – Periodical comet
ఆవర్తన ఫలములు – Periodic functions
ఆవృత్తి – Period
ఆశ్లేష – Hydra - E, Caneri - α - α 1, 2 - 49, 50
ఆసన్న – Approximate
ఆసన్న ఫలితము – Approximate result
ఆసన్న మూల్యము, ఆ సన్న విలువ – Approximate value

ఇ

ఇంద్రుడు – Uranus
ఇంధనము – Fuel

ఈ

ఈజిప్టు దేశపు గణితము – Egyptian mathematics

ఉ

ఉచిత ప్రతిరూపములు – Proper samples
ఉచ్చ భాషులు – Lould speakers
ఉచ్చాలకము – Lever
ఉత్కేంద్ర కక్ష్య – Eccentric orbit
ఉత్కేంద్రత – Eccentricity
ఉత్కేంద్ర వృత్తము – Eccentric circle
ఉత్తమ ప్రతరణము – Upper transit
ఉత్తమ యోగము – Superior conjunction
ఉత్తర – Leonis - β
ఉత్తర ధ్రువము – North pole
ఉత్తర ధ్రువాంతరము – North polar distance
ఉత్తర ఫల్గుని – Denebola
ఉత్తర శీతమండలము – North frizid zone
ఉత్తర సమశీతోష్ణ మండలము – North temperate zone
ఉత్తరాభాద్ర – Pegasi - γ
ఉత్తరాషాఢ – Sagittari - γ, ϕ
ఉత్థానము – Latus rectum
ఉత్థానార్ధము – Semi latus rectum
ఉత్పాదకములు – Generators
ఉదగ్ర – Vertical
ఉదగ్రతలము – Vertical plane
ఉన్నత కోణము – Angle of elevation
ఉన్నతి – Altitute
ఉన్ముఖత – Trend
ఉప అభిలంబము – Sub-normal
ఉపకల్పనలు – Assumptions
ఉపకూర్పు – Sub-group
ఉపగ్రహము – Satellite
ఉపపత్తి – Proof
ఉపపుంజము – Sub-group
ఉపరితలీయ సిద్ధాంతములు – Surface theories
ఉపసమితి – Sub-set
ఉపసరణ గుణకార పరంపర – Convergent multiple series
ఉపసరణత – Convergence
ఉపసరణ పరంపర – Convergent series
ఉపసరణ వరుస – Convergent sequence
ఉప స్పర్శరేఖ – Sub-tangent
ఉపాంత ఉపసరణ – Penultimate convergent
ఉభయ అభిలంబము – Common normal
ఉర్సామేజోరిస్ – Ursa maioris
ఉల్క – Meteor
ఉల్కల కూటమి – Meteor swarm
ఉల్కాపాతము – Meteor shower
ఉల్కాపాత స్ఫోటనము – Meteor shower explosion
ఉల్కా పిండము – Aerolite, meteorite
ఉల్కా బిలములు –Meteor craters
ఉష్ణ వాహకము – Conduction of heat

ఊ

ఊర్ధ్వకోణము – Angle of elevation
ఊహనకళ – Ars conjectandi

ఋ

ఋజుకోణము – Straight angle
ఋజుగతి – Straight motion
ఋజురేఖ – Straight line
ఋజురేఖా జ్యామితి – Line geometry
ఋజురేఖా ప్రాపణ సిద్ధాంతము – Theory of linear propagation
ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు – Negative rational numbers
ఋణ పూర్ణాంకములు – Negative integers
ఋణ భిన్నాంకములు – Negative fractions
ఋణ మూలములు – Negative roots
ఋణ సంఖ్య –Negative number
ఋతుభాగము – Seasonal component
ఋతువులు – Seasons

ఎ

ఎత్తు – Altitude
ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రములు – Electronic calculators, Electronic computers
ఎలిప్సాయిడ్ – Ellipsoid

ఏ

ఏక నక్షత్రములు – Single stars
ఏక నాభికా శాంకవములు – Confocal conics
ఏకమూల్య ఫలములు – Single valued functions
ఏకరూప – Uniform, Isomorphic
ఏకరూప ఉపసరణత – Uniform convergence
ఏకరూప ఉపసరణ పరంపర – Uniform convergent series
ఏకరూప కోణీయ వేగము – Uniform angular velocity

ఏకరూప పరంపర – Uniform series
ఏకరూప ఫలము – Uniform function
ఏకరూప వేగము – Uniform velocity
ఏకరూప సమితులు – Uniform sets
ఏకరేఖీయ బిందువులు – Collinear points
ఏకలవ భిన్నాంకము – Unit numerator fraction
ఏకాంకము – Unit
ఏకాంతరకోణము – Alternate angle
ఏకాక్ష వృత్తములు – Co-axal circles
ఏకీకృత క్షేత్రవాదము – Unified field theory
ఏబెల్ కూర్పులు – Abeleian groups

ఒ

ఒకటికొకటి అనురూపత – One to one correspondence

క

కంకణగ్రహణము – Annular eclipse
కంకణములు – Rings
కంపన చిత్రము – Vibration figure
కంపనము – Vibration
కక్ష (కక్ష్య) – Orbit
కటకము – Lence
కటకాయనము – Summer solstice
కణగతి శాస్త్రము – Dynamics of a particle
కణము – Particle
కణశుద్ధగతిశాస్త్రము Kinematics of a particle
కత్తిరించిన గోపురము – Frustum of a pyramid
కదంబము – Pole of ecliptic
కనిష్ఠ – Minimum
కనిష్ఠ క్రియాసూత్రము – Principle of least action
కనిష్ఠ వర్గవిధానము – Method of least squares
కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క. సా. గు.) – Lowest common multiple (L. C. M.)
కరణీయ – Irrational
కరణీయ సంఖ్య – Irrational number
కరణీయ సంఖ్యలు అవధులుగా పొందుట – Irrational numbers as limits
కర్క – Cancer
కర్ణవర్గ సిద్ధాంతము – Theorem of pythagores
కలనశాస్త్రము – Calculus
కళంకములు – Spots
కళలు – Phases
కాంగ్ కాయిడ్ – Conchoid
కాంతి – Light
కాంతికిరణ వక్రీభవనము – Refraction of light rays
కాంతి తరంగవాదము – Wave theory of light
కాంతి మండలము – Photosphere
కాంతివత్సరము – Light year
కాంతి విద్యుత్ ఘటములు – Photo-electric cells
కాంతి విపథనము – Aberration of light
కాంప్లెక్స్ – Complex
కాటినెరీ – Catenary
కారణాంకము – Factor
కారణాంక విశ్లేషణ – Factor analysis
కారణాంక పరివర్తన పరీక్ష – Factor reversal test
కార్టీసియన్ గుణకార సమితి – Cartesian product
కార్టీసియన్ నిరూపకములు – Cartesian co-ordinates
కార్డియాయిడ్ – Cardioid
కార్యకరలక్షణము – Operating characteristic
కాలనిరూపకములు – Time co-ordinates
కాలపరివర్తన పరీక్ష – Time reversal test
కాలము – Time
కాలశ్రేణి Time series
కాలసమీకరణము – Equation of time
కాలాంతరచలనము – Secular variation
కుంభ – Aquarius
కుజుడు – Mars
కూట చతురస్రములు – Magic squares
కూటనాణెము – False coin
కూటపాచికలు – Loaded dice
కూర్పులు – Groups
కూర్పువాదము – Theory of Groups
కృత్తిక – Aleyone, Pleides
కృత్రిమ ఉపగ్రహము – Artificial satellite, Space satellite
కృష్ణనీహారికలు – Dark nebulae
కృష్ణరేఖా వర్ణమాల – Darkline spectrum
కేంద్రము – Centre
కేంద్ర విక్షేపము – Central projection
కేవల పరిమాణము – Absolute magnitude
కో. జీవ – cosine
కో. జీవ పరంపరలు – cosine series
కోటి – Ordinate
కోటి ఛేదకము – co-secant
కోటిజీవ – cosine
కోటిజీవ వృత్తము – cosine circle
కోటి స్పర్శజీవ – cotangent
కోణము – Angle
కోణశీర్షము – Vertex of an angle
కోణీయ – Angular
కోణీయగతిభారము – Angular momentum
కోణీయవేగము – Angular velocity
కోణీయ వేగ సదిశరాశి – Vector of angular velocity
కోఫాక్టర్ – Co-factor
కోమా – Coma
కోష్టకము – Table
కోష్టరచన – Tabulation
క్రమచయ కూర్పులు – Permutation groups
క్రమబహుతలకము – Regular polyhedral

క్రమబహుభుజి -Regular polygon
క్రమభిన్నము - Proper fraction
క్రమ విచలనము - Standard deviation
క్రమషడ్భుజి - Regular hexagon
క్రమాత్మక ప్రతిరూపకరణము - Sequential sampling
క్రాంతపరిమిత అంకగణితము - Transfinite arithmatic
క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలు - Transfinite numbers
క్రాంతి - Declination
క్రాంతి యంత్రము - Transit instrument
క్రాంతి వృత్తము - Ecliptic
క్రాస్ గుణకారము - Cross multiplication
క్రెమోనామార్పులు - Birational transformations
క్రోనోమీటరు - Chronometer
క్వాంటం సిద్ధాంతము - Quantum theory
క్షితిజము - Horizon
క్షీరపథము - Milkyway
క్షీరపథవికిరణము - Milkway radiation
క్షేత్రగణితము - Geometry
క్షేత్రశక్మ - Field potential
క్షోభము - Perturbation

ఖ

ఖండములు - Segments
ఖండగ్రహణము - Partial eclipse
ఖండ చయనీకరణము - Partial integration
ఖగోళగతి శాస్త్రము - Astro-dynamics
ఖగోళ భౌతికశాస్త్రము - Astro-physics
ఖగోళము - Celestial sphere
ఖగోళ యాంత్రిక శాస్త్రము - Celestial mechanics
ఖగోళశాస్త్రము - Astronomy
ఖగోళ శాస్త్రీయ యూనిట్ - Astronomical unit

గ

గణిత అనుగమనము - Mathematical induction
గణిత అర్థశాస్త్రము - Mathematical Economics
గణిత కథలు - Mathematical anecdotes
గణిత చిక్కు ప్రశ్నలు - వినోదములు - Mathematical puzzles and recreations
గణితతర్కము - Mathematical logic
గణిత పథకములు - Mathematical tables
గణిత భౌతికశాస్త్రము - Mathematical physics
గణితము - Mathematics
గణిత విశ్లేషణ - Mathematical analysis
గణితవేత్తల దివ్యవచనములు - Quotations from Mathematicians
గణిత్రములు - Calculators, computers
గణిత్రయంత్రములు - Calculating machines
గతిభార భ్రమిష - Moment of a momentum
గతిభారము - Momentum
గతిశాస్త్రము - Dynamics
గతి - Motion
గమనము - Motion
గరిమనాభి - Centre of gravity
గరిష్ఠ - Maximum
గరిష్ఠ, కనిష్ఠమూల్యములు - Maximum and minimum values
గరిష్ఠఘాతము - Maximum power
గరిష్ఠ సామాన్యభాజకము (గ. సా. భా.) - Greatest common multiple (G. C. M)
గవాక్ష వాచకములు - Window readers
గామా ఫలములు - Gamma functions
గాలక్సీ - Galaxy
గుణకము - Co-efficient
గుణకార పట్టికలు - Multiplication tables
గుణకారము - Multiplication
గుణకార లబ్ధము - Product
గుణకార లబ్ధము యొక్క వ్యుత్పన్నము - Derivative of a product
గుణాత్మక - Qualitative
గుణిజములు - Multtples
గుణోత్తర మధ్యమము - Geometrical mean
గుణోత్తర శ్రేఢి - Geometrical progression
గుప్తాంక గణితము - Crypt arithmatic
గురుకోణ త్రిభుజము - Obtuse angled triangle
గురుకోణము - Obtuse angle
గురుచాపము - Major arc
గురువృత్తము - Great circle
గురుత్వ కేంద్రము - Centre of gravity
గురుత్వక్షేత్రము - Gravitational field
గురుత్వతులాయంత్రము - Gravitational balance
గురుత్వ స్థిర రాశి - Gravitation invariant
గురుత్వ స్థిరాంకము - Gravitational constant
గురుత్వాకర్షణము - Gravitation
గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము - Gravitational field
గురుత్వాకర్షణ గుణకము - Gravitational co-effieient
గురుత్వాకర్షణ స్థిరాంకము - Gravitational constant
గురుడు - Jupiter
గైరోకంపస్ - Gyrocompass
గైరోస్కోప్ - Gyroscope
గోపురపు సంఖ్యలు - Pyramidal numbers
గోళకములు - Shells
గోళఖండము -Segment of a sphere
గోళతలము - Spherical surface
గోళము - Sphere
గోళసమీకరణము - Equation of a sphere
గోళీయ - Spherical
గోళీయ జ్యామితి - Spherical geometry
గోళీయ త్రికోణమితి - Spherical trignometry
గోళీయ త్రిభుజములు - Spherical triangles
గోళీయ నక్షత్ర బృందము - Globular star clusters

గోళీయ నిరూపకములు – Spherical co-ordinates
గోళీయ వక్రము – Spherical curve
గోళీయ హరాత్మకము – Spherical harmonics
గోళీయ హరాత్మక ఫలములు – Spherical harmonic functions
గాస్ ప్రమాద నియమము – Gaussian law of errors
గాస్ వక్రత – Gauss curvature
గ్రహకక్ష (కక్ష్య) – Planetary orbit
గ్రహకక్ష్యా వేగము –Velocity in the orbit
గ్రహణ తారలు – Eclipsing stars
గ్రహణము – Eclipse
గ్రహణయుగము – Saros
గ్రహము – Planet
గ్రహముల ఋజుగతి – Direct motion of planets
గ్రహముల వక్రగతి – Retrograde motion of planets
గ్రహయుతి – Synodic period
గ్రహవిపథనము – aberration of planet
గ్రాహ సిద్ధాంతము – Capture hypothesis

ఘ

ఘటికాయంత్రము – Chronometer
ఘన అతిపరావ – Hyperboloid
ఘనకోణము – Solid-angle
ఘనచిత్రీయ విక్షేపము – Stereographic projection
ఘనపరావ – Paraboloid
ఘనపరిమాణము – Volume
ఘనము – Cube
ఘనమూలము – Cube root
ఘనరూపము – Solid
ఘనశాంకవము – Conicoid
ఘర్షణ – Friction
ఘర్షణ గుణకము –Co-efficient of friction
ఘర్షణ శంకు – Cone of friction
ఘాతపరంపర – Exponential series
ఘాత ఫలములు – Exponential functions
ఘాతము – Power
ఘాతాంకము – Exponent
ఘాతాంకీయ పరంపర – Exponential series

చ

చంద్రకళలు – Lunar phases
చంద్రగ్రహణము – Lunar eclipse
చంద్రుడు – Moon
చంద్రోప బిందువు – Sub-lunar point
చక్రభాగము – Cyclic component
చక్రీయ – Cyclic
చక్రీయ చతుర్భుజము – Cyclic quadrilateral
చతుఃపరిమాణిక – Four dimensional
చతురస్రము – Square
చతుర్భుజము – Quadrilateral
చతుస్తలకము – Tetrahedron
చతుష్కము – Quaternion
చతుష్క సంఖ్యలు Quaternions
చతుష్కోణము – Quadrangle
చయనకలనము – Integral calculus
చయన సమీకరణములు – Integral equations
చయనీకరణము – Integration
చయనీకరణ గుణకము – Integral co-efficient
చయనీకరణ స్థిరాంకము – Integral constant
చయనీయ పరీక్ష – Integral test
చలకలనము – Calculus of variation
చలతారలు – Variable stars
చలన గుచ్ఛములు – Cluster variables
చలనము – Motion
చలన విశ్లేషణము – Analysis of variance
చలన శక్తి – Kinetic energy
చలరాశి – Variable
చాక్షుష శాస్త్రము – Optics
చాపము – Arc
చిత్ర – Spica
చిపిట – Flat
చిపిట ఆకాశములు – Flat spaces
ఛాయాచిత్ర మహత్వము – Photographic magnitude
ఛేదకము – Secant
ఛేద్యక జ్ఞానము – Knowledge of projection

జ

జడ బిభ్రమిష – Moment of inertia
జనక చతురస్రము – Generating square
జనక రేఖ – Generating line
జాతి – Genus
జాలబిందువులు – Lattice points
జాలబిందువాదము – Theory of lattice points
జీటాఫలములు –Zeta functions
జీవ – sine
జీవకోష్టకము – sine table
జీవనమాపనము – Biometry
జీవపట్టికలు – sine tables
జీవశాస్త్రము – Biology
జీవసాంఖ్యకము – Vital statistics
జీవిత ప్రత్యాశ (ఆకాంక్ష) – Expectation of life
జీవిత భీమా – Life insurance
జీబ – Jiba
జ్యా – Chord, sine
జ్యామితి – Geometry
జ్యామితీయ – Geometrical
జ్యారేఖ – Chord line
జ్యేష్ఠ – Antares, Scorpionis
జ్యోతి – Light
జ్యోతిర్వత్సరము – Light year

జ్యోతిర్వేగము - Velocity of light
జ్యోతిషము - Astrology
జ్వాలలు - Prominences

ట

టెన్సార్ - Tensor
టెన్సార్ కలనము - Tensor calculus
టెన్సార్ గుణకము - Tensor co-efficient
టేలర్ పరంపర - Tayler series
టోపాలజీ - Topology
టోపాలజీ మార్పులు - Topological transformations
ట్రాక్ట్రిక్స్ - Tractrix
ట్రెపీజియమ్ - Trapezium

డ

డయోఫాంటస్ సమీకరణములు - Diophantine equations
డెజార్గ్ విన్యాసము - Desargues arrangement

త

తరంగ దైర్ఘ్యము - Wave length
తరంగ ప్రాపణ సిద్ధాంతము - Theory of wave propagation
తరగతి - Degree
తలము - Plane
తాపక్రమము - Temparature
తాపసూచకము - Heat index
తారామండలములు - Constelletions
తారీఖు రేఖ - Date line
తార్కిక కల్పన - Deductive system
థియోడలైట్ - Theodolite
తిర్యక్ - Oblique, Transverse
తిర్యక్ అక్షములు - Oblique axes, Tranverse axes
తిర్యక్ ఆఘాతములు - Tranverse impulses
తిర్యక్ నిరూపకములు - Oblique co-ordinates
తిర్యక్ ప్రిజమ్ - Oblique prism
తిర్యక్ రేఖ - Oblique line
తిర్యక్ స్తూపము - Oblique cylinder
థీటాఫలములు - Theta functions
తుల - Libra
తులాదిబిందువు - First point of Libra
తులావిషువు - Autumnal equinox
తులాసంపాతము - Autumnal equinox
తుల్యకోణ సంయుగ్మములు - Isogonal conjugates
తృతీయ వ్యుత్పన్నము - Third derivative
తోలనము - Libration
త్రికతారలు - Triple stars
త్రికోణమితి - Trigonometry
త్రికోణమితి పలములు - Trigonometric functions
త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి - Trigonometirc ratio
త్రిపరిమాణిక - Three dimensional
త్రిపరిమాణిక ఆకాశము - Three dimensional space
త్రిపరిమాణిక జ్యామితి - Three dimensional geometry
త్రిపరిమాణిక వక్రము - Three dimensional curve
త్రిభుజ అంతర కేంద్రము - In-centre of a triangle
త్రిభుజగురుత్వకేంద్రము - Centre of gravity of a triangle
త్రిభుజ పరికేంద్రము - Circumcentre of a triangle
త్రిభుజప్రిజమ్ - Triangular prism
త్రిభుజము - Triangle
త్రిభుజ లంబకేంద్రము - Ortho-centre of a triangle
త్రిభుజసంఖ్యలు - Triangular numbers
త్రిభుజ హెచ్చుతగ్గులు - Triangular inequalities
త్రిరేఖీయ - Trilinear
త్రిరేఖీయ నిరూపకములు - Trilinear co-ordinates
త్రిశంకువు - Centaurus
త్రైరాశికము - Rule of three
త్వరణము - Acceleration

ద

దక్షిణధ్రువము - South pole
దక్షిణధ్రువాంతరము - South polar distance
దత్తాంశములు - Data
దశాంశబిందువు - Decimal point
దశాంశభిన్నము - Decimal fraction
దశాంశములు - Decimals
దశాంశసంకేతనము - Decimal notation
దిగంశ - Azimuth
దివ్య - Celestial
దివ్యఅక్షాంశము - Celestial latitude
దివ్యనిరక్షరేఖ - Celestial equator
దీర్ఘచతురస్రము - Rectangle
దీర్ఘవృత్తఫలములు - Elliptic functions
దీర్ఘవృత్తము - Ellipse
దీర్ఘావర్తన ధూమకేతువు - Long peroid comet
దూరదర్శని - Telescope
దృఢవస్తువు - Rigid body
దృఢవస్తుగతిశాస్త్రము - Rigid dynamics
దృశ్యదీప్తి - Apparent brightness
దృశ్యపరిమాణము - Visual magnitude
దృశ్యయుగళములు - Optical doubles
దృశ్యసంఘటనలు - Phenomena
దేవయాని - Andromeda
దైనికపరిభ్రమణము - Diurnal rotation
ద్యుజ్యావృత్తము - Declination circle
ద్రవగతిశాస్త్రము - Hydrodynamics
ద్రవము - Fluid
ద్రవయాంత్రికశాస్త్రము - Fluid mechanics
ద్రవస్థితిశాస్త్రము - Hydrostatics
ద్రవేంధనములు - Liquid fuels
ద్రవ్యరాశి - Matter
ద్రుతి - Speed
ద్వికతారలు - Binaries

ద్వితీయ అంతరవిధానము – Method of second difference
ద్విపద – Binomial
ద్విపదగుణకము – Binomial co-efficient
ద్విపదసమాసము – Bionomial expression
ద్విపదసిద్ధాంతము – Binomial theorem
ద్విపార్శ్వ అవిచ్ఛిన్నత – Bicontinuity
ద్విపార్శ్వఏకరూపత – Bi-uniformity
ద్విభాజకము – Bisector
ద్వైతస్వభావము – Duality
ధన – Positive
ధన అకరణీయసంఖ్య Positive rational number
ధనపూర్ణసంఖ్య, ధనపూర్ణాంకము – Positive integer
ధనభిన్నము, ధనభిన్నాంకము – Positive fraction
ధనమూలము – Positive root
ధనవిద్యుదావేశము – Positive electric charge
ధనసంఖ్య – Positive number
ధనిష్ఠ – Delphini α, β
ధనుస్సు – Sagittarius
ధనుస్సు (చాపము) – Arc
ధురాధారములు – Bearings
ధూమకేతువు – Comet
ధ్రువ కదంబము – Pole of the ecliptic
ధ్రువకము – Celestial longitude
ధ్రువతలము – Polar surface
ధ్రువనక్షత్రము – Pole star
ధ్రువము – Pole
ధ్రువముకుటములు – Polar caps
ధ్రువాక్షము – Polar axis
ధ్రువీయనిరూపకములు – Polar co-ordinates
ధ్రువీయవ్యుత్క్రమము – Polar reciprocal
ధ్వని – Sound
ధ్వనిశాస్త్రము – Acoustics

న

నక్షత్ర అతివర్తనము – Siderial parallax
నక్షత్రగడియారము – Siderial clock
నక్షత్రద్వికము – Geminorum
నక్షత్రము – Star
నక్షత్రవర్ణమాల – Siderial spectrum
నక్షత్రస్థానాంతరత – Stellar displacement
నక్షత్రాంతర ద్రవ్యసంచయము – Inter stellar matter
నతకాలము – Hour angle
నతాంశ – Zenith distance
నతి – Dip
నభోమూర్తులు – Celestial bodies, Celestial objects
నరదలుకోసిన తుపాకి – Rifled gun
నవతార – Nova
నవబిందువృత్తము – Nine point circle
నవీనజ్యామితి – Modern geometry
నవీనము – Nova
నాక్షత్ర కాలము – Siderial time
నాక్షత్రఖగోళశాస్త్రము – Stellar astronomy
నాక్షత్రదినము – Siderial day
నాక్షత్రభ్రమణకాలము – Siderial period
నాక్షత్రయంత్రము – Astrolabe
నాభి – Focus
నాభ్యంతరము – Focal length
నిజ నతకోణము – True zenith direction
నిమజ్జన – Dip
నిమజ్జనకోణము – Algle of dip
నిమ్నత – Inclination
నిమ్నము – Slope
నిరంతరదినము – Perpetual day
నిరంతరరాత్రి – Perpetual night
నిరక్షరేఖ – Equator
నిరుపాధిక – Abstract
నిరుపాధిక ఆకాశములు – Abstract spaces
నిరూపకజ్యామితి – Co-ordinate geometry
నిరూపకపరివర్తన – Change of co-ordinates
నిరూపకములు – Co-ordinates
నిరూపకాక్షములు – Co-ordinate axes ; Axes of reference
నిర్దిష్టకోటిజీవలు – Direction cosines
నిర్ధారకములు – Determinants
నిర్ధారకవ్యాకోచము – Expansion of determinants
నిర్వచనము – Definition
నిర్వికృతి – Invariance
నిశ్చితచయనీకరణము – Definite integration
నిష్కాసనము – Casting out
నిష్ఠురత – Rigour
నిష్పత్తి – Ratio
నీచోచ్చరేఖ – Apsidal line
నీహారికలు – Nebulae
నీహారికా మేఘము – Magellanic cloud
నీహారికావాదము – Nebular hypothesis
నెబ్యులాలు – Nebulae
నోదకము – Propeller
నోమోగ్రాములు – Nomograms
నోవా – Nova
న్యుబ్జ – Gibbous

ప

పంచాంగకాలము – Ephemeris time
పంచాంగము – Calender
పంచాంగరేఖ – Ephemeris meridian
పంజరవాదము – Matrix theory
పట్టకము – Prism
పతనకోణము – Angle of incidence
పదనిశ్చయము – Interpolation

పని – Work
పరంపర - Series
పరతంత్రచలరాశి – Dependent variable
పరపరాగసిక్త – Cross fertilized
పరమతరము – Absolute magnitude
పరమతాపక్రమము – Absolute temperature
పరమాణుప్రతిరూపము – Atomic model
పరమాపక్రాంతి – Obliquity of the ecliptic
పరశకము – Parsec
పరశోణ – Infra red
పరస్పరఅనురూపత – Mutual correspondence
పరస్పరత – Reciprocation
పరస్పర బహిష్కారసంభవములు – Mutually exclusive events
పరస్పరలంబములు – Mutually perpendiculars
పరాలోకత్రిభుజములు – Triangles in perspective
పరావర్తనము – Reflection
పరావర్తనదూరదర్శిని – Reflecting telescope
పరావర్తనశక్తి – Albedo
పరావృతకోణము – Reflex angle
పరాన – Parabola
పరానరూపము – Paraboloid
పరికర్మములు – Operators
పరికేంద్రము – Circum centre
పరిక్షోభము – Perturbation
పరిజ్యా – Perigee
పరిధి – Circumference
పరిణామము – Evolution
పరిభ్రమణము – Rotation
పరిమాణము – Magnitude
పరిమాణాత్మక – Quantitative
పరిమితి జ్యామితి – Finite geometry
పరిమేయాకాశము – Metric space
పరివర్తననియమము – Commutative law
పరివర్తనన్యాయము – Commutative law
పరివర్తనమండలము – Commutative ring
పరివృతచయనము – Contour integral
పరివృత్తము - Circum circle
పరిస్పర్శగోళము – Osculating sphere
పరిస్పర్శతలము – Osculating plane
పరిహేళి – Perihelion
పరిహేళిగతి – Perihelion motion
పాతము – Node
పాతాలబిందువు – Nadir
పాదత్రిభుజము – Pedal triangle
పాదబిందువులు – Pedal points
పాదము – Quadrant
పాదరేఖ – Pedal line
పాదవక్రము – Pedal curve

పారదర్శకత – Transparency
పారిషదఆవృత్తి – Synodic period
పారిషదకాలము – Synodic time
పార్థివప్రమాణము – Terrestrial standard
పాలపుంత – Milky way
పాశీ – Loop
పాస్కల్ త్రిభుజము – Pascal triangle
పిడివాదము – Dogmatism
పిరమిడ్ – Pyramid
పీఠము – Base
పుంజములు – Groups
పునరావృత్తి – Replication
పునర్వసు – Geminorium - β, Castor, Pollux
పుబ్బ – Leonis-α 70, 71
పుష్యమి – Caneri δ
పూరక కోణములు – Complementary angles
పూరకములు – Compliments
పూర్ణగ్రహణము – Total eclipse
పూర్ణాంకములు – Integeis
పూర్వనిర్దేశము – Forecast
పూర్వాభాద్ర – Pegasi - α
పూర్వాషాఢ – Sagittari - δ
పెద్దసంఖ్యల జడత్వము – Inertia of large numbers
పెరాబోలాయిడ్ – Paraboloid
పెల్లియన్ సమీకరణములు – Pellian equations
పౌనఃపున్యము – Frequency
పౌనఃపున్యవిభజనము – Frequency division
ప్రకృతినియమములు – Laws of nature
ప్రకేవల – Absolute
ప్రకేవల ఉపసరణత – Absolute convergence
ప్రకేవలకాలము – Absolute time
ప్రకేవలవక్రములు – Absolute curves
ప్రకేవల విలువ – Absolute value
ప్రజ్వలకపదార్థము – Igniter
ప్రతికృతులు – Models
ప్రతిక్రియ – Reaction
ప్రతిబింబము – Reflection
ప్రతిరూపములు – Samples
ప్రతిరూపసంఖ్యలు – Random sampling numbers
ప్రతిసమాంతర – Antiparallel
ప్రతిసామ్య – Antiparallel
ప్రత్యక్షసౌరకాలము – Apparent solar time
ప్రత్యావర్తనస్తరము – Reversing layer
ప్రత్యేకసాపేక్షతావాదము – Special theory of relativity
ప్రథమవర్గ అంతరీకరణరూపము – First quadratic differentia form
ప్రధాన అభిలంబరేఖ – Principal normal
ప్రధానసంఖ్యలు – Prime numbers

ప్రమాణకాలము – Standard time
ప్రమాదము – Error
ప్రమేయము – Proposition
ప్రయోగము – Experiment
ప్రయోగరచన – Design of experiment
ప్రవాహఫలము – Stream function
ప్రవాహసాంద్రత – Flux density
ప్రస్తారములు – Permutations
ప్రాక్చక్రము – Epicycle
ప్రాచలకూర్పు – Parameter group
ప్రాచలము – Parameter
ప్రేషము – Pressure
ప్రోబిట్ ఎనాలిసిస్ – Probit analysis
ప్లూటో – Pluto
ఫర్మా సంఖ్యలు – Fermat numbers
ఫలకము – Lamina
ఫలకములు – Layers
ఫలముల అవిచ్ఛిన్నత – Continuity of functions
ఫలములు – Functions
ఫలవాదము – Function theory
ఫలిత త్వరణము – Resultant acceleration

బ

బరువు – Weight
బలక్షేత్రము – Field of force
బలభ్రమిష – Moment of force
బలము – Force
బలయూనిట్ – Unit force
బలశ్రుతి – Vector of force
బహిర్లుఠి – Involute
బహిర్వృత్తము – Outer circle
బహుఆవర్తనఫలములు – Multiperiod functions
బహుతలకము – Polyhedron
బహుపదఅనిశ్చిత ప్రథమతరగతి సమీకరణములు – Indeterminate equations of the first degree in many unknowns
బహుపదములు – Polynomials
బహుపదసమాసములు – Multinomial expressions
బహుపదసిద్ధాంతము – Multinomial theorem
బహుభుజి – Polygon
బహురాశి – Multivariable
బహుళతారలు – Multiple stars
బాంబుఅస్త్రప్రయోగవిద్య – Bomb ballistics
బాణాగ్రలిపి – Cuneiform script
బాహ్యాపకాంతరకోణము – Alternate exterior angle
బాహ్యకేంద్రము – Ex-cetre
బాహ్యకోణము – Exterior angle
బాహ్య గ్రహములు – Outer planets
బిందుపథము – Locus
బిందువు – Point
బిందు సమూహముల టోపాలజీ – Topology of point sets
బీజగణితము – Algebra
బీజీయఫలములు – Algebraic functions
బుధుడు – Mercury
బృహత్తులు – Giants
బేసి సంఖ్యలు – Odd numbers
బౌద్ధికగుణ్యము – Intelligent quotient
బొంగరము – Spinning top
భగణము – Revolution
భరణి – Musa, Arietis 35, 41
భాగఫలము – Quotient
భాగహారము – Division
భాజకము – Divisor
భాజ్యము – Dividend
భారవర్ధిత నిష్పత్తి – Weighted Ratio
భారాంకిత గుణకములు – Weighed multiples
భిన్న పరికర్మములు – Manipulations of fractions
భిన్నములు – Fractions
భీమా – Insurance
భుగ్నత – Refraction
భూమి – Earth
భూదైనిక పరిభ్రమణము – Diurnal rotation of the earth
భోగము – Celestial longitude
భౌతిక యుగళములు – Physical doubles
భౌతిక శాస్త్రము – Physics
భౌమ్యసంభవములు – Terrestrial phenomena
భ్రమణము – Revolution
భ్రమణ దర్శకము – Gyroscope

మ

మండలము – Zone, Ring
మందఫలము – Equation of the centre of a planet
మందాకిని Milkyway, Galaxy
మకరాయనము – Winter solstice
మఘ – Leonis - α, Regulus
మధ్యకాల గ్రహయుగము – Synodical period
మధ్యగత – Median
మధ్యమ మూల్యసిద్ధాంతము – Mean value theory
మధ్యమానము – Mean value
మధ్యమాన సౌరకాలము – Mean solar time
మధ్యాహ్న రేఖ – Meridian
మరచలనము – Screw motion
మర్యాదిత – Bounded
మర్యాదిత కంపనము – Bounded oscillation
మహావృత్తము – Great circle
మస్తకము – Zenith
మాంద్యత – Anomaly
మాత్రిక – Matrix
మాపాంకము – Modulus

మిథునము – Gemini
మిళిత సంభావ్యత – Composite probability
మీన – Pisces
ముకుటము – Corona
మూల – Scorpionis - λ 34, 35
మూలత్రితలము – Fundamental trihedron
మూలములు – Roots
మూలసంఖ్య – Radix
మూలాంకము – Radix
మూలాక్షము – Radical axis
మూడవతరగతి సంస్పర్శ – Third order contact
మృగవ్యాధుడు – Sirius
మృగశిర – Orionis - λ, Delta orions
మృతిబలము – Force of mortality
మెత్త – Pallet
మేష – Aries
మేషాది బిందువు – First point of Aries
మొదటి తరగతి అంతరికరణ సమీకరణములు – Linear differential equations

య

యథాదర్శన జ్యామితి – Perspective drawing
యథాదర్శనశాస్త్రము – Science of perspective drawing
యదృచ్ఛ – Chance
యముడు – Pluto
యాంత్రికశాస్త్రము – Mechanics
యాదృచ్ఛిక – Random
యాదృచ్ఛిక చలరాశి – Random variable
యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ – Stochastic process
యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపములు – Random samples
యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలు – Random numbers
యాదృచ్ఛికావశేషము – Random residue
యాదృచ్ఛికీకరణము – Randomization
యాదృచ్ఛికీకృతఖండములు – Randomized blocks
యానకము – Medium
యామ్యోత్తర రేఖ – Meridian
యామ్యోత్తర వృత్తము – Meridian circle
యుక్తభిన్నము – Proper fraction
యుగళతారలు – Binaries
యుగళబిందువు – Nodal point
యుగ్మము – Couple
యుతి – Conjunction
యూక్లిడ్ ఆకాశము – Euclid space
యూక్లిడ్ "ఎలిమెంట్స్" – Euclid "elements"
యూక్లిడేతర జ్యామితులు – Non - euclidean geometries
యూనిట్ – Unit
యూనిట్ త్వరణము – Unit acceleration
యూనిట్ బలము – Unit force
యూనిట్ సెల్ – Unit cell
యోగము – Conjunction
యోజన – Planning

ర

రవి కళంకములు – Sun spots
రవిబింబ శుక్రతరణము – Transit of venus over sun
రశ్మిశలాకము – Pencil of rays
రశ్మ్యుద్గారి మూలద్రవ్యములు – Radio-active elements
రాంబస్ – Rhombus
రాశిచక్రము – Zodiac
రాశులు – Constellations
రూపము – Unit
రెండవ అభిలంబ రేఖ – Binormal
రెండవ తరగతి అనిశ్చిత సమీకరణములు – Indeterminate equations of second degree
రెండవ తరగతి వ్యాపక సమీకరణములు – General equations of second degree
రెండవ తరగతి సమీకరణములు – Quadratic equations
రేఖ – Line
రేఖాంశము – Meridian
రేఖాంశ రేఖ – Meridian
రేఖా నిరూపకములు Linear co-ordinates
రేఖీయ – Linear
రేఖీయ బిందుసమితి – Linear sets of points
రేడియో ఖగోళశాస్త్రము – Radio astronomy
రేడియన్ – Radian
రేడియస్ వెక్టర్ – Radius vector
రేడియోతార – Radio star
రేవతి – Piscium
రోహిణి – Aldebaran

ల

లంగరు వలయము – Anchor ring, Torus ring
లంబకేంద్రము – Ortho-centre
లంబకోణము – Right angle
లంబతలము – Normal plane
లంబనము – Parallax
లంబన విధానము – Parallax method
లంబప్రిజమ్ – Right prism
లంబవిక్షేపము – Orthogonal projection
లంబవృత్తస్తూపము – Right circular cylinder
లంబాక్ష – Rectangular
లంబాక్ష నిరూపకములు – Rectangular co-ordinates
లక్షణవాదము – Theory of attributes
లఘుకోణము – Acute angle
లఘుగ్రహములు – Asteroids
లఘుచాపము – Minor arc
లఘువృత్తము – Small circle
లవము – Numerator
లాగరిదమ్ పరంపర – Logarithmic series

లాగరిదమ్ ఫలములు – Logarithmic functions
లాటిన్ చతురస్రము – Latin square
లాప్లాస్ సమీకరణము – Laplace's equation
లిమేసాన్ – Limacon
లోకము – Population
లోలకము – Pendulum

వ

వక్ర ఆకాశము – Curved space
వక్రగతి – Retrograde motion
వక్రత – Curvature
వక్రతా కేంద్రము – Centre of curvature
వక్రతా రేఖ – Line of curvature
వక్రతావృత్తము – Circle of curvature
వక్రతా వ్యాసార్ధము – Radius of curvature
వక్రములు – Curves
వక్ర రేఖీయ నిరూపకములు – Curvilinear co-ordinates
వక్రీభవనకోణము – Angle of refraction
వక్రీభవన దూరదర్శిని – Refracting telescope
వక్రీభవనము – Refraction
వక్రీభవన స్థిరరాశి – Refraction constant
వజ్రనిష్పత్తి – Cross ratio
వరణ స్వీకృతతత్త్వము – Axiom of choice
వరుణుడు – Neptune
వర్గము – Square
వర్గమూలము – Square root
వర్గసమీకరణము Quadratic equation
వర్ణమండలము – Chromosphere
వర్ణమాల – Spectrum
వర్ణమాలాచిత్రము – Spectrograph
వర్ణమాలాదర్శిని – Spectroscope
వర్ణమాలాలంబనము – Spectroscopic parallax
వర్ణమాలా విశ్లేషణము – Spectral analysis
వర్ణమాలా హేళిలేఖిని – Spectro-heliograph
వర్ణవిపథనము – Chromatic aberration
వర్ణసూచకము – Colour index
వర్తుల – Circular
వర్తులబిందువులు – Circular points
వర్తులరేఖలు – Circular lines
వసంత విషువు, వసంత సంపాతము – Vernal equinox
వస్తుకటకము – Object glass
వస్తుపరివర్తన పరీక్ష – Commodity reversal test
వామనములు – Dwarfs
వార్షిక – Annual
వార్షిక అతివర్తనము – Annual parallax
వార్షిక సమీకరణము – Annual equation
వాస్తవ సంఖ్యలు – Real numbers
వాస్తవిక ప్రతిరూపము – Exactly similar
వాస్తుధ్వని విద్య – Architectural acoustics

వికర్ణము – Diagonal
వికిరణ బిందువు – Radiant
వికిరణమాపక – Radiometric
వికిరణము – Radiation
విక్షేపక జ్యామితి – Projective geometry
విక్షేపక నిరూపకములు – Projective co-ordinates
విక్షేపక మార్పులు – Projective transformations
విక్షేపపథము – Trajectory
విక్షేపము – Projection
విచలనము – Deviation ; Variance
విచూషణము – Absorption
విచూషణ పట్టికలు – Absorption bands
విద్యుదావేశములు – Electric charges
విద్యుదయస్కాంత సిద్ధాంతము – Electro-magnetic theory
విద్యుద్గతిశాస్త్రము – Electro-dynamics
విద్యుచ్ఛక్మము – Electric potential
వినియుక్త గణితము – Applied mathematics
విపథనము – Aberration
విపథన గుణకము – Co-efficient of aberration
విపథన స్థిరాంకము – Aberration constant
విభాజకము – Factor
విభాజకీకరణము – Factorization
విభాజ్యము – Dividend
విమా – Dimension
విమాత్రయ జ్యామితి – Geometry of three dimensions
విమా విశ్లేషణము – Dimensional analysis
విమోటనము – Torsion
విమోటన వ్యాసార్ధము – Radius of torsion
విలోపకక్ష (క్ష్య) – Elliptic orbit
విలోపజ్యామితి – Elliptic geometry
విలోప ఫలములు – Elliptic functions
విలోపము – Ellipse
విలోమ – Inverse
విలోమ అనుపాతము – Inverse proportion
విలోమ చలరాశి – Contravariant
విలోమ ఫలములు – Inverse functions
విలోమ వర్గన్యాయము – Law of inverse squares
వివృత అంతరము – Open interval
విశాలీకృత నిరూపకములు – Generalized co-ordinates
విశ్లేషణ – Analysis
విశ్లేషణ గణితము – Analysis
విశ్లేషణ ఫలములు – Analytical functions
విశ్వగురుత్వ సిద్ధాంతము – Universal law of gravitation
విశ్వద్రవ్యము – Cosmic matter
విశ్వధూళి – Cosmic dust
విశ్వము – Universe
విశ్వామిత్రుడు – Southern cross
విషుచ్చలనము – Precession of the equinoxes

విషుదర్శని – Equinoctial
విషుబిందువు – Equinoctial point
విషువాంశ – Right ascension
విషువులు – Equinoxes
విషువృత్తము – Celestial equator
వృత్తచతురస్రీకరణము – Squaring of a circle
వృత్తము – Circle
వృత్తీయ – Circular
వృత్తీయజ్యామితి – Geometry of a circle
వృత్తీయ ఫలములు – Circular functions
వృత్తీయ బిందువులు – Circular points
వృద్ధి ప్రతికృతులు – Growth models
వృశ్చిక – Scorpio
వెక్టర్ – Vector
వెక్టర్ గణితము – Vector mathematics
వెక్టర్ బీజగణితము – Vector algebra
వేగము – Velocity
వేగుచుక్క – Morning star
వేధ – Observation
వేధశాల – Observatory
వేష్టనము – Envelope
వైశాల్య నిరూపకములు – Areal co-ordinates
వైశాల్యము – Area
వైశాల్యవేగము – Areal velocity
వ్యక్త – Apparent
వ్యక్తతరము – Apparent magnitude
వ్యక్తదిశ – Apparent direction
వ్యక్తనతదూరము, వ్యక్తనతాంశ – Apparent zenith distance
వ్యవకలనము – Subtraction
వ్యాకోచద్విశ్వము – Expanding universe
వ్యాపక – General
వ్యాపక సాధనము – General solution
వ్యాసము – Diameter
వ్యాసార్థము – Radius
వ్యుత్క్రమము – Reciprocal
వ్యుత్క్రమ సంఖ్య – Reciprocal number
వ్యుత్పన్నములు – Derivatives
వ్రాలిన గోపురము – Leaning tower

శ

శంకు – Cone
శంకుతలము – Conical surface
శంకుభాషులు – Cone speakers
శంకువు – Gnomon
శంకుశీర్షము – Vertex of a cone
శకము – Era
శకలాస్త్ర ప్రయోగము – Fragmentation ballistics
శక్తి – Energy
శక్మ – Potential
శక్మ ప్రవాహము – Potential flow
శక్మవాదము – Potential theory
శక్మ శక్తి – Potential energy
శతభిషము – Aquarii - λ
శని – Saturn
శని కంకణములు – Saturn's rings
శర నక్షత్రములు – Shooting stars
శరము – Latitude, Celestial lattitude
శరద్విషువు – Autumnal equinox
శలాక – Pencil
శాంకవచ్ఛేదము – Conic section
శాంకవనాభులు – Conic foci
శాంకవము – Conic
శాంకవ వక్రీభవనము – Conic refraction
శాంకవ విక్షేపము – Conical projection
శాంకవ శీర్షము – Vertex of a cone
శింశుమార చక్రము – Zodiacal belt
శిఖరము – Vertex
శీఘ్రకర్ణము –Distance of a planet from the centre of earth
శీర్షకోణము – Vertical angle
శీర్షము – Vertex
శుక్రతరణము – Transit of Venus
శుక్రయుగము – Synodic period
శుక్రుడు – Venus
శుద్ధ గణితము – Pure mathematics
శుద్ధగతిశాస్త్రము – Kinematics
శుద్ధజ్యామితి – Abstract geometry
శుద్ధబీజగణితము – Abstract algebra
శూన్యము, శూన్యాంకము – Zero
శృంఖలా సంధానము – Linkage
శృంఖలిత భిన్నము – Continued fraction
శ్రవణము – Aquila - α
శ్రుతి – Radius vector
శ్రేఢులు – Progressions

ష

షడ్వస్తు సమస్య – Six body problem
షడ్భాంతరము – Opposition
షష్టకము – Sextant

స

సంకలన అవధి – Limit of a sum
సంకలన మధ్యమము – Arithmetic mean
సంకలనము – Addition
సంకలన రాశి – Sum
సంకలన శ్రేఢి – Arithmetic progression
సంకలనీయత – Summability
సంకలనీయతా సిద్ధాంతము – Theory of summability
సంకీర్ణ – Complex
సంకీర్ణ ఋజురేఖ – Complex line

సంకీర్ణ చలరాశి – Complex variable
సంకీర్ణ చలరాశి ఫలవాదము – Theory of functions of a complex variable
సంకీర్ణ సంఖ్య – Complex number
సంకేతము – Symbol
సంకేతితమానములు – Scales of notation
సంఖ్యలు – Numbers
సంఖ్యామానములు – Scales of notation
సంఘటన – Event
సందెచుక్క – Evening star
సంధ్య – Twilight
సంపాత బిందువు – Point of intersection
సంపూరకకోణము – Supplementary angle
సంభవనీయత – Probability
సంభవనీయతావాదము – Probability theory
సంభావ్యత – Probability
సంభావ్యతాకలనము – Calculus of probabilities
సంభావ్యతావాదము – Mathematical theory of probability
సంభావ్యతా విభజనము – Probability distribution
సంభావ్యతా సాంద్రత – Probability density
సంమధ్య బిందువు – Symmedian poinit
సంయుగ్మ – Conjugate
సంయుగ్మ బిందువులు – Conjugate points
సంయోగ నియమము – Law of combination
సంయోగములు – Combinations
సంయోజక న్యాయము – Law of association
సంయోజన విధానము – Combinational method
సంయోజత – Synthetic
సంయోజిత నోదక ద్రవ్యములు – Synthetic propellants
సంవృత అంతరము – Closed interval
సంవృత వక్రము – Closed curve
సంవృతశాంకవము – Closed conic
సంవృత సమితి – Closed set
సదిశ రాశి – Vector
సదిశరాశి ఆకాశము – Vector space
సదిశ రేఖ – Vector line
సదృశచిత్రపటలేఖనము – Conformal mapping
సమకాలిక సమీకరణములు – Simultaneous equations
సమకాలీన – Simultaneous
సమకోణము – Right angle
సమకోణీయ – Orthogonal
సమకోణీయ విక్షేపము – Orthogonal projection
సమకోణీయ శలాక – Orthogonal pencil
సమకోణీయ సమన్వయము – Orthogonal involution
సమకోణీయ సమవాయత – Orthogonal involution
సమగ్ర సమీకరణము – Perfect equation
సమఘాత – Homogeneous
సమఘాత నిరూపకములు – Homogeneous co-ordinates
సమఘాత సమీకరణము – Homogeneous equation
సమతల జ్యామితి – Plane geometry
సమతల త్రికోణమితి – Plane trigonometry
సమద్విభుజ (బాహు) త్రిభుజము – Isosceles triangle
సమన్వయత – Involution
సమన్వయ శలాక – Pencil of involution
సమవాయత – Involution
సమవాయతా కేంద్రము – Centre of involution
సమవాయతా శలాక – Pencil of involution
సమానకోణ సర్పిలము – Equi angular spiral
సమానాంతర – Parallel
సమానాంతర చతుర్భుజ నియమ (న్యాయ)ము – Parallelogram law of forces
సమానాంతర చతుర్భుజము – Parallelogram
సమానాంతర చతుర్భుజ సంయోజన సూత్రము – Parallelogram law of forces
సమానాంతర ఘనము – Parallelepiped
సమానాంతర రేఖలు – Parallel lines
సమానాంతర స్వీకృతత్వము – Parallel postulate
సమానాంతర విక్షేపము – Parallel projection
సమాసము – Expression
సమితి – Set
సమితివాదము – Set theory
సమీకరణము – Equation
సమీకరణవాదము – Theory of equations
సమ్మధ్యగతలు – Symmedians
సమ్మధ్యబిందువు – Symmedian point
సరళభిన్నము, సరళభిన్నాంకము – Simple fraction
సరళలోకము – Normal population
సరళవక్రము – Normal curve
సరళవక్ర విస్తీర్ణము – Area of normal curve
సరళ శృంఖలిత భిన్నము – Simple continued fraction
సరళ సంబద్ధ – Simply connected
సరి సంఖ్య – Even number
సరూప త్రిభుజములు – Similar triangles
సర్పిలనీహారిక – Spiral nebula
సర్పిలము – Spiral
సర్పిలరేఖ – Spiral line
సర్వసమత – Congruence, Identity
సర్వసమతత్వములు – Identities
సవ్యదిక్కు – Clock wise
సహజజ్ఞానము – Intuition
సాంఖ్యక గుణనియంత్రణ – Statistical quality control
సాంఖ్యక యాంత్రిక శాస్త్రము – Statistical mechanics
సాంఖ్యక శాస్త్రము – Statistics
సాంద్రత – Density
సాధనము – Instrument, solution
సాపేక్ష – Relative

సాపేక్ష త్వరణము – Relative acceleration
సాపేక్ష పౌనఃపున్యము – Relative frequency
సాపేక్ష యాంత్రికశాస్త్రము – Relative mechanics
సాపేక్ష వేగము – Relative velocity
సాపేక్షత – Relativity
సాపేక్షతావాదము – Relativity theory
సామ్య – Parallel
సాయన – Tropical
సాయన దినము – Tropical day
సాయన సంవత్సరము – Tropical year
సావన – Terrestrial
సావనకాలము – Terrestrial time
సావన దినము – Terrestrial day
సావన సంవత్సరము – Terrestrial year
సింహ – Leo
సిస్సోయిడ్ – Cissoid
సీమిత – Bounded
సూక్ష్మదర్శిని – Microscope
సూక్ష్మ మాపకము – Micrometer
సూక్ష్మరాశి – Infinitesimal
సూచక సంఖ్య – Index number
సూచి – Index
సూచీ ముఖము – Cusp
సూచీ సంఖ్యా సిద్ధాంతము – Index number theory
సూచ్యంకము – Index
సూపర్ నోవా – Super nova
సూపర్ నోవా స్ఫోటనము – Super nova explosion
సూర్యకళంకము – Sunspot
సూర్యగ్రహణము – Solar eclipse
సూర్యఘటి – Sun dial
సూర్యమందఫలము – Equation of centre
సూర్యవర్ణమాల – Solar spectrum
సూర్యవికిరణము – Solar radiation
సూర్యుడు – Sun
సెఫీడ్ చలతారలు – Cepheid variables
సైక్లాయిడ్ – Cycloid
సౌరకాలము – Solar time
సౌరకుటుంబ ఉత్పత్తి – Origin of solar system
సౌరకుటుంబము – Solar system
సౌర జ్వాలలు – Solar prominences
సౌరదినము – Solar day
సౌరదూరదర్శిని – Solar telescope
సౌరమాన – Solar
సౌరాతివర్తనము – Solar parallax
సౌష్ఠవము – Symmetry
స్కేలార్ – Scalar
స్టాటిస్టిక్ – Statistic
స్టొకేస్టిక్ చలరాశి – Stokastic variable
స్తంభము – Column
స్తూపతలము – Cylindrical surface
స్తూపము – Cylinder
స్తూపవిక్షేపము – Cylindrical projection
స్తూపీయ – Cylindrical
స్తూపీయ నిరూపకములు – Cylindrical co-ordinates
స్థలమూల్య భావము – Place value
స్థలశాస్త్రము – Topology
స్థల సదిశరాశి – Position vector
స్థానమూల్యము – Place value
స్థానశక్తి – Potential energy
స్థానాంతరము – Translation
స్థావర – Stationary
స్థితిశాస్త్రము – Statics
స్థిరతోలనస్థితి – Stable equilibrium
స్థిరరాశి – Constant
స్థిరాంకము – Constant
స్థిర సమతాస్థితి – Stable equilibrium
స్పర్శజీవ – Tangent
స్పర్శ జ్యా – Tangent, Chord of contact
స్పర్శతలము – Tangent plane
స్పర్శద్వయము – Double contact
స్పర్శ బిందువు – Point of contact
స్పర్శ రేఖ – Tangent
స్పర్శీయ – Tangential
స్పర్శీయ నిరూపకములు – Tangential co-ordinates
స్పర్శీయ సమీకరణము – Tangential equation
స్రోతస్సులు – Tides
స్రోతోఘర్షణ – Tidal friction
స్రోతో తరంగములు – Tidal waves
స్వతంత్ర చలరాశి – Independent variable
స్వదేశకాలము – ప్రమాణకాలము – Local time - Standard time
స్వపరాగసిక్త – Self fertilized
స్వయం సంబంధము – Auto-correlation
స్వరాత్మక – Harmonic
స్వరాత్మకచ్ఛేదము – Harmonic sectlon
స్వరాత్మక ఫలములు – Harmonic functions
స్వరాత్మక మధ్యమము – Harmonic mean
స్వరాత్మక రాజి – Harmonic range
స్వరాత్మక వరుస – Harmonic sequence
స్వరాత్మక శలాక – Harmonic pencil
స్వసంయుగ్మ – Self conjugate
స్వాతి – Arcturus, bootes - α
స్వీకృతతత్త్వములు – Postulates
స్వేచ్ఛాతరము – Degree of freedom

హ

హంస – Cygnus 61
హరాత్మకగతి – Harmonic motion

హరాత్మక త్రిభుజము - Harmonic triangle
హరాత్మక మధ్యమము - Harmonic mean
హరాత్మకముగ - Harmonically
హరాత్మకయుగళము - Harmonic conjugate
హరాత్మక శలాక - Harmonic pencil
హరాత్మక శ్రేఢి - Harmonic progression
హానిభయము - Risk
హారము - Denominator
హిల్బర్ట్ ఆకాశము - Hilbert space
హెచ్చుతగ్గులు - Inequalities
హెలిక్స్ - Helix
హేళిమాపకము - Heliometer
హోల్డర్ హెచ్చుతగ్గులు - Holder inequalities
హ్రస్వతమ రేఖ - Geodesic
హ్రస్వతమ వక్రము - Geodesic curve
హ్రస్వాక్షము - Short axis



GLOSSARY
పారిభాషిక పదజాలము

A

Abacus - అబేకస్
Abelean groups - ఏబెల్ కూర్పులు
Aberration - విపథనము
Aberration co-efficient - విపథన గుణకము
Aberration constant - విపథన స్థిరాంకము
Aberration of light - కాంతి విపథనము
Aberration of planet - గ్రహ విపథనము
Absolute - అమూర్త, ప్రకేవల
Absolute convergence - ప్రకేవల ఉపసరణత
Absolute curve - ప్రకేవల వక్రము
Absolute magnitude - పరమ తరము
Absolute potential - అమూర్త శక్మము
Absolute temperature - పరమ తాపక్రమము
Absolute time - ప్రకేవలకాలము
Absolute value - ప్రకేవల విలువ
Absorption - విచూషణ
Absorption bands - విచూషణ పట్టికలు
Abstract - నిరుపాధిక, శుద్ధ
Abstract algebra - శుద్ధ బీజగణితము
Abstract geometry - శుద్ధజ్యామితి
Abstract spaces - నిరుపాధిక ఆకాశములు
Acceleration - త్వరణము
Acoustics - ధ్వనిశాస్త్రము
Acute angle - అల్పకోణము, లఘుకోణము
Acute angled triangle - అల్పకోణ త్రిభుజము
Addition - సంకలనము, కూడిక
Aerials - ఆకాశకములు
Aerolite - ఉల్కాపిండము
Albedo - పరావర్తన శక్తి
Aldebaran - రోహిణి
Algebra - బీజగణితము
Algebraic functions - బీజీయఫలములు
Alternate angle - ఏకాంతరకోణము
Alternate exterior angle - బాహ్య ఏకాంతర కోణము
Alternate interior angle - అంతర ఏకాంతరకోణము
Altitude - ఉన్నతి, ఎత్తు
Analysis - విశ్లేషణ, విశ్లేషణగణితము
Analysis of variance - చలన విశ్లేషణము
Analytical functions - విశ్లేషణ ఫలములు
Analytical mechanics - విశ్లేషణ యాంత్రిక శాస్త్రము
Anchor ring - లంగరు వలయము
Andromeda - దేవయాని
Angle - కోణము
Angle of depression - నిమ్నకోణము
Angle of dip - నిమజ్జన కోణము
Angle of elevation - ఉన్నతకోణము, ఊర్ధ్వకోణము
Angle of incidence - పతనకోణము
Angle ot retraction - వక్రీభవనకోణము
Angle-solid - ఘనకోణము
Angular - కోణీయ
Angular momentum - కోణీయగతిభారము
Angular velocity - కోణీయ వేగము
Annual - వార్షిక
Annual equation - వార్షిక సమీకరణము
Annual parallax - వార్షిక అతివర్తనము
Annular eclipse - కంకణ గ్రహణము
Anomaly - మాంద్యత
Antares - జ్యేష్ఠ
Anticlock wise - అపసవ్య
Antiparallel - ప్రతిసమాంతర, ప్రతిసామ్య
Aphelion - అపహేళి
Apogee - అపజ్యా
Apparent - వ్యక్త
Apparent brightness - దృశ్యదీప్తి
Apparent direction - వ్యక్తదిశ
Apparent magnitude - కేవలపరిమాణము, వ్యక్త తరము
Apparent solar time - ప్రత్యక్ష సౌరకాలము
Apparent zenith distance - వ్యక్తనతదూరము, వ్యక్తనతాంశ
Applied mathematics - వినియుక్త గణితము
Approximate - ఆసన్న
Apsidal line - నీచోచ్చరేఖ

Aquarii - λ - శతభిషము

Aquarius - కుంభ

Aquila - α - శ్రవణము

Arc - చాపము, ధనుస్సు

Architectural acoustics - వాస్తుధ్వని విద్య

Arcturus - స్వాతి

Area - వైశాల్యము, విస్తీర్ణము

Areal co-ordinates - వైశాల్య నిరూపకములు

Areal velocity - వైశాల్యవేగము

Areas under the normal curves - సరళ వక్ర విస్తీర్ణములు

Aries - మేష

Arietis - β, α - అశ్విని

Arietis - 35, 41 భరణి

Arithmetic - అంకగణితము

Arithmetic mean - సంకలన మధ్యమము

Arithmetic progression - అంకశ్రేఢి; సంకలన శ్రేఢి

Ars conjectandi - ఊహనకళ

Artificial satellite - కృత్రిమ ఉపగ్రహము

Associative law - సంయోజక న్యాయము

Assumptions - ఉపకల్పనలు

Asteroids - లఘుగ్రహములు

Astrolabe - నాక్షత్ర యంత్రము

Astrology - జ్యోతిషము

Astronomical unit - ఖగోళ శాస్త్రీయ యూనిట్

Astronomy - ఖగోళ శాస్త్రము

Astro-dynamics - ఖగోళ గతిశాస్త్రము

Astro-physics - ఖగోళ భౌతికశాస్త్రము

Asymptotes - అసంపాతములు

Asymptotic line - అసంపాతీయ రేఖ

Asymptotic solution - అసంపతనీయ సాధనము

Atomic model - పరమాణు ప్రతిరూపము

Attraction - ఆకర్షణ

Auto-correlation - స్వయంసంబంధము

Autumnal equinox - తులావిషువు, తులాసంపాతము, శరద్విషువు

Axes of reference - నిరూపకాక్షములు

Axiom of choice - వరుణ స్వీకృత తత్త్వము

Axioms - ఆధార తత్త్వములు

Axis - అక్షము

Azimuth - అజిమత్, దిగంశ

B

Ballistics - అస్త్రప్రయోగశాస్త్రము

Base - ఆధారము, పీఠము

Bearings - ధురాధారములు

Bicontinuity - ద్విపార్శ్వ అవిచ్ఛిన్నత

Binaries - ద్వికతారలు, యుగళతారలు

Binomial - ద్విపద

Binomial co-efficient - ద్విపదగుణకము

Binomial expression - ద్విపద సమాసము

Binomial theorem - ద్విపద సిద్ధాంతము

Biology - జీవశాస్త్రము

Biometry - జీవనమాపనము

Birational transformations - క్రెమోనా మార్పులు

Bisector - ద్విభాజకము

Bi-uniformity - ద్విపార్శ్వ ఏకరూపత

Bomb ballistics - బాంబు అస్త్రప్రయోగ విద్య

Bootes - α - స్వాతి

Bounded - మర్యాదిత, సీమిత

Bounded oscillation - మర్యాదిత కంపనము

C

Calculating machine - గణిత్రయంత్రము

Calculus - కలనశాస్త్రము

Calculus of probabilities - సంభావ్యతాకలనము

Calculus of variation - చలకలనము

Calendar - పంచాంగము

Cancer - కర్క

Caneri - α - ఆశ్లేష

Caneri - 8 - పుష్యమి

Canopus - అగస్త్య

Capture hypothesis - గ్రాహసిద్ధాంతము

Cardioid - కార్డియాయిడ్

Cartesian co-ordinates - కార్టీసియన్ నిరూపకములు

Cartesian product - కార్టీసియన్ గుణకారసమితి

Casting out - నిష్కాసము

Castor - పునర్వసు

Catenary - కాటినెరీ

Celestial - దివ్య, ఖగోళ

Celestial equator - దివ్యనిరక్షరేఖ, విషువృత్తము

Celestial latitude - దివ్య అక్షాంశము, శరము

Celestial longitude - దివ్య రేఖాంశము, భోగము, ధ్రువకము

Celestial mechanics - ఖగోళ యాంత్రిక శాస్త్రము
Celestial objects - నభోమూర్తులు
Celestial sphere - ఖగోళము, దివ్యగోళము
Centaurus - త్రిశంకువు
Central conicoid - కేంద్రీయ ఘనశాంకము
Central projection - కేంద్ర విక్షేపము
Centre - కేంద్రము
Centre of curvature - వక్రతా కేంద్రము
Centre of gravity - గురుత్వ కేంద్రము, గరిమనాభి
Centre of involution - సమవాయతా కేంద్రము
Cepheid variables - సెఫీడ్ చలతారలు
Chance - యదృచ్ఛ
Change of axis - అక్షపరివర్తన
Change of co-ordinates - నిరూపక పరివర్తన
Chord - జ్యా
Chord line - జ్యారేఖ
Chromatic aberration - వర్ణవిపథనము
Chromosphere - వర్ణమండలము
Chronometer - క్రోనోమీటరు, ఘటికాయంత్రము
Circle - వృత్తము
Circle geometry - వృత్తీయ జ్యామితి
Circle of curvature - వక్రతా వృత్తము
Circular - వర్తుల, వృత్తీయ
Circular functions - వృత్తీయ ఫలములు
Circular lines - వర్తులరేఖలు
Circular ornamental patterns - వృత్తీయ అలంకారములు
Circular points - వృత్తీయ బిందువులు, వర్తుల బిందువులు
Circular points at infinity - అనంతములో ఉండు వర్తుల బిందువులు
Circum centre - పరికేంద్రము
Circum circle - పరివృత్తము
Circumference - పరిధి
Cissoid - సిస్సాయిడ్
Clock wise - సవ్యదిశ
Closed - సంవృత
Closed curve - సంవృత వక్రము
Closed interval - సంవృత అంతరము
Closed sets - సంవృత సమితులు
Cluster variables - చలనగుచ్ఛములు
Coal sack nebula - అంగార కోశనీహారిక
Co-axial circles - ఏకాక్ష వృత్తములు
Co-efficient - గుణకము
Co-efficient of friction - ఘర్షణ గుణకము
Co-factor - కోఫాక్టర్
Collinear Points - ఏకరేఖీయ బిందువులు
Colour index - వర్ణసూచకము
Column - స్తంభము
Coma - కోమా
Combinat.onal method - సంయోజన విధానము
Combinations - సంయోగములు
Comet - ధూమకేతువు, తోకచుక్క
Commodity reversal test - వస్తుపరివర్తన పరీక్ష
Commutative law - పరివర్తన న్యాయము, పరివర్తన నియమము
Commutative law - సంయోగ నియమము
Commutative ring - పరివర్తన మండలము
Companion star - అనుచర తార
Complementations - పూరకములు
Complementary angles - పూరక కోణములు
Complex - కాంప్లెక్స్, సంకీర్ణ
Complex line - సంకీర్ణ రేఖ
Complex numbers - సంకీర్ణ సంఖ్యలు
Complex variable - సంకీర్ణ చలరాశి
Components - అంశములు, ఘటకములు
Composite probability - మిశ్రిత సంభావ్యత
Computers - గణిత్రములు
Concept - భావము
Conchoid - కాంగ్కాయిడ్
Concurrent - అనుషక్తము
Conduction of heat - ఉష్ణవాహకత
Cone - శంకు
Cone of friction - ఘర్షణ శంకు
Cone speakers - శంకుభాషులు
Confocal conics - ఏకనాభికా శాంకవములు
Conformal mapping - సదృశ చిత్రపటలేఖనము
Congruent - సర్వసమాన
Conic - శాంకవము
Conical projection - శాంకవ విక్షేపము
Conic section - శాంకవచ్ఛేదము
Conical retraction - శాంకవ వక్రీభవనము

Conical surface - శంకుతలము

Conicoid - ఘనశాంకవము

Conjugate - సంయుగ్మ

Conjugate points - సంయుగ్మ బిందువులు

Conjunction - యుతి, యోగము

Constant - స్థిరాంకము, స్థిరరాశి

Constellations - తారామండలములు, రాశులు

Contingency co-efficient - అధీనతా గుణకము

Continued fractions - శృంఖలిత భిన్నములు

Continuity - అవిచ్ఛిన్నత

Contour integral - పరివృతిచయనము

Contravariants - విలోమ చలరాశులు

Convergency - ఉపసరణత

Convergent series - ఉపసరణ పరంపర

Co-ordinate axes - నిరూపకాక్షములు

Co-ordinate geometry - నిరూపక జ్యామితి

Co-ordinates - నిరూపకములు

Corona - ముకుటము

Correspondence - అనురూపత

Corresponding angles - అనురూప కోణములు

Co-secant - కోటిఛేదకము

Cosine - కోటిజీవ, కో.జీవ

Cosine circle - కోటిజీవ వృత్తము

Cosine series - కో. జీవ పరంపర

Cosmic dust - విశ్వధూళి

Cosmic matter - విశ్వద్రవ్యము

Cosmos - విశ్వము

Co-tangent - కోటి స్పర్శజీవ

Couple - యుగ్మము

Cross fertilized - పరపరాగసిక్త

Cross multiplication - క్రాస్ గుణకారము

Cross ratio - వజ్ర నిష్పత్తి

Cryptarithmetic - గుప్తాంకగణితము

Cube - ఘనము

Cube root - ఘనమూలము

Cuneiform script - బాణాగ్రలిపి

Curvature - వక్రత

Curved space - వక్రఆకాశము

Curves - వక్రములు

Curvilinear co-ordinates - వక్రరేఖీయ నిరూపకములు

Cusp - సూచీముఖము

Cyclic - చక్రీయ

Cyclical component - చక్రభాగము

Cyclic quadrilateral - చక్రీయచతుర్భుజము, వృత్తీయ చతుర్భుజము

Cycloid - సైక్లాయిడ్

Cygnus 61 - హంస

Cylinder - స్తూపము

Cylindrical co-ordinates - స్తూపీయ నిరూపకములు

Cylindrical projection - స్తూప విక్షేపము

Cylindrical surface - స్తూప తలము

D

Dark line spectrum - కృష్ణరేఖా వర్ణమాల

Dark nebulae - కృష్ణనీహారికలు

Data - దత్తాంశములు

Date line - తారీఖు రేఖ

Decimal fraction - దశాంశభిన్నము

Decimal notation - దశాంశసంకేతనము

Decimal point - దశాంశ బిందువు

Decimals - దశాంశములు

Declination - క్రాంతి

Declination circle - ద్యుజ్యా వృత్తము

Deductive system - తార్కిక కల్పన

Definition - నిర్వచనము

Degree - తరగతి, డిగ్రీ

Degree of freedom - స్వేచ్ఛాతాతరము

Delphini - α, β - ధనిష్ఠ

Delta orions - మృగశిర

Demand - అర్థన

Demand analysis - అర్థన విశ్లేషణ

Denebola - ఉత్తరఫల్గుని

Denominator - హారము

Density - సాంద్రత

Dependent variable - పరతంత్రచలరాశి

Derivative - వ్యుత్పన్నము

Design of experiment - ప్రయోగ రచన

Determinants - నిర్ధారకములు

Deviation - విచలనము

Diagonal - వికర్ణము

Diameter - వ్యాసము

Difference equation - అంతర సమీకరణము

Differential calculus - అంతరీకరణ కలనము

Differential co-efficient - అంతరీకరణ గుణకము
Differential equation - అంతరీకరణ సమీకరణము
Differential geometry - అంతరీకరణ జ్యామితి
Differential ratio - అంతరీకరణ నిష్పత్తి
Differentiation - అంతరీకరణము
Digits - అంకెలు
Dimension - వ్యాప్తిపరిమాణము, విమా
Dimensional analysis - విమా విశ్లేషణ
Diophantine equations - డయోఫాంటస్ సమీకరణములు
Dip - నతి, నిమజ్జన
Direction cosines - నిర్దిష్ట కోటిజీవలు
Direct motion - ఋజుగతి
Direct proportion - అనులోమ అనుపాతము
Displacement - స్థానాంతరత
Displacement of the first point of Aries - అయనాంశ
Distance of a planet from the centre of earth - శీఘ్రకర్ణము
Diurnal - దైనిక
Diurnal rotation - దైనిక పరిభ్రమణము
Diurnal rotation of earth - భూదైనిక పరిభ్రమణము
Divergence - అపసరణత
Divergent series - అపసరణ పరంపర
Dividend - భాజ్యము, విభాజ్యము
Division - భాగహారము
Divisor - భాజకము
Dot multiplication - బిందు గుణకారము
Duality - ద్వైతస్వభావము
Dwarfs - వామనములు
Dynamics - గతిశాస్త్రము
Dynamics of a particle - కణగతిశాస్త్రము

E

Earth - భూమి
Eccentric circle - ఉత్కేంద్ర వృత్తము
Eccentricity - ఉత్కేంద్రత
Eccentric orbit - ఉత్కేంద్ర కక్ష్య
Eclipse - గ్రహణము
Eclipsing stars - గ్రహణతారలు
Eclipsing variables - ఆచ్ఛాదిత చలతారలు
Ecliptic - క్రాంతివృత్తము
Econometrics - అర్థమితిశాస్త్రము
Economics - అర్థశాస్త్రము
Eigen functions - యుక్తఫలములు
Eigen function expansion - యుక్తఫలముల వ్యాకోచనము
Electric charge - విద్యుదావేశము
Electric potential - విద్యుచ్ఛక్మము
Electro-dynamics - విద్యుద్గతిశాస్త్రము
Electro-magnetic theory - విద్యుదయస్కాంత సిద్ధాంతము
Electronic computers - ఎలక్ట్రానిక్ గణిత్రములు
Ellipse - దీర్ఘవృత్తము, విలోపము
Ellipsoid - ఎలిప్సాయిడ్
Elliptic functions - విలోప ఫలములు, దీర్ఘవృత్త ఫలములు
Elliptic geometry - విలోప జ్యామితి, దీర్ఘవృత్త జ్యామితి
Elliptic orbit - విలోప కక్ష్య, దీర్ఘవృత్త కక్ష్య
Empirical - అనుభవగర్భిత
Energy - శక్తి
Envelope - వేష్టనము
Epicycle - ప్రాక్చక్రము
Ephemeris meridian - పంచాంగరేఖ
Ephemeris time - పంచాంగ కాలము
Equation - సమీకరణము
Equation of centre - మందఫలము
Equation of time - కాల సమీకరణము
Equator - నిరక్షరేఖ
Equiangular spiral - సమానకోణ సర్పిలము
Equinoctial - విషుదర్శని
Equinoctial point - విషుబిందువు
Equinox - విషువు, అయనము
Era - శకము
Error - ప్రమాదము
Estimate - అంచనా
Euclidean space - యూక్లిడ్ ఆకాశము
Euclid's "Elements" - యూక్లిడ్ ఎలిమెంట్స్
Evening star - సందె చుక్క
Even number - సరి సంఖ్య
Event - సంఘటన
Evolute - అంతర్లుఠి

Evolution - పరిణామము
Exact equations - సమగ్ర అంతరీకరణ సమీకరణములు
Exactly similar representation - వాస్తవిక ప్రతిరూపము
Ex-centre - బాహ్యకేంద్రము
Expanding universe - వ్యాకోచద్విశ్వము
Expansion of determinants - నిర్ధారక వ్యాకోచము
Expectation of life - జీవిత ప్రత్యాశ
Experiment - ప్రయోగము
Exponent - ఘాతాంకము
Exponential functions - ఘాత ఫలములు
Exponential series - ఘాతాంకీయ పరంపర, ఘాత పరంపర
Expression - సమాసము
Exterior angle - బాహ్యకోణము

F

Factor - కారణాంకము, విభాజకము
Factor analysis - కారణాంక విశ్లేషణ
Factorization - విభాజకీకరణము
Factor reversal test - కారణాంశ పరివర్తన పరీక్ష
False coin - కూటనాణెము
Fermat numbers - ఫర్మా సంఖ్యలు
Field of force - బలక్షేత్రము
Field potential - క్షేత్రశక్మము
Finite geometry - పరిమిత జ్యామితి
Fire balls - అగ్నిగోళములు
First point of Aries - మేషాది బిందువు
First point of Libra - తులాది బిందువు
First quadratic differential form - ప్రథమవర్గ అంతరీకరణ రూపము
Flat - చిపిట
Flat spaces - చిపిట ఆకాశములు
Fluid - ద్రవము
Fluid mechanics - ద్రవయాంత్రిక శాస్త్రము
Flux-density - ప్రవాహ సాంద్రత
Focal length - నాభ్యంతరము
Foci of conics - శాంకవనాభులు
Focus - నాభి
Force - బలము
Force of mortality - మృతిబలము
Forecast - పూర్వనిర్దేశము
Form co-efficient - ఆకృతిగుణకము
Form function - ఆకృతిఫలము
Formula - సూత్రము
Four dimensional - చతుఃపరిమాణిక
Fourier series - ఫోరియర్ పరంపర
Fraction - భిన్నము
Fragmentation ballistics - శకలాస్త్రప్రయోగము
Frequency - పౌనఃపున్యము
Frequency division - పౌనఃపున్య విభజనము
Friction - ఘర్షణ
Frustum of a pyramid - కత్తిరించిన గోపురము
Fuel - ఇంధనము
Function - ఫలము
Functional determinant - ఫల నిర్ధారకము
Function theory - ఫలవాదము
Fundamental trihedron - మూల త్రితలము

G

Galactic collision - క్షీరపథ సంఘర్షణ
Galaxy - గాలక్సీ, మందాకిని, క్షీరపథము
Gamma functions - గామాఫలములు
Gauss curvature - గాస్ వక్రత
Gaussian law of errors - గాస్ ప్రమాదనియమము
Gemini - మిథునము
Geminorium β - పునర్వసు
Geminorum - నక్షత్రద్వికము
General - వ్యాపక
General solution - వ్యాపక సాధనము
Generalized co-ordinates - విశాలీకృత నిరూపకములు
Generating line - జనక రేఖ
Genus - జాతి
Geodesic - హ్రస్వతమ రేఖ
Geodesic curve - హ్రస్వతమవక్రము
Geometrical mean - గుణోత్తర మధ్యమము
Geometrical progression - గుణోత్తర శ్రేఢి
Geometry - క్షేత్రగణితము, జ్యామితి
Geometry of three dimensions - విమాత్రయ జ్యామితి
Giants - బృహత్తులు
Gibbous - న్యుబ్జ
Gnomon - శంకు
Gravitation - గురుత్వాకర్షణము

Gravitational co-efficient - గురుత్వాకర్షణగుణకము
Gravitational constant - గురుత్వస్థిరాంకము
Gravitational field - గురుత్వాకర్షణ క్షేత్రము
Great circle - గురువృత్తము, మహావృత్తము
Greatest common measure (G. C. M) - అపవర్తనాంకము, గరిష్ఠ సామాన్యభాజకము (గ. సా. భా.)
Groups - కూర్పులు, పుంజములు
Growth models - వృద్ధి ప్రతికృతులు
Gyro-compass - గైరో కంపస్
Gyroscope - గైరోస్కోప్, భ్రమణదర్శకము

H

Harmonic - స్వరాత్మక, హరాత్మక
Harmonic conjugate - హరాత్మక యుగళము
Harmonically - హరాత్మకముగ
Harmonic functions - స్వరాత్మక ఫలములు
Harmonic mean - స్వరాత్మక మధ్యమము, హరాత్మక మధ్యమము
Harmonic motion - హరాత్మక గతి
Harmonic pencil - హరాత్మక శలాక, స్వరాత్మక శలాక
Harmonic progression - హరాత్మక శ్రేఢి
Harmonic range - స్వరాత్మకరాజి
Harmonic section - స్వరాత్మక ఛేదము
Harmonic triangle - హరాత్మక త్రిభుజము
Heat index - తాప సూచకము
Heliometer - హేళిమాపకము
Helix - హెలిక్స్
Highly composite numbers - అతివిభాజ్య సంఖ్యలు
Hilbert space - హిల్బర్ట్ ఆకాశము
Holder inequalities - హోల్డర్ హెచ్చుతగ్గులు
Homogeneous - సమఘాత
Homogeneous co-ordinates - సమఘాత నిరూపకములు
Homogeneous equations - సమఘాత సమీకరణములు
Horizontal - క్షితిజ
Horizontal plane - అంబు తలము
Horocycle - హోరోవృత్తము
Horse head nebula - అశ్వశిర నీహారిక
Hour angle - నత కాలము
Hour circle - హోరావృత్తము
Hydra - ఆశ్లేష
Hydrodynamics - ద్రవగతి శాస్త్రము
Hydrostatics - ద్రవస్థితి శాస్త్రము
Hyperbola - అతిపరాస
Hyperbolic functions - అతిపరాస ఫలములు
Hyperbolic orbit - అతిపరాసీయ కక్ష్య
Hyperboloid - ఘన అతిపరాస
Hypotenuse - కర్ణము
Hypothesis - కల్పన

I

Identities - సర్వసమతత్త్వములు
Identity - సర్వసమత
Igniter - ప్రజ్వలకము
Implicit differentiation - అవ్యక్తఫల అంతరీకరణము
Implicit functions - అవ్యక్తఫలములు
Improper fraction - అపక్రమభిన్నము, అయుక్త భిన్నము
In-centre - అంతర కేంద్రము, అంతః కేంద్రము
Incidence - ఆపాతము
Incircle - అంతర్వృత్తము
Inclination - నిమ్నత
Indefinite integration - అనిశ్చిత చయనీకరణము
Independent variable - స్వతంత్ర చలరాశి
Indeterminate equations of first degree - అనిశ్చిత ప్రథమతరగతి సమీకరణములు
Indeterminate equations of first degree in many unknowns - బహుపద అనిశ్చిత ప్రథమ తరగతి సమీకరణములు
Indeterminate equations of second degree - రెండవ తరగతి అనిశ్చితసమీకరణములు
Index - సూచిక
Index number - సూచకసంఖ్య, సూచ్యంకము
Index number theory - సూచీసంఖ్యా సిద్ధాంతము
Inequalities - హెచ్చుతగ్గులు
Inertia - జడత్వము
Inertia of large numbers - పెద్ద సంఖ్యల జడత్వము
Inferior conjunction - అధమయోగము
Infinite geometric progression - అనంత గుణోత్తర శ్రేఢి
Infinite limit - అనంత అవధి
Infinite product - గుణకారపరంపర
Infinite regression - అనంతపరంపరదోషము

Infiinite series - అనంతపరంపర
Infinitesimal - సూక్ష్మరాశి
Infra red - పరశ్శోణ
Inner angle - అంతర కోణము
Inner planets - అంతర్గ్రహములు
Inscribed circle - అంతర్లిఖితవృత్తము
Insurance - భీమా
Integers - పూర్ణాంకములు
Integral calculus - చయన కలనము
Integral equations - చయన సమీకరణములు
Integral test - చయనీయ పరీక్ష
Integration - చయనీకరణము
Intelligent quotient - బౌద్ధికగుణ్యము
Inter continental ballistic missiles - అంతరఖండ విక్షేపాస్త్రములు
Internal ballistics - అంతర అస్త్రప్రయోగము
Interpolation - పదనిశ్చయము
Inter stellar dust - అంతర్నక్షత్రధూళి
Inter stellar gas - అంతర్నక్షత్ర వాయువు
Intuition - సహజ జ్ఞానము
Invariance - అచలత, నిర్వికృతి
Invariant - అచలరాశి
Inverse - విలోమ
Inverse functions - విలోమ ఫలములు
Inverse proportion - విలోమ అనుపాతము
Involute - బహిర్లుఠి
Involution - సమన్వయత, సమవాయత
Involution pencil - సమన్వయ శలాక, సమవాయతా శలాక
Ionization - అయనీకరణము
Ionosphere - అయనావరణము
Irrational - కరణీయ
Irrational numbers - కరణీయ సంఖ్యలు
Isogonal conjugate lines - సమానకోణ సంయుగ్మ రేఖలు
Isogonal conjugates - తుల్యకోణ సంయుగ్మములు
Isomorphic - ఏకరూప
Isosceles triangle - సమద్విభుజ త్రిభుజము

J

Jiba - జీబ
Jupiter - గురుడు

K

Kinematics - శుద్ధగతిశాస్త్రము
Kinematics of a particle - కణశుద్ధగతిశాస్త్రము
Kinetic energy - చలనశక్తి
Kinetic theory - అణుచలన సిద్ధాంతము

L

Lamina - ఫలకము
Laplace's equation - లాప్లాస్ సమీకరణము
Latin square - లాటిన్ చతురస్రము
Latitude - అక్షాంశము, శరము
Lattice points - జాలబిందువులు
Latus rectum - ఉత్థానము
Law of inverse squares - విలోమవర్గన్యాయము
Leo α - సింహా
Leonis α - మఘ
Leonis α 70, 71 - పుబ్బ
Leonis β - ఉత్తర
Lens - కటకము
Lever - ఉచ్చాలకము
Libra - తుల
Libration - తోలనము
Life insurance - జీవిత భీమా
Light - కాంతి, జ్యోతి
Light year - కాంతివత్సరము, జ్యోతిర్వత్సరము
Limacon - లిమేసాన్
Limit - అవధి
Limiting point - అవధి బిందువు
Limit of a sum - సంకలన అవధి
Line - రేఖ
Line co-ordinates - రేఖా నిరూపకములు
Linear - రేఖీయ
Linear differential equations - మొదటి తరగతి అంతరీకరణ సమీకరణములు
Linear equation - ఏకవర్ణ సమీకరణము
Linear sets of points - రేఖీయ బిందు సమితి
Line at infinity - అనంతదూర రేఖ
Line geometry - ఋజురేఖా జ్యామితి
Lines of curvature - వక్రతా రేఖలు
Linkage - శృంఖలాసంధానము
Liquid tuels - ద్రవేంధనములు
Loaded dice - కూట పాచికలు

Local time - స్వదేశ కాలము
Locus - బిందుపథము
Logarithmic functions - లాగరిదమ్ ఫలములు
Logarithmic series - లాగరిదమ్ పరంపర
Logarithm - లాగరిదమ్
Longitude - రేఖాంశ రేఖ
Loop - పాశి
Loud speakers - ఉచ్చభాషులు
Lunar eclipse - చంద్రగ్రహణము
Lunar phases - చంద్రకళలు
Lower transit - అధమప్రతరణము
Lower limit - అధమ అవధి
Lowest common multiple (L. C. M.) - కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క. సా. గు.)

M

Magellanic cloud - నీహారికా మేఘము
Magic squares - కూట చతురస్రములు
Magnetic field - అయస్కాంత క్షేత్రము
Magnetic perturbations - అయస్కాంత క్షోభములు
Magnetic poles - అయస్కాంత ధ్రువములు
Magnifying power - అధికీకరణ సామర్థ్యము
Magnitude - పరిమాణము, తరము
Major arc - గురు చాపము
Mars - అంగారకుడు, కుజుడు
Mathematical anecdotes - గణిత కథలు
Mathematical economics - గణిత అర్థశాస్త్రము
Mathematical fallacies - విపరీత గణితము
Mathematical induction - గణిత అనుగమనము
Mathematieal logic - గణిత తర్కము
Mathematical physics - గణిత భౌతికశాస్త్రము
Mathematical prodigies - అద్భుత గణకులు
Mathematical puzzles and recreations - గణిత చిక్కుప్రశ్నలు, వినోదములు
Mathematical tables - గణిత పథకములు
Mathematics - గణితము
Matrix - మాత్రిక
Matrix theory - పంజరవాదము
Matter - ద్రవ్యరాశి
Maximum - గరిష్ఠ
Maximum power - గరిష్ఠ ఘాతము
Mean solar time - మధ్యమాన సౌరకాలము
Mean value - మధ్యమాన విలువ
Mean value theorem - మధ్యమమూల్యసిద్ధాంతము
Mechanics - యాంత్రికశాస్త్రము
Median - మధ్యగత
Mercury - బుధుడు
Meridian - మధ్యాహ్న రేఖ, యామ్యోత్తర రేఖ
Meridian circle - యామ్యోత్తర వృత్తము
Meteor - ఉల్క
Meteor crater - ఉల్కాబిలము
Meteorite - ఉల్కాపిండము
Meteor shower ఉల్కాపాతము
Meteor swaram - ఉల్కాకూటము
Method of least squares - కనిష్ఠవర్గవిధానము
Metric space - పరిమేయాకాశము
Micrometer - సూక్ష్మమాపకము
Microscope - సూక్ష్మదర్శని
Milkyway - ఆకాశగంగ, క్షీరపథము, పాలపుంత, మందాకిని
Minimum - కనిష్ఠ
Minor arc - లఘు చాపము
Models - ప్రతికృతులు
Modern geometry - నవీన జ్యామితి
Modulus - మాపాంకము (మా)
Moment of force - బల బిభ్రమిష
Moment of inertia - జడ బిభ్రమిష
Moment of momentum - గతిభార బిభ్రమిష
Momentum - గతిభారము
Moon - చంద్రుడు
Morning star - వేగుచుక్క
Mortality tables - ఆయుర్దాయ పట్టికలు
Multinomial theorem - బహుపద సిద్ధాంతము
Motion - గమనము, గతి, చలనము
Multiples - గుణిజములు
Multiple stars బహుళతారలు
Multiplication - గుణకారము
Multiplication tables - గుణకార పట్టికలు
Multivariable - బహురాశి
Musa - భరణీ

N

Nadir - పాతాళబిందువు
Nebulae నీహారికలు, నెబ్యులాలు

Nebular hypothesis - నీహారికావాదము

Negative - ఋణ

Negative roots - ఋణ మూలములు

Neptune - వరుణుడు

Nine point circle - నవబిందు వృత్తము

Nodal point - యుగళ బిందువు

Node - పాతము

Nomogram - నోమోగ్రామ్

Non-algebriac - అబీజీయ

Non-algebriac numbers - అబీజీయ సంఖ్యలు

Non-differentiable - వ్యుత్పన్నరహిత

Non-enumerably infinite - అగణ్య అనంత

Non-Euclidean geometry - యూక్లిడేతర జ్యామితి

Normal - అభిలంబరేఖ

Normal curve - సరళవక్రము

Normal plane - లంబతలము

Normal population - సరళ లోకము

Normal section - అభిలంబఛేదనము

North polar distance - ఉత్తర ధ్రువాంతరము

North frigid zone - ఉత్తర శీతమండలము

North pole - ఉత్తర ధ్రువము

North temperate zone - ఉత్తర సమశీతోష్ణమండలము

Novae - నవీనములు, నవతారలు, నోవాలు

Number - సంఖ్య

Numerator - లవము

Nutation - అక్షవిచలనము, అక్షస్పందనము

O

Object glass - వస్తుకటకము

Oblique - తిర్యక్

Oblique axes - తిర్యక్ అక్షములు

Oblique cylinder - తిర్యక్ స్తూపము

Oblique prism - తిర్యక్ ప్రిజమ్

Obliquity of the ecliptic - పరమాపక్రాంతి

Observation అవలోకన, అవేక్షణ

Observational - అవలోకనాత్మక

Observatory - వేధశాల

Obtuse angle - గురుకోణము

Octahedron - అష్టతలకము

Odd - బేసి

Odd numbers - బేసి సంఖ్యలు

Official statistics - ఆధికారిక సాంఖ్యకీయ ప్రచురణ

One-to-one correspondence - ఒకటికొకటి అనురూపత

Open interval - వివృత అంతరము

Operation - పరికర్మము

Opposition - షడ్భాంతరము

Optical doubles - దృశ్యయుగళములు

Optics - చాక్షుషశాస్త్రము

Orbit - కక్ష్య, కక్ష

Ordinate కోటి

Origin of the solar system - సౌరకుటుంబ ఉత్పత్తి

Orionis - α - ఆర్ద్ర

Orionis - λ - మృగశిర

Ortho-centre - లంబకేంద్రము

Orthogonal - సమకోణీయ, లంబకోణీయ

Orthogonal involution - సమకోణీయ సమన్వయత

Orthogonal pencil - సమకోటీయశలాక

Orthogonal projection - సమకోణీయ విక్షేపము

Osculating plane - పరిస్పర్శతలము

Osculating sphere - పరిస్పర్శగోళము

Outer planets - బాహ్యగ్రహములు

P

Parabola - పరాస

Paraboloid - పెరాబోలాయిడ్, ఘనపరాస

Parallax - అతివర్తనము, లంబనము

Parallax method - లంబన విధానము

Parrallel - సమానాంతర, సామ్య

Parallel postulate - సమానాంతర స్వీకృతతత్త్వము

Parallel projection - సమానాంతర విక్షేపము

Parallelogram - సమానాంతర చతుర్భుజము

Parallelogram law of forces - సమానాంతర చతుర్భుజ నియమము, సమానాంతర చతుర్భుజ సంయోజన సూత్రము

Parallelepiped - సమానాంతర ఘనము

Parameter - పెరామీటరు, ప్రాచలము

Parameter group ప్రాచల కూర్పు (పుంజము)

Parsec - పరశకము

Partial - ఆంశిక, ఖండ

Partial derivative - ఆంశిక వ్యుత్పన్నము

Partial differential equation - ఆంశిక అంతరీకరణ సమీకరణము

Partial eclipse - ఖండ గ్రహణము

Partial integration - ఆంశిక చయనీకరణము, ఖండ చయనీకరణము
Particle - కణము
Pascal triangle - పాస్కల్ త్రిభుజము
Pedal curve - పాద వక్రము
Pedal line - పాదరేఖ
Pegasi - α - పూర్వాభాద్ర
Pegasi - γ - ఉత్తరాభాద్ర
Pellian equations - పెల్లియన్ సమీకరణములు
Pencil - శలాక
Pencil of rays - రశ్మి శలాకము
Pendulum - లోలకము
Penultimate convergent - ఉపాంత ఉపసరణ
Perihelion - పరిహేళి
Perigee - పరిజ్యా
Period - ఆవృత్తి
Period-luminosity curve - ఆవర్తన దీప్తివక్రము
Periodic co-efficient - ఆవర్తన గుణకము
Periodic comet - ఆవర్తన ధూమకేతువు
Periodic functions - ఆవర్తన ఫలములు
Periodic time - ఆవర్తన కాలము
Permutations - ప్రస్తారములు
Permutation groups - క్రమచయ కూర్పులు, ప్రస్తారపు కూర్పులు
Perpetual day - నిరంతర దినము
Perpetual night - నిరంతర రాత్రి
Perspective drawing - యథాదర్శన జ్యామితి
Perturbation - పరిక్షోభము
Phases - కళలు
Phenomena - దృశ్య సంఘటన
Philosophy of organism - అవయవి దర్శనము
Photo-electric cells - కాంతి విద్యుత్ ఘటకములు
Photo-graphic magnitudes - ఛాయాచిత్ర మహత్వములు
Photo sphere - కాంతిమండలము
Physical doubles - భౌతిక యుగళములు
Physics - భౌతికశాస్త్రము
Pisces - మీన
Piscium - రేవతి
Place value - సాన మూల్యము
Plane - తలము
Plane geometry - సమతల జ్యామితి
Plane ornamental groups - తలములోని అలంకార కూర్పులు
Plane trigonometry - సమతల త్రికోణమితి
Planet - గ్రహము
Planetary orbit - గ్రహ కక్ష్య
Planning - యోజన
Pleides - కృత్తిక
Pluto - ప్లూటో, యముడు
Point - బిందువు
Point co-ordinates - బిందు నిరూపకములు
Point line configurations - బిందురేఖా విన్యాసములు
Point of contact - స్పర్శబిందువు
Point of incidence - ఆపాత బిందువు
Point of intersection - సంపాతబిందువు, ఛేదకబిందువు, ఖండన బిందువు
Polar axis - ధ్రువాక్షము
Polar caps - ధ్రువముకుటములు
Polar co-ordinates - ధ్రువీయ నిరూపకములు
Polar reciprocal - ధ్రువీయ వ్యుత్క్రమము
Polar surface - ధ్రువతలము
Pole - ధ్రువము
Pole of ecliptic - కదంబము, ధ్రువకదంబము
Pole star - ధ్రువనక్షత్రము
Pollux - పునర్వసు
Polygon - బహుభుజి
Polyhedron - బహుతలకము
Polynomials - బహుపదములు
Population - లోకము
Position vector - స్థల సదిశరాశి
Positive - ధన
Positive electric charges - ధన విద్యుదావేశములు
Positive integers - ధనపూర్ణాంకములు, ధనపూర్ణ సంఖ్యలు
Positive fractions - ధనభిన్నములు, ధనభిన్నాంకములు
Positive roots - ధన మూలములు
Postulates - స్వీకృతతత్త్వములు
Potential - శక్మ (ము)
Potential energy - శక్మశక్తి, స్థానశక్తి
Potential flow - శక్మప్రవాహము
Potential theory - శక్మవాదము

Power - ఘాతము

Precession of the equinoxes - విషుచలనము

Pressure - ప్రేషము

Prime number - ప్రధాన సంఖ్య

Principal normal - ప్రధాన అభిలంబరేఖ

Principle of least action - కనిష్ఠ క్రియాసూత్రము

Prism - ప్రిజమ్

Probability - సంభవనీయత, సంభావ్యత

Probability density - సంభావ్యతా సాంద్రత

Probability distribution - సంభావ్యతా విభజనము

Probability theory - సంభవనీయతావాదము, సంభావ్యతా వాదము

Probit analysis - ప్రోబిట్ విశ్లేషణ

Product - గుణకారలబ్ధము

Progressions - శ్రేఢులు

Projection - విక్షేపము

Projective configurations - విక్షేప విన్యాసములు

Projective co-ordinates - విక్షేప నిరూపకములు

Projective geometry - విక్షేపక జ్యామితి

Projective transformations - విక్షేపక మార్పులు

Prominences - జ్వాలలు

Proof - ఉపపత్తి

Propeller - నోదకము

Proper fraction - క్రమ భిన్నము, యుక్త భిన్నము

Proportion - అనుపాతము

Proposition - ప్రమేయము

Pure mathematics - శుద్ధ గణితము

Pyramid - పిరమిడ్

Pyramidal numbers - గోపురపు సంఖ్యలు

Q

Quadrangle - చతుష్కోణము

Quadrant - పాదము, చతుర్థము

Quadratic equations - రెండవతరగతి సమీకరణములు, వర్గ సమీకరణములు

Quadrilateral - చతుర్భుజము

Qualitative - గుణాత్మక

Quantitative - పరిమాణాత్మక

Quantum theory - క్వాంటం సిద్ధాంతము

Quaternions - చతుష్కములు, చతుష్కసంఖ్యలు

Quotations from mathematicians - గణితవేత్తల దివ్యవచనములు

Quotient - భాగఫలము

R

Radian - రేడియన్

Radiant - వికిరణబిందువు

Radiation - వికిరణము

Radical axis - మూలాక్షము

Radioactive elements - రశ్మ్యుద్గారకమూలద్రవ్యములు

Radio astronomy - రేడియో ఖగోళశాస్త్రము

Radio star - రేడియోతార

Radius - వ్యాసార్థము

Radius of curvature - వక్రతా వ్యాసార్థము

Radius of torsion - విమోటన వ్యాసార్థము

Radius vector - రేడియస్ వెక్టార్, శ్రుతి

Radio-metric - వికిరణమాపక

Radix - రేడిక్స్, మూలాంకము, మూలసంఖ్య

Random - యాదృచ్ఛిక

Randomization - యాదృచ్ఛికీకరణము

Randomized blocks - యాదృచ్ఛికీకృత ఖండములు

Random numbers - యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలు

Random residue - యాదృచ్ఛికావశేషము

Random samples - యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపములు

Random sampling numbers - యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప సంఖ్యలు

Random variable - యాదృచ్ఛిక చలరాశి

Ratio - నిష్పత్తి

Rational - అకరణీయ

Rational numbers - అకరణీయ సంఖ్యలు

Reaction - ప్రతిక్రియ

Real numbers - వాస్తవ సంఖ్యలు

Reciprocal - వ్యుత్క్రమము

Reciprocal numbers - వ్యుత్క్రమ సంఖ్యలు

Reciprocation - పరస్పరత

Rectangle - దీర్ఘచతురస్రము

Rectangular - లంబాక్ష, ఆయతాక్ష

Rectangular co-ordinates - లంబాక్ష నిరూపకములు

Rectangular hyperbola - ఆయత అతిపరాన, లంబ అతిపరాన

Reductio ad absurdum - అనిష్టాపత్తి

Reflecting telescope - పరావర్తన దూరదర్శిని

Reflection - పరావర్తనము, ప్రతిబింబము

Reflex angle - పరావృత కోణము

Refracting telescope - వక్రీభవన దూరదర్శిని
Refraction - వక్రీభవనము, భుగ్నత
Regular hexagon - క్రమ షడ్భుజి
Regular polygon - క్రమ బహుభుజి
Regular polyhedron - క్రమ బహుతలకము
Regulus - రెగ్యులస్
Regulus - మఘ
Relative - సాపేక్ష
Relative acceleration - సాపేక్ష త్వరణము
Relative frequency - సాపేక్ష పౌనఃపున్యము
Relative velocity - సాపేక్ష వేగము
Relativity theory - సాపేక్షతావాదము
Replication - పునరావృత్తి
Repulsion - అపకర్షణ
Residue - అవశేషము
Retrograde motion - వక్రగతి
Reversing layer - ప్రత్యావర్తన స్తరము
Revolution - భ్రమణము, భగణము
Rhombus - రాంబస్
Right angle - లంబకోణము, సమకోణము
Right ascension - విషువాంశ
Right circular cylinder - లంబవృత్త స్తూపము
Right prism - లంబ ప్రిజమ్
Rigid body - దృఢవస్తువు
Rigid dynamics - దృఢవస్తు గతిశాస్త్రము
Rigour - నిష్ఠురత
Ring - కంకణము, మండలము
Risks - హానిభయములు
Roots - మూలములు
Rotation - పరిభ్రమణము
Row - వరుస
Rule - సూత్రము, నియమము
Rule ot three - త్రైరాశికము

S

Sagittari - δ - పూర్వాషాఢ
Sagittari - γ, ϕ - ఉత్తరాషాఢ
Sagittarius - ధనుస్సు
Samples - ప్రతిరూపములు
Saros - గ్రహణయుగము
Satellite - ఉపగ్రహము
Saturn - శని
Saturn's rings - శని కంకణములు
Scalar - స్కేలార్, అదిశరాశి
Scalar field - అదిశరాశి క్షేత్రము
Scales of notation - సంకేతికమానములు, సంఖ్యా మాపములు
Science of perspective drawing - యథాదర్శన శాస్త్రము
Scorpio - వృశ్చిక
Scorpionis γ - అనూరాధ
Scorpionis α - జ్యేష్ఠ
Scorpionis λ - మూల 34, 35
Screw motion - మర చలనము
Seasons - ఋతువులు
Seasonal component - ఋతుభాగము
Secant - ఛేదకము
Secular variation - కాలాంతర చలనము
Segment - ఖండము
Self consistant - ఆత్మావిరుద్ధము
Self conjugate - స్వసంయుగ్మ
Self fertilised - స్వపరాగసిక్త
Semi circle - అర్ధవృత్తము
Semilatus rectum - ఉత్థానార్ధము
Sequence - వరుస
Sequential sampling - క్రమాత్మక ప్రతిరూపకరణము
Series - పరంపర
Set - సమితి
Set theory - సమితి వాదము
Sextant - షష్టకము
Shells - గోళకములు
Shock waves - ఆఘాత తరంగములు
Shooting stars - శర నక్షత్రములు
Short axis - హ్రస్వాక్షము
Siderial clock - నాక్షత్ర గడియారము
Siderial day - నాక్షత్రదినము
Siderial parallax - నాక్షత్ర అతివర్తనము
Siderial period - నాక్షత్రభ్రమణకాలము
Siderial spectrum - నాక్షత్ర వర్ణమాల
Siderial time - నాక్షత్రకాలము
Similar triangles - సరూప త్రిభుజములు
Similarity - సారూప్యము
Simple continued fraction - సరళ శృంఖలితభిన్నము

Simple fraction - సరళ భిన్నము, సరళ భిన్నాంకము
Simply connected - సరళ సంబద్ధ
Simultaneous - సమకాలీన
Simultaneous equations - సమకాలిక సమీకరణములు
Sine - జీవ, జ్యా
Sine tables - జీవకోష్టకములు, జీవపట్టికలు
Single valued functions - ఏకమూల్య ఫలములు
Singular point - అసాధారణ బిందువు
Singular solution - అసాధారణ సాధనము
Sirius - సిరియస్, మృగవ్యాధుడు
Slope - నిమ్నము
Small circle - అల్పవృత్తము, లఘువృత్తము
Small samples - అల్ప ప్రతిరూపములు
Solar - సౌర
Solar day - సౌర దినము
Solar eclipse - సూర్య గ్రహణము
Solar parallax - సౌరాతివర్తనము
Solar prominences - సౌరజ్వాలలు
Solar radiation - సూర్యవికిరణము
Solar spectrum - సూర్యవర్ణమాల
Solar system - సూర్యకుటుంబము
Solar telescope - సౌర దూరదర్శని
Solar time - సౌరకాలము
Solid - ఘనరూపము
Solid sphere - ఘన గోళము
Solstice - అయనము
Solstitial point - అయన బిందువు
Solution - సాధనము
Sound - ధ్వని
Southern cross - విశ్వామిత్రుడు
South polar distance - దక్షిణ ధ్రువాంతరము
South pole - దక్షిణ ధ్రువము
Space - ఆకాశము
Space curve - ఘనవక్రము
Space satellites - కృత్రిమ ఉపగ్రహములు
Special theory of relativity - ప్రత్యేక సాపేక్షతావాదము
Spectral analysis - వర్ణమాలా విశ్లేషణ
Spectrograph - వర్ణమాలాచిత్రము
Spectro-heliograph - వర్ణమాలా హేళిలేఖని
Spectroscope - వర్ణమాలాదర్శని
Spectroscopic parallax - వర్ణమాలాలంబనము
Spectrum - వర్ణమాల
Speed - ద్రుతి
Sphere - గోళము
Sphere-geometry - గోళీయ జ్యామితి
Spherical - గోళీయ
Spherical co-ordinates - గోళీయ నిరూపకములు
Spherical curve - గోళీయవక్రము
Spherical harmonic functions - గోళీయ హారాత్మక ఫలములు
Spherical surface - గోళతలము
Spherical triangle - గోళీయ త్రిభుజము
Spherical trigonometry - గోళీయ త్రికోణమితి
Spheroid - గోళాభము
Spica - చిత్ర
Spinning top - బొంగరము
Spiral - సర్పిలము
Spiral line - సర్పిలరేఖ
Spiral nebula - సర్పిల నీహారిక
Spots - కళంకములు, మచ్చలు
Square - చతురస్రము, వర్గము
Square root - వర్గమూలము
Squaring of a circle - వృత్తచతురస్రీకరణము
Stable equilibrium - స్థిరసమతాస్థితి, స్థిరతోలనస్థితి
Standard deviation - క్రమవిచలనము
Standard meridian - ప్రమాణ మధ్యాహ్న రేఖ
Standard time - ప్రమాణకాలము
Star - నక్షత్రము, తార
Star clusters - తారాగుచ్ఛములు
Star polyhedra - నక్షత్ర బహుతలకములు
Statics - స్థితిశాస్త్రము
Stationary - స్థావర
Statistical mechanics - సాంఖ్యాక యాంత్రికశాస్త్రము
Statistical quality control - సాంఖ్యాక గుణనియంత్రణ
Statistics - సాంఖ్యాకశాస్త్రము
Stellar - నాక్షత్ర
Stellar astronomy - నాక్షత్ర ఖగోళశాస్త్రము
Stellar displacement - నక్షత్ర స్థానాంతరత
Stereographic projection - ఘనచిత్రీయ విక్షేపము
Stochastic process - యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ
Stochastic variable - స్టొకేస్టిక్ చలరాశి

Straight angle - ఋజుకోణము
Straight line - ఋజురేఖ
Stream function - ప్రవాహఫలము
Sub group - ఉపకూర్పు, ఉపపుంజము
Sub lunar point - చంద్రోపబిందువు
Sub normal - ఉప అభిలంబము
Sub set - ఉప సమితి
Sub tangent - ఉప స్పర్శరేఖ
Subtraction - వ్యవకలనము
Sum - సంకలనరాశి
Summability - సంకలనీయత
Summer solstice - కటకాయనము
Sun - సూర్యుడు
Sundial - సూర్యఘటి
Sun spots - సూర్యకళంకములు, రవికళంకములు
Super giants - అతి బృహత్తులు
Superior conjunction - ఉత్తమ యోగము
Supernova - సూపర్నోవా, అతినవతార
Supplementary angles - సంపూరక కోణములు
Symbol - సంకేతము
Symmedian point - సంమధ్యబిందువు
Symmetry - సౌష్ఠవము
Synodic period - గ్రహయుతి, శుక్రయుగము
Synodic time - పారిషద కాలము
Synthetic - సంయోజిత
Synthetic propellents - సంయోజితనోదక ద్రవ్యములు

T

Table - కోష్టకము, పట్టిక
Tabulation - కోష్టరచన
Tangent - స్పర్శ జీవ, స్పర్శ జ్యా, స్పర్శరేఖ
Tangent plane - స్పర్శతలము
Tangential - స్పర్శీయ
Tangential co-ordinates - స్పర్శీయ నిరూపకములు
Tangential equation - స్పర్శీయ సమీకరణము
Taylor series - టేలర్ పరంపర
Telescope - దూరదర్శని
Temperature - తాపక్రమము
Tensor - టెన్సార్
Tensor calculus - టెన్సార్ కలనము
Tensor multiplication - టెన్సార్ గుణకారము
Terminal ballistics - అంతిమ అస్త్రప్రయోగము
Terrestrial - సావన
Terrestrial day - సావన దినము
Terrestrial phenomena - భౌమ్యసంభవములు
Terrestrial time - సావనకాలము
Terrestrial year - సావన సంవత్సరము
Tetrahedron - చతుస్తలకము
Theodolite - థియోడలైట్
Thery of attributes - లక్షణవాదము
Thery of equations - సమీకరణవాదము
Theory of functions of complex variable - సంకీర్ణ చలరాశి ఫలవాదము
Theory of groups - కూర్పు (పుంజ) వాదము
Theory of lattice points - జాలబిందువాదము
Theory of numbers - సంఖ్యావాదము
Theory of summability - సంకలనీయతా సిద్ధాంతము
Theory of wave propagation - తరంగ ప్రాపణ సిద్ధాంతము
Theta functions - తీటా ఫలములు
Three dimensional - త్రిపరిమాణిక, త్రివిమా
Three dimensional curve - త్రిపరిమాణిక వక్రము
Three dimensional geometry - విమాత్రయ జ్యామితి
Three dimensional space - త్రిపరిమాణిక ఆకాశము
Third order contact - మూడవ తరగతి సంస్పర్శ
Tidal friction - స్రోతో ఘర్షణ
Tidal waves - స్రోతో తరంగములు
Tides - స్రోతస్సులు
Time - కాలము
Time reversal test - కాలపరివర్తన పరీక్ష
Time series - కాలశ్రేణి
Topological transformations - టోపాలజీ మార్పులు
Topology - టోపాలజీ, స్థలశాస్త్రము
Topology of point sets - బిందు సమూహముల టోపాలజీ
Torsion - విమోటనము
Torus - లంగరు వలయము
Total eclipse - పూర్ణ గ్రహణము
Tractrix - ట్రాక్ట్రిక్స్
Trajectory - విక్షేప పథము
Transfinite arithmatic - క్రాంతపరిమిత అంకగణితము
Transfinite numbers - క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలు
Transit instrument - క్రాంతి యంత్రము

Transit of venus - శుక్రప్రతరణము
Translation - స్థానాంతరత
Transparency - పారదర్శకత
Transverse - తిర్యక్
Transverse axis - తిర్యక్ అక్షము
Trapezium - ట్రెపీజియమ్
Trend - ఉన్ముఖత
Triangle - త్రిభుజము
Triangular inequalities - త్రిభుజ హెచ్చుతగ్గులు
Triangular numbers - త్రిభుజ సంఖ్యలు
Triangular prism - త్రిభుజ ప్రిజమ్
Trigonometry - త్రికోణమితి
Trigonometric functions - త్రికోణమితి ఫలములు
Trigonometric ratios - త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు
Trilinear - త్రిరేఖీయ
Trilinear co-ordinates - త్రిరేఖీయ నిరూపకములు
Triple stars - త్రిక తారలు
Tropical - సాయన
Tropical day - సాయన దినము
Tropical year - సాయన సంవత్సరము
True zenith distance - నిజ నతకోణము
Twilight - సంధ్య

U

Unified field theory - ఏకీకృత క్షేత్రవాదము
Uniform - ఏకరూప
Uniform angular velocity - ఏకరూపకోణీయ వేగము
Uniform convergence - ఏకరూప ఉపసరణత
Uniform functions - ఏకరూప ఫలములు
Uniform velocity - ఏకరూప వేగము
Unit - ఏకాంకము, యూనిట్, రూపము
Unit acceleration - యూనిట్ త్వరణము
Unit cell - యూనిట్ సెల్
Unit force - యూనిట్ బలము
Universal law of gravitation - విశ్వ గురుత్వ సిద్ధాంతము
Universe - విశ్వము
Unstable equilibrium - అస్థిర సమతాస్థితి
Upper transit - ఉత్తమ ప్రతరణము
Uranus - ఇంద్రుడు
Ursa major - సప్తర్షి
Ursa minor - అల్పసప్తర్షి

V

Variable - చలరాశి
Variable stars - చలతారలు
Variance - విచలనము
Vector - వెక్టర్, సదిశరాశి
Vector space - సదిశరాశి ఆకాశము
Vega - అభిజిత్తు
Velocity - వేగము
Velocity potential - వేగశక్మము
Venus - శుక్రుడు
Vernal equinox - వసంత విషువు, వసంత సంపాతము
Vertical - ఉదగ్ర
Vertical angle - శీర్ష కోణము
Vertical plane - ఉదగ్రతలము
Vertex - శిఖరము, శీర్షము
Vertex of an angle - కోణ శీర్షము
Vertex of a cone - శంకు శీర్షము
Vibration - కంపనము
Vibration figure - కంపన చిత్రము
Visual magnitude - దృశ్య పరిమాణము
Vital statistics - జీవసాంఖ్యకము
Volume - ఘనపరిమాణము

W

War head - ఆయుధ శీర్షము
Wave length - తరంగదైర్ఘ్యము
Wave theory of light - కాంతితరంగవాదము
Weighed multiples - భారాంకిత గుణకములు
Weighed ratio - భారవర్ధిత నిష్పత్తి
Weight - బరువు
Window readers - గవాక్ష వాచకములు
Winter solstice - మకరాయనము
With respect to x - x అపేక్షయా
Work - పని

Z

Zenith - మస్తకము
Zenith distance - నతాంశ, మస్తకాంశ
Zero - శూన్యము, శూన్యాంకము
Zeta functions - జీటా ఫలములు
Zodiac - రాశిచక్రము
Zodiacal belt - శింశుమార చక్రము
Zone - మండలము

ACKNOWLEDGMENTS

For kind permission to reproduce some of the illustrations published in this volume, we acknowledge our gratitude to :

Archaeological Survey of India.
Jai Singh - 273 ; Misrayantra and Jantarmantar - 557.

The British Council, Madras.
Eddington - 164 ; Nebula in Andromeda - 95.

E. P. Dutton and Company Inc. New York ' Chambers's Dictionary of Scientists '.
Gauss - 244.

Facit (The Rayala Corporation P. Ltd., Madras).
Table Calculator - 142.

Giants in Science.
Universe contemplated by Ptolemy 74 ; Universe contemplated by Copernicus - 75 ; Globe constructed to explain the motion of the earth - 76 ; Portrait of Tycho Brahe - 77.

Geometry and Imagination.
Star Polyhedra - 413.

The Golden Book of Astronomy.
The Horsehead Nebula - 122.

The London Planetarium.
Galileo - 79 ; Newton's Telescope - 83 ; The Coal sack Nebula - 121 ; Herschell - 645 ;

National Portrait Gallery, London.
Adams - 144.

P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holland ' Science Awakening '.
Archimedes - 151 ; Papyrus Sheet - 155 ; Hieroglyphic script of B. C. 2600 - 155 ; Egyptian Mathematics on leather scroll - 156.

M. Parameswara Iyer, Madras.
Circular Ornamental Patterns - 539.

Ramanujam Institute of Mathematics, Madras - 5.
Ramanujam - 471.

Scripta Mathematica.
Vibrating Figures - 540 and 541.

Sky & Telescope.
Radio Telescope in Harvard.

Prof. David Eugene Smith.
Napier - 357 ; Laplace - 489.

Time - Life International, ' The Universe '.
Galaxy - 237.

Vatican Museum, Rome, Italy.
Thales - 305.

In spite of our efforts we have not been able to trace the source or know the copyright holders of some of the illustrations which we have published in this volume. If we have unwittingly infringed copyright in any illustration reproduced, we will gladly pay an appropriate fee on being satisfied as to the owner's title.

PUBLISHERS

[N. B.—*Numbers against the publishers' names refer to pages in this Volume.*]

Blank Page

BIBLIOGRAPHY

MATHEMATICS & ASTRONOMY

Analysis

Bromwich—*Infinite Series*

Hardy—*A Course of Pure Mathematics*

Whittaker & Watson—*Modern Analysis*

Applied Astronomy

Aller—*Astrophysics*

Hosmer & Robbins—*Practical Astronomy*

Hynek—*Astrophysics*

Moulton—*Celestial Mechanics*

Rudolf Kurth—*The Mechanics of Stellar systems*

Ryabov—*Celestial Mechanics*

Arithmetic & Algebra

Albert—*College Algebra* ; *Modern Higher Algebra*

Beaumont & Ball—*Modern Algebra* ; *Matrix Theory*

Bhaskaracharya—*Leelavati*

Bocher—*Introduction to Higher Algebra*

Davis—*Lore of Large Numbers*

Halmos—*Naive Set Theory*

Ivan Niven—*Numbers Rational and Irrational*

Olds—*Continued Fractions*

Ore—*Graphs and Their Uses*

Owen & Pavate—*Indian Arithmetics*

Stoll—*Linear Algebra and Matrix Theory*

Zippin—*Uses of Infinity*

Calculus & Differential Equations

Bliss—*Calculus of Variations*

Franklin—*Differential and Integral Calculus*

Granville, Smith & Longley—*Elements of Differential and Integral Calculus*

Love – *Differential and Integral Calculus*

Milne & Thompson—*The Calculus of Finite Differences*

Sawyer—*What is Calculus About*

Taylor—*Advanced Calculus*

General Astronomy

Hutchinson —*Splendour of Heavens*

John Pfeiffer—*The Changing Universe*

Menzel—*Our Sun*

Smart—*Foundations of Astronomy*

General Mathematics

Cooley —*Introduction to Mathematics*

Courant & Robins—*What is Mathematics*

Gardner—*Mathematical Puzzles and Diversions*

Helton—*Introducing Mathematics*

Hilbert Cohn Vossen—*Mathematics and Imagination*

Hogben—*Mathematics for the Million*

Kraithchik—*Mathematical Recreations*

Polya—*How to Solve It*

Steinhaus—*Mathematical Snapshots*

Geometry

Albert—*Solid Analytic Geometry*

Coolidge—*Geometry in the Complex Domain*

Eisenhart—*Riemannian Geometry*

Fined & Thompson—*Co-ordinate Geometry*

Heath—*Euclid's Elements* (*3 volumes*)

Osgood & Graustein—*Plane and Solid Analytic Geometry*

Robert & Bell—*Co-ordinate Solid Geometry*

Salmon—*A Treatise on Conic Sections*

Weatherburn—*Differential Geometry*

Woods—*Non-Euclidean Geometry*

Young—*The Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*

History of Astronomy

Arther Berry—*A Short History of Astronomy*

Aryabhatudu—*Aryabhatteyamu*

Bhaskaracharya—*Siddhanta Siromani*

Brahmagupta—*Khanda Khadyaka, Brahmashphutasiddhanta & Dhyanagrahopadesadhyaya*

Clerk—*A Popular History of Astronomy*

Grant—*History of Physical Astronomy*

Heath—*Greek Astronomy*

Kaye—*Hindu Astronomy, Astronomical Observatories of Jai Singh*

Macpherson—*Makers of Astronomy*

Narayana Pandita—*Ganita Kaumudi*

Sripati—*Siddhanta Sekhara*

Thibaut—*Indian Astronomy*

Varahamihira—*Pancha Siddahntika*

History of Mathematics

Ball—*History of Mathematics*

Bell—*The Development of Mathematics & Men of Mathematic*

Cajori—*A History of Mathematics*

Coolidge—*A History of Geometrical Methods*

Datta & Singh—*History of Hindu Mathematic*

Dickson—*History of Theory of Numbers*

Hardy—*Ramanujam*

Sanford—*A Short History of Mathematics*

Smith—*History of Mathematics*

Mechanics

Barton—*Analytical Mechanics*

Clerk Maxwell—*Matter and Motion*

Durand—*Fluid Mechanics*

Lamb—*Statics ; Dynamics ; Hydrodynamics ; & Higher Mechanics*

Sommerfeld—*Mechanics of Deformable Bodies*

Radio Astronomy

Davies & Palmer—*Radio Studies of the Universe*

Pawsey & Bracewell—*Radio Astronomy*

Van De Hulst—*Radio Astronomy*

Reference Books of Cyclopaedia Nature

Encyclopaedia Britanica—

James and James—*Mathematics Dictionary*

McGraw Hill—*Encyclopaedia of Science & Technology*

The Harper—*Encyclopaedia of Science*

Wissenschafasen—*Encyclopaedia der Mathematischen*

Statistics

Fisher—*Statistical Methods for Research Workers*

Hirsch—*Introduction to Modern Statistics*

Snedecor—*Statistical Methods*

Wald—*Sequential Analysis*

Yule & Kendall—*Introduction to Theory of Statistics*

Theoretical Astronomy

Baker—*Astronomy*

Fath—*Elements of Astronomy*

Herschel—*Astronomy*

Otto Struve—*Elements of Astronomy*

Vector & Tensor Analysis

Phillips—*Vector Analysis*

Schild & Synge—*Tensor Calculus*

Weatherburn—*Vector Analysis*

సంకేతములు

అంకగణితము — బీజగణితము

$+$	Plus ; Positive	సంకలన గుర్తు ; ధనాత్మకము
$-$	Minus ; Negative	వ్యవకలన గుర్తు ; ఋణాత్మకము
$\pm$	Plus or Minus ; Positive or Negative	సంకలనము లేదా వ్యవకలనము ధనాత్మకము లేదా ఋణాత్మకము
$\times$	Multiply by	గుణకార గుర్తు
$\div$	Divide by	భాగహార గుర్తు
: is to : : as	Sign of proportion	అనుపాత సంజ్ఞ
$\sqrt{}$	Square root	వర్గమూలము
$\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, ...	Cube root, Fourth root, ... etc.	ఘనమూలము, చతుర్థమూలము, ... వగైరా
$\underline{n}$, $n!$	Factorial *n*	ఫాక్టోరియల్ $n = 1 \cdot 2 \cdot 3. \ldots \ldots n$
∞	Infinity	అనంతము
%	Percent	శాతము (నూటికి)
$=$	is equl to	సమానముగ ఉన్నది
$\neq$	is not equl to	సమానము కాదు
$\doteq$ or $\sim$ or $\approx$	is approximately equal to	దాదాపు సమానము
$>$	is greater than	కంటె పెద్దది
$<$	is less than	కంటె చిన్నది
$\geq$	is equal to or greater than	సమానము లేదా పెద్దది
$\leq$	is equal to or less than	సమానము లేదా చిన్నది
$\not>$	is not greater than	కంటె పెద్దది కాదు
$\not<$	is not less than	కంటె చిన్నది కాదు
$a \mid b$	*a* divides *b*	*a* చేత *b* నిశ్శేషముగ భాగించబడును
i	Square root of -1	-1 యొక్క వర్గమూలము
i, j, k	Unit vectors along the rectangular co-ordinate axes	నిరూపక ఆయతాక్షముల వెంబడి యూనిట్ సదిశ రాశులు
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Scalar product, or dot product, of the vectors ***a*** and ***b***	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ సదిశరాశుల చుక్క గుణకారము లేదా స్కేలార్ గుణకారము
$[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$	Scalar triple product $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$	***a, b, c*** సదిశరాశుల స్కేలార్ గుణకార లబ్ధము
${}_nP_r$	Number of permutations of *n* things taken *r* at a time $= n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$	*n* వస్తువులందు *r* వస్తువులను తీసికొని వాటిని ఏర్పరచు విధములు
${}_nC_r$	Number of combinations of *n* things taken *r* at a time	*n* వస్తువులందు *r* వస్తువులను తీసికొను విధములు
$\lvert x \rvert$	Modulus of *x*	*x* యొక్క మాపాంకము

త్రికోణమితి — అతిపరావలయ ఫలములు

sin	sine	జీవ
cos	cosine	కోటిజీవ
tan	tangent	స్పర్శజీవ
cot	cotangent	కోటి స్పర్శజీవ
sec	secant	ఛేదక
cosec	cosecant	కోటి ఛేదక
$\sin^{-1} x$ or ($\arcsin x$)	The principle value of the angle whose sine is x	ఏ కోణము θ కు జీవ $\theta = x$ అగునో అటువంటి కోణము లలో ప్రధాన కోణము
sinh	Hyperbolic sine	అతిపరావలయ జీవ
cosh	Hyperbolic cosine	అతిపరావలయ కోటిజీవ

జ్యామితి — (ప్రాథమిక, నిరూపక)

$\angle$	Angle	కోణము
$\perp$	Mutually perpendicular	పరస్పర లంబములు
$\angle\!\!\!/\!\!7$	Parallelogram	సమాంతర (సామ్య) చతుర్భుజము
$\odot$	Circle	వృత్తము
$^\circ$	Degree	డిగ్రీ
$'$	Feet ; Minutes of angle	అడుగులు, మినిట్‌లు (కోణము యొక్క)
$''$	Inches ; Seconds	అంగుళములు, సెకండ్‌లు (కోణము యొక్క)
$\parallel$	is parallel to	సమాంతరము (సామ్యము)
$\therefore$	Therefore	కాబట్టి
$\equiv$	Congruent	సర్వసమానము
$\triangle$	Triangle	త్రిభుజము
π	The ratio of the circumference of a circle to its diameter; the Greek letter $\pi \simeq 3{\cdot}1415926536 \ldots \ldots$	వృత్తపరిధికి, దాని వ్యాసమునకు గల నిష్పత్తిని సూచించు గ్రీక్ అక్షరము 'పై'. దీని విలువ సుమారు 3·1415926536...
(x, y)	Co-ordinates of a point in a plane	తలమునందలి బిందువు యొక్క నిరూపకములు
(x, y, z)	Co-ordinates of a point in space	అంతరాళములో బిందువు యొక్క నిరూపకములు
(r, θ)	Polar co-ordinates	ధ్రువీయ నిరూపకములు
(r, θ, ϕ)	Spherical co-ordinates	గోళీయ నిరూపకములు
(ρ, ϕ, z)	Cylindrical co-ordinates	స్తూపీయ నిరూపకములు

కలన శాస్త్రము — విశ్లేషణ శాస్త్రము

$\longrightarrow$	tends to	సమీపించుచున్నది
$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d\,f(x)}{dx}$, y', $f'(x)$, $D_x\,y$	Derivative of $y = f(x)$ with respect to x	x అపేక్షయా $y = f(x)$ యొక్క వ్యుత్పన్నము
$\frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $D_x{}^n\,y$	n th derivative of $y = f(x)$ with respect to x	x అపేక్షయా $y = f(x)$ యొక్క n వ వ్యుత్పన్నము
$\frac{\partial u}{\partial x}$, u_x, $f_x(x, y)$, $D_x\,u$	The partial derivative of $u = f(x, y)$ with respect to x	x అపేక్షయా $u = f(x, y)$ యొక్క ఆంశిక వ్యుత్పన్నము
ε	A small number	ఒక చిన్న ధనాత్మక సంఖ్య
Δx, Δy	An increment of x, y	x, y ల లోని స్వల్పవృద్ధి
$\sum_{1}^{n} u_r$ or $\sum_{r=1}^{n} u_r$	$u_1 + u_2 + \cdots + u_n$	$u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
$\prod_{1}^{n} u_r$ or $\prod_{r=1}^{n} u_r$	$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots \cdots u_n$	$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots \cdots u_n$
$\int f(x)\,dx$	Integral of $f(x)$ with respect to x	x అపేక్షయా $f(x)$ యొక్క చయనము
$\int_a^b f(x)\,dx$	Definite integral of $f(x)$, between the limits a and b	a, b అవధులలో $f(x)$ యొక్క నిశ్చిత చయనము

గణిత తర్కము — సమితివాదము

$x \in M$	The element x belongs to the set M	M అను సమితిలో x ఉన్నది
$M \subset N$	M is a subset of N	N సమితిలో M ఒక ఉపసమితి
$M \supset N$	M contains N as a subset	M సమితిలో N ఒక ఉపసమితిగా ఉన్నది
$M \cap N$	Elements comman to M and N	M, N రెండు సమితులకును ఉమ్మడియైన వస్తువులు
$M \cup N$	Elements belonging to either M or N or both	M, N సమితులలో ఏదో ఒక దానికి లేదా రెండింటికి చేరిన వస్తువులు
$\aleph$	Aleph, the first letter of the Hebrew alphabet	అలీఫ్ (హీబ్రూ వర్ణమాలలో మొదటిది)
$\aleph_0$	Aleph zero; The transfinite cardinal number of the set of positive integers	అలీఫ్ శూన్యము; క్రాంతపరిమిత సంఖ్యలలో మొదటిది. ఇది పూర్ణాంకముల సంఖ్య

సాంఖ్యక శాస్త్రము

χ^2	Chi - square	కై వర్గము
r	Correlation Co-efficient	సమవాయత గుణకము
$r_{1.2.3 \ldots n}$	Multiple correlation co-efficient between one variable and the others	బహుచలరాశులలో ఒక చలరాశియొక్క సమవాయత గుణకము
σ_x	Standard deviation of the population of x	x లోకము యొక్క ప్రమాణ విచలనము
$\overline{x}$	average value of the variable x	x చలరాశి యొక్క సగటు విలువ
μ	Arithmetic mean of a population	ఒక లోకము యొక్క అంకమాధ్యమిక విలువ
μ_2	Second moment about the mean	మాధ్యమిక విలువచుట్టు రెండవ బిభ్రమిష
$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^2}$	Co-efficient of skewness	విరూపతాగుణకము
$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$	Co-efficient of kurtosis	కుర్టాసిస్ గుణకము

గ్రీక్ వర్ణమాల

A	α α	*alpha*	ఆల్ఫా	N	ν	*nu*	న్యూ, (నూ)
B	β	*beta*	బీటా	Ξ	ξ	*xi*	క్సై
Γ	γ	*gamma*	గామా	O	o	*omicron*	ఓమిక్రాన్
Δ	δ	*delta*	డెల్టా	Π	π	*pi*	పై
E	ϵ	*epsilon*	ఎప్సిలాన్	P	ρ	*rho*	రో
Z	ζ	*zeta*	జీటా	Σ	σ s	*sigma*	సిగ్మా
H	η	*eta*	ఈటా	T	τ	*tau*	టౌ
Θ	θ ϑ	*theta*	తీటా	Υ	υ	*upsilon*	అప్సిలాన్
I	ι	*iota*	అయోటా	Φ	ϕ	*phi*	ఫై
K	κ	*kappa*	కప్పా	X	χ	*chi*	కై
Λ	λ	*lamda*	లామ్డా	Ψ	ψ	*psi*	సై
M	μ	*mu*	మ్యూ, (మూ)	Ω	ω	*omega*	ఒమేగా

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

సామాన్య జీవలు (NATURAL SINES)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10°	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20°	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30°	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40°	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	8	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
45°	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	·7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50°	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60°	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70°	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80°	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	0	0	0	0	0

సామాన్య కోటిజీవలు (NATURAL COSINES)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
0°	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	·9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	·9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	·9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	·9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	·9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	·9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	·9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	·9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	·9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10°	·9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	·9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	·9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	·9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	·9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	·9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	·9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	·9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	·9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	·9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20°	·9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	·9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	·9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	·9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	·9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	·9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	·8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	·8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	·8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	·8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30°	·8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	·8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	·8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	·8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	·8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	·8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	·8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	·7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	·7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	·7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40°	·7660	7049	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	·7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	·7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	·7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	·7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
45°	·7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	·6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	·6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	·6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	·6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50°	·6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	·6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	·6157	6143	6129	6115	3101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	·6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	·5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	·5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	·5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	·5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	·5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	·5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60°	5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	·4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	·4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	·4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	·4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	·4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	·4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	·3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	·3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	·3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70°	·3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	·3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	·3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	·2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	·2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	·2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	·2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	·2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	·2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	·1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80°	·1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	·1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	·1892	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	·1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	·1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	·0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	·0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	·0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	·0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	·0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′ 2′ 3′			4′	5′
											1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10°	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20°	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30°	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40°	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

	0′	6′	12′	18	24′	30	36′	42′	48′	54′	Mean Differences 1′ 2′ 3′			4′	5′
											1′	2′	3′	4′	5′
45°	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50°	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60°	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70°	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	0061	0237	0415	0595	29	58	87	116	145
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	0970					
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80°	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	0264	*Mean* differences no longer sufficiently accurate.				
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	0285					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572					
84	9·514	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0					

వర్గములు, ఘనములు, వర్గమూలములు, ఘనమూలములు, వ్యుత్క్రమములు, వర్గమూలముల వ్యుత్క్రమములు

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{10n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{10n}}$
1	1	1	1·0000	1·0000	1·00000	3·1623	1·00000	0·31623
2	4	8	1·4142	1·2599	0·50000	4·4721	0·70711	0·22361
3	9	27	1·7321	1·4422	0·33333	5·4772	0·57735	0·18257
4	16	64	2·0000	1·5874	0·25000	6·3245	0·50000	0·15811
5	25	125	2·2361	1·7100	0·20000	7·0711	0·44721	0·14142
6	36	216	2·4495	1·8171	0·16667	7·7460	0·40825	0·12910
7	49	343	2·6458	1·9129	0·14286	8·3666	0·37796	0·11952
8	64	512	2·8284	2·0000	0·12500	8·9443	0·35355	0·11180
9	81	729	3·0000	2·0801	0·11111	9·4868	0·33333	0·10541
10	100	1000	3·1623	2·1544	0·10000	10·0000	0·31623	0·10000
11	121	1331	3·3166	2·2240	0·09091	10·4881	0·30151	0·09535
12	144	1728	3·4641	2·2894	0·08333	10·9545	0·28868	0·09129
13	169	2197	3·6056	2·3513	0·07692	11·4018	0·27735	0·08771
14	196	2744	3·7417	2·4101	0·07143	11·8322	0·26726	0·08452
15	225	3375	3·8730	2·4662	0·06667	12·2474	0·25820	0·08165
16	256	4096	4·0000	2·5198	0·06250	12·6491	0·25000	0·07906
17	289	4913	4·1231	2·5713	0·05882	13·0384	0·24253	0·07670
18	324	5832	4·2426	2·6207	0·05556	13·4164	0·23570	0·07454
19	361	6859	4·3589	2·6684	0·05263	13·7840	0·22942	0·07255
20	400	8000	4·4721	2·7144	0·05000	14·1421	0·22361	0·07071
21	441	9261	4·5826	2·7589	0·04762	14·4914	0·21822	0·06901
22	484	10648	4·6904	2·8020	0·04545	14·8324	0·21320	0·06742
23	529	12167	4·7958	2·8439	0·04348	15·1658	0·20851	0·06594
24	576	13824	4·8990	2·8845	0·04167	15·4919	0·20412	0·06455
25	625	15625	5·0000	2·9240	0·04000	15·8114	0·20000	0·06325
26	676	17576	5·0990	2·9625	0·03846	16·1245	0·19612	0·06202
27	729	19683	5·1962	3·0000	0·03704	16·4317	0·19245	0·06086
28	784	21952	5·2915	3·0366	0·03571	16·7332	0·18898	0·05976
29	841	24389	5·3852	3·0723	0·03448	17·0294	0·18570	0·05872
30	900	27000	5·4772	3·1072	0·03333	17·3205	0·18257	0·05774
31	961	29791	5·5678	3·1414	0·03226	17·6068	0·17961	0·05680
32	1024	32768	5·6569	3·1748	0·03125	17·8885	0·17678	0·05590
33	1089	35937	5·7446	3·2075	0·03030	18·1659	0·17408	0·05505
34	1156	39304	5·8310	3·2396	0·02941	18·4391	0·17150	0·05423
35	1225	42875	5·9161	3·2711	0·02857	18·7083	0·16903	0·05345
36	1296	46656	6·0000	3·3019	0·02778	18·9737	0·16667	0·05270
37	1369	50653	6·0828	3·3322	0·02703	19·2354	0·16440	0·05199
38	1444	54872	6·1644	3·3620	0·02632	19·4936	0·16222	0·05130
39	1521	59319	6·2450	3·3912	0·02564	19·7484	0·16013	0·05064
40	1600	64000	6·3245	3·4200	0·02500	20·0000	0·15811	0·05000
41	1681	68921	6·4031	3·4482	0·02439	20·2485	0·15617	0·04939
42	1764	74088	6·4807	3·4760	0·02381	20·4939	0·15430	0·04880
43	1849	79507	6·5574	3·5034	0·02326	20·7364	0·15250	0·04822
44	1936	85184	6·6332	3·5303	0·02273	20·9762	0·15076	0·04767
45	2025	91125	6·7082	3·5569	0·02222	21·2132	0·14907	0·04714
46	2116	97336	6·7823	3·5830	0·02174	21·4476	0·14744	0·04663
47	2209	103823	6·8557	3·6088	0·02128	21·6795	0·14587	0·04613
48	2304	110592	6·9282	3·6342	0·02083	21·9089	0·14434	0·04564
49	2401	117649	7·0000	3·6593	0·02041	22·1359	0·14286	0·04518
50	2500	125000	7·0711	3·6840	0·02000	22·3607	0·14142	0·04472

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{10n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{10n}}$
51	2601	132651	7·1414	3·7084	0·01961	22·5832	0·14003	0·04428
52	2704	140608	7·2111	3·7325	0·01923	22·8035	0·13868	0·04385
53	2809	148877	7·2802	3·7563	0·01887	23·0217	0·13736	0·04344
54	2916	157464	7·3485	3·7798	0·01852	23·2379	0·13608	0·04303
55	3025	166375	7·4162	3·8030	0·01818	23·4521	0·13484	0·04264
56	3136	175616	7·4833	3·8259	0·01786	23·6643	0·13363	0·04226
57	3249	185193	7·5498	3·8485	0·01754	23·8747	0·13245	0·04189
58	3364	195112	7·6158	3·8709	0·01724	24·0832	0·13131	0·04152
59	3481	205379	7·6811	3·8930	0·01695	24·2899	0·13019	0·04117
60	3600	216000	7·7460	3·9149	0·01667	24·4949	0·12910	0·04082
61	3721	226981	7·8102	3·9365	0·01639	24·6982	0·12804	0·04049
62	3844	238328	7·8740	3·9579	0·01613	24·8998	0·12700	0·04016
63	3969	250047	7·9373	3·9791	0·01587	25·0998	0·12599	0·03984
64	4096	262144	8·0000	4·0000	0·01563	25·2982	0·12500	0·03953
65	4225	274625	8·0623	4·0207	0·01538	25·4951	0·12403	0·03922
66	4356	287496	8·1240	4·0412	0·01515	25·6905	0·12309	0·03892
67	4489	300763	8·1854	4·0615	0·01493	25·8844	0·12217	0·03863
68	4624	314432	8·2462	4·0817	0·01471	26·0768	0·12127	0·03835
69	4761	328509	8·3066	4·1016	0·01449	26·2679	0·12039	0·03807
70	4900	343000	8·3666	4·1213	0·01429	26·4575	0·11952	0·03780
71	5041	357911	8·4261	4·1408	0·01408	26·6458	0·11868	0·03753
72	5184	373248	8·4853	4·1602	0·01389	26·8328	0·11785	0·03727
73	5329	389017	8·5440	4·1793	0·01370	27·0185	0·11704	0·03701
74	5476	405224	8·6023	4·1983	0·01351	27·2029	0·11625	0·03676
75	5625	421875	8·6603	4·2172	0·01333	27·3861	0·11547	0·03651
76	5776	438976	8·7178	4·2358	0·01316	27·5681	0·11471	0·03627
77	5929	456533	8·7750	4·2543	0·01299	27·7489	0·11396	0·03604
78	6084	474552	8·8318	4·2727	0·01282	27·9285	0·11323	0·03581
79	6241	493039	8·8882	4·2908	0·01266	28·1069	0·11251	0·03558
80	6400	512000	8·9443	4·3089	0·01250	28·2843	0·11180	0·03536
81	6561	531441	9·0000	4·3267	0·01235	28·4604	0·11111	0·03514
82	6724	551368	9·0554	4·3445	0·01220	28·6356	0·11043	0·03492
83	6889	571787	9·1104	4·3621	0·01205	28·8097	0·10976	0·03471
84	7056	592704	9·1652	4·3795	0·01190	28·9828	0·10911	0·03450
85	7225	614125	9·2195	4·3968	0·01176	29·1548	0·10847	0·03430
86	7396	636056	9·2736	4·4140	0·01163	29·3258	0·10783	0·03410
87	7569	658503	9·3274	4·4310	0·01149	29·4958	0·10721	0·03390
88	7744	681472	9·3808	4·4480	0·01136	29·6648	0·10660	0·03371
89	7921	704969	9·4340	4·4647	0·01124	29·8329	0·10600	0·03352
90	8100	729000	9·4868	4·4814	0·01111	30·0000	0·10541	0·03333
91	8281	753571	9·5394	4·4979	0·01099	30·1662	0·10483	0·03315
92	8464	778688	9·5917	4·5144	0·01087	30·3315	0·10426	0·03297
93	8649	804357	9·6437	4·5307	0·01075	30·4959	0·10370	0·03279
94	8836	830584	9·6954	4·5468	0·01064	30·6594	0·10314	0·03262
95	9025	857375	9·7468	4·5629	0·01053	30·8221	0·10260	0·03244
96	9216	884736	9·7980	4·5789	0·01042	30·9839	0·10206	0·03227
97	9409	912673	9·8489	4·5947	0·01031	31·1448	0·10153	0·03211
98	9604	941192	9·8995	4·6104	0·01020	31·3050	0·10102	0·03194
99	9801	970299	9·9499	4·6261	0·01010	31·4643	0·10050	0·03178
100	10000	1000000	10·0000	4·6416	0·01000	31·6228	0·10000	0·03162

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	0·0000	0100	0198	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862	10	19	29	38	48	57	67	76	86
1·1	0·0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740	9	17	26	35	44	52	61	70	78
1·2	0·1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546	8	16	24	32	40	48	56	64	72
1·3	0·2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293	7	15	22	30	37	44	52	59	67
1·4	0·3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988	7	14	21	28	35	41	48	55	62
1·5	0·4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637	6	13	19	26	32	39	45	52	58
1·6	0·4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247	6	12	18	24	30	36	42	48	55
1·7	0·5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822	6	11	17	23	29	34	40	46	51
1·8	0·5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366	5	11	16	22	27	32	38	43	49
1·9	0·6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881	5	10	15	20	26	31	36	41	46
2·0	0·6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2·1	0·7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839	5	9	14	19	23	28	33	37	42
2·2	0·7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2·3	0·8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713	4	9	13	17	21	26	30	34	38
2·4	0·8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123	4	8	12	16	20	24	29	33	37
2·5	0·9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517	4	8	12	16	20	24	27	31	35
2·6	0·9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895	4	8	11	15	19	23	26	30	34
2·7	0·9933	9969	0006	$\bar{0}$043	$\bar{0}$080	$\bar{0}$116	$\bar{0}$152	$\bar{0}$188	$\bar{0}$225	$\bar{0}$260	4	7	11	15	18	22	25	29	33
2·8	1·0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613	4	7	11	14	18	21	25	28	32
2·9	1·0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953	3	7	10	14	17	20	24	27	31
3·0	1·0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282	3	7	10	13	16	20	23	26	30
3·1	1·1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600	3	6	10	13	16	19	22	25	29
3·2	1·1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909	3	6	9	12	15	18	22	25	28
3·3	1·1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3·4	1·2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3·5	1·2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782	3	6	8	11	14	17	20	23	25
3·6	1·2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056	3	5	8	11	14	16	19	22	25
3·7	1·3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324	3	5	8	11	13	16	19	21	24
3·8	1·3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584	3	5	8	10	13	16	18	21	23
3·9	1·3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838	3	5	8	10	13	15	18	20	23
4·0	1·3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085	2	5	7	10	12	15	17	20	22
4·1	1·4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327	2	5	7	10	12	14	17	19	22
4·2	1·4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563	2	5	7	9	12	14	16	19	21
4·3	1·4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793	2	5	7	9	12	14	16	18	21
4·4	1·4816	4839	4861	4884	4907	4929	4953	4974	4996	5019	2	5	7	9	11	14	16	18	20
4·5	1·5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239	2	4	7	9	11	13	15	18	20
4·6	1·5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454	2	4	6	9	11	13	15	17	19
4·7	1·5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665	2	4	6	8	11	13	15	17	19
4·8	1·5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872	2	4	6	8	10	12	14	16	19
4·9	1·5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5·0	1·6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5·1	1·6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5·2	1·6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658	2	4	6	8	10	11	13	15	17
5·3	1·6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6845	2	4	6	7	9	11	13	15	17
5·4	1·6864	6882	6901	6919	6938	6956	6974	6993	7011	7029	2	4	5	7	9	11	13	15	17

10^n యొక్క సామాన్య లాగరిదమ్‌లు

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_e 10^n$	2·3026	4·6052	6·9078	9·2103	11·5129	13·8155	16·1181	18·4207	20·7233

E.g. $\log_e 584·7 = \log_e(5·847 \times 10^2) = 1·7659 + 4·6052 = 6·3711.$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·5	1·7047	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7210	2	4	5	7	9	11	13	14	16
5·6	1·7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387	2	4	5	7	9	11	12	14	16
5·7	1·7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561	2	3	5	7	9	10	12	14	16
5·8	1·7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733	2	3	5	7	9	10	12	14	15
5·9	1·7750	7766	7783	7800	7817	7834	7851	7867	7884	7901	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6·0	1·7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6·1	1·8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229	2	3	5	6	8	10	11	13	15
6·2	1·8245	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390	2	3	5	6	8	10	11	13	14
6·3	1·8405	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547	2	3	5	6	8	9	11	13	14
6·4	1·8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8703	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·5	1·8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·6	1·8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6·7	1·9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155	1	3	4	6	7	9	10	12	13
6·8	1·9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301	1	3	4	6	7	9	10	12	13
6·9	1·9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7·0	1·9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7·1	1·9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7·2	1·9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865	1	3	4	6	7	8	10	11	12
7·3	1·9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	$\bar{0}$001	1	3	4	5	7	8	10	11	12
7·4	2·0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7·5	2·0149	0162	0176	0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7·6	2·0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399	1	3	4	5	7	8	9	10	12
7·7	2·0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528	1	3	4	5	6	8	9	10	12
7·8	2·0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0631	0643	0656	1	3	4	5	6	8	9	10	11
7·9	2·0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	1	3	4	5	6	8	9	10	11
8·0	2·0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906	1	3	4	5	6	7	9	10	11
8·1	2·0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8·2	2·1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8·3	2·1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270	1	2	4	5	6	7	8	10	11
8·4	2·1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389	1	2	4	5	6	7	8	10	11
8·5	2·1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506	1	2	4	5	6	7	8	9	11
8·6	2·1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8·7	2·1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8·8	2·1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8·9	2·1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9·0	2·1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9·1	2·2083	2094	2105	2116	2127	2138	2148	2159	2170	2181	1	2	3	4	5	7	8	9	10
9·2	2·2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289	1	2	3	4	5	6	8	9	10
9·3	2·2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2386	2396	1	2	3	4	5	6	7	9	10
9·4	2·2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502	1	2	3	4	5	6	7	8	10
9·5	2·2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·6	2·2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·7	2·2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·8	2·2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9·9	2·2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016	1	2	3	4	5	6	7	8	9

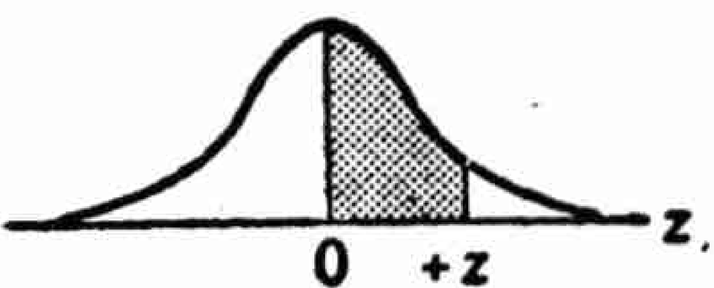
10^{-n} యొక్క సామాన్య లాగరిదమ్‌లు

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_e 10^{-n}$	$\bar{3}$·6974	$\bar{5}$·3948	$\bar{7}$·0922	$\overline{10}$·7897	$\overline{12}$·4871	$\overline{14}$·1845	$\overline{17}$·8819	$\overline{19}$·5793	$\overline{21}$·2767

E.g. $\log_e 0·005847 = \log_e(5·847 \times 10^{-3}) = 1·7659 + \bar{7}·0922 = \bar{6}·8581$

సరళ వక్ర వైశాల్యములు

ప్రతి సంఖ్య పూర్ణసరళ వక్రము క్రింద $z=0$ కు, z యొక్క ఒక $+$ విలువకు మధ్య వైశాల్య భాగమును సూచించును. ఉదా : $z=0$ కు $z=+1{\cdot}64$ కు మధ్య వైశాల్యము 0·4495. సరళ వక్రము సౌష్ఠవమైనది. $\therefore$ $z=0$ కు, $z=-1{\cdot}64$ కు మధ్య వైశాల్యము కూడ 0·4495 ; $-1{\cdot}64$ కు, $+1{\cdot}64$ కు మధ్య వైశాల్యము 0·8990 ; $\pm 1{\cdot}64$ కు బాహ్యావక్రము యొక్క పుచ్ఛములందలి వైశాల్యము 0·1010. ఈ పట్టిక పటములోని నల్లటి భాగ వైశాల్యమును చూపును.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2589	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2281	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4919	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	[illegible]	.4987	.4988	.4988	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

కై వర్గపు సంకట విలువలు

ఈ పట్టికలోని ప్రతి సంఖ్యయును, వక్రము యొక్క పుచ్ఛద్వయములు x కంటె ఎక్కువగా నుండునట్టియు, ఒక దత్తాంశ స్వేచ్ఛతగల x^2 యొక్క విలువలను గుర్తించును. n యొక్క అధిక విలువలకు, $\sqrt{2x^2}-\sqrt{2n-1}$ సమానమును ప్రమాణ విచలనము ఒకటిగా నుండు, సరళ విచలనముగా వాడవచ్చును. సరళ వక్రము యొక్క పుచ్ఛ మొకటి x^2 యొక్క సంభావ్యతను గుర్తించునని జ్ఞప్తియందు ఉంచుకొనవలెను.

Degrees of Freedom	α of 0.10	α of 0.05	α of 0.025	α of 0.01	α of 0.005
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64